

**Manuel de Référence****Fascicule R3.07 : Eléments mécaniques à surface moyenne****Document R3.07.02**

# **Modélisation numérique des structures minces : coques thermoélasto-plastiques axisymétriques et 1D**

**Résumé :**

On présente une formulation numérique pour la modélisation des structures à surface moyenne de géométrie particulière :

- coques à symétrie de révolution autour de l'axe  $Oy$ ,
- coques à section quelconque invariantes le long de l'axe  $Oz$ .

On décrit complètement le cas thermoélasto-plastique isotrope, dans le cadre des théories de LOVE-KIRCHHOFF et de HENCKY-MINDLIN-REISSNER, ainsi que les divers chargements étudiés, pour l'élément fini isoparamétrique choisi.

Les exemples de validation proposés montrent les qualités de l'élément fini.

---

## Table des matières

---

1 Introduction .....	3
2 Problème continu .....	3
2.1 Description de la géométrie, de la cinématique .....	4
2.2 Equilibre thermoélasto-plastique .....	8
3 Formulation de l'élément fini. Discrétisation .....	13
3.1 Description de l'élément fini choisi .....	13
3.1.1 Motivations .....	13
3.1.2 Présentation générale de l'élément .....	14
3.1.3 Transformations élément fini / élément fini de référence .....	14
3.1.4 Intégration numérique surfacique .....	15
3.1.5 Intégration numérique dans l'épaisseur .....	16
3.2 Formulation des termes élémentaires .....	17
3.2.1 Masse, centre de gravité, matrice d'inertie .....	17
3.2.2 Matrice de masse .....	18
3.2.3 Second membre de force centrifuge .....	19
3.2.4 Second membre de pesanteur .....	19
3.2.5 Second membre de charges réparties .....	19
3.3 Calcul des déformations et des contraintes .....	20
4 Validation - Cas test .....	21
4.1 Cylindre sous pression interne .....	21
4.2 Plaque circulaire encastrée sous pression uniforme [V3.03.100] .....	25
4.3 Analyse modale axisymétrique d'une enveloppe sphérique mince [V2.03.007] .....	30
5 Conclusion .....	31
6 Bibliographie .....	32

## 1 Introduction

On s'intéresse dans ce qui suit à la modélisation mécanique de structures minces à surface moyenne de géométrie particulière :

- coques à symétrie de révolution autour de l'axe  $Oy$  ,
- coques à sections quelconques invariantes le long de l'axe  $Oz$  .

Plus particulièrement, on se limite au cas où les paramètres mécaniques (matériaux, chargements) sont indépendants d'une direction d'espace (la circonférence pour les coques de révolution, l'axe  $Oz$  pour les coques C\_PLAN et D\_PLAN).

Pour la résolution de problèmes thermomécaniques chaînés, on doit utiliser auparavant l'élément fini de coque thermique décrit en [R3.11.01] selon le cas dans sa version axisymétrique, ou sa version plane invariante selon  $Oz$  .

On fait ci-après tout d'abord un point sur la description du modèle mécanique : cinématique, loi de comportement thermoélasto-plastique. Puis on présente l'élément fini choisi, l'interpolation et la méthode d'intégration.

On donne enfin quelques résultats numériques d'application, par comparaison à des solutions analytiques.

## 2 Problème continu

La géométrie est définie de façon uni-dimensionnelle :

- par le méridien dans le plan  $(Oxy)$  pour une coque de révolution,
- par la section de la coque dans le plan  $(Oxy)$  pour une coque invariante en  $z$  .

Dans ce dernier cas, par analogie avec les problèmes bidimensionnels, on envisage deux cas :

- le cas « contraintes planes », c'est-à-dire celui d'une coque libre selon la direction  $Oz$  , ou celui d'un arc dans le plan  $Oxy$  ,
- le cas « déformations planes », c'est-à-dire quand les déplacements selon la direction  $Oz$  sont nuls.

## 2.1 Description de la géométrie, de la cinématique

On considère une coque de révolution d'axe  $Oy$ , ou une coque invariante selon l'axe  $Oz$ . Pour toutes deux, la surface moyenne est définie par la courbe  $\omega = AB$  dans le plan  $Oxy$  :  $\omega$  est un méridien pour la coque de révolution, ou la section pour la coque invariante selon  $Oz$ .

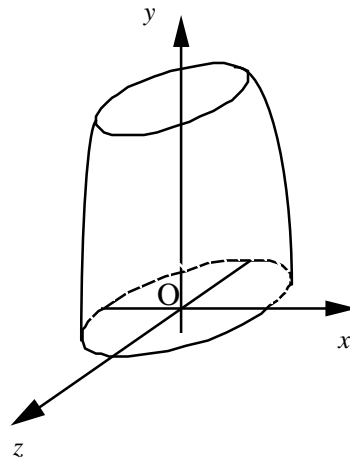


Figure 2.1-a : Coque de révolution

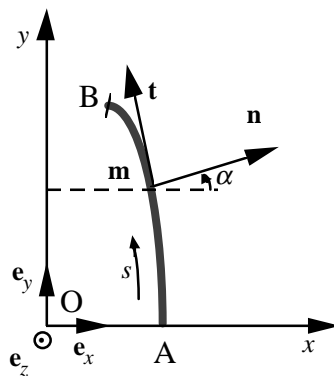


Figure 2.1-b : Méridien

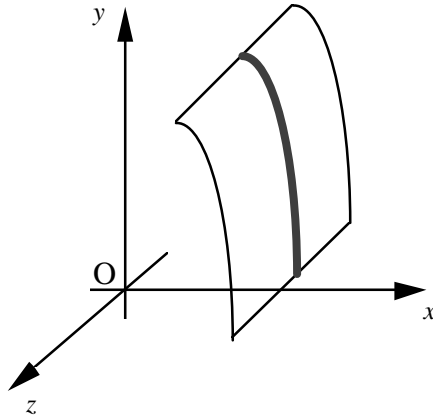


Figure 2.1-c : Coque à section invariante selon  $0z$

La courbe  $\omega = AB$  est paramétrée par l'abscisse curviligne  $s$ . On notera les dérivées partielles par  $\cdot, s$ .

En un point  $\mathbf{m}$  de  $\omega$  on définit le repère local  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_z)$  par :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{Om}_{,s}}{\|\mathbf{Om}_{,s}\|} ; \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} = \mathbf{e}_z.$$

On note aussi l'angle  $\alpha$  tel que :

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

La courbure de  $\omega$  est définie par :

$$\frac{1}{R} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{,s} = \alpha_{,s}$$

Dans le cas de la coque de révolution, la position sur le parallèle passant par  $\mathbf{m}$  est notée  $\theta$ . Le vecteur tangent sur ce parallèle est  $\mathbf{e}_\theta$ . Pour le méridien situé dans le plan  $0xy$ ,  $\theta = 0$  et  $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_z$ . Le rayon de courbure du parallèle en  $\mathbf{m}$  est :

$$R_\theta = \frac{r}{\cos \alpha} \text{ où } r \text{ est l'abscisse } x \text{ du point } \mathbf{m} \text{ de } \omega.$$

Par contre, pour une coque invariante selon  $z$  ce parallèle est une génératrice droite, dirigée selon  $\mathbf{e}_z$ , de courbure nulle.

Les transformations cinématiques de la coque sont définies par le déplacement  $\mathbf{U}$  du point  $\mathbf{m}$  de la surface moyenne, ainsi que par la rotation  $\beta_s$  de la normale  $\mathbf{n}$  au point  $\mathbf{m}$ . Le vecteur  $\mathbf{U}$  peut être exprimé en base locale :

$$\mathbf{U}_{(s)} = U_{(s)} \cdot \mathbf{t}_{(s)} + W_{(s)} \cdot \mathbf{n}_{(s)}.$$

Ou en base cartésienne :

$$\mathbf{U}_{(s)} = u_x(s) \mathbf{e}_x + u_y(s) \mathbf{e}_y.$$

Les déformations de la coque associées à cette transformation  $(\mathbf{U}, \beta_s)$  sont déterminées par :

- un tenseur de déformation membranaire  $\mathbf{E}$ ,
- un tenseur de variation de courbure  $\mathbf{K}$ ,
- un vecteur de déformation de distorsion transverse  $\gamma$ .

Ce dernier apparaît dans la théorie de coques de HENCKY-MINDLIN-NAGHDI et pas dans celle de LOVE. En fonction du déplacement  $\mathbf{U}$  et de la rotation  $\beta_s$ , ces grandeurs s'expriment (cf. [bib1]) :

Cas	Coque de révolution	Coque invariante selon $Oz$
$\mathbf{U}$ exprimé en base locale ( $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{e}_z$ )	$E_{ss} = U_{,s} + \frac{W}{R}$ $E_{\theta\theta} = \frac{1}{r} (-U \sin \alpha + W \cos \alpha)$ $K_{ss} = \beta_{s,s}$ $K_{\theta\theta} = -\frac{\sin \alpha}{r} \beta_s$ $\gamma_s = \beta_s + W_{,s} - \frac{U}{R}$	$E_{ss} = U_{,s} + \frac{W}{R}$ $K_{ss} = \beta_{s,s}$ $\gamma_s = \beta_s + W_{,s} - \frac{U}{R}$
$\mathbf{U}$ exprimé en base globale ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ )	$E_{ss} = u_{y,s} \cos \alpha - u_{x,s} \sin \alpha$ $E_{\theta\theta} = \frac{u_x}{r}$ $K_{ss} = \beta_{s,s}$ $K_{\theta\theta} = -\frac{\sin \alpha}{r} \beta_s$ $\gamma_s = \beta_s + u_{x,s} \cos \alpha + u_{y,s} \sin \alpha$	$E_{ss} = u_{y,s} \cos \alpha - u_{x,s} \sin \alpha$ $K_{ss} = \beta_{s,s}$ $\gamma_s = \beta_s + u_{x,s} \cos \alpha + u_{y,s} \sin \alpha$

Remarque :

Le changement de sens de l'abscisse curviligne  $s$  ne modifie pas les valeurs de :  $\beta_s, E_{ss}, E_{\theta\theta}$ , mais change le signe de  $\alpha, U, W, R, K_{ss}, K_{\theta\theta}$ .

