

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R4.03 : Analyse de sensibilité**  
**Document : R4.03.02**

# Calcul de sensibilités en thermique

**Résumé :**

Lors de simulations numériques l'obtention d'un résultat brut n'est plus suffisante. L'utilisateur est de plus en plus demandeur de calcul de sensibilité par rapport aux données d'entrée du problème. Cela lui permet d'estimer l'incertitude à laquelle répond le champ résultat en fonction de la loi de variation des données. Cette dérivée est aussi le substrat de base de problèmes inverses (recalage de paramètres...) et de problèmes d'optimisation.

Cette sensibilité peut être obtenue « manuellement », mais l'expérience montre que ces études paramétriques sont souvent coûteuses, peu mutualisables et moins fiables qu'un calcul analytique implanté dans le logiciel de calcul.

**Dans cette note, on se place dans le périmètre d'utilisation des opérateurs thermiques standards du Code\_Aster et on s'intéresse à cette sensibilité analytique du champ de température et de son flux par rapport aux caractéristiques matériau et aux chargements.** On y décrit le processus permettant d'exhumer le système linéaire que vérifie cette dérivée. Afin de minimiser le surcoût calcul, un effort particulier a été apporté pour lier sa résolution à celle du problème initial.

**On détaille les travaux théoriques, numériques et informatiques qui ont présidé à l'implantation de ces calculs de sensibilité dans le code.** On spécifie leurs propriétés et leurs limitations tout en reliant ces considérations à un paramétrage précis des opérateurs incriminés et aux choix de modélisation du code. On a essayé de constamment lier les différents items abordés tout en détaillant, a minima, les démonstrations un peu techniques.

**L'environnement requis, le paramétrage et le périmètre d'utilisation de cette nouvelle fonctionnalité sont décrits. Un exemple extrait d'un cas-test officiel est explicité.**

---

## Table des matières

---

1	Problématique .....	4
2	Thermique linéaire .....	8
2.1	Dérivée par rapport à la chaleur volumique .....	10
2.1.1	Eléments théoriques .....	10
2.1.2	Implantation dans le Code_Aster .....	13
2.2	Dérivée par rapport à la conductivité thermique .....	15
2.2.1	Eléments théoriques .....	15
2.2.2	Implantation dans le Code_Aster .....	16
2.3	Dérivée par rapport à la source .....	18
2.3.1	Eléments théoriques .....	18
2.3.2	Implantation dans le Code_Aster .....	18
2.4	Dérivée par rapport à la température imposée .....	19
2.4.1	Eléments théoriques .....	19
2.4.2	Implantation dans le Code_Aster .....	20
2.5	Dérivée par rapport au flux normal imposé .....	22
2.5.1	Eléments théoriques .....	22
2.5.2	Implantation dans le Code_Aster .....	22
2.6	Dérivée par rapport au coefficient d'échange convectif .....	24
2.6.1	Eléments théoriques .....	24
2.6.2	Implantation dans le Code_Aster .....	25
2.7	Dérivée par rapport à la température extérieure .....	26
2.7.1	Eléments théoriques .....	26
2.7.2	Implantation dans le Code_Aster .....	27
3	Thermique non linéaire .....	28
3.1	Dérivée par rapport à la chaleur volumique .....	29
3.1.1	Eléments théoriques .....	29
3.1.2	Implantation dans le Code_Aster .....	34
3.2	Dérivé par rapport à la conductivité thermique .....	37
3.2.1	Eléments théoriques .....	37
3.2.2	Implantation dans le Code_Aster .....	38
3.3	Dérivée par rapport à la source .....	38
3.3.1	Eléments théoriques .....	38
3.3.2	Implantation dans le Code_Aster .....	39
3.4	Dérivée par rapport à la température imposée .....	39
3.4.1	Eléments théoriques .....	39
3.4.2	Implantation dans le Code_Aster .....	40
3.5	Dérivée par rapport au flux normal imposé linéaire .....	41
3.5.1	Eléments théoriques .....	41

3.5.2	Implantation dans le Code_Aster.....	42
3.6	Dérivée par rapport au flux normal imposé non-linéaire .....	42
3.6.1	Eléments théoriques .....	42
3.6.2	Implantation dans le Code_Aster.....	43
3.7	Dérivée par rapport au coefficient d'échange convectif.....	43
3.7.1	Eléments théoriques .....	43
3.7.2	Implantation dans le Code_Aster.....	44
3.8	Dérivée par rapport à la température extérieure.....	45
3.8.1	Eléments théoriques .....	45
3.8.2	Implantation dans le Code_Aster.....	46
3.9	Dérivée par rapport à l'émissivité/constante de Stefan-Boltzmann .....	46
3.9.1	Eléments théoriques .....	46
3.9.2	Implantation dans le Code_Aster.....	47
3.10	Dérivée par rapport à la température à l'infini.....	48
3.10.1	Eléments théoriques .....	48
3.10.2	Implantation dans le Code_Aster .....	49
4	Récapitulatif des sensibilités de la température.....	50
5	Sensibilité du flux de chaleur.....	54
6	Mise en œuvre dans le Code_Aster.....	56
6.1	Difficultés particulières .....	56
6.2	Environnements nécessaires/paramétrages.....	56
6.3	Périmètre d'utilisation .....	60
6.4	Exemple d'utilisation.....	61
7	Conclusion/Perspective .....	63
8	Bibliographie .....	64
Annexe 1	Notion de dérivée « au sens des distributions ».....	65

## 1 Problématique

Lors de simulation numérique, l'obtention d'un résultat à partir d'un jeu de données n'est plus suffisant. Compte-tenu des incertitudes qui pèsent sur l'évaluation des chargements, des géométries et des caractéristiques matériau, compte-tenu aussi des approximations numériques dues aux modélisations employées, à leurs discrétisations spatio-temporelles et aux algorithmes de résolution, **l'utilisateur est de plus en plus demandeur de calculs de sensibilité** [bib5]. On cherche alors à évaluer la sensibilité d'une variable par rapport à une donnée d'entrée du problème. Elle permet d'estimer l'incertitude (la fonction probabiliste) à laquelle répond le champ résultat en fonction de la loi de variation de certaines données.

Cette dérivée peut être estimée « manuellement », mais ces d'études paramétriques sont souvent coûteuses, peu mutualisables et moins fiables qu'un calcul analytique implanté dans le code.

### Remarques :

- Les sensibilités par différences finies sont bien sûr dépendantes du paramètres de décalage et du maillage, mais en non-linéaire, un autre facteur aggravant se superpose : le degré de convergence de la solution. En toute rigueur, celui-ci intervient aussi sur la qualité des sensibilités analytiques, car on utilise le champ de température solution pour assembler le système linéaire « dérivé ».
- La troisième voie regroupe les techniques de différentiation automatique (ODYSSEE [bib7], [bib9] ...) mais elles ne sont pas implantables dans le Code\_Aster du fait de son architecture logicielle (transmission d'arguments entre les routines par pointeur ...). De toute façon ces produits sont encore « relativement embryonnaires » et leur utilisation semble contingentée à des problèmes modèles ou à des parties de logiciels bien spécifiques. L'idéal serait bien sûr d'incorporer cette problématique dès le compilateur...

Récemment, l'introduction de calculs de **sensibilité de champs thermo-mécaniques** [R4.03.01] et du **taux de restitution d'énergie** [R7.02.01] **par rapport à une variation de domaine**, a montré la pertinence et la faisabilité de ce type d'approche dans le Code\_Aster. En couplant ce dernier avec le logiciel PROBAN, on peut ainsi connaître la probabilité d'amorçage de la rupture pour une distribution de variation de domaine donnée. Ce type d'études mécano-fiabilistes a été, par exemple, mené dans le cadre du projet PROMETE [bib4] pour déterminer la probabilité de rupture d'une cuve REP en considérant la variabilité de l'épaisseur de son revêtement intérieur. Ces sensibilités peuvent aussi intervenir de manière cruciale dans la résolution de problèmes inverses (recalage de paramètres...) et dans de nombreux problèmes d'optimisation.

Dans ce document, on se restreint aux **problèmes thermiques linéaires et non-linéaires du Code\_Aster** et donc aux sensibilités analytiques du champ de température  $T$  (et de son flux) par rapport aux caractéristiques matériau et aux chargements. On se place dans **le périmètre d'utilisation des opérateurs thermiques standards (les chargements sont supposés fixes, on ne s'intéresse donc pas aux phénomènes de convection-diffusion en repère mobile de THER\_NON\_LINE\_MO [R5.02.04]) pour des éléments finis isoparamétriques (on ne traite pas le problème thermique pour les coques minces [R3.11.01] (modélisation COQUE\_\*) et pour les éléments de Fourier (resp. AXIS-FOURIER)) (THER\_LINEAIRE [R5.02.01] et THER\_NON\_LINE [R5.02.02]) et aussi dans celui des opérateurs de pré-traitement des données (DEFI\_MATERIAU [U4.44.01], AFFE\_MATERIAU [U4.44.03] et AFFE\_CHAR\_THER [U4.44.02])**.

On ne s'intéresse qu'à la **dérivation de  $T$  et de son flux**, champs dépendant des variables d'espace  $x$  et de temps  $t$  et de paramètres matériaux et chargements, **par rapport à un de ces paramètres** (qui doit être un scalaire constant par zones géométriques (ces sous-parties sont supposées distinctes et immobiles, on néglige ainsi notamment les phénomènes de dilatation)). Ainsi considérons, par exemple, un bi-matériau dont la conductivité thermique isotrope est un réel constant par zones :  $\lambda_1$  sur  $\Omega_1$  et  $\lambda_2$  sur  $\Omega_2$

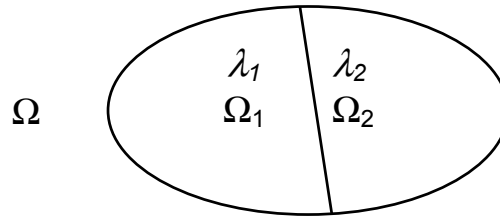


Figure 1-a : Désignation des conductivités thermiques pour un bi-matériau

On modélise donc la conductivité thermique globale sous la forme :

$$\lambda(\mathbf{x}) := \lambda_1 I_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 I_2(\mathbf{x}) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{éq 1-1}$$

avec  $I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème partie ( $I_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{\Omega_i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ). On s'intéresse à la sensibilité

du champ de température par rapport à l'un des deux paramètres  $\left( \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} \right)_{\lambda_i = \lambda_i^0}(\mathbf{x}, t)$ . Le problème se

formule de la même manière pour un chargement ou pour une condition limite.

En paramétrant à bon escient les « chargements et matériaux dérivés » (cf. [§6.2], [§6.4]) les calculs développés par la suite et les développements informatiques qu'ils sous-tendent peuvent aussi prendre en compte des modélisations plus sophistiquées avec plusieurs dépendances spatiales et temporelles. Par exemple, considérant une source thermique,

$$s(\mathbf{x}, t) := s_1 I_1(\mathbf{x}) \omega_1(\mathbf{x}, t) + s_2 I_2(\mathbf{x}) \omega_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{éq 1-2}$$

on peut calculer  $\left( \frac{\partial T}{\partial s_i} \right)_{s_i = s_i^0}(\mathbf{x}, t)$  en paramétrant  $\frac{\partial s}{\partial s_1} = I_1 \omega_1 = \begin{cases} \omega_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ 0 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$  et

$\frac{\partial s}{\partial s_2} = I_2 \omega_2 = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ \omega_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$  dans la définition des sources dérivées. Dans le reste du document,

nous nous restreignons à la première modélisation [éq 1-1], afin de ne pas surcharger les développements théoriques ultérieurs, mais aussi parce qu'elle paraît plus proche des besoins réels des utilisateurs. Au cas par cas, nous spécifions toutefois les dérivations plus sophistiquées qui sont accessibles compte-tenu des nouvelles fonctionnalités introduites et du périmètre d'utilisation du code.

Afin de pouvoir plus facilement commuter la dérivation spatiale ou temporelle avec la dérivation par rapport à un des paramètres, on travaille avec une dérivation « **au sens des distributions** » sur le **problème parabolique initial** (dérivation explicitée en annexe 1). Mais le même exercice aurait pu être mené à partir de sa version semi-discrétisée en temps, de la formulation variationnelle ou du système linéaire (on prend alors la « dérivée discrète » c'est-à-dire par rapport aux composantes du paramètre discrétisé) résultant de sa discrétisation. En thermique linéaire, on montre que ces dérivations, à chaque étape du processus numérique, conduisent au même résultat. Le problème dérivé discrétisé étant identique au problème dérivé discret, les résultats théoriques exhumés sur le problème continu peuvent s'appliquer au problème effectivement mis en œuvre.

**L'approche retenue pour le calcul des sensibilité est donc purement analytique.** On aurait pu lui préférer une **méthode semi-analytique** (c'est la démarche en partie retenue par les codes MSC/NASTRAN, FEMtools et ABAQUS (cf. [§9] [bib8])) : globalement analytique pour la détermination du problème dérivé et utilisant des différences finies au niveau local pour déterminer les dérivées des matrices et des seconds membres dérivés élémentaires. Mais cette dernière, bien que plus facile à implanter et à maintenir, est aussi plus coûteuse et elle introduit une dépendance vis-à-vis du paramètre de décalage.

Pour la **thermique linéaire**, le **problème « dérivé » est très similaire au problème initial**. Le **premier membre du système linéaire résultant est conservé**. Il n'a donc pas à être réassemblé, seul le second membre est à étoffer par un terme source idoine. Les résultats théoriques d'existence, d'unicité et de convergence de la solution ne sont pas sensiblement modifiés. L'obtention de la dérivée en température requiert les mêmes processus numériques (dualisation et inversion du système linéaire résultant).

Par contre, en **thermique non-linéaire**, le **problème dérivé est métamorphosé** : l'opérateur parabolique est modifié. Il est devenu linéaire, tout comme les conditions limites. Ces dernières ne sont plus que de deux types : Dirichlet ou Robin, exit les conditions de Neumann et de rayonnement. Du fait de son caractère linéaire, les résultats théoriques habituels sont donc beaucoup plus faciles à exhumier. D'autre part la résolution du problème dérivé est plus rapide et plus robuste que celle du problème initial. On n'a pas besoin d'avoir recours à un algorithme de Newton-Raphson pour déterminer l'incrément de température entre deux instants contigus. Un solveur linéaire suffit : nul n'est besoin d'assembler une matrice tangente à chaque sous-itération.

Cette fois les deux membres de cette équation sont foncièrement différents de ceux du problème en température. Cependant, après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on n'a pas à réassembler toute la matrice du système linéaire et son second membre associé. Il suffit de compléter la première matrice tangente du pas de temps suivant par le terme dû à la non-linéarité de la conductivité thermique. On part aussi du second membre du problème en température pour constituer celui qui nous intéresse : on l'étoffe par les termes d'implication des non-linéarités de la conductivité thermique et des conditions limites.

On détaille les travaux théoriques, numériques et informatiques qui ont présidé à l'implantation de ces calculs de sensibilités dans le code. On spécifie leurs propriétés et leur limitations tout en reliant ces considérations à un paramétrage précis des opérateurs incriminés et aux choix de modélisation du code. On a essayé de constamment lier les différents items abordés tout en détaillant, a minima, les démonstrations un peu techniques.

En bref, le périmètre d'utilisation de cette fonctionnalité regroupe la thermique, linéaire ou non, isotrope ou anisotrope, stationnaire ou transitoire, s'appuyant sur des éléments finis isoparamétriques lumpés ou non. Dans ce cadre là, elle recouvre le même périmètre que celui des opérateurs thermiques incriminés.

**La demande d'une ou plusieurs sensibilités ne fait qu'enrichir la structure de données thermique (EVOL\_THER) et fournit aussi le champ thermique dont elles sont la dérivée. En terme de performance, le calcul d'une sensibilité analytique est bien moins coûteux qu'un calcul standard puisqu'on réutilise la même matrice factorisée.**

Outre le calcul de sensibilités en thermique, le *Code\_Aster* propose leurs pendants en mécanique statique ou quasi-statique [R4.03.03] et en dynamique [R4.03.04]. Toutes ces fonctionnalités et leurs post-traitements associés (impressions, tests...) sont reprises dans la documentation utilisateur [U4.50.02] et font partie des livrables du projet « Incertitudes des calculs numériques » [bib5].

Ce document s'articule autour des parties suivantes :

- dans un premier temps, on s'intéresse aux différentes problématiques résultants de la dérivation du problème de thermique linéaire (THER\_LINEAIRE) par rapport aux paramètres des caractéristiques matériau et des chargements,
- puis on réitère ce processus sur le problème de thermique non linéaire (THER\_NON\_LINE),
- les différents systèmes linéaires « dérivés », - directement implantables dans le Code\_Aster pour déterminer telle ou telle sensibilité -, sont récapitulés dans la troisième partie,
- dans le paragraphe suivant, on décrit les post-traitements requis pour obtenir les sensibilités du flux de chaleur (CALC\_ELEM/CALC\_NO),
- on conclut en abordant les difficultés pratiques de mise en œuvre, l'environnement, le paramétrage et le périmètre d'utilisation. Un exemple d'utilisation extrait d'un cas-test officiel (SENST04A) est aussi détaillé.

## Avertissement :

*Le lecteur pressé et/ou peu intéressé par les ressorts théoriques de la genèse de ces sensibilités et les détails de modélisation du code peut, d'emblée, sauter aux [§4] et [§6] qui récapitulent les principaux apports théoriques et pratiques des chapitres précédents.*

## 2 Thermique linéaire

On considère un corps occupant un ouvert borné connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^q$  ( $q=2$  ou  $3$ ) de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne caractérisé par sa chaleur volumique à pression constante  $\rho C_p(\mathbf{x})$  (la variable vectorielle  $\mathbf{x}$  symbolise ici le couple  $(x,y)$  (resp.  $(x,y,z)$ ) pour  $q=2$  (resp.  $q=3$ )) et son coefficient de conductivité thermique isotrope  $\lambda(\mathbf{x})$ . Ces données matériaux sont supposées indépendantes du temps (modélisation `THER` du `Code_Aster`) et constantes par élément (discrétisation  $P_0$ ).

