

Manuel de Référence**Fascicule R3.03 : Conditions aux limites et chargements****Document : R3.03.04**

Efforts extérieurs de pression en grands déplacements

Résumé :

Un chargement de pression en grands déplacements est un chargement suiveur. En employant des éléments de peau, on est amené à calculer, d'une part, un second membre dont le calcul est proche de celui en petits déplacements, et d'autre part, un terme de rigidité supplémentaire, qui n'est en général pas symétrique. On choisit néanmoins de le symétriser, escomptant un gain de temps appréciable même si quelques itérations supplémentaires peuvent être nécessaires pour converger.

Table des matières

1 Introduction	3
2 Travail virtuel des efforts extérieurs de pression	3
3 Variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression	4
4 Adoption d'un paramétrage curviligne de la surface	5
5 Introduction dans le <i>Code_Aster</i>	6
6 Cas particulier d'une structure soumise à une pression interne ou externe constante	7
7 Bibliographie	8

1 Introduction

La prise en compte de chargements de type pression (mot-clé `PRES_REP` dans la commande `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01]) pose un certain nombre de difficultés en l'absence de l'hypothèse de petits déplacements. En effet, à la différence des charges mortes évoquées au [R5.03.20], la pression dépend des déplacements puisqu'il s'agit d'un effort dont la direction est normale au domaine ; on parle alors de forces suiveuses, activées par le mot-clé `TYPE_CHARGE` : 'SUIV' dans la commande `STAT_NON_LINE` [U4.32.01]. Néanmoins, le choix de la configuration actuelle comme configuration de référence (lagrangien actualisé) conduit à des expressions simples - moyennant quelques notions de géométrie différentielle - du travail des efforts de pression et de sa variation première par rapport au déplacement, cette dernière étant une forme bilinéaire non symétrique.

2 Travail virtuel des efforts extérieurs de pression

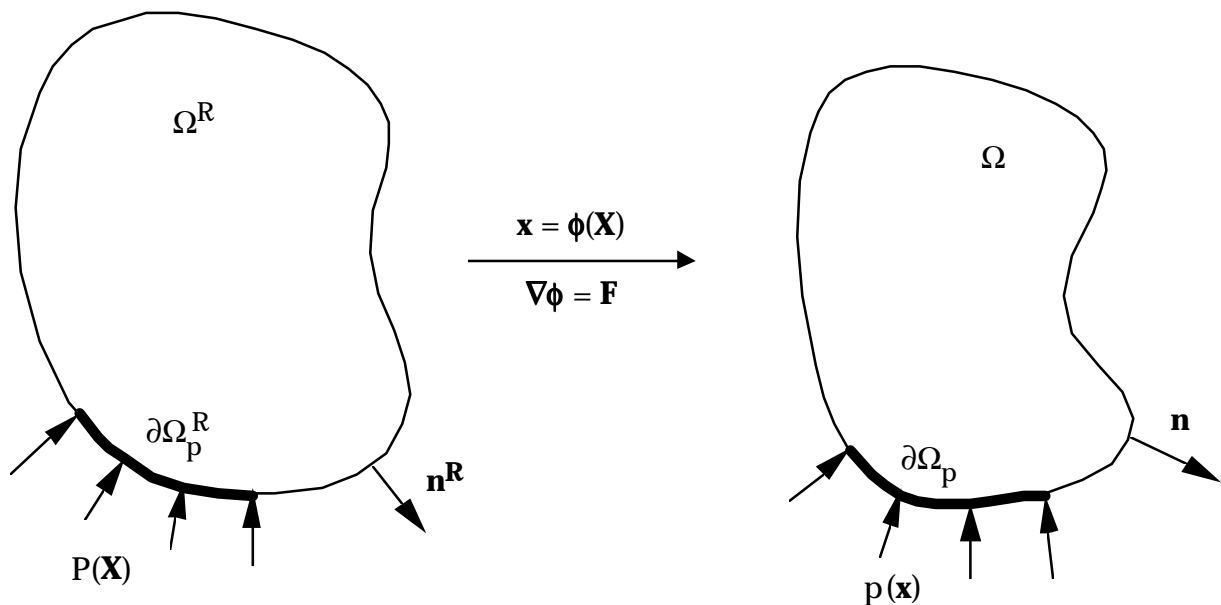


Figure 2-a : Configuration de référence et configuration actuelle

Dans la configuration actuelle, le travail virtuel des efforts extérieurs de pression s'écrit simplement [Figure 2-a] :

$$W_p(\mathbf{u}).\delta\mathbf{v} = \int_{\partial\Omega_p(\mathbf{u})} -p \mathbf{n} \delta\mathbf{v} ds \quad \text{éq 2-1}$$