Dans le cadre de la théorie de LOVE, la condition  $\gamma_s = 0$  (les normales à la coque le restent après déformation) se traduit par une relation directe entre les rotations  $\beta_s$  et la pente  $W_{,s}$ . Les composantes du tenseur variation de courbure sont en fonction du déplacement dans la base locale :

$$K_{ss} = -W_{,ss} + \frac{U_{,s}}{R} - U \frac{R_{,s}}{R^2}$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{\sin \alpha}{r} \left( W_{,s} - \frac{U}{R} \right)$$

Si le déplacement est exprimé en base globale :

$$K_{ss} = \frac{1}{R} \left( u_{x,s} \sin \alpha - u_{y,s} \cos \alpha \right) - u_{x,ss} \cos \alpha - u_{y,ss} \sin \alpha$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{\sin \alpha}{r} \left( u_{x,s} \cos \alpha + u_{y,s} \sin \alpha \right)$$

On remarque que l'expression des variations de courbure en fonction du déplacement en théorie de LOVE est assez compliquée et qu'elle fait intervenir des dérivées secondes. Si on exige une interpolation conforme c'est-à-dire ici  $C^1$ , ceci nécessite l'emploi d'éléments finis de degré élevé.

Les tenseurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  permettent d'exprimer la déformation tridimensionnelle  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dans l'épaisseur.

Sur la [Figure 2.1-d], on désigne par  $x_3$  la position dans l'épaisseur  $\left] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right[$  par rapport à la fibre moyenne, au point  $\mathbf{m}$ , d'abscisse curviligne  $s$  sur  $\omega$ .

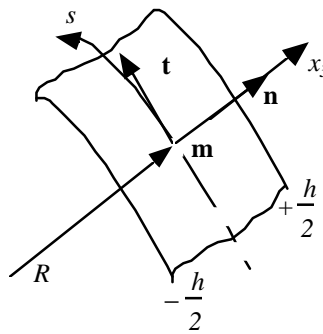


Figure 2.1-d

En un point de l'épaisseur, le déplacement s'exprime en repère global :

$$\mathbf{U}(s, x_3) = \left( u_x(s) - \beta_s(s) \cdot x_3 \sin \alpha(s) \right) \cdot \mathbf{e}_x + \left( u_y(s) + \beta_s(s) \cdot x_3 \cos \alpha(s) \right) \cdot \mathbf{e}_y$$

Afin de tenir compte de la variation de métrique dans l'épaisseur (due à la courbure de la surface moyenne), on définit les fonctions :

$$\rho_s(x_3) = 1 + \frac{x_3}{R} ; \quad \rho_\theta(x_3) = 1 + \frac{x_3}{r} \cdot \cos \alpha$$

Pour une coque suffisamment mince, cette correction est négligeable :

$$\rho_s \approx 1 ; \quad \rho_\theta \approx 1$$

En pratique cette correction effectuée si `MODI_METRIQUE` : 'OUI' dans `AFFE_CARA_ELEM` [U4.42.01] est inutile si les rapports  $h/R$  et  $h/R_\theta$ , quand ils existent, sont inférieurs à  $1/15$ .

En théorie de HENCKY-MINDLIN-NAGHDI, les composantes du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ss}(s, x_3) = \frac{1}{\rho_s} (E_{ss} + x_3 K_{ss}) \\ \varepsilon_{\theta\theta}(s, x_3) = \frac{1}{\rho_\theta} (E_{\theta\theta} + x_3 K_{\theta\theta}) \text{ (uniquement dans le cas coque de révolution)} \\ \varepsilon_{sx_3}(s, x_3) = \frac{1}{2\rho_s} \gamma_s \end{cases}$$

## 2.2 Equilibre thermoélasto-plastique

On considère que le matériau constitutif de la coque est thermoélasto-plastique isotrope. On fait l'hypothèse couramment admise que la contrainte normale transverse est nulle :  $\sigma_{x_3 x_3} \equiv 0$ . La loi de comportement la plus générale s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{1x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{11x_3x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{th} \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^{th} \\ \varepsilon_{1x_3} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu})$  de composantes  $C_{ijkl}$  est la matrice de comportement locale en contraintes planes et  $\boldsymbol{\mu}$  représente l'ensemble des variables internes lorsque le comportement est non linéaire. Dans la suite l'indice 1 fait référence à l'abscisse curviligne et 2 à  $\theta$  ou  $z$ . Aux déformations tridimensionnelles définies ci-dessus, on associe alors les composantes du tenseur contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  :

- dans le cas d'une coque de révolution :

$$\begin{cases} \sigma_{ss} = C_{ssss} (\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{ss}^{th}) + C_{ss\theta\theta} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{th}) \\ \sigma_{\theta\theta} = C_{\theta\theta ss} (\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{ss}^{th}) + C_{\theta\theta\theta\theta} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{th}) \\ \sigma_{sx_3} = C_{ssx_3x_3} \varepsilon_{sx_3} \end{cases}$$



- dans le cas coque invariante selon la direction  $z$  et libre en  $z$  (« contraintes planes ») :

$$\begin{cases} \sigma_{ss} = (C_{ssss} - \frac{C_{sszz}C_{zzss}}{C_{zzzz}})(\epsilon_{ss} - \epsilon_{ss}^{th}) \\ \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{sx_3} = C_{ssx_3x_3} \epsilon_{sx_3} \end{cases}$$

- dans le cas coque invariante selon la direction  $z$  et bloquée en  $z$  (« déformations planes ») :

$$\begin{cases} \sigma_{ss} = C_{ssss} (\epsilon_{ss} - \epsilon_{ss}^{th}) \\ \sigma_{zz} = C_{zzss} (\epsilon_{ss} - \epsilon_{ss}^{th}) \\ \sigma_{sx_3} = C_{ssx_3x_3} \epsilon_{sx_3} \end{cases}$$

On en tire l'expression de l'énergie élastique de déformation, dont on déduira la matrice de rigidité en fonction de la cinématique de coque vue au paragraphe [§2.1] :

- dans le cas coque de révolution :

$$W^{el} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ C_{ssss} \epsilon_{ss}^2 + C_{\theta\theta\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}^2 + (C_{ss\theta\theta} + C_{\theta\theta ss}) \epsilon_{ss} \epsilon_{\theta\theta} + 2 C_{ssx_3x_3} \epsilon_{sx_3}^2 \right] (\rho_s + \rho_{\theta} - 1) r ds d\theta dx_3$$

- dans le cas coque invariante selon  $z$ , en "contraintes planes" :

$$W^{el} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (C_{ssss} - \frac{C_{sszz}C_{zzss}}{C_{zzzz}}) \epsilon_{ss}^2 + 2 C_{ssx_3x_3} \epsilon_{sx_3}^2 \right] \rho_s \cdot ds dx_3$$

- dans le cas coque invariante selon  $z$ , en "déformations planes" :

$$W^{el} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ C_{ssss} \epsilon_{ss}^2 + 2 C_{ssx_3x_3} \epsilon_{sx_3}^2 \right] \rho_s \cdot ds dx_3$$

Remarque :

$$\left| \begin{array}{l} \text{En thermoélasticité, si on note } E \text{ le module d'YOUNG et } \nu \text{ le coefficient de POISSON, on a :} \\ C_{iiii} = \frac{E}{1-\nu^2}; C_{iijj} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2\}; C_{11x_3x_3} = \frac{E}{1+\nu} \end{array} \right|$$

On définit les grandeurs suivantes :

- la rigidité membranaire d'une coque de révolution :

$$[C_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho_s + \rho_\theta - 1}{\rho_i \rho_j} \cdot \begin{bmatrix} C_{ssss} & C_{ss\theta\theta} \\ C_{\theta\theta ss} & C_{\theta\theta\theta\theta} \end{bmatrix} dx_3 ; \text{ qui vaut :}$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \text{ en élasticité et en absence de correction de métrique dans l'épaisseur ;}$$

- la rigidité de couplage membrane-flexion d'une coque de révolution :

$$[B_{ij}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \cdot \frac{\rho_s + \rho_\theta - 1}{\rho_i \rho_j} \cdot \begin{bmatrix} C_{ssss} & C_{ss\theta\theta} \\ C_{\theta\theta ss} & C_{\theta\theta\theta\theta} \end{bmatrix} dx_3, \text{ qui est nulle en élasticité et en}$$

absence de correction de métrique dans l'épaisseur ;

- la rigidité de flexion d'une coque de révolution :

$$[D_{ij}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 \cdot \frac{\rho_s + \rho_\theta - 1}{\rho_i \rho_j} \cdot \begin{bmatrix} C_{ssss} & C_{ss\theta\theta} \\ C_{\theta\theta ss} & C_{\theta\theta\theta\theta} \end{bmatrix} dx_3, \text{ qui vaut :}$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \text{ en élasticité et en absence de correction de métrique dans l'épaisseur ;}$$

- la rigidité de distorsion transverse d'une coque de révolution :

$$G_{sx_3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\rho_s + \rho_\theta - 1}{\rho_s^2} \cdot C_{ssx_3x_3} dx_3, \text{ qui vaut :}$$

$$\frac{Eh}{1+\nu} \text{ en élasticité et en absence de correction de métrique dans l'épaisseur.}$$

Pour une coque invariante selon la direction  $z$ , on ne considère dans ces expressions que les termes  $ij = ss$  ; de plus on doit y remplacer  $(\rho_s + \rho_\theta - 1)$  par  $\rho_s$  : on définit ainsi les coefficients  $C_{ss}^D$ ,  $B_{ss}^D$ ,  $D_{ss}^D$  et  $C_{ss}^C$ ,  $B_{ss}^C$ ,  $D_{ss}^C$  pour le cas, respectivement, de déformations planes ou de contraintes planes. En élasticité, les coefficients  $C_{ss}^C$ ,  $B_{ss}^C$ ,  $D_{ss}^C$ , sont les produits des coefficients  $C_{ss}^D$ ,  $B_{ss}^D$ ,  $D_{ss}^D$  par  $1-\nu^2$ . Enfin, le coefficient de rigidité de distorsion transverse  $G_{sx_3}$  est identique pour les trois modélisations à la correction de métrique près.