### Remarque :

Avec la modélisation `THER_FO` ces caractéristiques peuvent dépendre du temps. Dès les premières versions du code et avant la mise en place de `THER_NON_LINE`, elle permettait de simuler des « pseudo » non-linéarités. Compte-tenu de son utilisation plutôt marginale, nous nous intéresserons pas, dans un premier temps, à sa dérivation.

On s'intéresse aux évolutions de la température en tout point  $\mathbf{x}$  de l'ouvert et à tout instant  $t \in [0, \tau[$  ( $\tau > 0$ ), lorsque le corps est soumis à des conditions limites et à des chargements indépendants de la température mais pouvant dépendre du temps. Il s'agit de source volumique  $s(\mathbf{x}, t)$ , de conditions aux limites de type température imposée  $f(\mathbf{x}, t)$  (sur la portion de surface externe  $\Gamma_1$ ), flux normal imposé  $g(\mathbf{x}, t)$  (sur  $\Gamma_2$ ) et échange convectif  $h(\mathbf{x}, t)$  et  $T_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$  (sur  $\Gamma_3$ ).

On se place ainsi dans la cadre d'application de l'opérateur `THER_LINEAIRE` [R5.02.01] du `Code_Aster` en ne retenant que les aspects conductifs de ce problème thermique linéaire.

Ce problème aux limites mêlé (de type Cauchy-Dirichlet-Neumann-Robin (appelée aussi condition de Fourier) inhomogène, linéaire et à coefficients variables) se formule

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \nabla T) = s & \Omega \times ]0, \tau[ \\ T = f & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = g & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_{\text{ext}} & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ T(\mathbf{x}, 0) = T^0(\mathbf{x}) & \Omega \end{cases} \quad \text{éq 2-1}$$

### Remarques :

- La condition de Robin modélisant l'échange convectif (mot-clé `ECHANGE`) sur une portion de bords du domaine, peut se dédoubler pour tenir compte d'échanges entre deux sous-parties de la frontière en vis-à-vis (mot-clé `ECHANGE_PAROI`). Cette condition limite modélise une résistance thermique d'interface

$$\text{Avec } \Gamma_3 = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}, T_i = T|_{\Gamma_{ij}} \text{ on a } \begin{cases} \lambda \frac{\partial T_1}{\partial n} + hT_1 = hT_2 & \Gamma_{12} \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial T_2}{\partial n} + hT_2 = hT_1 & \Gamma_{21} \times ]0, \tau[ \end{cases} \quad \text{éq 2-2}$$

- La condition de Dirichlet peut se généraliser sous forme de relations linéaires entre les ddls (mot-clés `LIAISON_*`) pour simuler, notamment, des symétries géométriques de la structure.



Avec  $\Gamma_1 = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}$ ,  $T_i = T_{|\Gamma_{ij}}$  on a( *LIAISON\_GROUP* )

$$\sum_i \beta_{1i} T_1^i(\mathbf{x}, t) + \sum_j \beta_{2j} T_2^j(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \quad \text{éq 2-3}$$

ou plus simplement  $\sum_i \beta_i T_i(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \quad ( \text{LIAISON\_DDL} )$

- On ne parlera pas des fonctionnalités *LIAISON\_UNIF* et *LIAISON\_CHAMNO* qui permettent d'imposer une même température (inconnue) à un ensemble de nœuds, car elles ne sont qu'une surcouche des conditions précédentes imposant des couples  $(\beta, \gamma)$  particuliers.
- Lorsque le matériau est anisotrope (modélisation *THER\_ORTH*), la conductivité est modélisée par une matrice diagonale exprimée dans le repère d'orthotropie du matériau. Cela ne change pas fondamentalement les calculs suivant qui ne tiennent compte que du cas isotrope. Il faut juste prendre garde de ne plus commuter, dans les conditions limites de Neumann et de Robin, le produit scalaire avec la normale et la multiplication par la conductivité. En pratique, dans les calculs élémentaires, on ne s'intéresse pas aux dérivées normales. Le problème ne se pose donc que dans la partie théorique préliminaire.  
**La sensibilité par rapport à une des composantes de la conductivité anisotrope n'est pas encore disponible.** Ces calculs ont été mis en place dans les sous-routines incriminées (calculs élémentaires *TE..*), ils n'attendent plus que l'évolution logicielle consistant à étendre la prise en compte de l'anisotropie aux fonctions (une modélisation *THER\_ORTH\_FO*). En effet, d'un point de vue architecture (cf. *DEFI\_PARA\_SENSI* [bib6]), la variable *ASTER* représentant le paramètre sensible se doit d'être un objet informatique de type fonction.
- Dans tous les calculs de sensibilités suivants, on ne calcule que la dérivé par rapport à un paramètre constant par zone.** Sinon, il faudrait introduire une notion de dérivée directionnelle !  
Ceci n'exclut pas une dépendance temporelle ou spatiale de caractéristiques matériau ou de chargements. En paramétrant à bon escient les chargements et matériaux « dérivés » dans le fichier de commande, on peut aussi avoir accès à certaines dérivés composées (cf. [§6.2]/[§6.4]).
- Pour un calcul transitoire, la température initiale peut être choisie de trois manières différentes : en effectuant un calcul stationnaire sur le premier instant, en la fixant à une valeur uniforme ou quelconque créée par un *AFFE\_CHAM\_NO* et en effectuant une reprise à partir d'un calcul transitoire précédent. Ce choix va avoir une incidence sur l'initialisation du problème dérivé.
- Nous ne traiterons pas le cas où (presque) tous les chargements sont multipliés par une même fonction dépendante du temps (option *FONC\_MULT* (cette fonctionnalité bien adaptée pour certains problèmes mécaniques est déconseillée en thermique, car elle peut rentrer en conflit avec la dépendance temporelle des chargements et, d'autre part, elle s'applique sélectivement à chacun d'eux. Elle n'a d'ailleurs pas été reprise dans *THER\_NON\_LINE*)).

Afin de pouvoir envisager les différentes dérivées de la température dans des configurations multimatériau et multichargement on introduit les notations suivantes :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_i \overline{\Omega}_i$$

$$\Gamma_i = \bigcup_{ij} \Gamma_{ij} \quad (i = 1, 2 \text{ ou } 3)$$

Les caractéristiques matériau et les chargements seront indicés pour notifier leur appartenance à tel ou tel ouvert ou portion de frontière. Ainsi, si on s'intéresse à un bi-matériau,  $\alpha_1$  modélise la chaleur volumique du matériau occupant le premier ouvert  $\Omega_1$  et  $\alpha_2$  celle du matériau occupant le second ouvert  $\Omega_2$ .

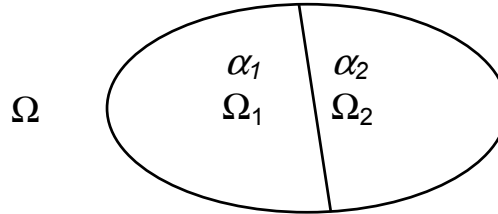


Figure 2-a : Désignation des chaleurs volumiques pour un bi-matériau

## 2.1 Dérivée par rapport à la chaleur volumique

### 2.1.1 Eléments théoriques

On modélise la chaleur volumique globale sous la forme  $\rho C_p(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i I_i(\mathbf{x})$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ). Tous les ouverts étant figés, on a  $\frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème partie  $\Omega_i$ . La dérivation de [éq 2-1] nous conduit alors « trivialement » (cf Annexe 1) au nouveau problème aux limites dont **est solution la sensibilité recherchée**, notée  $u = \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}$ ,

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\lambda \nabla u) = \tilde{s} & \Omega \times ]0, \tau[ \\ u = \tilde{f} & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{g} & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n} + hu = \tilde{h} & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ u(\mathbf{x}, 0) = \tilde{u}_0 & \Omega \end{cases} \quad \text{éq 2.1.1-1}$$

avec la nouvelle source volumique et les nouvelles conditions limites et initiale

$$\tilde{f} = \tilde{g} = \tilde{h} = 0, \quad \tilde{s} = -I_i \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{et} \quad \tilde{u}_0 = 0 \quad \text{éq 2.1.1-2}$$

On est donc amené à résoudre un problème homogène en  $u$  similaire à celui auquel répond  $T$ . On fixe un pas de temps  $\Delta t$  tel que  $\frac{\tau}{\Delta t}$  soit un entier  $N$ . La **semi-discrétisation en temps** de [éq 2.1.1-1], [éq 2.1.1-2] par la  $\theta$ -méthode mène au problème suivant : trouver une suite.

## Remarque :

En utilisant une adaptation du théorème de Lax-Milgram aux problèmes paraboliques ([R4.10.03 §1] ou [bib1] théorèmes 1 & 2 chap XVIII pp615-620 ou [bib3] pp220-241) on montre, sous certaines conditions de régularité sur l'ouvert, les matériaux, les chargements et la condition initiale, que ce problème admet une solution unique.

$$(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0 = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\Gamma_1} = 0\} \quad \text{éq 2.1.1-3}$$

Cet espace comporte aussi les conditions de Dirichlet « généralisées » de type relations linéaires entre ddls lorsqu'elles existent.

telle que :

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1-\theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = \frac{\tilde{s}^{n+1} - \tilde{s}^n}{\Delta t} & \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ u^{n+1} = \tilde{f}^{n+1} & \Gamma_1 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \lambda \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = \tilde{g}^{n+1} & \Gamma_2 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \lambda \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} + h^{n+1} u^{n+1} = \tilde{h}^{n+1} & \Gamma_3 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ u^0(\mathbf{x}) = \tilde{u}_0 & \Omega \end{cases} \quad \text{éq 2.1.1-4}$$

en posant :

$$u^n = u\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right), \quad \tilde{s}^n = -\frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i}(\mathbf{x}) T\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right), \quad \tilde{f}^n = \tilde{g}^n = \tilde{h}^n = 0 \quad \text{et} \quad h^n = h\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right) \quad \text{éq 2.1.1-5}$$

En appliquant le théorème de Green à [éq 2.1.1-3], [éq 2.1.1-4], [éq 2.1.1-5] et en introduisant les notations suivantes

$$\chi^+ = \chi\left(\mathbf{x}, (n+1) \frac{\tau}{N}\right) \text{ et } \chi^- = \chi\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right) \text{ avec } \chi \in \{u, T, h\} \text{ et } 0 \leq n \leq N-1$$

on est amené à résoudre le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Etant donnés } h^\pm, T^\pm \text{ et } u^- \\ \text{Calculer } u^+ \in V_0 \text{ tel que} \\ \forall v \in V_0 \quad a^+(u^+, v) = l^\pm(v) \end{cases} \quad \text{éq 2.1.1-6}$$

avec la forme bilinéaire dépendant de l'instant courant (via  $h^+$ )

$$a^+(u^+, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho C_p u^+ v \, dx + \theta \int_{\Omega} \lambda \nabla u^+ \nabla v \, dx + \theta \int_{\Gamma_3} h^+ u^+ v \, d\sigma \quad \text{éq 2.1.1-7}$$

et la forme linéaire paramétrée par les instants courant et précédent (via  $h$ ,  $u$  et  $T$ )

$$l^\pm(v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho C_p u^\pm v dx + (\theta - 1) \int_{\Omega} \lambda \nabla u^\pm \nabla v dx + (\theta - 1) \int_{\Gamma_3} h^\pm u^\pm v d\sigma + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_i (T^- - T^+) v dx \quad \text{éq 2.1.1-8}$$

## Remarques :

- Contrairement au problème initial, le champ inconnu et la fonction test appartiennent au même espace fonctionnel, ce qui est plus confortable d'un point de vue théorique et numérique.
- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on s'appuie aussi sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Seul le second membre est à étoffer par le terme source idoine.
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8].
- Pour une condition d'échange entre parois, le terme d'échange usuel est bien sûr remplacé par (en reprenant les notations du [éq 2-2])  $\int_{\Gamma_{ij}} h^\pm (u_i^\pm - u_j^\pm) v d\sigma$ .
- Cette problématique d'initialisation idoine du problème dérivée est récurrente. On l'a retrouvée dans le calcul des dérivées lagrangiennes du champ de température par rapport à une variation de domaine (cf. [R4.03.01] opérande *DEUL\_INIT*).
- Le lecteur intéressé par une étude théorique du problème thermique effectivement mis en place dans le code, qui souligne ces tenants et aboutissants et leurs liens avec les choix de modélisation, pourra se reporter au [§1] de la doc. R : « Indicateur d'erreur en résidu pour la thermique transitoire » [R4.10.03]. Elle concerne un domaine connexe d'amélioration et de calibration des études, celui des erreurs spatiales dues aux maillages éléments finis.

Pour résoudre numériquement ce problème on le discrétise spatialement en considérant un sous-espace  $V_0^h$  de  $V_0$  de dimension fini

$$u_h^\pm = \sum_{i=1}^n u_i^\pm N_i \in V_0^h := \left\{ u_h^\pm \in V_0 / \forall K \in \mathcal{T}_h \quad u_h^\pm|_K \in P_k(K) \right\}$$

en notant  $(\mathcal{T}_h)_h$  une famille régulière de triangulations du domaine polygonal ou polyédrique discrétisé  $\Omega_h$ ,  $P_k(K)$  l'espace des polynômes de degré  $< (k+1)$  sur  $K$  et  $N_i$  la fonction de forme associée au nœud n°i. D'où le **problème variationnel discrétisé**

## Remarque :

Cette propriété de continuité globale des éléments et de maximisation de leurs caractéristiques géométriques (qui assure la convergence de la méthode des éléments finis) est vérifiée pour tous les éléments isoparamétriques du code : segment, triangle, quadrangle, tétraèdre, pentaèdre et hexaèdre.

$$\begin{cases} \text{Etant donnés } h_h^\pm, T_h^\pm \text{ et } u_h^- \\ \text{Calculer } u_h^+ \in V_0^h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_0^h \quad a_h^+(u_h^+, v_h) = l_h^\pm(v_h) \end{cases} \quad \text{éq 2.1.1-9}$$

conduisant au système linéaire d'ordre  $n$ .

$$\mathbf{A} \mathbf{U}^+ = \mathbf{L} \quad \text{éq 2.1.1-10}$$

Les  $p$  conditions aux limites de type Dirichlet sont prises en compte dans le *Code\_Aster* par une technique de double dualisation [R3.03.01] via des « ddls (degrés de liberté) » de Lagrange  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1,p}$ . Soit  $J$  l'ensemble des nœuds appartenant à la portion de frontière sur laquelle s'applique la condition de Dirichlet ( $\text{card}(J) = p$ ), on considère le nouveau vecteur inconnu  $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}^+ \quad \lambda \quad \lambda]^t$  et l'opérateur  $\mathbf{B}$  (d'ordre  $p \times n$ ) vérifiant

$$(\mathbf{B} \mathbf{U}^+)_i = u_i^+ \text{ avec } i \in J$$

La condition de Dirichlet homogène de [éq 2.1.1-1], [éq 2.1.1-2] est réalisée en imposant

$$\mathbf{B} \mathbf{U}^+ = \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Le **problème dualisé** consiste alors à inverser le système d'ordre  $n+2p$

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}}^+ = \tilde{\mathbf{L}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^t & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & -\text{Id} & \text{Id} \\ \mathbf{B} & \text{Id} & -\text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{éq 2.1.1-11}$$

**Remarque :**

- On effectue l'éventuelle prise en compte de conditions limites de Dirichlet généralisées comme dans le problème en température (ici  $p=1$ ) mais avec un second membre nul

$$\mathbf{B} \mathbf{U}^+ = \sum_j \beta_j u_j^+ \text{ avec } j \in J \text{ et } \mathbf{C} = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} = 0$$

Nous allons maintenant voir comment ces calculs se déclinent dans le code.

## 2.1.2 Implantation dans le *Code\_Aster*

La matrice de ce système résulte de l'assemblage des termes élémentaires suivants, dus à la contribution des nœuds  $(i,j)$  au point de gauss  $\xi_g$  (de poids  $\omega_g$  (ce poids regroupe en fait le « vrai poids » de la formule de quadrature multiplié par le jacobien de l'élément considéré et éventuellement par le rayon du point de gauss  $r_g$  (en modélisation *AXIS* ou *AXIS\_DIAG*))) de l'élément courant  $K$  (dans le *Code\_Aster* les conditions limites sont affectées sur des éléments de peau particuliers de dimension  $q-1$ . Aucune confusion n'étant vraiment possible, on ne fera pas ici de distinguo formel entre ceux-ci et les éléments de volume qui les supportent).

$$A_{ij}(K, \xi_g) = \sum_{i=1}^3 A_{ij}^i(K, \xi_g) \quad \text{éq 2.1.2-1}$$

avec

- le terme de masse thermique (calculé par l'option *MASS\_THER*)

$$A_{ij}^1(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \rho C_p(K) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

- le terme de rigidité thermique (*RIGI\_THER*)

$$A_{ij}^2(K, \xi_g) = \omega_g \theta \lambda(K) \nabla N_j(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- le terme de rigidité dû aux conditions limites d'échange (RIGI\_THER\_COEF\_F/R)

$$A_{ij}^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g \theta h^+ (\partial K \cap \Gamma_3) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

En cas d'échange entre parois ce terme est remplacé par (RIGI\_THER\_PARO\_F/R)

$$A_{ij}^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g \theta h^+ (\partial K \cap \Gamma_3) (N_j(\xi_g) - N_{f(j)}(\xi_g)) N_i(\xi_g)$$

en notant  $f$  la bijection mettant en vis-à-vis les deux parois.

