

Manuel de Référence

Fascicule R3.06 : Eléments mécaniques et thermiques pour les milieux continus
Document : R3.06.06

Fonctions de forme et points d'intégration des éléments pyramide à base carrée

Résumé :

Le mailleur libre de CASTEM 2000 créant dans certaines conditions des mailles de forme pyramidale à base quadrangulaire, les éléments finis associés ont été implantés dans le *Code_Aster*.

Ces éléments ont la particularité d'avoir des fonctions de forme rationnelles, bien que garantissant un raccord continu avec les tétraèdres ou les hexaèdres classiques.

L'expression des fonctions de forme et des formules d'intégration numérique nous ont été communiquées par le CEA/DMT [bib1] et sont donc celles utilisées par CASTEM 2000.

1 Généralités

Deux nouveaux éléments finis pyramide à base carrée ont été implantés dans le *Code_Aster* pour les modélisations mécanique et thermique tridimensionnelles :

- pyramide à 5 nœuds,
- pyramide à 13 nœuds.

Les fonctions de forme associées à ces éléments sont des fonctions rationnelles qui permettent d'avoir un raccord continu (C^0) entre ces éléments et les tétraèdres et hexaèdres classiques.

Par exemple, la fonction de forme associée à un sommet de la base de la pyramide est le produit des équations des plans passant par les autres nœuds, divisé par la distance à la base de la pyramide. Sur une face triangulaire de la pyramide contenant ce sommet, la distance à l'axe se simplifie avec l'équation du plan de la face opposée : l'expression de la fonction forme est alors celle des triangles traditionnels.

Les fonctions de forme ne sont pas dérivables au sommet de la pyramide. L'intégration par points de Gauss ne peut donc être exacte même pour l'élément de référence.

2 Pyramide à base carrée

2.1 Dénominations

Les noms des éléments finis sont codés et respectent les conventions suivantes

- les caractères en position 1 à 4 désignent le phénomène modélisé :

MECA : mécanique

THER : thermique

- le caractère en position 5 est _,
- à partir du caractère 6, le nom de la maille support :

PYRAM5 : pyramide à base carrée à 5 nœuds,

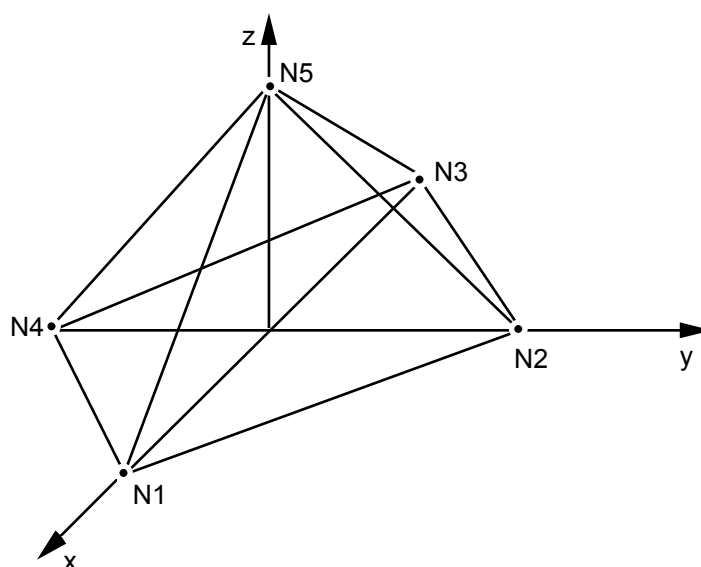
PYRAM13 : pyramide à base carrée à 13 nœuds.

Exemple :

MECA_PYRAM5 : pyramide à base carrée à 5 nœuds en mécanique.

2.2 Géométrie, topologie et fonctions de forme

2.2.1 Pyramide à 5 nœuds



La base carrée est constituée par le quadrangle $N_1 N_2 N_3 N_4$ et N_5 est le sommet de la pyramide.

	x	y	z
N_1	1.	0.	0.
N_2	0.	1.	0.
N_3	-1.	0.	0.
N_4	0.	-1.	0.
N_5	0.	0.	1.