On peut ainsi exprimer l'énergie élastique en fonction des tenseurs de déformations de coque :  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  par :

- pour une coque de révolution :

$$\begin{aligned} \bar{W}^{el} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \int_0^{2\pi} & \left[ C_{ss} E_{ss}^2 + 2B_{ss} E_{ss} K_{ss} + D_{ss} K_{ss}^2 + C_{\theta\theta} E_{\theta\theta}^2 + 2B_{\theta\theta} E_{\theta\theta} K_{\theta\theta} + D_{\theta\theta} K_{\theta\theta}^2 \right. \\ & + 2(C_{s\theta} E_{ss} E_{\theta\theta} + B_{s\theta} (E_{ss} K_{\theta\theta} + E_{\theta\theta} K_{ss}) + D_{s\theta} K_{ss} \cdot K_{\theta\theta}) \\ & \left. + \frac{G_{sx_3}}{2} \gamma_s^2 \right] r \cdot ds \cdot d\theta \end{aligned}$$

- pour une coque invariante selon  $z$  en « contraintes planes » :

$$\bar{W}^{el} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left[ C_{ss}^C E_{ss}^2 + 2B_{ss}^C E_{ss} \cdot K_{ss} + D_{ss}^C K_{ss}^2 + \frac{G_{sx_3}}{2} \gamma_s^2 \right] \cdot ds$$

- pour une coque invariante selon  $z$  en « déformations planes » :

$$\bar{W}^{el} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left[ C_{ss}^D E_{ss}^2 + 2B_{ss}^D E_{ss} \cdot K_{ss} + D_{ss}^D K_{ss}^2 + \frac{G_{sx_3}}{2} \gamma_s^2 \right] \cdot ds$$

A ces expressions, il faut ajouter le potentiel associé aux contraintes thermiques, qui sera une contribution au second membre (que l'on exprimera ci-dessous en repère global) :

- dans le cas coque de révolution :

$$L_{(\mathbf{v})}^{th} = \int_{\omega} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \alpha (T - T^{ref}) \left( (C_{ssss} + C_{ss\theta\theta}) \epsilon_{ss} + (C_{\theta\theta ss} + C_{\theta\theta\theta\theta}) \epsilon_{\theta\theta} \right) \right] r d\theta dx_3 ds$$

expression qui pour un comportement élastique isotrope devient :

$$\mathbb{L}_{(\mathbf{v})}^{th} = \int_{\omega} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{E\alpha}{1-\nu} (T - T^{ref}) \left( \frac{v_x}{r} - v_{x,s} \sin \alpha + v_{y,s} \cos \alpha + x_3 \left( \beta_{s,s} - \frac{\sin \alpha}{r} \beta_s \right) \right) \right] r d\theta dx_3 ds$$

- dans le cas invariant selon  $z$  en « contraintes planes » :

$$\mathbb{L}_{(\mathbf{v})}^{th} = \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \alpha (T - T^{ref}) \left( C_{ssss} - \frac{C_{sszz} C_{zzss}}{C_{zzzz}} \right) \epsilon_{ss} \right] dx_3 ds$$

expression qui pour un comportement élastique isotrope devient :

$$\mathbb{L}_{(\mathbf{v})}^{th} = \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ E\alpha (T - T^{ref}) \left( -v_{x,s} \sin \alpha + v_{y,s} \cos \alpha + x_3 \beta_{s,s} \right) \right] dx_3 ds$$

- dans le cas invariant selon  $z$  en “déformations planes” :

$$\mathcal{L}_{(\mathbf{v})}^{th} = \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \alpha (T - T^{ref}) C_{ssss} \epsilon_{ss} \right] dx_3 ds$$

expression qui pour un comportement élastique isotrope devient :

$$\mathcal{L}_{(\mathbf{v})}^{th} = \int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{E\alpha}{1-\nu} (T - T^{ref}) \left( -\nu_{x,s} \sin \alpha + \nu_{y,s} \cos \alpha + x_3 \beta_{s,s} \right) \right] dx_3 ds$$

Dans ces trois expressions, on a délibérément négligé la correction de métrique dans l'épaisseur (termes en  $\rho_s$ ,  $\rho_\theta$  vus pour la rigidité). De plus la température  $T$  qui apparaît est définie par le modèle de coque thermique à trois champs (cf. [R3.11.01]) :

$$T(s, x_3) = T^m(s) \cdot \left( 1 - \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 \right) + T^s(s) \frac{x_3}{2h} \left( 1 + \frac{x_3}{h} \right) + T^i(s) \frac{x_3}{2h} \left( -1 + \frac{x_3}{h} \right)$$

De l'ensemble de ces expressions, on déduit les tenseurs d'efforts généralisés  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  (efforts normaux et moments de flexion) associés aux déformations généralisées  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{K}$  par le principe des travaux virtuels. Ils sont liés au tenseur des contraintes  $\tau_{\alpha\beta}$  tridimensionnelles par :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} dx_3$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \cdot \tau_{\alpha\beta} dx_3$$

(où l'on a négligé les variations de métrique dans l'épaisseur).

## Remarque :

*Energie de cisaillement transverse*

Le modèle de coque présenté ci-dessus, dit de HENCKY-MINDLIN-NAGHDI, repose sur une hypothèse cinématique : les paramètres  $W$  et  $\beta_s$  désignent le déplacement normal du point  $\mathbf{m}$  de la surface moyenne  $\omega$  et la rotation du vecteur normal  $\mathbf{n}$ .

On trouve aussi fréquemment le modèle dit de REISSNER qui repose sur une hypothèse statique de la répartition des contraintes de cisaillement transverse. Les paramètres cinématiques déduits  $W$  et  $\beta_s$  dans ce modèle sont des moyennes pondérées dans l'épaisseur du déplacement normal et des rotations locales. Si l'on désire se placer dans ce cadre, il suffit d'affecter le coefficient  $\kappa = 5/6$  au terme d'énergie de cisaillement transverse (en  $\gamma_s^2$ ). (cf. [bib7], [bib9]).

Enfin, si l'on veut, pour une coque mince, se situer dans le cadre du modèle de LOVE-KIRCHHOFF, on peut neutraliser l'énergie de cisaillement avec une grande valeur de  $\kappa$  (qui pénalise la condition  $\gamma_s = 0$ ), par exemple  $10^6 h / R$ , où  $h$  est l'épaisseur et  $R$  un rayon de courbure caractéristique ou une distance caractéristique des chargements : (cf. [bib 2]). En pratique l'utilisateur peut renseigner la valeur de  $\kappa$  sous le mot-clé `A_CIS` de la commande `AFFE_CARA_ELEM` [U4.42.01].

## 3 Formulation de l'élément fini. Discrétisation

### 3.1 Description de l'élément fini choisi

#### 3.1.1 Motivations

Le choix du cadre HENCKY-MINDLIN-NAGHDI pour décrire la cinématique de coque, présentée au paragraphe [§2], conduit à des expressions des déformations où les dérivées se limitent à l'ordre 1, contrairement au modèle de LOVE-KIRCHHOFF. Ceci offre l'avantage de pouvoir utiliser un élément fini d'ordre limité tout en assurant la conformité. Le choix naturel est l'élément de LAGRANGE P2, isoparamétrique, qui permet d'avoir une représentation fine d'une géométrie courbe et de bonnes estimations des contraintes.

Les degrés de liberté sont bien sûr les déplacements et les rotations.

Comme il est dit précédemment, le modèle de LOVE-KIRCHHOFF peut être recouvert par pénalisation pour un paramètre  $\kappa$  très grand affectant l'énergie de cisaillement transverse.

Cette formulation rejoint la catégorie des éléments finis de coques dits « dégénérés », c'est-à-dire bâtis en injectant la cinématique de coque dans des éléments de milieux continus tridimensionnels : cf. [bib10].

Comme pour tous les éléments finis de coques, des aspects particuliers doivent être analysés : la prise en compte des modes rigides et des risques de blocage de membrane ou de cisaillement.

Dans le cas de la coque de révolution axisymétrique, il n'y a qu'un mode rigide : la translation selon l'axe de symétrie  $0y$ .

Par contre, dans le cas de la coque invariante selon la direction  $0z$ , on a trois modes rigides : deux translations dans le plan  $(x0y)$  et la rotation autour de  $0z$ .