Le second membre s'écrit, avec les mêmes notations,

$$L_j(K, \xi_g) = \sum_{i=1}^3 L_j^i(K, \xi_g) \quad \text{éq 2.1.2-2}$$

où

- le terme résultant de l'implication de la matrice de rigidité et de masse (nouvelle option CHAR\_SENS\_EVOL, copie de CHAR\_THER\_EVOL avec  $u^-$  au lieu de  $T^*$ , le champ matériau dérivé et standard et le nouveau terme source)

$$L_j^1(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \rho C_p(K) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g) + (\theta - 1) \omega_g \lambda(K) \nabla u^-(\xi_g) \cdot \nabla N_j(\xi_g)$$

- le terme résultant de l'implication des conditions limites d'échange (CHAR\_THER\_TEXT\_F/R avec  $T_{\text{ext}}=0$  et  $u^-$  au lieu de  $T^*$ )

$$L_j^2(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) h^- (\partial K \cap \Gamma_3) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

En cas d'échange entre parois ce terme est remplacé par (CHAR\_THER\_PARO\_F/R avec  $u^-$  au lieu de  $T^*$ )

$$L_j^2(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) h^- (\partial K \cap \Gamma_3) (u^-(\xi_g) - u^-(f(\xi_g))) N_j(\xi_g)$$

- le terme dû à la « nouvelle source » comportant le champ matériau dérivé (cf. CHAR\_SENS\_EVOL ci-dessus)

$$L_j^3(K, \xi_g) = -\frac{\omega_g}{\Delta t} I_i(K) (T^+(\xi_g) - T^-(\xi_g)) N_j(\xi_g)$$

Comme on l'a déjà précisé tous les termes élémentaires de la matrice font l'objet d'une option de calcul et auront déjà été évalués pour la calcul de  $T^*$ . Il reste donc à estimer le second membre en réutilisant (avec un paramétrage différent) les options de calcul existantes ou en introduisant une nouvelle (CHAR\_SENS\_EVOL). Cette nouvelle option est commune avec l'autre dérivée matériau (conductivité thermique) et elle redirige vers la même routine de calcul élémentaire (TE..). La chaîne de caractère centrale (SENS au lieu de THER) joint à une détection de la nullité du champ matériau dérivé, permet de paramétrer cette routine vers l'une de ses trois orientations possibles : calcul du terme de masse et de rigidité implicites standard, idem en sensibilité par rapport à une des deux caractéristiques matériau qui rajoute donc un nouveau terme source.

Conformément aux principes d'architecture mis en place dans le code pour traiter les calculs de sensibilité [bib6], l'assemblage et la résolution de [éq 2.1.1-11] sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = 0, \quad g = 0, \quad T_{\text{ext}} = 0, \quad s = -I_i \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{et} \quad u^0 = 0$$

Cette remontée d'information s'effectue via la succession de commandes

```

v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur de  $\alpha_i$  > )
ma = DEFI_MATERIAU ( THER = _F/ RHO_CP = v )
affe = AFFE_MATERIAU ( AFFE = _F/ GROUP_MA = < définition de  $\Omega_i$  >,
                        MATER = ma )

...

un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F/ NOM_SD = 'ma' , PARA_SENSI = 'v' ,
                 NOM_COMPOSE = 'ma_v' )
ma_v = DEFI_MATERIAU ( THER = _F/ RHO_CP = un )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F/ NOM_SD = 'affe' , PARA_SENSI = 'v' ,
                 NOM_COMPOSE = 'affe_v' )
affe_v = AFFE_MATERIAU ( AFFE = _F/ GROUP_MA = <  $\Omega_i$  >, MATER = ma_v )

...

resu = THER_LINEAIRE ( CHAM_MATER = affe ,
                       SENSIBILITE = ( v )
                       ...)
    
```

## Remarques :

- Dans son fichier de commande, l'utilisateur n'aura bientôt plus qu'à préciser le premier et le troisième blocs d'instruction. Le bloc du milieu sera généré automatiquement par le superviseur grâce à l'arbre de dépendance qu'il construit entre les différentes commandes.

- La donnée essentielle de ce calcul, la chaleur volumique dérivée  $I_i = \frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i}$ , est fournie par

**ma\_v**.

- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la chaleur volumique

$$\rho C_p(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}) \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme

$$\text{source } \frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i} = I_i \omega_i \text{ dans la définition du champ matériau dérivé } \mathbf{ma\_v}.$$

Nous allons dérouler le même processus pour les différentes sensibilités, à commencer par celle concernant l'autre caractéristique matériau : la conductivité thermique.

## 2.2 Dérivée par rapport à la conductivité thermique

### 2.2.1 Éléments théoriques

On pose  $\lambda(\mathbf{x}) = \sum_i \lambda_i I_i(\mathbf{x})$  ( $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ) et  $u = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i}$  la sensibilité recherchée. Tous les ouverts

étant figés, on a  $\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème partie  $\overline{\Omega_i}$ . La dérivation de [éq 2-1] nous

conduit à un problème aux limites identique à [éq 2.1.1-1] mais avec une source volumique non nulle et des nouvelles conditions de Neumann et de Robin

$$\tilde{g} = \tilde{h} = -I_i \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{et} \quad \tilde{s} = \text{div}(I_i \nabla T) \quad \text{éq 2.2.1-1}$$

C'est un problème de Cauchy-Dirichlet homogène et de Neumann-Robin inhomogène similaire à celui auquel répond  $T$ . Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 2.1.1-4] dont la première relation se réécrit

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = \tilde{\mathcal{S}}^{n+1} + (1 - \theta) \tilde{\mathcal{S}}^n \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

**éq 2.2.1-2**

avec le nouveau terme source

$$\tilde{\mathcal{S}}^m = \operatorname{div}(I_i \nabla T^m) \quad m \in \{n, n+1\}$$

**éq 2.2.1-3**

et les nouvelles conditions limites

$$\tilde{g}^{n+1} = \tilde{h}^{n+1} = -I_i \frac{\partial T^n}{\partial n}$$

**éq 2.2.1-4**

D'où un problème variationnel identique à [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] comportant la même forme bilinéaire [éq 2.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 2.1.1-7] dont **seule la quatrième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source

$$l^\pm(v) = \dots - \int_{\Omega} I_i (\theta \nabla T^+ + (1 - \theta) \nabla T^-) \nabla v \, dx$$

**éq 2.2.1-5**

## Remarques :

- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^*$  à partir de  $T$ , on s'appuie sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Seul le second membre est à étoffer par le terme source idoine.
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [éq 2.2.1-5].
- En régime stationnaire ce terme source complémentaire est réduit à

$$l(v) = \dots - \int_{\Omega} I_i \nabla T \cdot \nabla v \, dx$$

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 2.2.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§2.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier

$$L_j^3(K, \xi_g) = -\omega_g I_i(K) (\theta \nabla T^+(\xi_g) + (1 - \theta) \nabla T^-(\xi_g)) \nabla N_j(\xi_g)$$

**éq 2.2.2-1**

Ce qui est fait dans la nouvelle option de calcul CHAR\_SENS\_EVOL avec le champ matériau dérivé et standard.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = 0, \quad g = h T_{ext} = -I_i \frac{\partial T}{\partial n}, \quad s = \operatorname{div}(I_i \nabla T) \text{ et } u^0 = 0$$



Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.1.2] en substituant LAMBDA (ou LAMBDA\_L/T/N en orthotrope) à RHO\_CP dans les DEFI\_MATERIAU.

## Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, la conductivité thermique dérivée  $I_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_i}$ , est fournie par `ma_v`.
- Lorsque le matériau est anisotrope la matrice de conductivité thermique est exprimée dans le repère d'orthotropie du matériau : elle est donc diagonale (dans notre exemple  $q=2$ )

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

On peut alors dissocier la dérivation par rapport à une valeur d'un de ses termes diagonaux de la dérivation par rapport à une valeur de cette diagonale. Les formules détaillées ici sont

identiques quelle que soit la configuration retenue. Seule l'évaluation de  $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \lambda_k}$  ou  $\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \lambda_{kl}}$  doit

tenir compte de ces particularités.

- En pratique, on a accès à la sensibilité par rapport à une conductivité isotrope constante par zone. La sensibilité par rapport à une composante de la conductivité anisotrope n'est pas encore disponible.** Ces calculs ont été mis en place dans les sous-routines incriminées (calculs élémentaires TE..), ils n'attendent plus que l'évolution logicielle consistant à étendre la prise en compte de l'anisotropie aux fonctions (une modélisation `THER_ORTH_FO`). En effet, d'un point de vue architecture (cf. `DEFI_PARA_SENSI` [bib6]), la variable `ASTER` représentant le paramètre sensible se doit d'être un objet informatique de type fonction.
- On a raisonné ici comme si la condition de Cauchy du problème initiale avait été fixée uniforme ou quelconque. Si elle est déterminée en effectuant un calcul stationnaire sur le premier instant il faut réitérer ce processus avec le problème dérivé. Par contre, si il résulte d'une reprise à partir d'un calcul transitoire précédent, le problème dérivé doit être initialisé à partir de la valeur de la même dérivée au même instant de reprise. En bref, les deux initialisations (celle du problème en température et celle du problème dérivée) doivent être homogènes. Par contre, contrairement à un calcul de thermique standard, on ne peut donc pas modifier les conditions limites et il faut effectuer une reprise à partir d'un calcul de même nature.

- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la conductivité thermique

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_i \lambda_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}) \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau

terme source  $\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du champ matériau dérivé `ma_v`.

## 2.3 Dérivée par rapport à la source

### 2.3.1 Eléments théoriques

On pose  $s(\mathbf{x}) = \sum_i s_i I_i(\mathbf{x})$  ( $s_i \in \mathbb{R}$ ) et  $u = \frac{\partial T}{\partial s_i}$  la **sensibilité recherchée**. Tous les ouverts étant figés, on a  $\frac{\partial s}{\partial s_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème partie  $\overline{\Omega}_i$ . La dérivation de [éq 2-1] nous conduit à un problème aux limites identique à [éq 2.1.1-1] mais avec une autre source volumique

$$\tilde{s} = I_i \quad \text{éq 2.3.1-1}$$

C'est un problème homogène similaire à celui auquel répond  $T$ . Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 2.1.1-4] dont la première relation se réécrit

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = \tilde{s} \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 2.3.1-2}$$

**D'où un problème variationnel identique à [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] comportant la même forme bilinéaire [éq 2.1.1-7] joint à la forme linéaire [éq 2.1.1-8] dont seule la quatrième intégrale est modifiée pour s'adapter à la nouvelle source**

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Omega} I_i v \, dx \quad \text{éq 2.3.1-3}$$

#### Remarques :

- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on s'appuie aussi sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Seul le second membre est à étoffer par le terme source idoine.
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [éq 2.3.1-3].
- En régime stationnaire ce terme source complémentaire n'est pas modifié.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

### 2.3.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§2.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier

$$L_j^3(K, \xi_g) = \omega_g I_i(K) N_j(\xi_g) \quad \text{éq 2.3.2-1}$$

Il suffit de réutiliser l'option standard CHAR\_THER\_SOUR\_F/R avec le champ source dérivé.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = g = T_{ext} = 0, \quad s = I_i \quad \text{et} \quad u^0 = 0$$

Cette remontée d'information s'effectue via la succession de commandes

```

v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur de  $s_i$  > )
chth = AFFE_CHAR_THER_F ( SOURCE = _F / GROUP_MA = < définition de  $\Omega_i$  > ,
                           SOUR = v )

...
un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F / NOM_SD = 'chth' , PARA_SENSI = 'v' ,
                 NOM_COMPOSE = 'chth_v' )
chth_v = AFFE_CHAR_THER_F ( SOURCE = _F ( GROUP_MA = <  $\Omega_i$  > , SOUR = un ) )

...
resu = THER_LINEAIRE ( EXCIT = chth ,
                       SENSIBILITE = ( v )
                       ... )

```

## Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, le champ source dérivé  $I_i = \frac{\partial s}{\partial s_i}$ , est fournie par **chth\_v**.
- Ce calcul est indépendant des trois types de modélisation de la source : constante par maille (**AFFE\_CHAR\_THER + SOUR**), constante par point de Gauss (**AFFE\_CHAR\_THER + SOUR\_CALCULEE**) et constante par maille et dépendante du temps (**AFFE\_CHAR\_THER\_F + SOUR**). Ces considérations ne rentrent même pas en ligne de compte lors du calcul effectif de  $\frac{\partial s}{\partial s_i}$  dans **chth\_v**, car cette grandeur représente la dérivation d'une fonction paramétrée par un de ses paramètres constants. On ne s'intéresse pas ici à des dérivées du type  $\frac{\partial s}{\partial s_i(\xi_g^j)}(\mathbf{x}, t)$  ou  $\frac{\partial s}{\partial s_i(\mathbf{x}, t_j)}(\mathbf{x}, t)$ .
- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la source
$$s(\mathbf{x}, t) = \sum_i s_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (s_i \in \mathfrak{R})$$
dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme source  $\frac{\partial s}{\partial s_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé **chth\_v**.

## 2.4 Dérivée par rapport à la température imposée

### 2.4.1 Eléments théoriques

On pose  $f(\mathbf{x}) = \sum_i f_i I_i(\mathbf{x})$  ( $f_i \in \mathfrak{R}$ ) et  $u = \frac{\partial T}{\partial f_i}$  la **sensibilité recherchée**. Les portions de frontière externe  $\Gamma_{1j}$  étant figées, on a  $\frac{\partial f}{\partial f_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème portion  $\Gamma_{1i}$ . La dérivation de [éq 2-1] nous conduit à un problème aux limites identique à [éq 2.1.1-1] mais avec une autre source volumique et une nouvelle condition de Dirichlet

$$\tilde{f} = I_i \quad \text{et} \quad \tilde{s} = 0 \quad \text{éq 2.4.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet inhomogène et de Cauchy- Neumann-Robin homogène similaire à celui auquel répond  $T$ . Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite (cet espace peut comporter, si nécessaire, aussi des conditions de Dirichlet « généralisés » de type relations linéaires entre ddls)

$$(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_1 = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\Gamma_1} = I_i\} \quad \text{éq 2.4.1-2}$$

vérifiant un système similaire à [éq 2.1.1-3] dont la première relation se réécrit

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 2.4.1-3}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{f}^{n+1} = I_i \quad \text{éq 2.4.1-4}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] avec la même forme bilinéaire [éq 2.1.1-7] joint à la forme linéaire [éq 2.1.1-8] dont la quatrième intégrale est nulle.

## Remarques :

- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^*$  à partir de  $T$ , on s'appuie aussi sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Par contre cette fois il faut constituer la partie lagrangienne du second membre dualisé afin d'approximer le nouvel espace fonctionnel  $V_1$ .
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [éq 2.4.1-3], [éq 2.4.1-4].

La discrétisation spatiale dans un sous-espace  $V_1^h$  et la prise en compte de la condition de Dirichlet inhomogène conduisent à un **système linéaire dualisé similaire** à [éq 2.1.1-11]

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}}^+ = \tilde{\mathbf{L}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} & -\mathbf{Id} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{B} & \mathbf{Id} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \text{éq 2.4.1-5}$$

avec

$$C_k = \frac{\partial f_j}{\partial f_i} = \delta_{ij} \quad \text{éq 2.4.1-6}$$

en notant  $f_j$  la valeur de la condition de Dirichlet au nœud n°  $k$  (numérotation local) de  $\Gamma_1$ .

## 2.4.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§2.1.2], seul le second membre est modifié puisque

$$L_j^3(K, \xi_g) = 0 \quad \text{éq 2.4.2-1}$$

On n'a donc pas d'option de calcul particulière à prévoir, il faut juste assembler le système linéaire dualisé associé aux températures imposées dérivées.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = I_i, \quad g = T_{ext} = s = 0 \quad \text{et} \quad u^0 = 0$$

Cette remontée d'information s'effectue via la succession de commandes

```
v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur de  $f_i$  > )
chth = AFFE_CHAR_THER_F ( TEMP_IMPO = _F ( GROUP_MA = < définition de  $\Gamma_{li}$  >,
TEMP = v ))

...
un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F / NOM_SD = 'chth' , PARA_SENSI = 'v' ,
NOM_COMPOSE = 'chth_v' )
chth_v = AFFE_CHAR_THER_F ( TEMP_IMPO = _F ( GROUP_MA = <  $\Gamma_{li}$  >, TEMP = un ))

...
resu = THER_LINEAIRE ( EXCIT = chth ,
SENSIBILITE = ( v )
...)
```

## Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, le champ température imposée dérivé  $I_i = \frac{\partial f}{\partial f_i}$ , est fournie par **chth\_v**.
- Ce calcul est indépendant des trois types de modélisation de la température imposée : constante par maille (**AFFE\_CHAR\_THER** + **TEMP**), plus la dépendance en temps fournie par une fonction (**AFFE\_CHAR\_THER\_F** + **TEMP**) ou fournie par une structure de données '**EVOL\_THER**' (**AFFE\_CHAR\_THER\_F** + **EVOL\_THER** + '**TEMP**'). Ces considérations ne rentrent même pas en ligne de compte lors du calcul effectif de  $\frac{\partial f}{\partial f_i}$  dans **chth\_v**, car cette grandeur représente la dérivation d'une fonction paramétrée par un de ses paramètres constants. On ne s'intéresse pas ici à la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial f_i(\mathbf{x}, t_j)}(\mathbf{x}, t)$ .
- Le calcul de la dérivée de  $T$  par rapport à un des paramètres des relations de Dirichlet généralisées [éq 2-3] s'effectuerait de la même manière. Un *distinguo* apparaîtrait seulement au niveau des composantes lagrangiennes du système dualisé :

$$\text{Avec } u = \frac{\partial T}{\partial \beta_i} \quad \mathbf{B} \mathbf{U}^+ = \sum_j \beta_j u_j^+ \quad \text{avec } j \in J \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = - \sum_j \frac{\partial \beta_j}{\partial \beta_i} T_j^+ \quad \text{éq 2.4.2-2}$$

$$\text{Avec } u = \frac{\partial T}{\partial \gamma_i} \quad \mathbf{B} \mathbf{U}^+ = \sum_j \beta_j u_j^+ \quad \text{avec } j \in J \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_i} \quad \text{éq 2.4.2-3}$$

La prise en compte informatique de ces calculs s'effectuerait, comme ci-dessus, via les mots-clés **COEF\_MULT\_1/2** et **COEF\_IMPO** des mots-clé facteurs **LIAISON\_GROUP** et **LIAISON\_CHAMNO**.