Fonctions de forme :

$$w_1 = \frac{(-x + y + z - 1)(-x - y + z - 1)}{4(1 - z)}$$

$$w_2 = \frac{(-x - y + z - 1)(x - y + z - 1)}{4(1 - z)}$$

$$w_3 = \frac{(x + y + z - 1)(x - y + z - 1)}{4(1 - z)}$$

$$w_4 = \frac{(x + y + z - 1)(-x + y + z - 1)}{4(1 - z)}$$

$$w_5 = z$$

Formule d'intégration numérique à 5 points :

Point	x	y	z	Poids
1	0.5	0.	h_1	2/15
2	0.	0.5	h_1	2/15
3	-0.5	0.	h_1	2/15
4	0.	-0.5	h_1	2/15
5	0.	0.	h_2	2/15

avec :

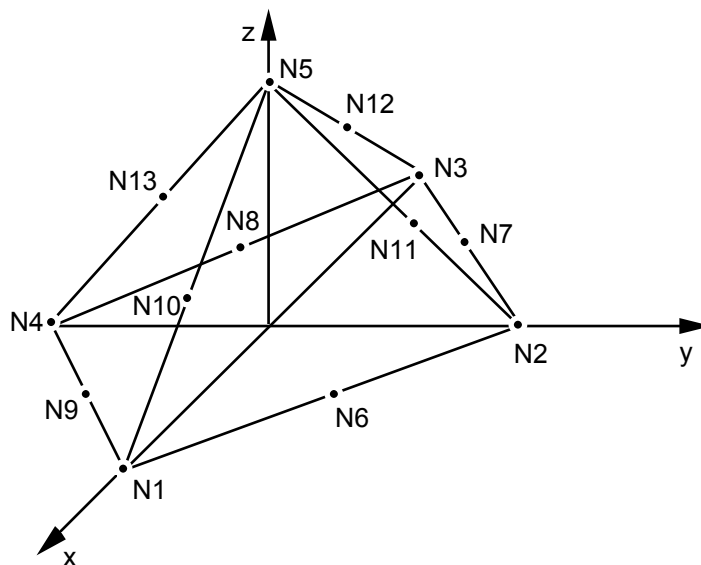
$$h_1 = 0.1531754163448146$$

$$h_2 = 0.6372983346207416$$

1 famille initialisée :

1ère famille : formule à 5 points.

2.2.2 Pyramide à 13 nœuds



La base carrée est constituée par la maille QUAD8 (N₁ N₂ N₃ N₄ N₆ N₇ N₈ N₉) et N₅ est le sommet de la pyramide.

	x	y	z
N ₁	1.	0.	0.
N ₂	0.	1.	0.
N ₃	-1.	0.	0.
N ₄	0.	-1.	0.
N ₅	0.	0.	1.
N ₆	0.5	0.5	0.
N ₇	-0.5	0.5	0.
N ₈	-0.5	-0.5	0.
N ₉	0.5	-0.5	0.
N ₁₀	0.5	0.	0.5
N ₁₁	0.	0.5	0.5
N ₁₂	-0.5	0.	0.5
N ₁₃	0.	-0.5	0.5

Fonctions de forme :