Pour que l'élément fini soit performant, il est nécessaire que les approximations retenues pour la description du déplacement assurent une représentation exacte de l'état de déformations nulles (mode rigide). En pratique, comme la notion de mode rigide est définie par rapport au repère global on décide donc de décrire les déplacements en base globale  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , dans laquelle les modes rigides (fonctions affines) sont représentés par l'interpolation choisie.

Quant aux risques de blocage en membrane et en cisaillement transverse, le traitement habituel consiste dans une intégration numérique sélective (cf. [bib2]), mais la pratique révèle que ces phénomènes apparaissent rarement pour les coques de révolution.

## 3.1.2 Présentation générale de l'élément

L'élément de référence choisi est quadratique, isoparamétrique à trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud. Ces degrés de liberté sont :

$u_x, u_y$  : composantes du déplacement  $\mathbf{U}$  en repère global,  
 $\beta_s$  : la rotation autour de  $\mathbf{e}_z$  de la normale  $\mathbf{n}$ .

Voir [Figure 3.1.2-a].

Cet élément est une généralisation de l'élément de poutre plane courbe. Il est bien adapté à la discrétisation des coques à courbure méridienne  $R$  variable, cf. [bib2].

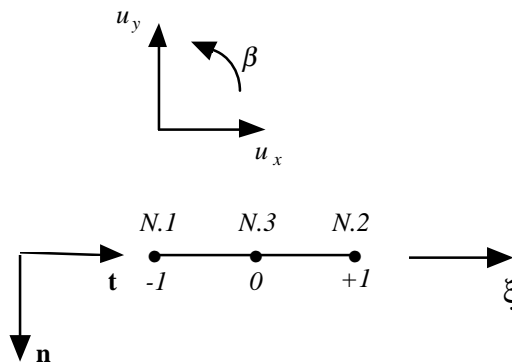
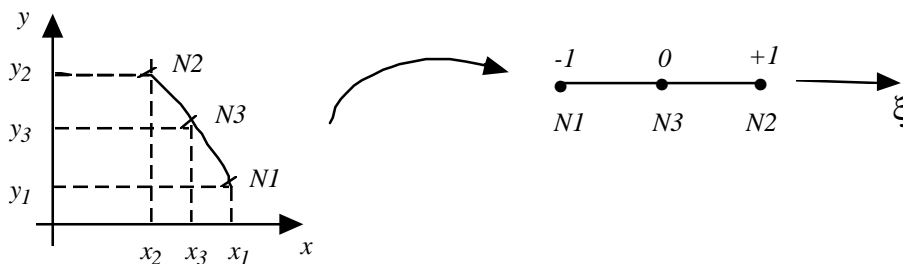


Figure 3.1.2-a : Elément de référence

Les fonctions de forme (de base) sont les polynômes de LAGRANGE :

$$\hat{N}_1(\xi) = \xi \frac{-1 + \xi}{2}; \quad \hat{N}_2(\xi) = \xi \frac{1 + \xi}{2}; \quad \hat{N}_3(\xi) = 1 - \xi^2$$

## 3.1.3 Transformations élément fini / élément fini de référence



La géométrie est interpolée à l'aide des coordonnées  $(x_i, y_i)$  des trois nœuds  $N1, N3, N2$  :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{N}_i(\xi); \quad y(\xi) = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{N}_i(\xi)$$

De même à l'aide des ddl  $(u_{x_i}, u_{y_i}, \beta_{s_i})$  sur les nœuds, on a :

$$u_x(\xi) = \sum_{i=1}^3 u_{x_i} \hat{N}_i(\xi) ; u_y(\xi) = \sum_{i=1}^3 u_{y_i} \hat{N}_i(\xi)$$

$$\beta_s(\xi) = \sum_{i=1}^3 \beta_{s_i} \hat{N}_i(\xi)$$

On a besoin aussi du jacobien de la transformation :

$$m(\xi) = \frac{ds}{d\xi}(\xi) = \sqrt{(x_{,\xi})^2 + (y_{,\xi})^2}$$

Et des vecteurs de la base locale :

$$\mathbf{t}(\xi) = \frac{1}{m(\xi)} (x_{,\xi} \mathbf{e}_x + y_{,\xi} \mathbf{e}_z)$$

$$\mathbf{n}(\xi) = \frac{1}{m(\xi)} (y_{,\xi} \mathbf{e}_x - x_{,\xi} \mathbf{e}_z)$$

Enfin :

$$\cos \alpha = \frac{y_{,\xi}}{m(\xi)} ; \sin \alpha = \frac{-x_{,\xi}}{m(\xi)}$$

La courbure méridienne s'obtient par :

$$\frac{1}{R} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{,\xi}) \cdot \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{m^3(\xi)} (x_{,\xi} \cdot y_{,\xi\xi} - y_{,\xi} \cdot x_{,\xi\xi})$$

À cause de l'interpolation P2, les dérivées secondes qui apparaissent ci-dessous s'expriment à l'aide des coordonnées des trois nœuds par :

$$x_{,\xi\xi} = x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 \quad y_{,\xi\xi} = y_1 + y_2 - 2 \cdot y_3$$

### 3.1.4 Intégration numérique surfacique

Pour les intégrations numériques le long de l'élément on utilise une formule d'intégration numérique à quatre points de GAUSS, unique pour tous les termes à intégrer. Cette formule fait apparaître les blocages mentionnés au paragraphe [§3.1.1] en cas de plastification extrêmement localisée. On conseille donc d'éviter l'utilisation de ces éléments en plasticité pour le moment. La formule d'intégration numérique à quatre points de Gauss sera remplacée ultérieurement par une formule à deux points de Gauss censée éviter ces désagréments.

### 3.1.5 Intégration numérique dans l'épaisseur

Pour un comportement élastique, dans la mesure où on admet que l'on se limite à des caractéristiques élastiques uniformes dans l'épaisseur, les rigidités  $[C_{ij}]$ ,  $[B_{ij}]$ ,  $[D_{ij}]$  et  $G_{sx_3}$  définies au paragraphe [§2.2] sont calculées exactement.

**Pour un comportement non-linéaire**, on subdivise l'épaisseur initiale en N couches d'épaisseurs identiques numérotées dans le sens de la normale à la surface moyenne de l'élément. Pour chaque couche on utilise trois points d'intégration. Les points d'intégration sont situés en peau supérieure de couche, au milieu de la couche et en peau inférieure de couche. Pour N couches, le nombre de points d'intégration est de  $2N+1$ . On conseille d'utiliser de 3 à 5 couches dans l'épaisseur pour un nombre de points d'intégration valant 7, 9 et 11 respectivement.

Pour chaque couche, on calcule l'état des contraintes ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ ) et l'ensemble des variables internes, au milieu de la couche et en peaux supérieure et inférieure de couche, à partir du comportement plastique local et du champ de déformation local ( $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ ). Le positionnement des points d'intégration nous permet d'avoir les estimations les plus justes, car non extrapolées, en peaux inférieure et supérieure de couche, où l'on sait que les contraintes risquent d'être maximales. Le comportement plastique ne comprend pas pour le moment les termes de cisaillement transverse qui sont traités de façon élastique, car le cisaillement transverse est découplé du comportement membranaire en contraintes planes.

Cordonnées des points	Poids $\omega_i$
$\xi_1 = -1$	1/3
$\xi_2 = 0$	4/3
$\xi_3 = +1$	1/3

$$\int_{-1}^1 y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i y(\xi_i)$$

#### Formule d'intégration numérique pour une couche dans l'épaisseur en plasticité

**Pour un comportement thermoélastique**, on utilise l'intégration, par couche dans l'épaisseur  $\left[-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right]$  décrite précédemment dans le domaine non-linéaire, des termes thermomécaniques vus au paragraphe [§2.2]. Il est alors nécessaire d'utiliser STAT\_NON\_LINE avec un comportement élastique.

#### Remarque :

On a déjà mentionné au [§2.2]. et en [R3.07.04] que la valeur du coefficient de correction en cisaillement transverse pour les éléments de coque était obtenue par identification des énergies complémentaires élastiques après résolution de l'équilibre 3D. Cette méthode n'est plus utilisable en élasto-plasticité et le choix du coefficient de correction en cisaillement transverse se pose alors. Les termes de cisaillement transverses ne sont donc pas affectés par la plasticité et sont traités élastiquement, faute de mieux. Dans le cas où l'on se place en théorie de Love-Kirchhoff pour une valeur de ce coefficient de  $10^6 h/R$  ( $h$  étant l'épaisseur de la coque et  $R$  son rayon de courbure moyen) les termes de cisaillement transverses deviennent négligeables et l'approche est plus rigoureuse.



## 3.2 Formulation des termes élémentaires

### 3.2.1 Masse, centre de gravité, matrice d'inertie

Dans le cas des coques de révolution, la masse vaut :

$$\int_{\omega} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\rho_s + \rho_\theta - 1) dx_3 r d\theta ds = \int_{\omega} \int_0^{2\pi} \rho h r d\theta ds = 2\pi \rho h \int_{\omega} r ds$$

où  $\rho$  est la masse volumique supposée constante de l'élément.