- La sensibilité par rapport à un coefficient multiplicateur  $\beta$  de cette condition de Dirichlet généralisée n'est pas disponible [éq 2.4.2-2] car elle a peu de sens avec des coefficients souvent discrets. On n'a accès, en paramétrant à bon escient la condition de Dirichlet généralisée dérivée, qu'à la dérivation par rapport au coefficient total  $\gamma$  [éq 2.4.2-3].
- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée d'une condition de Dirichlet

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (f_i \in \mathcal{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme source  $\frac{\partial f}{\partial f_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé **chth\_v**.

## 2.5 Dérivée par rapport au flux normal imposé

### 2.5.1 Eléments théoriques

On pose  $g(\mathbf{x}) = \sum_i g_i I_i(\mathbf{x})$  ( $g_i \in \mathbb{R}$ ) et  $u = \frac{\partial T}{\partial g_i}$  la sensibilité recherchée. Les portions  $\Gamma_{2j}$  étant figées, on a  $\frac{\partial g}{\partial g_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème portion  $\Gamma_{2i}$ . La dérivation de [eq 2-1] nous conduit à un problème aux limites identique à [eq 2.1.1-1] mais avec une autre source volumique et une nouvelle condition de Neumann

$$\tilde{g} = I_i \quad \text{et} \quad \tilde{s} = 0 \quad \text{eq 2.5.1-1}$$

C'est un problème de Neumann inhomogène et de Cauchy-Dirichlet-Robin homogène similaire à celui auquel répond  $T$ . Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [eq 2.1.1-3] dont la première relation se réécrit

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{eq 2.5.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{g}^{n+1} = I_i \quad \text{eq 2.5.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [eq 2.1.1-6], [eq 2.1.1-7], [eq 2.1.1-8] comportant la même forme bilinéaire [eq 2.1.1-7] joint à la forme linéaire [eq 2.1.1-8] dont seule la quatrième intégrale est modifiée pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_2} I_i v \, dx \quad \text{eq 2.5.1-4}$$

#### Remarques :

- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on s'appuie aussi sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Seul le second membre est à étoffer par le terme source idoine.
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [eq 2.5.1-4]
- En régime stationnaire ce terme source n'est pas modifié.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [eq 2.1.1-11].

### 2.5.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§2.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier

$$L_j^3(\partial K \cap \Gamma_2, \xi_g) = \omega_g I_i (\partial K \cap \Gamma_2) N_j(\xi_g) \quad \text{eq 2.5.2-1}$$

Il suffit de réutiliser l'option standard CHAR\_THER\_FLUN\_F/R avec le champ flux dérivé.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = s = T_{ext} = 0, \quad g = I_i \quad \text{et} \quad u^0 = 0$$

Cette remontée d'information s'effectue via la succession de commandes

```

v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur de  $g_i$  > )
chth = AFFE_CHAR_THER_F ( FLUX_REP = _F ( GROUP_MA = < définition de  $\Gamma_{2i}$  >,
                                         FLUN = v ))

...
un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F / NOM_SD = 'chth' , PARA_SENSI = 'v' ,
                 NOM_COMPOSE = 'chth_v' )
chth_v = AFFE_CHAR_THER_F ( FLUX_REP = _F ( GROUP_MA = <  $\Gamma_{2i}$  >, FLUN = un ))

...
resu = THER_LINEAIRE ( EXCIT = chth ,
                       SENSIBILITE = ( v )
                       ...)

```

## Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, le champ flux normal dérivé  $I_i = \frac{\partial g}{\partial g_i}$ , est fournie par **chth\_v**.
- Ce calcul est indépendant des trois types de modélisation de la condition de Neumann : constante par maille (AFFE\_CHAR\_THER + FLUN), plus la dépendance en temps fournie par une fonction (AFFE\_CHAR\_THER\_F + FLUN) ou les composantes du flux vectoriel dépendantes du temps et constantes par mailles (AFFE\_CHAR\_THER\_F + FLUN\_X/Y/Z). On peut alors dissocier la dérivation par rapport au q-uplet des composantes de la dérivation par rapport à une de ses composantes. Les formules détaillées ici sont identiques quelle que soit la configuration retenue. Seule éventuellement l'évaluation de  $\frac{\partial g_i^l}{\partial g_j^k}$  ou  $\frac{\partial g_i^l}{\partial g_j}$  ( $l \in \{x, y, z\}$ ) doit tenir compte de ces particularités.
- La dépendance en temps de la condition de Neumann n'est pas prise en compte lors du calcul de  $\frac{\partial g}{\partial g_i}$  car cette grandeur représente la dérivation d'une fonction paramétrée par un de ses paramètres constants. On ne s'intéresse pas ici à la dérivée  $\frac{\partial g}{\partial g_i(\mathbf{x}, t_j)}(\mathbf{x}, t)$ .
- En pratique, on a donc accès à la sensibilité par rapport à un flux scalaire ou vecteur, constant par zone. En paramétrant à bon escient le vecteur flux dérivé, on peut aussi obtenir la sensibilité par rapport à une de ses composantes  $\frac{\partial T}{\partial g_i^j}(\mathbf{x}, t)$ .
- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée d'un flux normal  $g(\mathbf{x}, t) = \sum_i g_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t)$  ( $g_i \in \mathbb{R}$ ) dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme source  $\frac{\partial g}{\partial g_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé **chth\_v**.

## 2.6 Dérivée par rapport au coefficient d'échange convectif

### 2.6.1 Eléments théoriques

On pose  $h(\mathbf{x}) = \sum_i h_i I_i(\mathbf{x})$  ( $h_i \in \mathbb{R}$ ) et  $u = \frac{\partial T}{\partial h_i}$  la **sensibilité recherchée**. Les portions  $\Gamma_{3j}$  étant figées, on a  $\frac{\partial h}{\partial h_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème portion  $\Gamma_{3i}$ . La dérivation de [éq 2-1] nous conduit à un problème aux limites identique à [éq 2.1.1-1] mais avec une autre source volumique et une nouvelle condition de Robin

$$\tilde{h} = I_i (T_{ext} - T) \quad \text{et} \quad \tilde{s} = 0 \quad \text{éq 2.6.1-1}$$

C'est un problème de Robin inhomogène et de Cauchy-Dirichlet-Neumann homogène similaire à celui auquel répond  $T$ . Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 2.1.1-3] dont la première relation se réécrit

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 2.6.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{h}^{n+1} = I_i (T_{ext}^{n+1} - T^{n+1}) \quad \text{éq 2.6.1-3}$$

D'où un **problème variationnel identique à [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8]** comportant la même forme bilinéaire [éq 2.1.1-7] joint à la forme linéaire [éq 2.1.1-8] dont **seule la quatrième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_3} I_i \{ \theta (T_{ext}^+ - T^+) + (1 - \theta) (T_{ext}^- - T^-) \} v dx \quad \text{éq 2.6.1-4}$$

#### Remarques :

- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on s'appuie aussi sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Seul le second membre est à étoffer par le terme source idoine.
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [éq 2.6.1-4].
- Ces calculs se généralisent sans peine à la condition d'échange entre parois du [éq 2-2]. Il suffit de remplacer les termes  $\int_{\Gamma_{3i}} \chi^\pm (T_{ext}^\pm - T^\pm) v d\sigma$  par

$$\int_{\Gamma_{ij}} \chi^\pm (u_i^\pm - u_j^\pm) v d\sigma \quad \text{avec} \quad \chi \in \{h, \theta I_i, (1 - \theta) I_i\}.$$

- En stationnaire ce terme source complémentaire est réduit à

$$l(v) = \dots + \int_{\Gamma_3} I_i (T_{ext} - T) v dx$$

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].



## 2.6.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§2.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier

$$L_j^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g I_i(\partial K \cap \Gamma_3) \left\{ \begin{aligned} &\theta (T_{ext}^+(\partial K \cap \Gamma_3) - T^+(\xi_g)) + \\ &(1-\theta)(T_{ext}^-(\partial K \cap \Gamma_3) - T^-(\xi_g)) \end{aligned} \right\} N_j(\xi_g) \quad \text{éq2.6.2-1}$$

Ce qui est fait dans la nouvelle option de calcul CHAR\_SENS\_TEXT\_F avec les champs coefficient d'échange standard et dérivé.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = s = g = 0, \quad hT_{ext} = I_i (T_{ext} - T) \quad \text{et} \quad u^0 = 0$$

Cette remontée d'information s'effectue via la succession de commandes

```
v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur de h_i > )
chth = AFFE_CHAR_THER_F ( ECHANGE = _F ( GROUP_MA = < définition de Γ3i >,
                                         COEF_H = v , TEMP_EXT = w ) )
...
un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
zero = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 0. )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F / NOM_SD = 'chth' , PARA_SENSI = 'v' ,
                 NOM_COMPOSE = 'chth_v' ) )
chth_v = AFFE_CHAR_THER_F ( ECHANGE = _F ( GROUP_MA = < Γ3i >,
                                         COEF_H = un , TEMP_EXT = zero ) )
...
resu = THER_LINEAIRE ( EXCIT = chth ,
                      SENSIBILITE = ( v )
                      ... )
```

### Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, le champ coefficient d'échange dérivé  $I_i = \frac{\partial h}{\partial h_i}$ , est fournie par **chth\_v**.

- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée d'un coefficient d'échange

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_i h_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (h_i \in \mathbb{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer, à la fonction indicatrice, le nouveau

terme source  $\frac{\partial h}{\partial h_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé **chth\_v**.

## 2.7 Dérivée par rapport à la température extérieure

### 2.7.1 Eléments théoriques

Dans le cas d'échange convectif avec le milieu extérieur, on pose  $T_{ext}(\mathbf{x}) = \sum_i T_{ext}^i I_i(\mathbf{x})$  ( $T_{ext}^i \in \mathbb{R}$ )

et  $u = \frac{\partial T}{\partial T_{ext}^i}$  la **sensibilité recherchée**. Comme précédemment  $\frac{\partial T_{ext}}{\partial T_{ext}^i} = I_i$  la fonction indicatrice de

la ième portion  $\Gamma_{3i}$ . La dérivation de [éq 2-1] nous conduit à un problème aux limites identique à [éq 2.1.1-1] mais avec une autre source volumique et une nouvelle condition de Robin

$$\tilde{h} = h I_i \quad \text{et} \quad \tilde{s} = 0 \quad \text{éq 2.7.1-1}$$

C'est un problème de Robin inhomogène et de Cauchy-Dirichlet-Neumann homogène similaire à celui auquel répond  $T$ . Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 2.1.1-3] dont la première relation se réécrit

$$\rho C_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div}(\lambda \nabla u^{n+1}) - (1 - \theta) \operatorname{div}(\lambda \nabla u^n) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 2.7.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{h}^{n+1} = h^{n+1} I_i \quad \text{éq 2.7.1-3}$$

**D'où un problème variationnel identique à [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] comportant la même forme bilinéaire [éq 2.1.1-7] joint à la forme linéaire [éq 2.1.1-8] dont seule la quatrième intégrale est modifiée pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »**

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_3} I_i \{ \theta h^+ + (1 - \theta) h^- \} v dx \quad \text{éq 2.7.1-4}$$

#### Remarques :

- Le premier membre de cette équation est formellement identique à celui de l'équation en température. Après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on s'appuie aussi sur  $h^-$ ,  $h^+$  et  $u^-$  pour déterminer  $u^+$ . La matrice du système linéaire correspondant n'a pas à être réassemblée. Seul le second membre est à étoffer par le terme source idoine.
- En dérivant la formulation variationnelle (cf. [§5.1.3]) du problème en température [R5.01.02] on retrouve bien [éq 2.7.1-4].
- En régime stationnaire ce terme source est réduit à

$$l(v) = \dots + \int_{\Gamma_3} I_i h v dx$$

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 2.7.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§2.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier

$$L_j^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g I_i(\partial K \cap \Gamma_3) \{ \theta h^+(\partial K \cap \Gamma_3) + (1 - \theta) h^-(\partial K \cap \Gamma_3) \} N_j(\xi_g) \quad \text{éq 2.7.2-1}$$

Il suffit de réutiliser l'option standard CHAR\_THER\_TEXT\_F avec les champs coefficient d'échange standard et dérivé, et en la « bluffant » avec un champ  $T = 0$ .

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. On a vu que ce calcul est très proche d'un calcul thermique linéaire standard, seule la condition initiale et les chargements sont modifiés

$$f = s = g = 0, \quad T_{ext} = I_i \quad \text{et} \quad u^0 = 0$$

Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.6.2] en substituant TEMP\_EXT à COEF\_H dans l'AFFE\_CHAR\_THER\_F.

### Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, le champ température extérieure dérivée  $I_i = \frac{\partial T_{ext}}{\partial T_{ext}^i}$ , est fournie par `chth_v`.
- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la température extérieure
$$T_{ext}(\mathbf{x}, t) = \sum_i T_{ext}^i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (T_{ext}^i \in \mathcal{R})$$
dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme source  $\frac{\partial T_{ext}}{\partial T_{ext}^i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé `chth_v`.

## 3 Thermique non linéaire

En thermique non linéaire les caractéristiques matériaux  $\rho C_p(\mathbf{x}, T)$  et  $\lambda(\mathbf{x}, T)$  peuvent dépendre de la température (en thermique non-linéaire, on ne peut définir des matériaux anisotropes. Il n'existe pas de modélisation `THER_NL_ORTH`. Modélisation `THER_NL`). Le corps est soumis aux mêmes types de conditions limites et de chargements que le problème linéaire auxquelles se rajoutent deux conditions non-linéaires : flux normal imposé  $i(\mathbf{x}, T)$  (sur  $\Gamma_4$ ) et rayonnement à l'infini d'un corps gris (sur  $\Gamma_5$ ).

Cette dernière condition est modélisée ( $P_0$ ) par son émissivité  $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ , la constante de Stefan-Boltzmann  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  et la température à l'infini  $T_\infty(\mathbf{x}, t)$ .

L'opérateur du **Code\_Aster** dédié à ce type de problème est `THER_NON_LINE` [R5.02.02]. Il permet de résoudre le problème aux limites mêlé suivant (de type Cauchy-Dirichlet-Neumann-Robin-Rayonnement inhomogène, non-linéaire et à coefficients variables)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda(T) \nabla T) = s & \Omega \times ]0, \tau[ \\ T = f & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = g & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_{ext} & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = i(T) & \Gamma_4 \times ]0, \tau[ \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma \varepsilon [(T_\infty + 273.15)^4 - (T + 273.15)^4] & \Gamma_5 \times ]0, \tau[ \\ T(\mathbf{x}, 0) = T^0(\mathbf{x}) & \Omega \end{array} \right. \quad \text{éq 3-1}$$

**Les non-linéarités posent des problèmes théoriques pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution** [bib2]. Elles peuvent être aussi préjudiciables à la résolution numérique proprement dite.

Ainsi, en ce qui concerne la modélisation de la chaleur volumique  $\rho C_p(\mathbf{x}, T)$ , au cours d'une itération, soit parce que le transitoire thermique est violent, soit parce que la plage de changement de phase est très petite (par exemple, pour un corps pur), les deux itérés successifs de la température peuvent se situer de part et d'autre d'une de ses discontinuités. On a alors raté une grosse partie de l'information relative au changement de phase.