De plus, on suppose dorénavant que la valeur de la pression ne dépend pas explicitement du déplacement mais seulement du point matériel d'application :

$$p(\mathbf{x}) = P(\phi(\mathbf{X}))$$

Dans ce cas, on peut alors exprimer le travail virtuel des efforts de pression dans la configuration de référence :

$$W_p(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\partial \Omega_p^R} -P \det(\mathbf{F})^T \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}^R \delta \mathbf{v}(\phi(\mathbf{X})) ds^R \quad \text{éq 2-2}$$

Sur le plan pratique, on utilisera la formule [éq 2-1] pour calculer le travail des efforts de pression. Toutefois, la formule [éq 2-2] est la mieux adaptée à une dérivation par rapport au déplacement, dont on va voir la nécessité au paragraphe suivant.

3 Variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression

Dans l'optique d'une résolution du problème d'équilibre de la structure par une méthode de Newton, on est amené à exprimer la variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression par rapport au déplacement, de manière similaire à ce qui a été fait pour le travail virtuel des efforts intérieurs au [R5.03.20]. Le domaine d'intégration étant fixe dans l'expression [éq 2-2], la dérivation sous le signe somme est licite, (cf. [bib2]) :

$$\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\partial \Omega_p^R} -P \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [\det(\mathbf{F})^T \mathbf{F}^{-1}] \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^R \delta \mathbf{v} ds^R$$

Nous décidons de choisir comme configuration de référence la configuration actuelle, pour laquelle $\mathbf{F} = \mathbf{Id}$. Ce choix conduit à une expression simple de la dérivée du terme entre crochets :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} [\det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}] \cdot \delta \mathbf{u} = \text{div}(\delta \mathbf{u}) \mathbf{Id} - {}^T \nabla \delta \mathbf{u}$$

Finalement, la variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression s'écrit dans la configuration actuelle :

$$\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\partial \Omega_p(\mathbf{u})} -p [\text{div}(\delta \mathbf{u}) \mathbf{Id} - {}^T \nabla \delta \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \delta \mathbf{v} ds \quad \text{éq 3-1}$$

Dans l'expression [éq 3-1] subsiste une difficulté. En effet, on s'attend à obtenir une grandeur essentiellement surfacique alors que l'intégrande fait apparaître des termes de dérivation normale à la surface. Autrement dit, il faut connaître l'expression des déplacements virtuels non seulement sur la surface du domaine mais aussi à l'intérieur de celui-ci (dans un voisinage de la surface pour pouvoir exprimer les dérivées normales). Cet inconvénient n'est pas anodin puisque dans le *Code_Aster*, pour calculer les termes élémentaires dus aux efforts surfaciques, on emploie des éléments de peau pour lesquels une variation normale n'a pas de sens.

4 Adoption d'un paramétrage curviligne de la surface

Pour remédier au problème mentionné précédemment, il faut chercher à exprimer la relation [éq 3-1] à l'aide de grandeurs surfaciques uniquement. Pour cela, on a recours à des éléments de géométrie différentielle, [bib1], dont on adopte les notations (en particulier, on adopte la convention de sommation des indices répétés où les indices grecs prennent les valeurs 1 et 2 tandis que les indices latins prennent les valeurs 1 à 3).

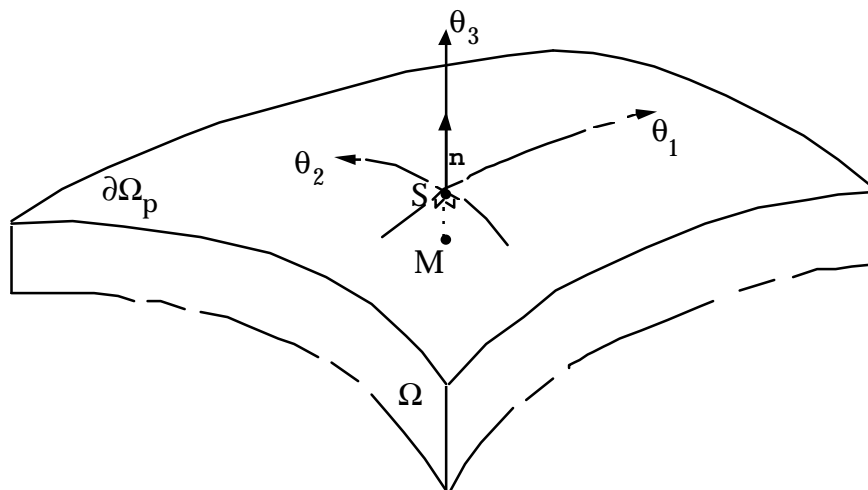


Figure 4-a : Paramétrage curviligne du voisinage de la surface soumise à la pression