La position du centre d'inertie est donnée dans le repère Oxyz du [§2.1] par :

$$x_G = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{\omega} y r ds + \frac{h^2}{12} \int_{\omega} \sin \alpha \left( \frac{1}{R} + \frac{\cos \alpha}{r} \right) r ds}{\int_{\omega} r ds}$$

$$z_G = 0$$

Les termes de la matrice d'inertie par rapport à O dans le repère Oxyz du [§2.1] ont alors pour expression :

$$I_{xx/O} = 2\pi \rho \int_{\omega} \left[ h \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) + \frac{h^3}{12} \left( \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \delta x \cos \alpha + 2\delta y \sin \alpha \right) \right] r ds$$

$$I_{yy/O} = 2\pi \rho \int_{\omega} \left[ h x^2 + \frac{h^3}{12} (\cos^2 \alpha + 2\delta x \cos \alpha) \right] r ds \quad \text{où } \delta = \frac{1}{R} + \frac{\cos \alpha}{r}.$$

$$I_{zz/O} = 2\pi \rho \int_{\omega} \left[ h \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) + \frac{h^3}{12} \left( \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \delta x \cos \alpha + 2\delta y \sin \alpha \right) \right] r ds$$

Dans le cas des coques invariantes selon  $Oz$ , la masse vaut :

$$\int_{\omega} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \rho_s dx_3 ds = \rho h \int_{\omega} ds.$$

La position du centre d'inertie est définie dans le repère Oxy du [§2.1] par :

$$x_G = \frac{\int_{\omega} x ds + \frac{h^2}{12} \int_{\omega} \frac{\cos \alpha}{R} ds}{\int_{\omega} ds}$$

$$y_G = \frac{\int_{\omega} y ds + \frac{h^2}{12} \int_{\omega} \frac{\sin \alpha}{R} ds}{\int_{\omega} ds}$$

Les termes de la matrice d'inertie par rapport à O dans le repère Oxyz du [§2.1] ont alors pour expression :

$$\begin{aligned}
 I_{xx/O} &= \rho \int_{\omega} \left[ hy^2 + \frac{h^3}{12} (\sin^2 \alpha + 2\delta y \sin \alpha) \right] ds \\
 I_{xy/O} &= I_{yx/O} = \rho \int_{\omega} \left[ hxy + \frac{h^3}{12} (\sin \alpha \cos \alpha + \delta x \sin \alpha + \delta y \cos \alpha) \right] ds \\
 I_{yy/O} &= \rho \int_{\omega} \left[ hx^2 + \frac{h^3}{12} (\cos^2 \alpha + 2\delta x \cos \alpha) \right] ds \\
 I_{zz/O} &= \rho \int_{\omega} \left[ h(x^2 + y^2) + \frac{h^3}{12} (1 + 2\delta x \cos \alpha + 2\delta y \sin \alpha) \right] ds
 \end{aligned}$$

où  $\delta = \frac{1}{R}$ .

Les termes en  $\frac{h^2}{12}$  pour les centres d'inertie et  $\frac{h^3}{12}$  pour les matrices d'inertie ne sont pas pris en compte dans la programmation. Cela revient à négliger la variation de métrique avec la courbure dans le calcul de ces termes.

### 3.2.2 Matrice de masse

Le terme :  $\int_{\omega} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho v(s, x_3) \cdot \bar{v}(s, x_3) r dx_3 d\theta ds$ , d'énergie cinétique est traité en considérant la masse volumique  $\rho$  constante dans l'épaisseur et la correction de métrique due à la courbure négligeable. L'intégrande est éclaté en trois termes :

- $\rho h (u_x \cdot \bar{u}_x + u_y \cdot \bar{u}_y)$  énergie cinétique de translation
- $\rho \frac{h^3}{12} \beta_s \cdot \bar{\beta}_s$  énergie cinétique de rotation
- $\rho \frac{h^3}{12} \delta (-\sin \alpha (u_x \bar{\beta}_s + \bar{u}_x \beta_s) + \cos \alpha (u_y \bar{\beta}_s + \bar{u}_y \beta_s))$  énergie cinétique de couplage, avec :

$$\delta = \frac{1}{R} + \frac{\cos \alpha}{r} \quad \text{pour le cas coque de révolution axisymétrique.}$$

$$\delta = \frac{1}{R} \quad \text{pour le cas coque invariante selon } Oz \quad (\text{de plus dans ce cas disparaît l'intégrale } \int_0^{2\pi} r d\theta).$$

### 3.2.3 Second membre de force centrifuge

Dans le cas des coques de révolution, on considère un vecteur rotation :  $\Omega = \omega_2 \cdot \mathbf{e}_y$ , porté par l'axe de révolution. Le terme du second membre correspondant est :

$$\int_{\omega} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega_2^2 \cdot r (\bar{u}_x - \bar{\beta}_s \cdot x_3 \sin \alpha) dx_3 r d\theta ds$$

$$= \int_{\omega} \int_0^{2\pi} h \rho \omega_2^2 r^2 \cdot \bar{u}_x d\theta ds$$

(on néglige la correction de métrique dans l'épaisseur).

Dans le cas des coques invariantes selon  $0z$ , on considère un vecteur rotation :  $\Omega = \omega_3 \cdot \mathbf{e}_z$ , perpendiculaire au plan de la section  $\omega$ .

Le second membre est alors :

$$\int_{\omega} h \rho \omega_3^2 (x \cdot \bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y) ds$$

### 3.2.4 Second membre de pesanteur

Dans le cas des coques de révolution, la pesanteur est dirigée selon  $\mathbf{e}_y$ .

Le second membre est :

$$\int_{\omega} \int_0^{2\pi} \rho g h \bar{u}_y r d\theta ds$$

Dans le cas des coques invariantes selon  $0z$ , celle-ci est dirigée dans le plan  $x0y$  :  $\mathbf{g} = g_x \mathbf{e}_x + g_y \mathbf{e}_y$ .

Le second membre est :

$$\int_{\omega} \rho h (g_x \cdot \mathbf{e}_x + g_y \cdot \mathbf{e}_y) ds$$

### 3.2.5 Second membre de charges réparties

Ces charges réparties peuvent être deux forces dans le plan  $(x0y)$  et le couple  $M_z$  porté par l'axe  $0z$ . Les deux forces, dont on considère qu'elles sont appliquées sur la surface moyenne  $\omega$ , pourront être fournies en repère global  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  ou local  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ . Le second membre est :

$$\int_{\omega} \int_0^{2\pi} (F_x \bar{u}_x + F_y \bar{u}_y + M_z \bar{\beta}_s) r d\theta ds$$

(en coque invariante selon  $z$ , l'intégrale  $\int_0^{2\pi} r d\theta$  disparaît).

**Remarque :**

Les actions ponctuelles sont traitées comme des forces nodales là où elles sont appliquées, puisqu'elles travaillent dans les ddl de l'élément fini.

### 3.3 Calcul des déformations et des contraintes

Après résolution, on a la possibilité avec l'opérateur `CALC_ELEM` [U4.81.01] de calculer aux nœuds les champs élémentaires suivant :

- les déformations généralisées  $E_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\alpha\beta}$  : option `DEGE_ELNO_DEPL`,
- les déformations tridimensionnelles  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  sur la fibre moyenne et en peaux interne et externe (avec ou sans correction de courbure) : option `EPSI_ELNO_DEPL`,
- les contraintes tridimensionnelles  $\sigma_{\alpha\beta}$  sur la fibre moyenne et en peaux interne et externe (avec ou sans correction de courbure) : option `SIGM_ELNO_DEPL` en élasticité linéaire,
- les efforts généralisés  $N_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$  (avec ou sans correction de courbure) : option `EFGE_ELNO_DEPL` en élasticité linéaire.

Ces valeurs aux nœuds sont obtenues par extrapolation à partir des valeurs aux points de GAUSS de l'élément, selon la méthode exposée en [bib4] [R3.06.03].

Enfin, on peut avoir aussi les valeurs  $N_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$  aux points de GAUSS de l'élément : option `SIEF_ELGA_DEPL` en élasticité linéaire.

Aucun post-traitement de contraintes ou d'efforts généralisés n'est pour le moment disponible pour des comportements matériaux non linéaires.

## 4 Validation - Cas test

On considère ci-après, pour juger des capacités de cette formulation, quelques exemples d'application (cf. [bib10]).

### 4.1 Cylindre sous pression interne

On étudie un cylindre vertical soumis à une pression interne  $p$  constante sur la partie  $y < 0$ , et nulle sur  $y > 0$  : voir [Figure 4.1-a].

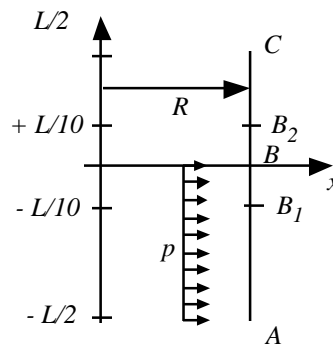


Figure 4.1- a : Cylindre sous pression axisymétrique

Le rayon est :  $R = 4$  m, l'épaisseur  $t = 0.25$  m, la longueur  $L = 10$  m. Celle-ci est choisie pour que les effets de bord libre en  $y = \pm L/2$  soient négligeables sur la solution (en axisymétrique,  $L$  doit vérifier :  $\frac{1}{2} L > 3\sqrt{Rt} = 3$  m ici).

Le matériau est élastique ( $E = 1$  Pa,  $\nu = 0.3$ ).

Les conditions aux limites sont :  $p = 1$  N / m<sup>2</sup>, déplacement vertical en A nul.

On choisit la solution obtenue par le modèle LOVE-KIRCHHOFF.