Pour s'affranchir de ce type de problème on réécrit la première équation de [éq 3-1] en introduisant une **fonction enthalpie volumique** qui va lisser ces non-linéarités (dépendante de  $T(\mathbf{x}, t)$  et en notant  $T^* = T(\mathbf{x}, t^*)$  la valeur de la température à un instant  $t^* < t$  arbitraire)

$$\frac{\partial \beta(T)}{\partial t} - \text{div}(\lambda(T) \nabla T) = s \quad \Omega \times ]0, \tau[$$

$$\text{avec } \beta(T) = \int_{T^*}^T \rho C_p(\xi) d\xi \quad \text{éq 3-2}$$

## Remarques :

- De part sa définition (différence d'une primitive (en température) de la chaleur volumique entre la température considérée et une température  $T^*$  à un instant arbitraire), la fonction enthalpie est connue à une constante d'intégration près. Il faudra donc veiller à ce que cette constante s'élimine dans toutes les expressions manipulées.
- Les conditions généralisées de type échange parois [eq 2-2] ou relations linéaires entre ddls [eq 2-3] sont aussi utilisables. Comme au [§2] on ne s'intéressera pas aux dérivées par rapport aux paramètres des fonctionnalités `LIAISON_*`.
- Pour un calcul transitoire, comme pour le problème de thermique linéaire, trois stratégies peuvent présider au choix du champ de température initiale et elles ont une incidence sur l'initialisation du problème dérivé.
- Implicitement, `THER_NON_LINE` doit tolérer assez mal des conductivités fortement non-linéaire. Car les matrices tangentes et la phase prédictive initiale ne comporte pas le terme représentant leurs dérivées par rapport à la température. D'ailleurs ce terme complémentaire aurait le mauvais goût de rendre non symétrique la matrice tangente du système standard et la matrice du système dérivé ! Ce qui est problématique à prendre en compte informatiquement dans la manipulation des structures de données.  
**En toute état de cause, vis-à-vis des caractéristiques matériau non-linéaires généralement utilisés, le périmètre d'utilisation des calculs de sensibilité est le même que celui du problème standard. Il ne prend pas en compte rigoureusement de conductivité thermique non linéaire.**
- D'autre part, comme en thermique linéaire, on ne calcule que la sensibilité par rapport à un paramètre constant par zone géométrique. Ce qui n'exclut pas une dépendance temporelle, spatiale ou non-linéaire de caractéristiques matériau ou de chargements non concernés par la dérivation. En paramétrant à bon escient les chargements et matériaux « dérivés » dans le fichier de commande, on peut aussi avoir accès à certaines dérivés composées (cf. [§6.4]).
- En non-linéaire, l'obtention d'une sensibilité par différences finies est encore moins fiable qu'en linéaire, car elle peut être très sensible au degré de convergence de la solution. En toute rigueur, cela influe aussi sur la qualité de la sensibilité analytique, le champ de température solution intervenant dans l'assemblage du système linéaire « dérivé ».
- Dans le cadre de la thermique non-linéaire, la dérivée par rapport à l'enthalpie n'aura donc pas de sens (une enthalpie n'est pas constante !).
- Par contre, connaissant la sensibilité  $u$  du champ de température par rapport à un paramètre, on accède facilement à celle de l'enthalpie  $v$  par rapport à ce même paramètre, via la formule

$$v := \frac{\partial \beta(T)}{\partial \chi} = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \chi} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \chi} = \rho C_p u$$

### 3.1 Dérivée par rapport à la chaleur volumique

#### 3.1.1 Eléments théoriques

Soit  $\rho C_p(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i I_i(\mathbf{x})$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ), on va dériver par rapport au paramètre  $\alpha_i$  la formulation

[eq 3-2]. La sensibilité recherchée est notée  $u = \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}$ . En remarquant que l'enthalpie peut se

modéliser comme une fonction du temps  $t$  et des  $\alpha_j$  (considérés en fait comme des fonctions indicatrices du type de matériau)

$$\beta : (t, \mathbf{x}, \alpha_j) \rightarrow \int_{T^*(\mathbf{x}, \alpha_j)}^{T(t, \mathbf{x}, \alpha_j)} \rho C_p(\xi, \alpha_j) d\xi = \rho C_p (T - T^*)$$

sa dérivée s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} &= \int_{T^*}^T \frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i} d\xi + \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \alpha_i} \right) \\ &= I_i (T - T^*) + \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial T^*}{\partial \alpha_i} \right)\end{aligned}$$

En effet la quantité  $I_i = \frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i}$  est indépendante de la température (et donc du temps) car on

suppose que les portions  $\Omega_i$  sont figées (les sous-parties du corps sont supposées immobiles, on néglige notamment les phénomènes de dilatation). La dérivée en temps du premier terme en enthalpie de [éq 3-2] vaut donc

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_i} \right)}{\partial t} = I_i \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \left( u \frac{\partial \beta(T)}{\partial T} \right)}{\partial t} \quad \text{éq 3.1.1-1}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi(T(t, \mathbf{x}, \alpha_j))}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial \chi}{\partial T} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \alpha_i}}_0 + \nabla T \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_i}}_0 + \sum_j \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \underbrace{\frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_i}}_{\delta_{ij}} \right\} = \frac{\partial \chi}{\partial T} u \quad \text{avec } \chi \in \{\lambda, i\} \\ \frac{\partial (T + 273.15)^4}{\partial \alpha_i} &= 4(T + 273.15)^3 \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \alpha_i}}_0 + \nabla T \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_i}}_0 + \sum_j \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \underbrace{\frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_i}}_{\delta_{ij}} \right\} = 4(T + 273.15)^3 u\end{aligned}$$

éq 3.1.1-2

La dérivation de [éq 3-2] nous conduit au nouveau problème aux limites en  $u$

$$\begin{cases} \frac{\partial \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} u \right)}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial T} u \nabla T + \lambda \nabla u \right) = \tilde{s} & \Omega \times ]0, \tau[ \\ u = \tilde{f} & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \frac{\partial \lambda}{\partial n} u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{g} & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial n} + h \right) u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{h} & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \frac{\partial i}{\partial T} \right\} u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{i} & \Gamma_4 \times ]0, \tau[ \\ \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial n} + 4\sigma \varepsilon (T + 273.15)^3 \right\} u + \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{\sigma} & \Gamma_5 \times ]0, \tau[ \\ u(\mathbf{x}, 0) = \tilde{u}_0 & \Omega \end{cases} \quad \text{éq 3.1.1-3}$$

avec la nouvelle source volumique et les nouvelles conditions limites et initiale

$$\tilde{s} = -I_i \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \tilde{f} = \tilde{g} = \tilde{h} = \tilde{i} = \tilde{\sigma} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_0 = 0 \quad \text{éq 3.1.1-4}$$

## Remarque :

- La dérivation de la formulation en chaleur volumique [éq 3-1] conduit bien sûr au même résultat car la chaleur volumique est une fonction des  $\alpha_j$  (considérés en fait comme des fonctions indicatrices du type de matériau) et de la température (dépendant elle-même du temps, de la variable d'espace et des  $\alpha_j$  !)

$$\rho C_p(\alpha_j, T(t, \mathbf{x}, \alpha_j))$$

Sa dérivée par rapport à  $\alpha_i$  s'écrit donc

$$\frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i} = \sum_j \frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_j} \underbrace{\frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_i}}_{\delta_{ij}} + \frac{\partial \rho C_p}{\partial T} \left\{ \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha_i}}_0 + \underbrace{\nabla T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_i}}_0 + \sum_j \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_i}}_{\delta_{ij}} \right\} = I_i +$$

d'où

$$\frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} = I_i \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho C_p}{\partial t} u + \rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \beta}{\partial T} u \right)}{\partial t} + I_i \frac{\partial T}{\partial t}$$

on retrouve bien la formulation [éq 3.1.1-1] du seul terme qui distingue ces deux modélisations.

Contrairement à la thermique linéaire, le problème dérivé est complètement métamorphosé. L'opérateur parabolique est modifié et il est devenu linéaire en  $u$ . **Tout le problème est d'ailleurs devenu linéaire car les conditions limites ont subi le même traitement.** La condition de Dirichlet est désormais homogène et celles de Neumann et de rayonnement ont laissé place à des conditions de Robin. La condition de Cauchy est devenue homogène. Contrairement au problème en température, les résultats théoriques d'existence et d'unicité de la solution  $u$  sont donc plus facile à exhumers.

D'un point de vue pratique, on n'a pas besoin d'avoir recours, comme dans THER\_NON\_LINE, à un algorithme de Newton-Raphson mâtiné d'une phase prédictive pour déterminer l'incrément de température entre deux instants contigus. Un solveur linéaire suffit. Nul n'est besoin d'assembler une matrice tangente à chaque sous-itération. **La résolution du problème « dérivé » est donc plus rapide et plus robuste que celle du problème initial.**

La **semi-discrétisation en temps** de [éq 3.1.1-3] par la  $\theta$ -méthode mène au problème suivant : trouver une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  telle que (avec les notations du [§2.1.1])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n \\ \Delta t - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) \\ - (1 - \theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = \frac{\tilde{s}^{n+1} - \tilde{s}^n}{\Delta t} \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ u^{n+1} = \tilde{f}^{n+1} \quad \Gamma_1 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial n} u^{n+1} + \lambda^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = \tilde{g}^{n+1} \quad \Gamma_2 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \left\{ \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial n} + h^{n+1} \right\} u^{n+1} + \lambda^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = \tilde{h}^{n+1} \quad \Gamma_3 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \left\{ \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial n} - \frac{\partial i^{n+1}}{\partial T} \right\} u^{n+1} + \lambda^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = \tilde{i}^{n+1} \quad \Gamma_4 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \left\{ \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial n} + 4 \sigma^{n+1} \varepsilon^{n+1} (T^{n+1} + 273.15)^3 \right\} u^{n+1} + \lambda^{n+1} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = \tilde{\sigma}^{n+1} \quad \Gamma_5 \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ u^0(0) = \tilde{u}_0 \quad \Omega \end{array} \right.$$

éq 3.1.1-5

en posant

$$\begin{aligned} u^n &= u\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right), \quad T^n = T\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right), \quad \tilde{s}^n = -I_i(\mathbf{x}) T^n, \quad \tilde{f}^n = \tilde{g}^n = \tilde{h}^n = \tilde{i}^n = \tilde{\sigma}^n = 0, \\ i^n &= i(\mathbf{x}, T^n), \quad \beta^n = \beta(\mathbf{x}, T^n), \quad \lambda^n = \lambda(\mathbf{x}, T^n), \quad h^n = h\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right) \\ \sigma^n &= \sigma\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right), \quad \varepsilon^n = \varepsilon\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right), \quad T_\infty^n = T_\infty\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right) \end{aligned}$$

éq 3.1.1-6

En appliquant le théorème de Green à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] et en introduisant les notations suivantes

$$\begin{aligned} \chi^+ &= \chi\left(\mathbf{x}, (n+1) \frac{\tau}{N}\right) \text{ et } \chi^- = \chi\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right) \text{ avec } \chi \in \{u, T, h, T_{ext}, \sigma, \varepsilon, T_\infty\} \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \chi^+ &= \chi\left(\mathbf{x}, T\left(\mathbf{x}, (n+1) \frac{\tau}{N}\right)\right) \text{ et } \chi^- = \chi\left(\mathbf{x}, T\left(\mathbf{x}, n \frac{\tau}{N}\right)\right) \text{ avec } \chi \in \{\beta, \lambda, i\} \end{aligned}$$

on est amené à résoudre le **problème variationnel suivant**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnés } \varepsilon^\pm, \sigma^\pm, i^\pm, h^\pm, \lambda^\pm, \beta^\pm, T^\pm \text{ et } u^- \\ \text{Calculer } u^+ \in V_0 \text{ tel que} \\ \forall v \in V_0 \quad a^+(u^+, v) = l^\pm(v) \end{array} \right. \quad \text{éq 3.1.1-7}$$



avec la forme bilinéaire dépendant de l'instant courant

$$a^+(u^+, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial \beta^+}{\partial T} u^+ v dx + \theta \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \lambda^+}{\partial T} \nabla T^+ u^+ + \lambda^+ \nabla u^+ \right) \cdot \nabla v dx +$$

$$\theta \int_{\Gamma_3} h^+ u^+ v d\sigma - \theta \int_{\Gamma_4} \frac{\partial i^+}{\partial T} u^+ v d\sigma + 4\theta \int_{\Gamma_4} \sigma^+ \varepsilon^+ (T^+ + 273.15)^3 u^+ v d\sigma$$

**éq 3.1.1-8**

et la forme linéaire paramétrée par les instants courant et précédent

$$l^{\pm}(v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial \beta^{\pm}}{\partial T} u^{\pm} v dx + (\theta - 1) \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \lambda^{\pm}}{\partial T} \nabla T^{\pm} u^{\pm} + \lambda^{\pm} \nabla u^{\pm} \right) \cdot \nabla v dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_i (T^+ - T^-) v dx$$

$$+ (\theta - 1) \int_{\Gamma_3} h^{\pm} u^{\pm} v d\sigma$$

$$+ (1 - \theta) \int_{\Gamma_4} \frac{\partial i^{\pm}}{\partial T} u^{\pm} v d\sigma + 4(\theta - 1) \int_{\Gamma_4} \sigma^{\pm} \varepsilon^{\pm} (T^{\pm} + 273.15)^3 u^{\pm} v d\sigma$$

**éq 3.1.1-9**

## Remarques :

- En posant dans [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9]
$$\frac{\partial \beta^{\pm}}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^{\pm}}{\partial T} = 0, \quad \lambda^{\pm} = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$
on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9].
- Contrairement au problème initial, le champ inconnu et la fonction test appartiennent au même espace fonctionnel, ce qui est plus confortable d'un point de vue théorique et numérique.
- Cette fois les deux membres de cette équation sont foncièrement différents de ceux du problème en température. Cependant, après chaque pas de temps, une fois déterminé  $T^+$  à partir de  $T^-$ , on n'a pas à réassembler toute la matrice du système linéaire et son second membre associé. Il suffit de compléter la première matrice tangente (en reprenant les notations de [R5.02.02]) du pas de temps suivant (permettant de passer de  $T^+ = T_1^{++}$  à  $T_2^{++}$ ) par le terme dû à la non-linéarité de la conductivité thermique. On part aussi du second membre du problème en température  $\mathbf{L}(T^-, t^{\pm})$  pour constituer celui qui nous intéresse : on l'étoffe par les termes d'implicitation des non-linéarités de la conductivité thermique et des conditions limites.
- Concernant l'initialisation du problème dérivé les remarques du cas linéaire s'appliquent in extenso (cf. [§2.2.2]).
- Contrairement au calcul en température (lors de la phase prédictive de *THER NON LINE*, l'élimination de cette constante impose une reformulation idoine du terme élémentaire *CHAR THER EVOLNT*), la constante d'intégration de l'enthalpie n'apparaît pas ici car on ne manipule que sa dérivée en température.
- Pour une condition d'échange entre parois, le terme d'échange usuel est bien sûr remplacé par (en reprenant les notations de [éq 2-2])  $\int_{\Gamma_{ij}} h^{\pm} (u_i^{\pm} - u_j^{\pm}) v d\sigma$ .

La discrétisation spatiale de [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] fournit le **problème variationnel discrétisé**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnés } \sigma_h^\pm, \varepsilon_h^\pm, l_h^\pm, h_h^\pm, \lambda_h^\pm, \beta_h^\pm, T_h^\pm \text{ et } u_h^- \\ \text{Calculer } u_h^+ \in V_0^h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_0^h \quad a_h^+(u_h^+, v_h) = l_h^+(v_h) \end{array} \right. \quad \text{éq 3.1.1-10}$$

La prise en compte des conditions de Dirichlet conduit alors au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11]. Nous allons maintenant voir comment ces calculs se déclinent dans le code.

### 3.1.2 Implantation dans le Code\_Aster

Avec les mêmes notations qu'au [§2.1.1] on peut décomposer la matrice élémentaire en

$$A_{ij}(K, \xi_g) = \sum_{i=1}^5 A_{ij}^i(K, \xi_g) \quad \text{éq 3.1.2-1}$$

avec

- le terme de masse et de rigidité thermique (option de calcul MTAN\_RIGI\_MASS en estimant les caractéristiques matériau en  $T^-$ )

$$A_{ij}^1(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \frac{\partial \beta^+}{\partial T}(\xi_g) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g) + \omega_g \theta \lambda^+(\xi_g) \nabla N_j(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- un terme de rigidité thermique dû à la non-linéarité de la conductivité thermique (non introduit car on suppose, dans le périmètre d'utilisation des sensibilités, que  $\lambda$  est indépendant de  $T$ )

$$A_{ij}^2(K, \xi_g) = \omega_g \theta \frac{\partial \lambda^+}{\partial T}(\xi_g) \nabla T^+(\xi_g) N_j(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- le terme de rigidité dû aux conditions limites d'échange (MTAN\_THER\_COEF\_F/R)

$$A_{ij}^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g \theta h^+(\partial K \cap \Gamma_3) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

En cas d'échange entre parois ce terme est remplacé par (RIGI\_THER\_PARO\_F/R)

$$A_{ij}^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g \theta h^+(\partial K \cap \Gamma_3) (N_j(\xi_g) - N_{f(j)}(\xi_g)) N_i(\xi_g)$$

en notant  $f$  la bijection mettant en vis-à-vis les deux parois.

- le terme de rigidité dû à la condition de Neumann non-linéaire (MTAN\_THER\_FLUXNL en estimant le flux non-linéaire en  $T^-$ )

$$A_{ij}^4(\partial K \cap \Gamma_4, \xi_g) = -\omega_g \theta \frac{\partial i^+}{\partial T}(\xi_g) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

- le terme de rigidité dû à la condition de rayonnement (MTAN\_THER\_RAYO\_F/R)

$$A_{ij}^5(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = 4\omega_g \theta (\sigma \varepsilon)^+ (\partial K \cap \Gamma_5) (T^+(\xi_g) + 273.15)^3 N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

Le second membre s'écrit, avec les mêmes notations,

$$L_j(K, \xi_g) = \sum_{i=1}^6 L_j^i(K, \xi_g) \quad \text{éq 3.1.2-2}$$

où

- le terme résultant de l'implication de la matrice de rigidité et de masse (nouvelle option CHAR\_SENS\_EVOLNI copie de CHAR\_THER\_EVOLNI avec  $u^-$  au lieu de  $T$ , les champs matériau dérivé et standard et le nouveau terme source)

$$L_j^1(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \frac{\partial \beta^-}{\partial T}(\xi_g) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g) + \omega_g (\theta - 1) \lambda^-(\xi_g) \nabla u^-(\xi_g) \cdot \nabla N_j(\xi_g)$$

- un terme résultant de l'implication de la non-linéarité de la conductivité thermique (non introduit car on suppose, dans le périmètre d'utilisation des sensibilités, que  $\lambda$  est indépendant de  $T$ )

$$L_j^2(K, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) \frac{\partial \lambda^-}{\partial T}(\xi_g) u^-(\xi_g) \nabla T^-(\xi_g) \cdot \nabla N_j(\xi_g)$$

- le terme dû à la « nouvelle source » (cf. CHAR\_SENS\_EVOLNI)

$$L_j^3(K, \xi_g) = -\frac{\omega_g}{\Delta t} I_i(K) (T^+(\xi_g) - T^-(\xi_g)) N_j(\xi_g)$$

- le terme résultant de l'implication des conditions limites d'échange (CHAR\_THER\_TEXT\_F/R avec  $T_{\text{ext}}=0$  et  $u^-$  au lieu de  $T$ )

$$L_j^4(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) h^-(\partial K \cap \Gamma_3) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

En cas d'échange entre parois ce terme est remplacé par (CHAR\_THER\_PARO\_F/R avec  $u^-$  au lieu de  $T$ )

$$L_j^4(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) h^-(\partial K \cap \Gamma_3) (u^-(\xi_g) - u^-(f(\xi_g))) N_j(\xi_g)$$

- le terme résultant de l'implication de la condition de Neumann non-linéaire (nouvelle option CHAR\_SENS\_FLUNL)

$$L_j^5(\partial K \cap \Gamma_4, \xi_g) = \omega_g (1 - \theta) \frac{\partial i^-}{\partial T}(\xi_g) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

- le terme résultant de l'implication de la condition de rayonnement (nouvelle option CHAR\_SENS\_RAYO\_F)

$$L_j^6(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = 4\omega_g (\theta - 1) (\sigma \varepsilon)^-(\partial K \cap \Gamma_5) (T^-(\xi_g) + 273.15)^3 u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

## Remarques :

- Les termes élémentaires de la matrice du problème « dérivé » sont identiques à ceux de la matrice tangente du problème initial. En effet le problème en température peut s'écrire en faisant apparaître un vecteur résidu  $\mathbf{R}$  [R5.02.02] et une fonction test vectorielle  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{R}(\mathbf{T}^+, t^+) = \mathbf{V}^t \cdot \mathbf{L}(\mathbf{T}^-, t^\pm)$$

En dérivant par rapport à un paramètre de calcul du résidu (par exemple une caractéristique matériau) notée  $\chi$  cette relation vectorielle et en la traduisant sous forme indicielle, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} (V_k R_k^+) &= \frac{\partial}{\partial \chi} (V_k L_k^\pm) \\ \Leftrightarrow V_k \underbrace{\frac{\partial R_k^+}{\partial T_j} \frac{\partial T_j^+}{\partial \chi}}_{K_{kj}} &= V_k \frac{\partial L_k^\pm}{\partial \chi} \\ \Leftrightarrow \underbrace{K_{ij}^+(\mathbf{T}^+)}_{A_{ij}} \underbrace{\frac{\partial T_j^+}{\partial \chi}}_{U_j^+} &= \underbrace{\frac{\partial L_i^\pm}{\partial \chi}}_{L_i} \quad (\text{avec } V_k = \delta_{ki}) \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la formulation indicielle du système linéaire dérivé [éq 2.1.1-10].