$$w_1 = \frac{(-x + y + z - 1)(-x - y + z - 1)(x - 0.5)}{2(1 - z)}$$

$$w_2 = \frac{(-x - y + z - 1)(x - y + z - 1)(y - 0.5)}{2(1 - z)}$$

$$w_3 = \frac{(x - y + z - 1)(x + y + z - 1)(-x - 0.5)}{2(1 - z)}$$

$$w_4 = \frac{(x + y + z - 1)(-x + y + z - 1)(-y - 0.5)}{2(1 - z)}$$

$$w_5 = 2z(z - 0.5)$$

$$w_6 = -\frac{(-x + y + z - 1)(-x - y + z - 1)(x - y + z - 1)}{2(1 - z)}$$

$$w_7 = -\frac{(-x - y + z - 1)(x - y + z - 1)(x + y + z - 1)}{2(1 - z)}$$

$$w_8 = -\frac{(x - y + z - 1)(x + y + z - 1)(-x + y + z - 1)}{2(1 - z)}$$

$$w_9 = -\frac{(x + y + z - 1)(-x + y + z - 1)(-x - y + z - 1)}{2(1 - z)}$$

$$w_{10} = \frac{z(-x+y+z-1)(-x-y+z-1)}{1-z}$$

$$w_{11} = \frac{z(-x-y+z-1)(x-y+z-1)}{1-z}$$

$$w_{12} = \frac{z(x-y+z-1)(x+y+z-1)}{1-z}$$

$$w_{13} = \frac{z(x+y+z-1)(-x+y+z-1)}{1-z}$$

Formule d'intégration numérique : formule à 6 points

Point	x	y	z	Poids
1	a	0.	h_1	p_1
2	0.	a	h_1	p_1
3	-a	0.	h_1	p_1
4	0.	-a	h_1	p_1
5	0.	0.	h_2	p_2
6	0.	0.	h_3	p_3

avec :

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.1024890634400000 \\ p_2 &= 0.1100000000000000 \\ p_3 &= 0.1467104129066667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 0.5702963741068025 \\ h_1 &= 0.1666666666666666 \\ h_2 &= 0.08063183038464675 \\ h_3 &= 0.6098484849057127 \end{aligned}$$

Formule à 27 points :

Point	x	y	z	Poids
1	0.	0.	1/2	a ₁
2	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b ₆
3	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b ₆
4	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b ₆
5	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b ₆
6	0.	0.	$\frac{1-b_1}{2}$	b ₆
7	0.	0.	$\frac{1+b_1}{2}$	b ₆
8	c ₁ (1-z)	0.	(1-c ₁)/2	c ₈
9	0.	c ₁ (1-z)	(1-c ₁)/2	c ₈
10	-c ₁ (1-z)	0.	(1-c ₁)/2	c ₈
11	0.	-c ₁ (1-z)	(1-c ₁)/2	c ₈
12	c ₁ (1-z)	0.	(1+c ₁)/2	c ₈
13	0.	c ₁ (1-z)	(1+c ₁)/2	c ₈
14	-c ₁ (1-z)	0.	(1+c ₁)/2	c ₈
15	0.	-c ₁ (1-z)	(1+c ₁)/2	c ₈
16	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1-d ₁)/2	d ₁₂
17	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1-d ₁)/2	d ₁₂
18	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1-d ₁)/2	d ₁₂
19	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1-d ₁)/2	d ₁₂
20	d ₁ (1-z)	0.	1/2	d ₁₂
21	0.	d ₁ (1-z)	1/2	d ₁₂
22	-d ₁ (1-z)	0.	1/2	d ₁₂
23	0.	-d ₁ (1-z)	1/2	d ₁₂
24	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1+d ₁)/2	d ₁₂
25	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1+d ₁)/2	d ₁₂
26	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1+d ₁)/2	d ₁₂
27	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	(1+d ₁)/2	d ₁₂

avec :

$$\begin{aligned}a_1 &= 0.788073483 \\b_6 &= 0.499369002 \\b_1 &= 0.848418011 \\c_8 &= 0.478508449 \\c_1 &= 0.652816472 \\d_{12} &= 0.032303742 \\d_1 &= 1.106412899\end{aligned}$$

Remarque :

Il s'est avéré en pratique, en particulier pour les éléments thermiques, que la formule d'intégration à 6 points n'était pas satisfaisante. On n'utilise donc que la formule à 27 points.

1 famille initialisée :

1^{ère} famille : formule à 27 points.

3 Bibliographie

- [1] F. DUBON : "Formulation d'un élément pyramide à base carrée". Rapport DMT B4/310 (SMTS/LAMS/84-144). Commissariat à l'Energie Atomique.