Pour l'atteindre numériquement, on prend comme coefficient de cisaillement :  $\kappa = 10^6$ , pour inhiber les distorsions  $\gamma_s$ . La solution analytique est :

$$\text{pour } y \leq 0 : u_x(y) = \frac{P}{8\alpha^4 D} (2 - e^{\alpha y} \cos \alpha y), \quad \beta_s(y) = \frac{P}{8\alpha^3 D} e^{\alpha y} (\cos \alpha y - \sin \alpha y)$$

$$\text{pour } y \geq 0 : u_x(y) = \frac{P}{8\alpha^4 D} e^{-\alpha y} \cos \alpha y, \quad \beta_s(y) = \frac{P}{8\alpha^3 D} e^{-\alpha y} (\cos \alpha y + \sin \alpha y)$$

$$\text{avec } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad 4\alpha^4 = \frac{Et}{DR^2}.$$

Les efforts généralisés sont ( $\sin \alpha = 0$ ) :

$$N_{\theta\theta} = \frac{Et}{R} u_x(y) ; M_{ss} = Du_x''(y) = \frac{p}{4\alpha^2} e^{-|y|} \sin \alpha y$$

Les contraintes tridimensionnelles sont :

$$\sigma^{\theta\theta} = \frac{N_{\theta\theta}}{t} + 12 \frac{M_{\theta\theta} x_3}{t^3} ; \sigma^{ss} = 12 \frac{M_{ss} x_3}{t^3}, \text{ d'où :}$$

$$\text{pour } y \leq 0 : \begin{cases} \sigma^{\theta\theta}(y, x_3) = \frac{pR}{t} \left( 1 - \frac{e^{\alpha y}}{2} \left( \cos \alpha y + 2\nu \frac{x_3}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \sin \alpha y \right) \right) \\ \sigma^{ss}(y, x_3) = \frac{pR}{t} \cdot \frac{x_3}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} e^{\alpha y} \sin \alpha y \end{cases}$$

$$\text{pour } y \geq 0 : \begin{cases} \sigma^{\theta\theta}(y, x_3) = \frac{pR}{t} \frac{e^{-\alpha y}}{2} \left( \cos \alpha y - 2\nu \frac{x_3}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \sin \alpha y \right) \\ \sigma^{ss}(y, x_3) = \frac{pR}{t} \cdot \frac{x_3}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} e^{-\alpha y} \sin \alpha y \end{cases}$$

Pour un maillage régulier de cent mailles et deux cent un nœuds, on trouve :

	Référence	Aster	% différence
Déplacement $U_x$			
Point A	63.9488	63.922	-0.042
Point B	32.000	32.005	0.015
Point C	0.05120	0.08755	
Rotation $\beta_s$			
Point A	0.06583	0.04057	
Point B	41.133	41.165	0.078
Effort normal $N_{\theta\theta}$			
Point B	2.0000	2.0003	0.015
Point B <sub>1</sub> (à -L/10)	3.84429	3.8442	0.002
Moment $M_{ss}$			
Point B <sub>1</sub>	4.01497 10 <sup>-2</sup>	4.013 10 <sup>-2</sup>	0.05

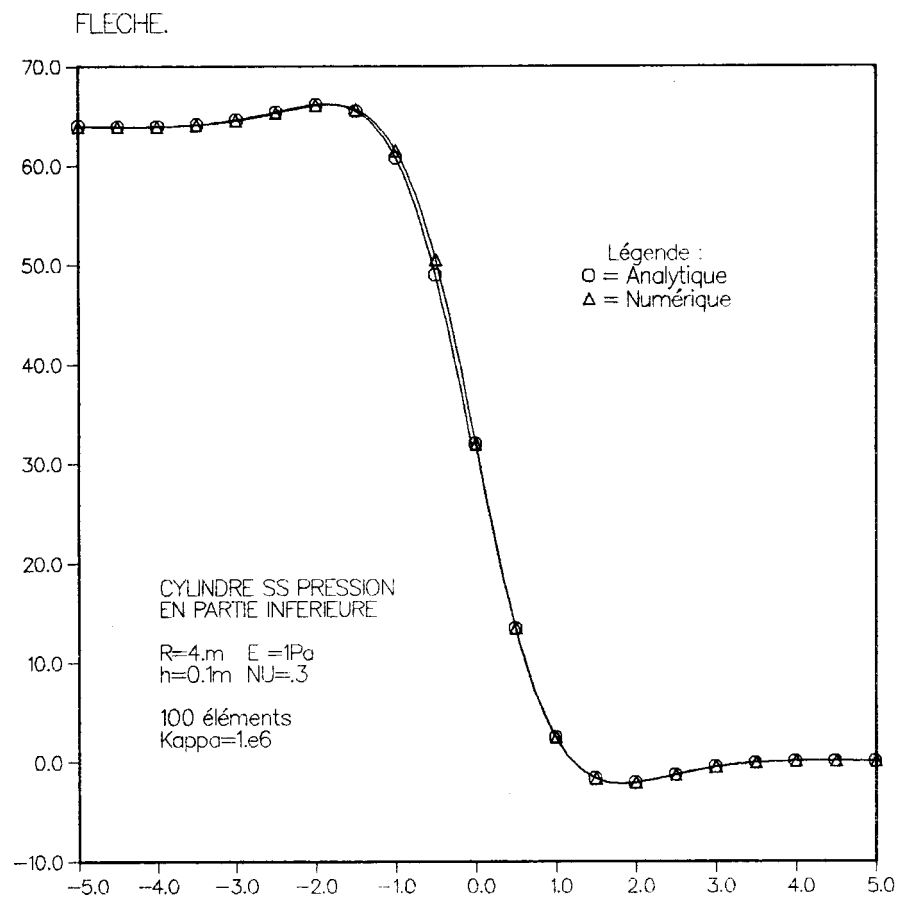


Figure 4.1-b : Flèche du cylindre sous pression

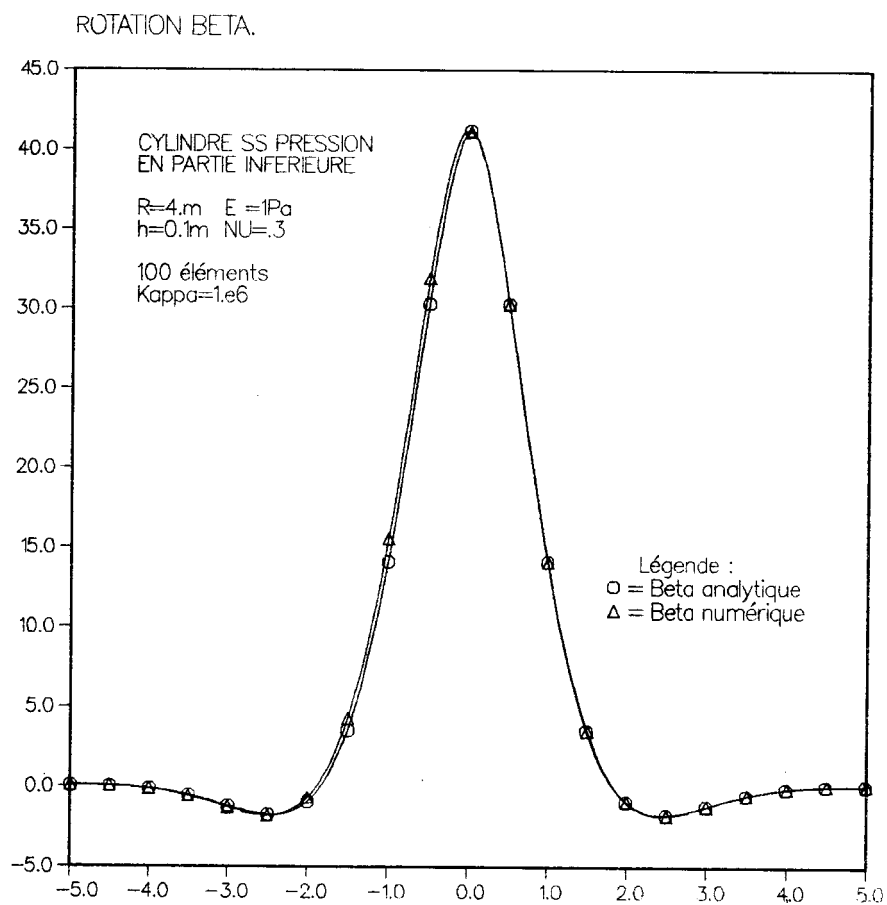


Figure 4.1-c : Rotation du cylindre sous pression.