- Par rapport au problème « dérivé » linéaire, la matrice élémentaire et le second membre sont complétés par les termes incorporant les non-linéarités de la conductivité thermique et des conditions limites. Par contre, la nouvelle source est identique dans les deux cas (on pourra donc mutualiser l'option de calcul).
- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la chaleur volumique

$$\rho C_p(\mathbf{x}, T) = \sum_i \alpha_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, T) \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme

$$\text{source } \frac{\partial \rho C_p}{\partial \alpha_i} = I_i \omega_i \text{ dans la définition du champ matériau dérivé } \mathbf{ma\_v}.$$

Comme on l'a déjà précisé, tous les termes élémentaires (sauf le deuxième) de la matrice font l'objet d'une option de calcul et auront déjà été évalués pour la calcul de  $T_2^{++}$ . Il reste donc à estimer le second membre en réutilisant (avec un paramétrage différent) les options de calcul existantes ou en introduisant de nouvelles (CHAR\_SENS\_EVOLNI/FLUNL/RAYO\_F). Ces dernières redirigent vers la même routine de calcul élémentaire (TE..) que leurs options standards associées (CHAR\_THER\_EVOLNI/FLUNL/RAYO\_F).

La chaîne de caractère centrale (SENS au lieu de THER) joint à une détection de la nullité du champ matériau dérivé, permet de paramétrer ces routines vers l'une ou l'autre de leurs orientations possibles: calcul d'un terme dérivée élémentaire (nouveau terme source) ou d'un terme « spectateur » dû à la présence d'une condition d'échange, de rayonnement ou d'un flux non-linéaire.

Conformément aux principes d'architecture mis en place dans le code pour traiter les calculs de sensibilité [bib6], l'assemblage et la résolution de [éq 2.1.1-11] sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.1.2] en substituant THER\_NL à THER dans DEFI\_MATERIAU et en remplaçant bien sûr l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.

Nous allons dérouler le même processus pour les différentes sensibilités, à commencer par celle concernant l'autre caractéristique matériau.

## 3.2 Dérivé par rapport à la conductivité thermique

### 3.2.1 Eléments théoriques

En reprenant les notations du [§2.2.1], on effectue la dérivation par rapport au paramètre  $\lambda_i$ , avec

$u = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i}$  la sensibilité recherchée,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \right)}{\partial \lambda_i} &= \frac{\partial \rho C_p}{\partial T} u \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (\rho C_p u)}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial \left( \frac{\partial \beta(T)}{\partial t} \right)}{\partial \lambda_i} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial \beta(T)}{\partial T} u \right)}{\partial t} \end{aligned}$$

La dérivation de [éq 3-2] nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une autre source volumique et de nouvelles conditions de Robin

$$\tilde{s} = \text{div}(I_i \nabla T), \quad \tilde{g} = \tilde{h} = \tilde{i} = \tilde{\sigma} = -I_i \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet-Cauchy homogène et de Robin inhomogène. On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n}{\Delta t} - \theta \text{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) \\ - (1-\theta) \text{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = \theta \tilde{s}^{n+1} + (1-\theta) \tilde{s}^n \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad \text{éq 3.2.1-2}$$

avec le nouveau terme source

$$\tilde{s}^m = \text{div}(I_i \nabla T^m) \quad m \in \{n, n+1\} \quad \text{éq 3.2.1-3}$$

et les nouvelles conditions limites

$$\tilde{g}^{n+1} = \tilde{h}^{n+1} = \tilde{i}^{n+1} = \tilde{\sigma}^{n+1} = -I_i \frac{\partial T^{n+1}}{\partial n} \quad \text{éq 3.2.1-4}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont seule la troisième intégrale est modifiée pour s'adapter à la nouvelle source

$$l^\pm(v) = \dots - \int_{\Omega} I_i (\theta \nabla T^+ + (1-\theta) \nabla T^-) \nabla v dx \dots \quad \text{éq 3.2.1-5}$$

## Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.2.1-5]

$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$

on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.2.1-5] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.2.1-5].

Le nouveau terme source est identique en linéaire et en non-linéaire.

- Pour l'instant, l'opérateur `DEFI_MATERIAU` ne permet pas de modéliser une conductivité thermique non-linéaire orthotrope. On n'a donc pas les cas particuliers du problème linéaire.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 3.2.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j(K, \xi_g)$  que pour le cas linéaire (cf [éq 2.2.2-1]). Ce qui est fait dans la nouvelle option de calcul `CHAR_SENS_EVOLNI` avec les champs matériau dérivé et standard.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.1.2] en substituant `THER_NL/LAMBDA` à `THER/RHO_CP` dans `DEFI_MATERIAU` et en remplaçant bien sûr l'opérateur `THER_LINEAIRE` par `THER_NON_LINE`.

## Remarque :

- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la conductivité thermique

$$\lambda(\mathbf{x}, T) = \sum_i \lambda_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, T) \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme source  $\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du champ matériau dérivé `ma_v`.

## 3.3 Dérivée par rapport à la source

### 3.3.1 Eléments théoriques

En appliquant les formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] par rapport au paramètre  $s_i$  (cf. [§2.3.1]) nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une autre source volumique

$$\tilde{S} = I_i \quad \text{éq 3.3.1-1}$$

On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6]

dont la première relation se réécrit, en notant  $u = \frac{\partial T}{\partial s_i}$  la sensibilité recherchée,

$$\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) - (1-\theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = I_i \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 3.3.1-2}$$

L'application du théorème de Green à [éq 3.3.1-2] conduit à résoudre un **problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7]** comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont seule la **troisième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Omega} I_i v dx \quad \dots \quad \text{éq 3.3.1-3}$$

## Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.3.1-3]

$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$

on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.3.1-3] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.3.1-3].

- Le nouveau terme source est identique en linéaire et en non-linéaire.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 3.3.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j^3(K, \xi_g)$  que pour le cas linéaire (cf [éq 2.3.2-1]) et la même option de calcul.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.3.2] en remplaçant l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.

## Remarque :

La prise en compte d'une modélisation plus sophistiquée du terme source s'effectue comme en linéaire.

## 3.4 Dérivée par rapport à la température imposée

### 3.4.1 Eléments théoriques

En appliquant les formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] par rapport au paramètre  $f_i$  (cf. [§2.4.1]) nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une source volumique nulle et une autre condition de Dirichlet

$$\tilde{s} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{f} = I_i \quad \text{éq 3.4.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet-Robin inhomogène et de Cauchy homogène. On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_1$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation

se réécrit, en notant  $u = \frac{\partial T}{\partial f_i}$  la sensibilité recherchée,

$$\frac{\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) - (1-\theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 3.4.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{f}^{n+1} = I_i \quad \text{éq 3.4.1-3}$$

L'application du théorème de Green à [éq 3.4.1-2], [éq 3.4.1-3] conduit à résoudre **un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7]** comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont **seule la troisième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source : ici cette intégrale est nulle.

## Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + « source nulle » + [éq 3.4.1-3]

$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$

on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.4.1-2], [éq 2.4.1-3], [éq 2.4.1-4] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + « source nulle » + [éq 3.4.1-3].

- Le nouveau terme source est identique en linéaire et en non-linéaire.
- On retrouve le même système linéaire non dualisé que pour la dérivée en enthalpie. Seule la prise en compte de la condition de Dirichlet via des Lagranges va faire la différence.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet inhomogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.4.1-5]. Les composantes de son second membre associées aux Lagranges sont non nulles.

## 3.4.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j^3(K, \xi_g) = 0$  que pour le cas linéaire (cf [§2.4.2]) et la même option de calcul pour assembler le système linéaire dualisé associé aux conditions de Dirichlet « dérivées ».

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.4.2] en remplaçant l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.



## Remarques :

- Concernant les différentes modélisations de la température imposée et les conditions de Dirichlet généralisées, il n'y a aucune différence entre le non-linéaire et le linéaire. Pour plus d'informations on peut donc se reporter au [§2.4.2].
- La prise en compte d'une modélisation plus sophistiquée de la température imposée s'effectue comme en linéaire.

## 3.5 Dérivée par rapport au flux normal imposé linéaire

### 3.5.1 Eléments théoriques

En appliquant les formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] par rapport au paramètre  $g_i$  (cf. [§2.5.1]) nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une source volumique nulle et une autre condition de Robin sur  $\Gamma_2$

$$\tilde{S} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{g} = I_i \quad \text{éq 3.5.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet-Cauchy homogène et de Robin inhomogène. On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation

se réécrit, en notant  $u = \frac{\partial T}{\partial g_i}$  la sensibilité recherchée,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) \\ - (1-\theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad \text{éq 3.5.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{g}^{n+1} = I_i \quad \text{éq 3.5.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont seule la troisième intégrale est modifiée pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_2} I_i v dx \dots \quad \text{éq 3.5.1-4}$$

## Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.5.1-4]

$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$

on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.5.1-4] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.5.1-4].

- Le nouveau terme source est identique en linéaire et en non-linéaire.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

### 3.5.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j^3(\partial K \cap \Gamma_2, \xi_g)$  que pour le cas linéaire (cf [§2.5.2]) et la même option de calcul.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.5.2] en remplaçant l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.

#### Remarques :

- Concernant les différentes modélisations de cette condition de Neumann linéaire il n'y a aucune différence entre le problème dérivé linéaire et non-linéaire. Pour plus d'informations on peut donc se reporter au [§2.5.2].
- La prise en compte d'une modélisation plus sophistiquée du flux normal imposé s'effectue comme en linéaire.

## 3.6 Dérivée par rapport au flux normal imposé non-linéaire

### 3.6.1 Eléments théoriques

On pose  $i(\mathbf{x}) = \sum_i i_i I_i(\mathbf{x})$  ( $i_i \in \mathbb{R}$ ) et  $u = \frac{\partial T}{\partial i_i}$  la sensibilité recherchée. Les portions de frontière

externe  $\Gamma_{4j}$  étant figées, on a  $\frac{\partial i}{\partial i_i} = I_i$  la fonction indicatrice de la ième portion  $\Gamma_{4i}$ . En appliquant les

formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] par rapport au paramètre  $i_i$  nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une source volumique nulle et une autre condition de Robin sur  $\Gamma_4$

$$\tilde{s} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{i} = I_i \quad \text{éq 3.6.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet-Cauchy homogène et de Robin inhomogène. On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation se réécrit

$$\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) - (1 - \theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 3.6.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{i}^{n+1} = I_i \quad \text{éq 3.6.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont **seule la troisième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_4} I_i v dx \dots \quad \text{éq 3.6.1-4}$$

## Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.6.1-4]
$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda, \quad \frac{\partial i^\pm}{\partial T} = 0, \quad i^\pm = \frac{g}{2}, \quad \Gamma_4 = \Gamma_2 \quad \text{et} \quad \Gamma_5 = \emptyset$$
on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.5.1-4] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.6.1-4].
- Ce nouveau terme source est identique, aux frontières près, au terme source de la dérivée par rapport au flux normal linéaire.
- En régime stationnaire, il est bien sûr inchangé.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 3.6.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j^3(\partial K \cap \Gamma_4, \xi_g)$  que pour le cas linéaire en remplaçant la frontière  $\Gamma_2$  par  $\Gamma_4$  (cf [éq 2.5.2-1]). Ce qui est fait dans la nouvelle option de calcul CHAR\_SENS\_FLUNL avec le champ flux non-linéaire dérivé. L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.5.2] en substituant FLUX\_NL à FLUX\_REP dans AFFE\_CHAR\_THER\_F et en remplaçant bien sûr l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.

## Remarque :

Pour prendre en compte une modélisation véritablement non-linéaire

$$i(\mathbf{x}, T) = \sum_i i_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, T) \quad (i_i \in \mathbb{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme source  $\frac{\partial i}{\partial i_i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé `chth_v`.

## 3.7 Dérivée par rapport au coefficient d'échange convectif

### 3.7.1 Eléments théoriques

En appliquant les formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] par rapport au paramètre  $h_i$  (cf. [§2.6.1]) nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une source volumique nulle et une autre condition de Robin sur  $\Gamma_3$

$$\tilde{s} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{h} = I_i (T_{ext} - T) \quad \text{éq 3.7.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet-Cauchy homogène et de Robin inhomogène. On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation

se réécrit, en notant  $u = \frac{\partial T}{\partial h_i}$  la sensibilité recherchée,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) \\ - (1-\theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad \text{éq 3.7.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{h}^{n+1} = I_i (T_{ext}^{n+1} - T^{n+1}) \quad \text{éq 3.7.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont seule la troisième intégrale est modifiée pour s'adapter à la nouvelle source

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_3} I_i \{ \theta (T_{ext}^+ - T^+) + (1-\theta) (T_{ext}^- - T^-) \} v dx \quad \dots \quad \text{éq 3.7.1-4}$$

## Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.7.1-4]

$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$

on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.6.1-4] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.7.1-4].

- Le nouveau terme source est identique en linéaire et en non-linéaire.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 3.7.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g)$  que pour le cas linéaire (cf [éq 2.6.2-1]) et le même option de calcul.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.6.2] en remplaçant l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.

## Remarques :

- La prise en compte d'une modélisation plus sophistiquée du coefficient d'échange s'effectue comme en linéaire.
- La condition de flux normal imposé non-linéaire (cf. [§3.6]) permet de modéliser un échange convectif avec un **coefficient d'échange non-linéaire** via un *DEFT\_FONCTION* adéquat

$$i(\mathbf{x}, T) = j(\mathbf{x}, T)(T_{ext}(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t))$$

De la même manière, connaissant  $u = \frac{\partial T}{\partial i_i}$  on pourrait avoir accès « facilement » à

$$w = \frac{\partial T}{\partial j_i}. \text{ En effet,}$$

$$\frac{\partial T}{\partial j} = \frac{\partial T}{\partial i} \left\{ \frac{\partial i}{\partial j} + \frac{\partial i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial j} \right\}$$

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial i}{\partial j} & \frac{\partial i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial j} \\ (T_{ext} - T) & -j \end{array} \right)$$

d'où

$$w = \frac{u(T_{ext} - T)}{(1 + ju)}$$

## 3.8 Dérivée par rapport à la température extérieure

### 3.8.1 Eléments théoriques

En appliquant les formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] par rapport au paramètre  $T_{ext}^i$  (cf. [§2.7.1]) nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-1] mais avec une source volumique nulle et une autre condition de Robin sur  $\Gamma_3$

$$\tilde{s} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{h} = hI_i \quad \text{éq 3.8.1-1}$$

C'est un problème de Dirichlet-Cauchy homogène et de Robin inhomogène. On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation

se réécrit, en notant  $u = \frac{\partial T}{\partial T_{ext}^i}$  la sensibilité recherchée,

$$\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) - (1 - \theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1$$

éq 3.8.1-2

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{h}^{n+1} = h^{n+1} I_i \quad \text{éq 3.8.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont **seule la troisième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_3} I_i \{ \theta h^+ + (1-\theta) h^- \} v dx \dots \quad \text{éq 3.8.1-4}$$

#### Remarques :

- En posant dans le nouveau problème variationnel [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.8.1-4]

$$\frac{\partial \beta^\pm}{\partial T} = \rho C_p, \quad \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial T} = 0, \quad \lambda^\pm = \lambda \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \Gamma_5 = \emptyset$$

on retrouve bien la formulation [éq 2.1.1-6], [éq 2.1.1-7], [éq 2.1.1-8] + [éq 2.6.1-4] du problème linéaire. D'autre part, en dérivant la formulation variationnelle [éq 4.2-1] du problème en température [R5.02.02] on retrouve bien [éq 3.1.1-7], [éq 3.1.1-8], [éq 3.1.1-9] + [éq 3.8.1-4].

- Le nouveau terme source est identique en linéaire et en non-linéaire.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

### 3.8.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier. On prend le même  $L_j^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g)$  que pour le cas linéaire (cf [éq 2.7.2-1]) et la même option de calcul.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§2.6.2] en substituant TEMP\_EXT à COEF\_H dans AFFE\_CHAR\_THER\_F et en remplaçant, bien sûr, l'opérateur THER\_LINEAIRE par THER\_NON\_LINE.

#### Remarque :

La prise en compte d'une modélisation plus sophistiquée de la température extérieure s'effectue comme en linéaire.