Soit (θ^1, θ^2) un paramétrage admissible de la surface. Pour décrire le volume constitué d'un voisinage de cette surface, on lui adjoint une troisième variable, θ^3 , qui mesure la progression suivant la normale unitaire \mathbf{n} en (θ^1, θ^2) . On a ainsi [fig 4-a] :

$$\mathbf{OM}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{OS}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{n}(\theta^1, \theta^2)$$

Avec ce choix de paramétrage, la base naturelle covariante $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ et le tenseur métrique \mathbf{g} sont :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta^1} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta^2} \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta^3} = \mathbf{n} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce paramétrage curviligne, l'intégrande [éq 3-1] a pour expression :

$$-p \, g_{ij} \, n^i \left[\delta u^k \Big|_k \delta v^j - \delta u^j \Big|_k \delta v^k \right]$$

Ce terme se simplifie considérablement. En effet, on peut déjà noter que lorsque $j = k$, le terme entre crochet est nul. En outre, dans le système curviligne adopté, les composantes contravariantes de \mathbf{n} sont : $n^1 = 0, n^2 = 0, n^3 = 1$. Enfin, en tenant compte de la forme particulière de \mathbf{g} , la variation du travail s'écrit simplement :

$$\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\partial \Omega_p(\mathbf{u})} -p \left[\delta u^\alpha \Big|_\alpha \delta v^3 - \delta u^3 \Big|_\alpha \delta v^\alpha \right] ds \quad \text{éq 4-1}$$

Sur cette expression, on constate que seuls interviennent des opérateurs différentiels surfaciques (dérivation covariante par rapport à θ^1 et θ^2 seulement), ce qui est bien le but recherché. En introduisant la base contravariante $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 = \mathbf{n})$, appelée aussi base duale et qui s'exprime à partir de la base covariante par $\mathbf{g}^i = [\mathbf{g}^{-1}]^{ij} \mathbf{g}_j$, on peut s'affranchir des composantes curvilignes :

$$\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\partial \Omega_p(\mathbf{u})} -p \left[\left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \theta^\alpha} \cdot \mathbf{g}^\alpha \right) (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \theta^\alpha} \cdot \mathbf{n} \right) (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^\alpha) \right] ds \quad \text{éq 4-2}$$

C'est dorénavant l'expression [éq 4-2] qui sera utilisée pour calculer la variation du travail virtuel des efforts de pression.

5 Introduction dans le Code_Aster

Dans le *Code_Aster*, des éléments finis de peau (éléments surfaciques plongés dans un espace tridimensionnel) sont employés pour discrétiser les déplacements réels et virtuels intervenant dans des expressions surfaciques telles que [éq 2-1] et [éq 4-2]. Ces dernières permettent d'exprimer respectivement le vecteur second membre et la matrice de rigidité dus à la pression, dont l'emploi par l'algorithme de STAT_NON_LINE est précisé en [R5.03.01] et qui appellent quelques remarques :

- Le calcul du travail virtuel des efforts de pression [éq 2-1] est en fait identique à celui effectué en petits déplacements, moyennant une réactualisation préalable de la géométrie. Rappelons qu'il est effectué à chaque itération.
- Le calcul de la variation du travail virtuel des efforts de pression [éq 4-2], effectué à chaque construction de la matrice de rigidité, s'avère un peu plus délicat dans la mesure où il nécessite la connaissance de la métrique de l'élément de peau en chacun de ses points de Gauss. Si on appelle N_n les fonctions de forme et \mathbf{x}_n la position des noeuds de l'élément, alors la métrique est calculée comme suit :

$$\mathbf{g}_\alpha = \sum_n \frac{\partial N_n}{\partial \theta^\alpha} \mathbf{x}_n \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2\|} \quad [\mathbf{g}]_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad \mathbf{g}^\alpha = [\mathbf{g}^{-1}]^{\alpha\mu} \mathbf{g}_\mu$$

En outre, cette variation se comporte comme un terme complémentaire de la matrice de rigidité tangente ; en général, il n'est **pas symétrique** (sauf cas particulier d'une structure soumise à une pression interne ou externe constante, cf. [§6]). Il est alors souhaitable d'échelonner la stratégie de résolution. Dans un premier temps, on ne considère que la partie symétrique de ce terme complémentaire : le problème reste symétrique, même s'il nécessite (peut-être) quelques itérations supplémentaires. C'est le choix effectué dans le *Code_Aster*. En cas de problèmes de convergence, on pourrait considérer ce terme complémentaire dans son intégralité en étant prêt à payer le prix d'une résolution non symétrique.