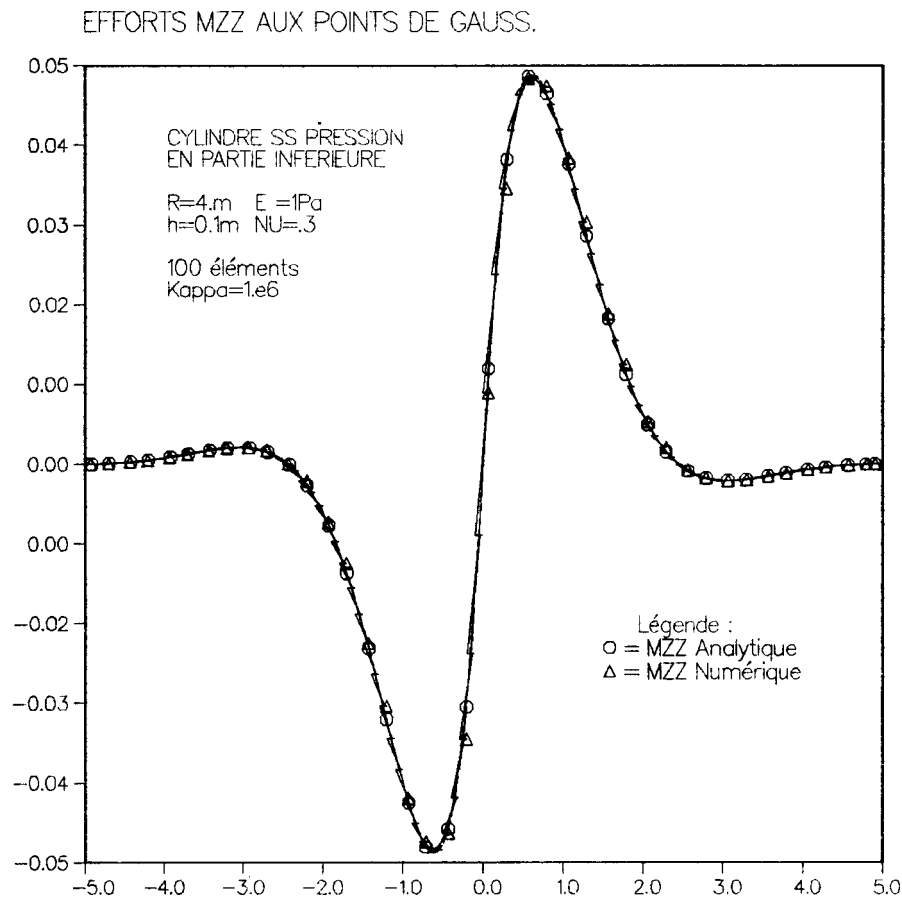


Figure 4.1-d : Moments fléchissants axiaux du cylindre sous pression

## 4.2 Plaque circulaire encastrée sous pression uniforme [V3.03.100]

On considère la plaque de rayon  $R = 1$  m, d'épaisseur  $t = 0,1$  m (voir [Figure 4.2-a] ci-dessous) encastrée sur son pourtour.

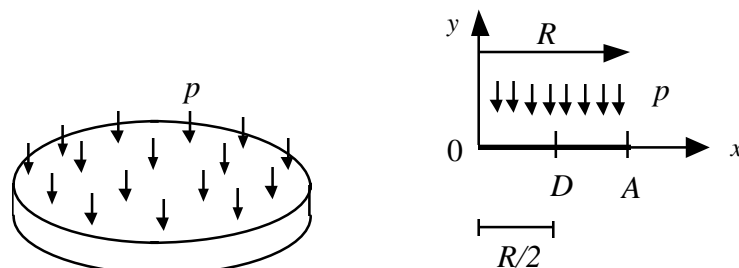


Figure 4.2-a

Le matériau est élastique ( $E = 1. Pa$ ,  $\nu = 0.3$ ). La pression est :  $p = 1. N/m^2$ .

Les conditions aux limites sont : en 0 :  $\beta_s = 0$ , en A :  $u_x = u_y = 0$ ,  $\beta_s = 0$ .

On s'intéresse aux solutions des modèles de REISSNER  $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$  et de LOVE-KIRCHHOFF (on prendra  $\kappa = 10^6$ ).

La solution analytique est pour la flèche :

$$u_y(x) = -\frac{pR^4}{64D} \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \varphi\right).$$

avec  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  ;  $\varphi = \frac{16}{5} \left(\frac{t}{R}\right)^2 \frac{1}{1-\nu}$  si  $\kappa = \frac{5}{6}$  ;  $\varphi = 0$  pour la solution LOVE-KIRCHHOFF.

La distorsion est en effet :  $\gamma_s(x) = -\frac{pR^2}{16D} \frac{x}{2} \varphi$ .

La rotation  $\beta_s$  est :  $\beta_s(x) = \frac{pR^2}{16D} x \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)$ .

Les variations de courbure sont ( $\sin \alpha = +1$ ) :

$$K_{ss}(x) = -\frac{pR^2}{16D} \left(1 - 3\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)$$

$$K_{\theta\theta}(x) = -\frac{pR^2}{16D} \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)$$

Les moments fléchissants sont ( $\sin \alpha = +1$ ) :

$$M_{ss}(x) = \frac{pR^2}{16} \left((3+\nu)\left(\frac{x}{R}\right)^2 - (1+\nu)\right)$$

$$M_{\theta\theta}(x) = \frac{pR^2}{16} \left((1+3\nu)\left(\frac{x}{R}\right)^2 - (1+\nu)\right)$$

Les contraintes s'écrivent :

$$\sigma_{ss}(x, x_3) = \frac{E}{1-\nu^2} x_3 [K_{ss}(x) + \nu K_{\theta\theta}(x)]$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x, x_3) = \frac{E}{1-\nu^2} x_3 [K_{\theta\theta}(x) + \nu K_{ss}(x)]$$

On remarque l'indépendance en  $\kappa$  de la rotation, des variations de courbure et des moments fléchissants. Au centre 0 de la plaque :

$$u_y(0) = -\frac{pR^4}{64D} (1 + \nu), \quad M_{ss}(0) = M_{\theta\theta}(0) = -\frac{pR^2}{16} (1 + \nu),$$

$$K_{ss}(0) = K_{\theta\theta}(0) = -\frac{pR^2}{16D}.$$

$$\sigma_{ss}(0, \pm t/2) = \sigma_{\theta\theta}(0, \pm t/2) = \mp \frac{E}{1-\nu} \frac{t}{2} \frac{pR^2}{16D}.$$

On remarque que l'on est en compression en peau supérieure de plaque.

A l'encastrement A :  $M_{ss}(R) = \frac{pR^2}{8}$  ;  $M_{\theta\theta}(R) = \nu \frac{pR^2}{8}$ .

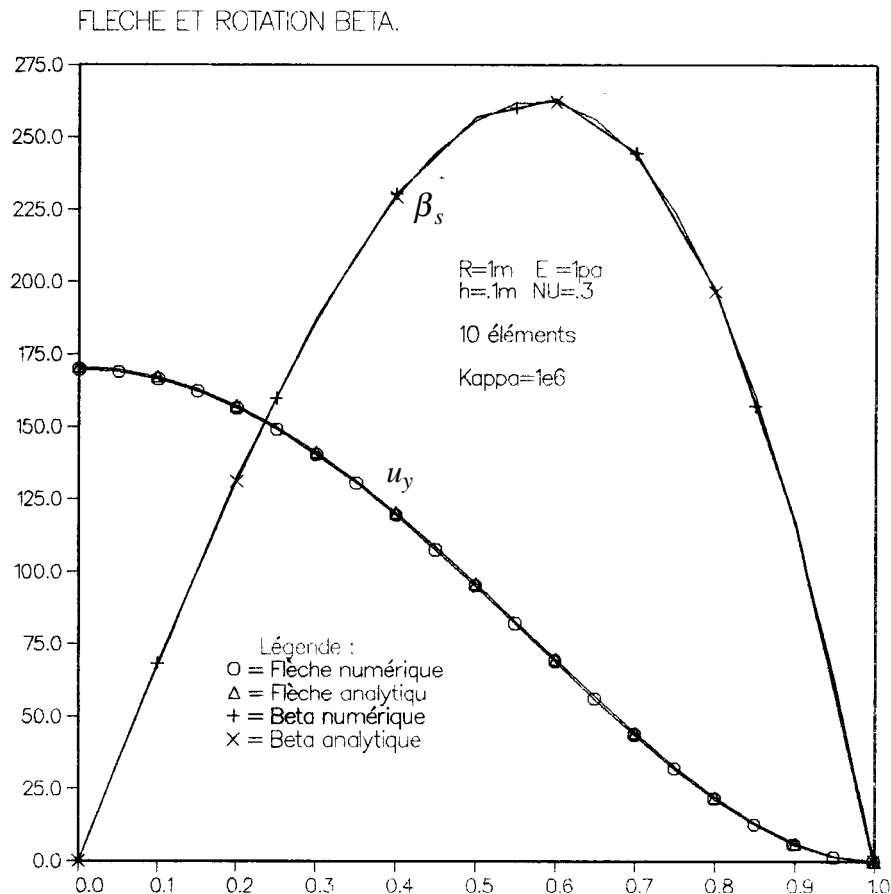


Figure 4.2-b : Flèche, rotation d'une plaque circulaire encastree

Pour un maillage régulier de 10 mailles (21 nœuds) on trouve :

	Référence	Aster	% différence
Déplacement $u_y$			
Point D $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$	-101.827	-101.7769	0.049
LOVE-KIRCHHOFF	-95.9765	-95.0395	0.978
Point 0 $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$	-178.424	-178.368	0.031
LOVE-KIRCHHOFF	-170.625	-169.761	0.507
Rotation $\beta_s$			
Point D $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		256.001	0.024
LOVE-KIRCHHOFF	255.94	257.123	0.462
Variation de courbure $K_{ss}$			
Point D $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		173.406	1.60
LOVE-KIRCHHOFF	170.625	162.765	4.61
Variation de courbure $K_{\theta\theta}$			
Point D $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		514.001	0.024
LOVE-KIRCHHOFF	511.875	512.242	0.46
Moment $M_{ss}$			
Point 0 $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		-0.081751	+0.617
LOVE-KIRCHHOFF	-0.08125	-0.081394	-0.18
Point A $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		0.12373	-1.02
LOVE-KIRCHHOFF	0.125	0.10717	-14.3
Moment $M_{\theta\theta}$			
Point 0 $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		-0.081751	0.617
LOVE-KIRCHHOFF	-0.08125	-0.081394	-0.18
Point A $\left(\kappa = \frac{5}{6}\right)$		0.037121	-1.01
LOVE-KIRCHHOFF	0.03750	0.032146	-14.3

On remarque que la solution LOVE-KIRCHHOFF ( $\kappa = 10^6$ ) est moins bien approchée que celle par REISSNER ( $\kappa = \frac{5}{6}$ ) sur les variations de courbure et les moments fléchissants. Par contre, les déplacements et rotations sont bien calculés.