## 3.9 Dérivée par rapport à l'émissivité/constante de Stefan-Boltzmann

### 3.9.1 Eléments théoriques

On pose  $\sigma(\mathbf{x}) = \sum_i \sigma_i I_i(\mathbf{x})$  ( $\sigma_i \in \mathbb{R}$ ) (resp.  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_i \varepsilon_i I_i(\mathbf{x})$  ( $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ )) le paramètre et

$u = \frac{\partial T}{\partial \sigma_i}$  (resp.  $u = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_i}$ ) la **sensibilité recherchée**. Les portions  $\Gamma_{5j}$  étant figées, on a  $\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_i} = I_i$

(resp.  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i} = I_i$ ) la fonction indicatrice de la  $i$ ème portion  $\Gamma_{5i}$ . En appliquant les formules des

paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-3] mais avec une autre source volumique et une autre condition de Robin sur  $\Gamma_5$  (resp. en intervertissant le rôle de  $\sigma$  et de  $\varepsilon$ )

$$\tilde{s} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{i} = I_i \varepsilon \left\{ (T_\infty + 273.15)^4 - (T + 273.15)^4 \right\} \quad \text{éq 3.9.1-1}$$

On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation se réécrit

$$\frac{\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) - (1-\theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 3.9.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite (resp. en intervertissant le rôle de  $\sigma$  et de  $\varepsilon$ )

$$\tilde{i}^{n+1} = I_i \varepsilon^{n+1} \left\{ (T_\infty^{n+1} + 273.15)^4 - (T^{n+1} + 273.15)^4 \right\} \quad \text{éq 3.9.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont **seule la troisième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique » (resp. en intervertissant le rôle de  $\sigma$  et de  $\varepsilon$ )

$$l^\pm(v) = \dots + \int_{\Gamma_5} I_i \theta \varepsilon^+ v \left\{ (T_\infty^+ + 273.15)^4 - (T^+ + 273.15)^4 \right\} - I_i (\theta - 1) \varepsilon^- v \left\{ (T_\infty^- + 273.15)^4 - (T^- + 273.15)^4 \right\} dx \quad \text{éq 3.9.1-4}$$

## Remarques :

- La dérivation par rapport à la constante de Stefan-Boltzmann n'a certainement qu'un intérêt pratique mineur. Mais son surcoût d'implantation numérique a été modique et elle permet des validations croisées.
- En régime stationnaire, ce terme source se réduit à (resp. en intervertissant le rôle de  $\sigma$  et de  $\varepsilon$ )

$$l(v) = \dots + \int_{\Gamma_5} I_i \varepsilon \left\{ (T_\infty + 273.15)^4 - (T + 273.15)^4 \right\} v dx \dots$$

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 3.9.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier (resp. en intervertissant le rôle de  $\sigma$  et de  $\varepsilon$ )

$$L_j^3(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = \theta \omega_g(I_i \varepsilon)^+ (\partial K \cap \Gamma_5) \left\{ (T_\infty^+ (\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^4 - (T^+(\xi_g) + 273.15)^4 \right\} N_j(\xi_g) + (1-\theta) \omega_g(I_i \varepsilon)^- (\partial K \cap \Gamma_5) \left\{ (T_\infty^- (\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^4 - (T^-(\xi_g) + 273.15)^4 \right\} N_j(\xi_g) \quad \text{éq 3.9.2-1}$$

Ce qui est fait dans la nouvelle option de calcul CHAR\_SENS\_RAYO\_F avec les champs de rayonnement standard et dérivé.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la succession de commandes.

```

v = DEFI_VALEUR_SENSI ( VALE = < valeur de  $\sigma_i$  > ) (resp.  $\varepsilon_i$ )
chth = AFFE_CHAR_THER_F ( RAYONNEMENT= _F( GROUP_MA = < définition de  $\Gamma_{Si}$  >,
                                SIGMA = v , EPSILON = w , TEMP_EXT = z))
...
un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
zero = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 0. )
MEMO_NON_SENSI ( NOM = _F( NOM_SD = 'chth' , PARA_SENSI = 'v' ,
                                NOM_COMPOSE = 'chth_v' ))
chth_v = AFFE_CHAR_THER_F ( RAYONNEMENT = _F ( GROUP_MA = <  $\Gamma_{Si}$  >,
                                SIGMA = un , EPSILON = zero , TEMP_EXT = zero))
...
resu = THER_NON_LINE ( EXCIT = chth ,
                                SENSIBILITE = ( v )
                                ...)

```

## Remarques :

- La donnée essentielle de ce calcul, le champ rayonnement dérivé  $\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_i} = I_i$ ,  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_i} = 0$ ,  $\frac{\partial T_\infty}{\partial \sigma_i} = 0$  (resp.  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i} = I_i$ ), est fournie par **chth\_v**.
- Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de l'émissivité (resp. constante de Stefan-Boltzmann)

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sigma_i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (\sigma_i \in \mathfrak{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme

$$\text{source } \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_i} = I_i \omega_i \text{ dans la définition du chargement dérivé } \mathbf{chth\_v}.$$

## 3.10 Dérivée par rapport à la température à l'infini

### 3.10.1 Eléments théoriques

On pose  $T_\infty(\mathbf{x}) = \sum_i T_\infty^i I_i(\mathbf{x})$  ( $T_\infty^i \in \mathfrak{R}$ ) le paramètre et  $u = \frac{\partial T}{\partial T_\infty^i}$  la **sensibilité recherchée**. Les

portions  $\Gamma_{Sj}$  étant figées, on a  $\frac{\partial T_\infty}{\partial T_\infty^i} = I_i$  la fonction indicatrice du ième portion  $\Gamma_{Si}$ . En appliquant les

formules des paragraphes précédents, la dérivation de [éq 3-2] nous livre un problème aux limites identique à [éq 3.1.1-3] mais avec une autre source volumique et une autre condition de Robin sur  $\Gamma_5$

$$\tilde{s} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{i} = 4I_i \sigma \varepsilon (T_\infty + 273.15)^3 \quad \text{éq 3.10.1-1}$$



On peut donc reconduire les mêmes remarques concernant le caractère linéaire du problème dérivé et les simplifications théoriques et numériques que cela implique. Sa semi-discrétisation en temps conduit à chercher une suite  $(u_n)_{0 \leq n \leq N} \in V_0$  vérifiant un système similaire à [éq 3.1.1-5], [éq 3.1.1-6] dont la première relation se réécrit

$$\frac{\frac{\partial \beta^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} - \frac{\partial \beta^n}{\partial T} u^n}{\Delta t} - \theta \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^{n+1}}{\partial T} u^{n+1} \nabla T^{n+1} + \lambda^{n+1} \nabla u^{n+1} \right) - (1-\theta) \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda^n}{\partial T} u^n \nabla T^n + \lambda^n \nabla u^n \right) = 0 \quad \Omega \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{éq 3.10.1-2}$$

avec la nouvelle condition limite

$$\tilde{i}^{n+1} = 4 I_i \sigma \varepsilon (T_\infty + 273.15)^3 \quad \text{éq 3.10.1-3}$$

D'où un problème variationnel identique à [éq 3.1.1-7] comportant la même forme bilinéaire [éq 3.1.1-8] joint à la forme linéaire [éq 3.1.1-9] dont **seule la troisième intégrale est modifiée** pour s'adapter à la nouvelle source « surfacique »

$$l^\pm(v) = \dots + 4 \int_{\Gamma_5} I_i \left\{ \theta (\sigma \varepsilon)^+ (T_\infty^+ + 273.15)^3 + (1-\theta) (\sigma \varepsilon)^- (T_\infty^- + 273.15)^3 \right\} v \, dx \dots \quad \text{éq 3.10.1-4}$$

**Remarque :**

| En régime stationnaire, ce terme source est inchangé.

La discrétisation spatiale et la prise en compte de la condition de Dirichlet homogène conduisent au système linéaire dualisé [éq 2.1.1-11].

## 3.10.2 Implantation dans le Code\_Aster

Par rapport au [§3.1.2], seul le terme dû à la nouvelle source est à modifier

$$L_j^3(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = 4 \omega_g \theta (I_i \sigma^+ \varepsilon^+) (\partial K \cap \Gamma_5) (T_\infty^+ (\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^3 N_j(\xi_g) + 4 \omega_g (1-\theta) (I_i \sigma^- \varepsilon^-) (\partial K \cap \Gamma_5) (T_\infty^- (\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^3 N_j(\xi_g) \quad \text{éq 3.10.2-1}$$

Ce qui est fait dans la nouvelle option de calcul CHAR\_SENS\_RAYO\_F avec les champs de rayonnement standard et dérivé.

L'assemblage et la résolution du système linéaire sont déclenchés par l'analyse de la table de correspondance associée à la variable sensible. Cette remontée d'information s'effectue via la même succession de commandes qu'au [§3.9.2] en substituant TEMP\_EXT à SIGMA.

**Remarque :**

Pour prendre en compte une modélisation plus sophistiquée de la température à l'infini

$$T_\infty(\mathbf{x}, t) = \sum_i T_\infty^i I_i(\mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (T_\infty^i \in \mathcal{R})$$

dans ces calculs de sensibilité, il suffit de substituer à la fonction indicatrice le nouveau terme

source  $\frac{\partial T_\infty}{\partial T_\infty^i} = I_i \omega_i$  dans la définition du chargement dérivé `chth_v`.

Nous allons maintenant récapituler tous les systèmes linéaires « dérivé » à assembler selon les sensibilités souhaitées.

## 4 Récapitulatif des sensibilités de la température

Que l'on soit en thermique linéaire ou non linéaire, la sensibilité recherchée à l'instant courant  $\mathbf{U}^+$  est solution d'un système dualisé du type (avec les notations du [§2.1])

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}}^+ = \tilde{\mathbf{L}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} & -\mathbf{Id} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{B} & \mathbf{Id} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

où

$$A_{ij}(K, \xi_g) = \sum_i A_{ij}^i(K, \xi_g)$$

$$L_j(K, \xi_g) = \sum_i L_j^i(K, \xi_g)$$

**On va dresser la nomenclature des termes élémentaires potentiels de ce système et de leur option de calcul dans le Code\_Aster.** Afin d'être plus synthétique, on convient ici d'une numérotation différente de celles pratiquées dans les paragraphes précédents.

Pour la matrice, on a les sept termes possibles suivants :

- MASS\_THER (cf. [§2.1.2])

$$A_{ij}^1(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \rho C_p(K) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

- RIGI\_THER (cf. [§2.1.2])

$$A_{ij}^2(K, \xi_g) = \omega_g \theta \lambda(K) \nabla N_j(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- RIGI\_THER\_COEF\_F/R ou MTAN\_THER\_COEF\_F/R (cf. [§2.1.2], [§3.1.2])

$$A_{ij}^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g \theta h^+(\partial K \cap \Gamma_3) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

En cas d'échange entre parois ce terme est remplacé par RIGI\_THER\_PARO\_F/R ou MTAN\_THER\_PARO\_F/R (cf. [§2.1.2], [§3.1.2])

$$A_{ij}^3(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g \theta h^+(\partial K \cap \Gamma_3) (N_j(\xi_g) - N_{f(j)}(\xi_g)) N_i(\xi_g)$$

- MTAN\_RIGI\_MASS (cf. [§3.1.2])

$$A_{ij}^4(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \frac{\partial \beta}{\partial T}(T^+(\xi_g)) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g) + \omega_g \theta \lambda(T^+(\xi_g)) \nabla N_j(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- Pas codée. (cf. [§3.1.2])

$$A_{ij}^5(K, \xi_g) = \omega_g \theta \frac{\partial \lambda}{\partial T}(T^+(\xi_g)) \nabla T^+(\xi_g) N_j(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- MTAN\_THER\_FLUXNL (cf. [§3.1.2])

$$A_{ij}^6(\partial K \cap \Gamma_4, \xi_g) = -\omega_g \theta \frac{\partial i}{\partial T}(T^+(\xi_g)) N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

- MTAN\_THER\_RAYO\_F/R (cf. [§3.1.2])

$$A_{ij}^7(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = 4\omega_g \theta (\sigma \varepsilon)^+(\partial K \cap \Gamma_5) (T^+(\xi_g) + 273.15)^3 N_j(\xi_g) N_i(\xi_g)$$

Pour le second membre, il y a seize possibilités :

- CHAR\_SENS\_EVOL (cf. [§2.1.2])

$$L_j^1(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \rho C_p(K) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g) + (\theta - 1) \omega_g \lambda(K) \nabla u^-(\xi_g) \cdot \nabla N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_THER\_TEXT\_F/R (cf. [§2.1.2])

$$L_j^2(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) h^- (\partial K \cap \Gamma_3) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

En cas d'échange entre parois ce terme est remplacé par CHAR\_THER\_PARO\_F/R (cf. [§2.1.2])

$$L_j^2(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) h^- (\partial K \cap \Gamma_3) (u^-(\xi_g) - u^-(f(\xi_g))) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_EVOL (cf. [§2.1.2])

$$L_j^3(K, \xi_g) = -\frac{\omega_g}{\Delta t} I_i(K) (T^+(\xi_g) - T^-(\xi_g)) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_EVOL (cf. [§2.1.2])

$$L_j^4(K, \xi_g) = -\omega_g I_i(K) (\theta \nabla T^+(\xi_g) + (1 - \theta) \nabla T^-(\xi_g)) \nabla N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_THER\_SOUR\_F/R (cf. [§2.3.2], [§3.3.2])

$$L_j^5(K, \xi_g) = \omega_g I_i(K) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_THER\_FLUN\_F/R (cf. [§2.5.2], [§3.5.2])

$$L_j^6(\partial K \cap \Gamma_2, \xi_g) = \omega_g I_i(\partial K \cap \Gamma_2) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_TEXT\_F (cf. [§2.6.2], [§3.7.2])

$$L_j^7(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g I_i(\partial K \cap \Gamma_3) \left\{ \begin{aligned} &\theta (T_{ext}^+(\partial K \cap \Gamma_3) - T^+(\xi_g)) + \\ &(1 - \theta) (T_{ext}^-(\partial K \cap \Gamma_3) - T^-(\xi_g)) \end{aligned} \right\} N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_THER\_TEXT\_F (cf. [§2.7.2], [§3.8.2])

$$L_j^8(\partial K \cap \Gamma_3, \xi_g) = \omega_g I_i(\partial K \cap \Gamma_3) \{ \theta h^+(\partial K \cap \Gamma_3) + (1 - \theta) h^-(\partial K \cap \Gamma_3) \} N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_THER\_TEXT\_F (cf. [§2.7.2], [§3.8.2])

$$L_j^9(K, \xi_g) = \frac{\omega_g}{\Delta t} \frac{\partial \beta}{\partial T} (T^-(\xi_g)) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g) + \omega_g (\theta - 1) \lambda (T^-(\xi_g)) \nabla u^-(\xi_g) \cdot \nabla N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_EVOLNI (cf. [§3.1.2])

$$L_j^{10}(K, \xi_g) = \omega_g (\theta - 1) \frac{\partial \lambda}{\partial T} (T^-(\xi_g)) u^-(\xi_g) \nabla T^-(\xi_g) \cdot \nabla N_i(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_FLUNL (cf. [§3.1.2])

$$L_j^{11}(\partial K \cap \Gamma_4, \xi_g) = \omega_g (1 - \theta) \frac{\partial i}{\partial T} (T^-(\xi_g)) u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_RAYO\_F (cf. [§3.1.2])

$$L_j^{12}(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = 4 \omega_g (\theta - 1) (\sigma \varepsilon)^- (\partial K \cap \Gamma_5) (T^-(\xi_g) + 273.15)^3 u^-(\xi_g) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_FLUNL (cf. [§3.6.2])

$$L_j^{13}(\partial K \cap \Gamma_4, \xi_g) = \omega_g I_i(\partial K \cap \Gamma_4) N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_RAYO (cf. [§3.9.2])

$$L_j^{14}(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = \theta \omega_g (I_i \varepsilon)^+ (\partial K \cap \Gamma_5) \left\{ (T_{\infty}^+(\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^4 - (T^+(\xi_g) + 273.15)^4 \right\} N_j(\xi_g) +$$

$$(1 - \theta) \omega_g (I_i \varepsilon)^- (\partial K \cap \Gamma_5) \left\{ (T_{\infty}^-(\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^4 - (T^-(\xi_g) + 273.15)^4 \right\} N_j(\xi_g)$$

$$L_j^{15}(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = \theta \omega_g (I_i \sigma)^+ (\partial K \cap \Gamma_5) \left\{ (T_{\infty}^+(\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^4 - (T^+(\xi_g) + 273.15)^4 \right\} N_j(\xi_g) +$$

$$(1 - \theta) \omega_g (I_i \sigma)^- (\partial K \cap \Gamma_5) \left\{ (T_{\infty}^-(\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^4 - (T^-(\xi_g) + 273.15)^4 \right\} N_j(\xi_g)$$

- CHAR\_SENS\_RAYO (cf. [§3.10.2])

$$L_j^{16}(\partial K \cap \Gamma_5, \xi_g) = 4 \omega_g \theta (I_i \sigma^+ \varepsilon^+) (\partial K \cap \Gamma_5) (T_{\infty}^+(\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^3 N_j(\xi_g) +$$

$$4 \omega_g (1 - \theta) (I_i \sigma^- \varepsilon^-) (\partial K \cap \Gamma_5) (T_{\infty}^-(\partial K \cap \Gamma_5) + 273.15)^3 N_j(\xi_g)$$

L'opérateur **B** permettant de vérifier la condition de Dirichlet s'écrit

$$(\mathbf{B} \mathbf{U}^+)_i = u_i^+ \text{ avec } i \in J$$

avec son second membre associé

$$\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

## Remarques :

- L'éventuelle prise en compte de conditions limites de Dirichlet généralisées nécessite de réécrire cet opérateur sous la forme

$$\mathbf{B} \mathbf{U}^+ = \sum_j \beta_j u_j^+ \text{ avec } j \in J$$

- Comme on ne prend pas en compte rigoureusement de conductivité thermique non linéaire, les termes  $A^5$  et  $L^{10}$  ne sont pas encore programmés.