6 Cas particulier d'une structure soumise à une pression interne ou externe constante

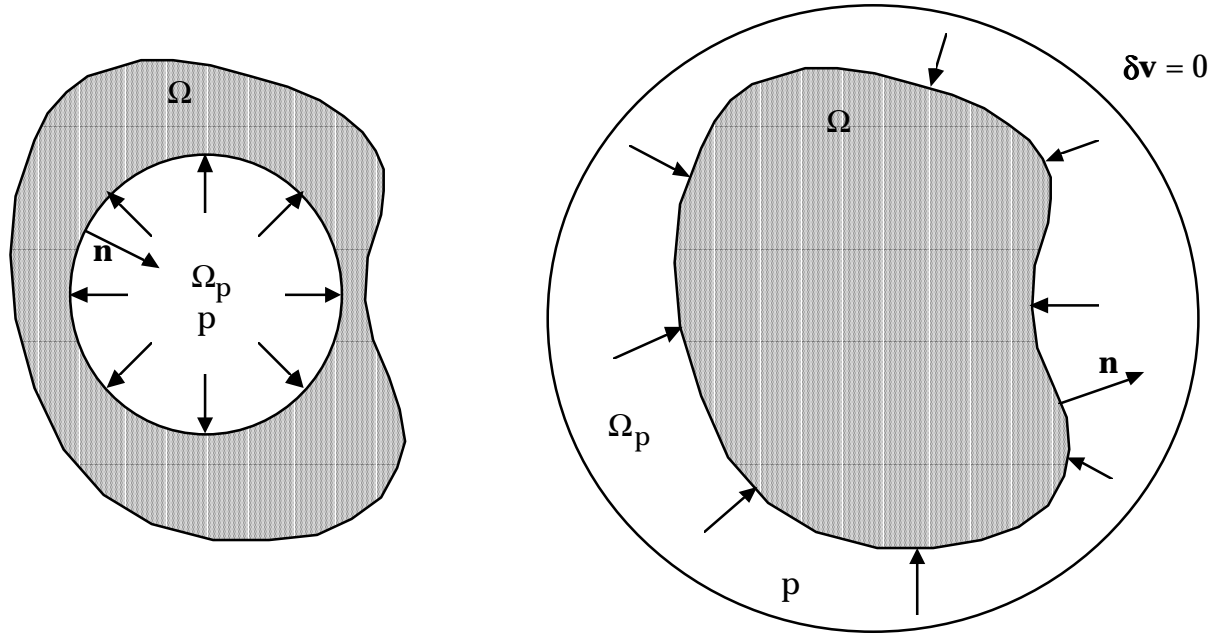


Figure 6-a : Structure sous pression interne ou externe constante

Dans le cas particulier d'une pression constante dans une cavité [Figure 6-a], on montre que les efforts de pression dérivent d'un potentiel qui n'est autre que le produit de la pression par le volume de la cavité. Ce résultat s'étend au cas d'une structure plongée dans un fluide à pression constante.

$$\mathbb{P} = p \int_{\Omega_p} d\Omega = p \int_{\Omega_p^R} \det(\mathbf{F}) d\Omega^R$$

A nouveau, on choisit comme configuration de référence la configuration actuelle. La variation de \mathbb{P} conduit alors bien au travail virtuel des efforts extérieurs de pression :

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{v} = p \int_{\Omega_p} \text{div}(\delta \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial \Omega_p} -p \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = W_p \delta \mathbf{v}$$

Dans ce cas particulier, la variation du travail virtuel est aussi la seconde variation du potentiel \mathbb{P} , c'est-à-dire une forme bilinéaire **symétrique** :

$$\frac{\partial W_p}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbb{P}}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v}$$

7 Bibliographie

- [1] Fung Y. C. : Foundations of solid mechanics. Prentice Hall. 1965, pp 31-57.
- [2] Mialon P. : Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode θ . EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches - Série C - n° 3. 1988, pp 1-28.