Ces différences tiennent à la relative épaisseur de cette plaque, vis-à-vis de la grossièreté du maillage choisi. Les figures ci-après montrent la comparaison des solutions analytiques et numérique, dans le cas LOVE-KIRCHHOFF, sur des maillages de 10 et 100 éléments.

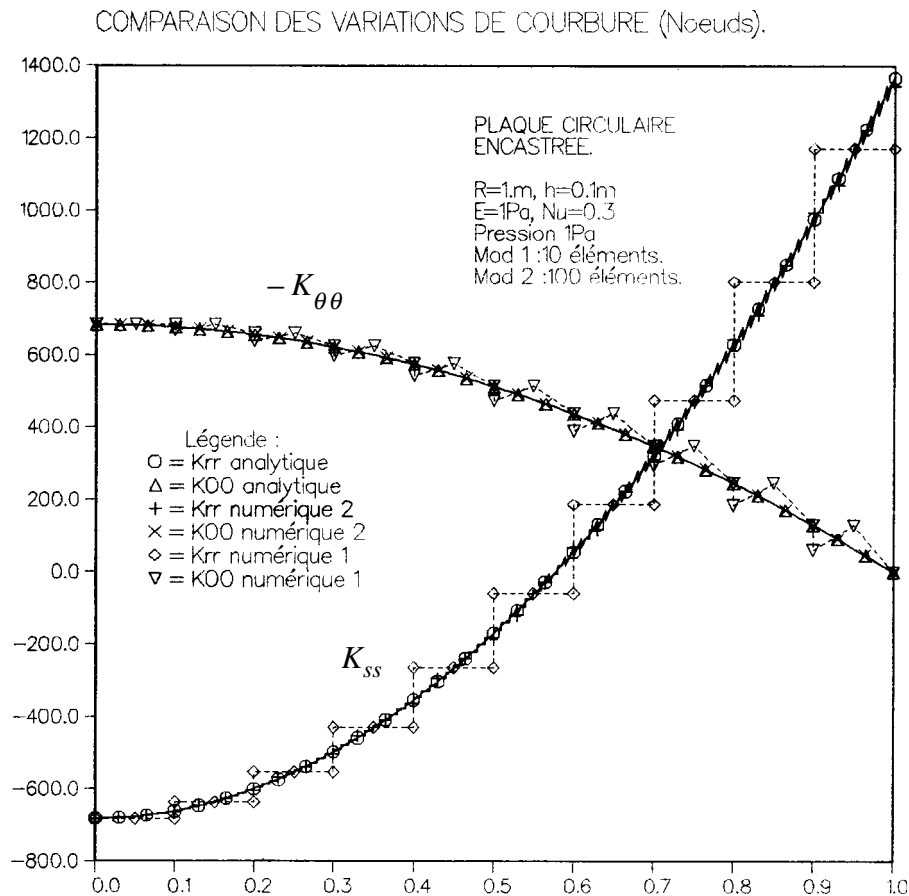


Figure 4.2 - c : Variations de courbure d'une plaque circulaire encastree

Le tracé des variations de courbure  $K_{ss}$  et  $K_{\theta\theta}$  illustre le fait que ces deux composantes ne sont pas approchées de la même manière : la première est linéaire puisque dérivée d'une fonction de forme P2, tandis que la seconde est constante par morceaux.

### 4.3 Analyse modale axisymétrique d'une enveloppe sphérique mince [V2.03.007]

On considère une sphère, de rayon moyen  $R_m = 2.5$  m, d'épaisseur  $t = 0.10$  m.

Le matériau est élastique ( $E = 200000$  MPa,  $\nu = 0,3$ ), de masse volumique  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.

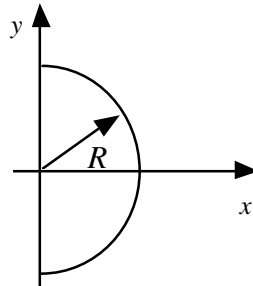


Figure 4.3-a : Sphère

On étudie ses vibrations libres axisymétriques dans le cadre LOVE-KIRCHHOFF ( $\kappa = 10^6$ ).

On utilise un maillage composé de 40 mailles et 81 nœuds. On s'intéresse aux fréquences comprises entre 220 et 375 Hz. Par rapport à la solution de référence [V2.03.007] on trouve comme 5 premières fréquences :

N°	1	2	3	4	5
Référence	237.25	282.85	305.2	324.2	346.8
Aster	237.32	282.78	304.95	323.7	346.2

Tableau 4.3-a : Fréquences des modes axisymétriques

## 5 Conclusion

Les éléments finis que nous proposons ont été choisis dans un but bien particulier : calcul de structures minces axisymétriques, ou de sections orthogonales de coques infinies avec indépendance dans la direction  $z$ , avec le souci d'obtenir une bonne précision sur la solution membranaire et flexionnelle tout en ayant un élément simple d'implantation et pas trop coûteux.

Le choix des degrés de liberté permet une bonne représentation des conditions aux limites. De plus, cette formulation déplacement et rotation conduit à des éléments de degré plus faible : les éléments sont P2 en membrane et P2 en flexion. Il apparaît qu'ils sont aisés à manipuler et que leur formulation permet d'utiliser une structure de pré et post processeur simple, avantage non négligeable pour effectuer des maillages assez fins (unidimensionnels) et pour visualiser facilement les résultats (sur une simple courbe). La cinématique choisie : formulation de HENCKY-MINDLIN-NAGHDI, en déplacements et rotations de la surface moyenne permet de faire intervenir l'énergie de cisaillement transverse (intéressante pour les coques d'épaisseur moyenne).

Cette énergie peut être affectée d'un facteur de correction  $\kappa$  : si l'on veut se placer en théorie de REISSNER, il suffit de choisir  $\kappa = 5/6$  au lieu de 1 (mais bien sûr, la flèche  $W$  et les rotations  $\beta$  ne sont dans cette théorie que des moyennes pondérées dans l'épaisseur). De plus, la formulation de coque de LOVE-KIRCHHOFF (pour les structures très minces) peut être simulée par pénalisation de la condition de nullité de la distorsion transverse, en choisissant un facteur  $\kappa = 10^6 \times h/L$ ,  $h$  étant l'épaisseur et  $L$  une distance caractéristique (rayon de courbure, zone d'application des charges...).

Les comportements non-linéaires en contraintes planes sont disponibles pour ces éléments. On signale cependant que les contraintes générées par la distorsion transverse sont traitées élastiquement, faute de mieux. En effet, la prise en compte d'un cisaillement transverse constant non nul sur l'épaisseur et la détermination de la correction associée sur la rigidité de cisaillement par rapport à un modèle satisfaisant les conditions aux limites ne sont pas possibles et rendent donc l'utilisation de ces éléments, lorsque le cisaillement transverse est non nul, rigoureusement impossible en plasticité. En toute rigueur, pour des comportements non linéaires, il faudrait donc utiliser ces éléments dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff.

Des éléments correspondant aux éléments mécaniques existent en thermique ; les chaînages thermomécaniques sont donc disponibles avec des éléments finis de coques thermiques à trois nœuds décrits en [R3.11.01] selon le cas dans sa version axisymétrique, ou sa version plane invariante selon  $Oz$ .

Dans les cas-test traités, les phénomènes de blocage ne sont pas apparus. La décomposition de l'énergie de déformation permettra, en cas de besoin, d'intégrer de façon sélective les termes responsables du blocage, une telle modification ne devant pas poser de difficultés particulières. Une étude plus détaillée doit bien sûr être menée sur ce sujet, quant aux méthodes numériques à utiliser pour éviter ce blocage quand l'épaisseur devient faible.

Les développements envisageables sont :

- l'anisotropie afin de pouvoir traiter les coques multicouches,
- les problèmes de flambement,
- la décomposition en séries de FOURIER pour étudier des problèmes non axisymétriques de coques de révolution,
- la prise en compte d'une épaisseur variable ...

## 6 Bibliographie

- [1] B. ALMROTH - D. BRUSH : Buckling of bars, plates and shells. Mc Graw-Hill 1975.
- [2] J.L. BATOZ - G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis. Tome 3 Coques. Hermès 1992.
- [3] D. BUI - F. VOLDOIRE : Présentation d'un élément fini de coque cylindrique P2 en membrane et Morley en flexion. Note EDF-DER-MMN, HI 71/6715, du 10.10.90.
- [4] X. DESROCHES : Calcul des contraintes aux nœuds par une méthode locale de lissage par moindres carrés. Note EDF-DER-MMN du 20.01.92 [R3.06.03].
- [5] G. DHATT - G. TOUZOT : Une présentation de la méthode des éléments finis. 2ème édition. Maloine SA 1984.
- [6] GREEN - ZERNA : Theoretical elasticity. Univ. Oxford 1954.
- [7] TIMOSHENKO et WOINOWSKY-KRIEGER : Plaques et coques. Béranger 1961.
- [8] F. VOLDOIRE : Formulation et évaluation numérique d'un modèle de coque élastoplastique axisymétrique enrichie. Note EDF-DER-MMN, HI-73/7518, du 04.02.92.
- [9] D. BUI : Le cisaillement dans les plaques et les coques : modélisation et calcul. Note EDF-DER-MMN, HI-71/7784, du 20.02.92.
- [10] S. ANDRIEUX - F. VOLDOIRE : Modèles de coques. Applications en statique linéaire. Ecole d'Été CEA-EDF-INRIA d'Analyse Numérique 1992.