Les dix-huit systèmes dualisés exhumés dans les paragraphes précédents peuvent alors se regrouper dans le tableau suivant :

Type de sensibilité	Variable	Matrice	Second membre	Mot-clé	Particularités
<b>Thermique linéaire</b>		Matrice identique à celle du problème direct		<b>THER_LINEAIRE</b>	Sensibilité par rapport à un paramètre constant par zone (éventuellement dérivée composée cf. [§6.4])
Chaleur volumique	$u = \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}$	$A^1 + A^2 + A^3$	$L^1 + L^2 + L^3$	THER/RHO_CP	
Conductivité thermique	$u = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i}$	Idem	$L^1 + L^2 + L^4$	THER/LAMBDA	Sensibilité par rapport à une caractéristique orthotrope non accessible
Source	$u = \frac{\partial T}{\partial s_i}$	Idem	$L^1 + L^2 + L^5$	SOURCE	Trois types de modélisation
Température imposée	$u = \frac{\partial T}{\partial f_i}$	Idem	$L^1 + L^2$	TEMP_IMPO	$C_k = \frac{\partial f_j}{\partial f_i} = \delta_{ij}$ Trois types de modélisation. Sensibilité par rapport à un coefficient multiplicateur d'une condition de Dirichlet généralisée non accessible
Flux normal imposé	$u = \frac{\partial T}{\partial g_i}$	Idem	$L^1 + L^2 + L^6$	FLUX_REP	Trois types de modélisation. Sensibilité par rapport à une composante du flux vectoriel accessible.
Echange convectif	$u = \frac{\partial T}{\partial h_i}$	Idem	$L^1 + L^2 + L^7$	ECHANGE/COEF_H ou ECHANGE_PAROI	Pas d'ECHANGE_PAROI en lumpé.
Température extérieure	$u = \frac{\partial T}{\partial T_{ext}^i}$	Idem	$L^1 + L^2 + L^8$	ECHANGE/TEMP_EXT	

Type de sensibilité	Variable	Matrice	Second membre	Mot-clé	Particularités
<b>Thermique non linéaire</b>		Matrice proche de la matrice tangente du problème direct.	Les nouveaux termes sources sont similaires en linéaire et en non linéaire.	<b>THER_NON_LINE</b>	Sensibilité par rapport à un paramètre constant par zone (éventuellement dérivée composée cf. [§6.4]). Pas de sensibilité par rapport à l'enthalpie. On ne tient pas compte d'une conductivité non-linéaire ➡ $A^5$ et $L^{10}$ non pris en compte
Chaleur volumique	$u = \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}$	$A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7$	$L^2 + L^3 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	THER_NL/RHO_CP	
Conductivité thermique	$u = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i}$	Idem	$L^2 + L^4 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	THER_NL/LAMBDA	Idem cas linéaire
Source	$u = \frac{\partial T}{\partial s_i}$	Idem	$L^2 + L^5 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	SOURCE	Idem cas linéaire
Température imposée	$u = \frac{\partial T}{\partial f_i}$	Idem	$L^2 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	TEMP_IMPO	Idem cas linéaire
Flux normal imposé linéaire	$u = \frac{\partial T}{\partial g_i}$	Idem	$L^2 + L^6 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	FLUX_REP	Idem cas linéaire.
Flux normal imposé non linéaire	$u = \frac{\partial T}{\partial i_i}$	Idem	$L^2 + L^{13} + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	FLUX_NL	Permet de modéliser la sensibilité par rapport à un échange convectif non linéaire
Echange convectif linéaire	$u = \frac{\partial T}{\partial h_i}$	Idem	$L^2 + L^7 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	ECHANGE/COEF_H ou ECHANGE_PAROI	Pas d'ECHANGE_PAROI en lumpé.
Température extérieure	$u = \frac{\partial T}{\partial T_{ext}^i}$	Idem	$L^2 + L^8 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	ECHANGE/ TEMP_EXT	
Emissivité	$u = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_i}$	Idem	$L^2 + L^{15} + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	RAYONNEMENT/ EPSILON	
Constante de Stefan-Boltzmann	$u = \frac{\partial T}{\partial \sigma_i}$	Idem	$L^2 + L^{14} + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	RAYONNEMENT/ SIGMA	
Température à l'infini	$u = \frac{\partial T}{\partial T_{\infty}^i}$	Idem	$L^2 + L^{16} + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12}$	RAYONNEMENT/ TEMP_EXT	

**Tableau 4-1 : Récapitulatif des systèmes linéaires « dérivés »**

Nous allons clore maintenant la partie théorique ce document en calculant les sensibilités d'une grandeur connexe au champ de température : le flux de chaleur.

## 5 Sensibilité du flux de chaleur

Après avoir effectué un calcul thermique, on a accès au flux de chaleur (le calcul est effectué soit aux nœuds (champ aux nœuds par éléments via `OPTION='FLUX_ELNO_TEMP'`), soit aux points de Gauss (champ aux points de Gauss par éléments via `OPTION='FLUX_ELGA_TEMP'`)) via les opérateurs `CALC_ELEM/CALC_NO`. Il est déterminé à partir du champ de température en utilisant la loi de Fourier qui s'écrit en thermique linéaire avec des matériaux isotropes

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\lambda(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t)$$

Avec des matériaux anisotropes, la conductivité thermique est modélisée par une matrice diagonale (exprimée dans son repère d'orthotropie). En non linéaire (forcément isotrope dans le `Code_Aster`) on a par contre

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\lambda(\mathbf{x}, T) \nabla T(\mathbf{x}, t)$$

En reprenant les notations et la démarche développées dans les paragraphes précédents, on synthétise le calcul des dérivées du flux de chaleur dans le tableau suivant. La colonne intitulée « formule » exprime la relation à mettre en place dans les opérateurs `CALC_ELEM/CALC_NO` pour déterminer la **sensibilité du flux de chaleur** recherchée. Elle dépend du **champ de température** et de sa **sensibilité par rapport au même paramètre**, tous les deux résultant d'un calcul thermique (via `THER_LINEAIRE` ou `THER_NON_LINE`).

### Remarque :

*En pratique, les calculs de sensibilité du flux de chaleur ne tiennent pas compte de l'éventuelle non-linéarité de la conductivité thermique. En thermique non-linéaire, le premier terme n'est donc pas programmé.*

Type de sensibilité	Variables de sortie de l'opérateur thermique	Sensibilité recherchée	Formule / Options de calcul dans le Code_Aster
<b>Thermique linéaire</b>			
Chaleur volumique	$u = \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha_i}$	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\lambda(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)$ FLUX_ELGA/NO_TEMP
Conductivité thermique	$u = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda_i}$	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -I_i(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t) - \lambda(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)$ FLUX_ELGA/NO_SENS
Source	$u = \frac{\partial T}{\partial s_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s_i}$	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\lambda(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)$ FLUX_ELGA/NO_TEMP
Température imposée	$u = \frac{\partial T}{\partial f_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial f_i}$	Idem
Flux normal imposé	$u = \frac{\partial T}{\partial g_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial g_i}$	Idem
Echange convectif	$u = \frac{\partial T}{\partial h_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial h_i}$	Idem
Température extérieure	$u = \frac{\partial T}{\partial T_{ext}^i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T_{ext}^i}$	Idem

Type de sensibilité	Variables de sortie de l'opérateur thermique	Sensibilité recherchée	Formule / Options de calcul dans le Code_Aster
<b>Thermique non linéaire</b>			
Chaleur volumique	$u = \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha_i}$	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \lambda}{\partial T}(\mathbf{x}, T)(u \nabla T)(\mathbf{x}, t) - \lambda(\mathbf{x}, T) \nabla u(\mathbf{x}, t)$ FLUX_ELGA/NO_TEMP
Conductivité thermique	$u = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \lambda_i}$	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\left[ \frac{\partial \lambda}{\partial T}(\mathbf{x}, T)u(\mathbf{x}, t) + I_i(\mathbf{x}, t) \right] \nabla T(\mathbf{x}, t) - \lambda(\mathbf{x}, T) \nabla u(\mathbf{x}, t)$ FLUX_ELGA/NO_SENS
Source	$u = \frac{\partial T}{\partial s_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s_i}$	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \lambda}{\partial T}(\mathbf{x}, T)(u \nabla T)(\mathbf{x}, t) - \lambda(\mathbf{x}, T) \nabla u(\mathbf{x}, t)$ FLUX_ELGA/NO_TEMP
Température imposée	$u = \frac{\partial T}{\partial f_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial f_i}$	Idem
Flux normal imposé linéaire	$u = \frac{\partial T}{\partial g_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial g_i}$	Idem
Flux normal imposé non linéaire	$u = \frac{\partial T}{\partial i_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial i_i}$	Idem
Echange convectif linéaire	$u = \frac{\partial T}{\partial h_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial h_i}$	Idem
Température extérieure	$u = \frac{\partial T}{\partial T_{ext}^i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T_{ext}^i}$	Idem
Emissivité	$u = \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varepsilon_i}$	Idem
Constante de Stefan-Boltzmann	$u = \frac{\partial T}{\partial \sigma_i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma_i}$	Idem
Température à l'infini	$u = \frac{\partial T}{\partial T_{\infty}^i}, T$	$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial T_{\infty}^i}$	Idem

Tableau 5-1 Sensibilités du flux de chaleur

## Remarque :

En posant dans les formules de la thermique non linéaire

$$\frac{\partial \lambda}{\partial T}(\mathbf{x}, T) = 0 \text{ et } \lambda(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x})$$

on retrouve bien les formulations de la thermique linéaire.

## 6 Mise en œuvre dans le Code\_Aster

### 6.1 Difficultés particulières

La difficulté principale de ces calculs de sensibilité est de détecter la présence de paramètres sensibles dans les chargements et les matériaux standards, et, de leur associer les champs dérivés idoines. Pour se faire, toute une architecture (cf. [bib6] et [§6.2], [§6.4]) a dû être mise en place afin de notifier au superviseur l'affiliation d'un champ dérivé à telle ou telle variable sensible. Via les commandes `DEFI_PARA_SENSI` et `MEMO_NOM_SENSI` et leurs utilitaires FORTRAN associés, on peut ainsi faire la jointure au sein d'un opérateur thermique, entre un paramètre sensible, le champ où il intervient et le champ dérivé associé.

Avec une mention particulière pour les matériaux qui ne sont connus que sous une forme codée. On détecte la caractéristique sensible dudit matériau en testant la nullité du matériau dérivé (un problème connexe se pose pour les caractéristiques du rayonnement).

Entre autres aménagements, il a fallu aussi :

- Insérer, au sein des opérateurs thermiques, une boucle sur les sensibilités demandées, coïncées entre les boucles temporelles et celles sur les chargements.
- Mettre en place la résolution d'un système linéaire dans le processus non-linéaire de `THER_NON_LINE`.
- Organiser et gérer la mutualisation des matrices entre le problème standard et le (ou les) problème(s) dérivé(s).
- Prendre en compte, de manière robuste et rapide, l'insertion d'éventuels paramètres insensibles (création d'un `CHAM_NO` de composantes nulles pour les opérateurs thermiques et d'un `CHAM_ELEM` de composantes nulles pour les post-traitements de calcul de flux).
- Eviter une prolifération intempestive d'option de calculs (et de leurs `TE000` FORTRAN associés) en mutualisant et « bluffant » l'existant (on peut visualiser le cheminement exact du calcul (au niveau macroscopique des options) et les astuces déployées pour réutiliser l'existant cf [§6.2]).

Au delà de ces développements pointilleux, un gros effort de validation « numérique-informatique » a été déployé sur toutes les mailles supports, toutes les modélisations, tous les chargements, tous les types d'initialisation des solveurs thermiques et pour toutes les sensibilités. Ces tests laborieux sur de petits cas tests modèles (`TPLL01A/H` pour le 2D PLAN et 3D et `TPNA01A` pour le 2D AXIS) se sont révélés fructueux (y compris pour le calcul thermique standard en lumpé !) et indispensables.

Car on dispose rarement de valeurs théoriques permettant de valider un calcul thermique compliqué : « rien ne ressemble plus à une sensibilité... qu'une autre valeur de sensibilité ! ». En croisant avec des différences finies convergées, on a donc essayé de dégager un maximum de confiance en toutes les briques élémentaires constituant le système dérivé.

Pour être exhaustive sur l'aspect validation, notons que plusieurs cas-tests ont été livrés (`SENST<00>[V1.01.15*]`) dont un analytique (`SENST04` cf. [§6.4]).

### 6.2 Environnements nécessaires/paramétrages

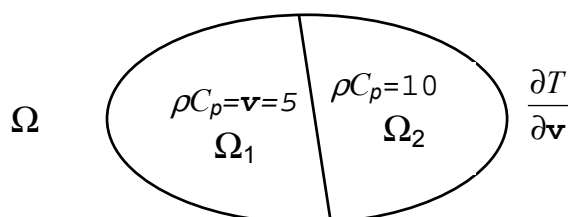


Figure 6.2-a Désignation des conductivités thermiques pour un bi-matériau



Pour calculer la sensibilité du champ thermique par rapport à un paramètre constant par zone (ici une valeur particulière de la conductivité dans une des zones d'un bi-matériau lors d'un calcul stationnaire), il **faut tout d'abord notifier ce paramètre sensible dans le fichier de commande** via un DEFI\_PARA\_SENSI

```
v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = 5. )
```

ainsi que les fonctions constantes égales à zéro et à l'unité qui serviront à définir l'indispensable fonction indicatrice

```
zero = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 0. )  
un = DEFI_CONSTANTE ( VALE = 1. )
```

Puis, comme pour un problème standard, on définit les champs matériau (ou les conditions limites) associés. On n'a pas à modifier les autres chargements standards.

```
ma1 = DEFI_MATERIAU ( THER = _F/ RHO_CP = v )  
ma2 = DEFI_MATERIAU ( THER = _F/ RHO_CP = 10. )  
affe = AFFE_MATERIAU ( AFFE = ( _F/ GROUP_MA = <Ω1>, MATER = ma1 ),  
                        _F/ GROUP_MA = <Ω2>, MATER = ma2 ) )  
.....
```

autres données matériau et conditions limites insensibles vis-à-vis de v

**Il faut ensuite définir les champs matériau « dérivés » (ou les conditions limites « dérivées ») et uniquement ceux concernés par cette dérivation.** Ce sont eux qui fourniront l'information essentielle à l'assemblage du problème dérivé : la fonction indicatrice du champ dérivé

$$I_1 = \frac{\partial \rho C_p}{\partial v} = \begin{cases} 1 \text{ sur } \Omega_1 \\ 0 \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$$

On notifie au superviseur leur affiliation au champ initial via la commande MEMO\_NOM\_SENSI (c'est elle qui remplit une structure de données sensibilité idoine permettant de faire la jointure, au sein des opérateurs thermiques, entre le paramètre sensible, le champ où il intervient et le champ dérivé associé)

```
MEMO_NOM_SENSI ( NOM = _F/ NOM_SD = 'ma' ,  
                  PARA_SENSI = 'v' ,  
                  NOM_COMPOSE = 'ma_v' ) )  
ma_v = DEFI_MATERIAU ( THER = _F/ RHO_CP = un )  
mazero = DEFI_MATERIAU ( THER = _F/ RHO_CP = zero ) )  
MEMO_NOM_SENSI ( NOM = _F/ NOM_SD = 'affe' ,  
                  PARA_SENSI = 'v' ,  
                  NOM_COMPOSE = 'affe_v' ) )  
affe_v = AFFE_MATERIAU ( AFFE = ( _F/ GROUP_MA = <Ω1>, MATER = ma_v ),  
                        _F/ GROUP_MA = <Ω2>, MATER = mazero ) )
```

On conclut en demandant à l'opérateur thermique ledit calcul via le mot-clé sensibilité et notifiant au superviseur la présence d'un champ sensibilité dans l'EVOL\_THER **resu** (accessible dans le champ symbolique **resu\_v** de la SD résultat)

```
MEMO_NOM_SENSI ( NOM = _F/ NOM_SD = 'resu' ,  
                  PARA_SENSI = 'v' ,  
                  NOM_COMPOSE = 'resu_v' ) )  
resu = THER_LINEAIRE ( CHAM_MATER = affe ,  
                      .....  
                      SENSIBILITE = ( v ) )
```

Titre : Calcul de sensibilités en thermique  
Auteur(s) : O. BOITEAU

Date : 01/07/03  
Clé : R4.03.02-A Page : 58/66

On peut bien sûr faire les mêmes post-traitements sur le champ dérivé que sur le champ standard, il suffit de rajouter aux commandes idoines (CALC\_ELEM pour le calcul du flux de ce CHAM\_ELEM aux nœuds, CALC\_NO pour sa transformation en un CHAM\_NO, POST\_RELEVÉ pour le relevé de valeur, IMPR\_RESU pour l'impression et TEST\_RESU pour la comparaison de valeurs) le mot-clé SENSIBILITE et de le renseigner de la bonne valeur de paramètre de dérivation. L'opérateur sélectionnera alors le bon champ sensibilité partageant la même SD que le champ standard. Par exemple, on remplit ici la table **rlresuv** de certaines composantes de la dérivée de T par rapport à **v**

```
rlresuv = POST_RELEVÉ_T ( ACTION=_F( RESULTAT= resu,
                                .....
                                SENSIBILITE = ( v ) )
```

En imprimant la table on peut alors visualiser spécifiquement les composantes de la sensibilité souhaitées.

```
-----
ASTER 6.02.24 CONCEPT RLRESUV CALCULE LE 27/03/2002 A 14:56:43 DE TYPE
TABL_POST_RELE
INTITULE NOEUD RESU NOM_CHAM PAR_SENS NUME_ORDRE INST COOR_X/Y/Z TEMP
TEMPERAT NO1 RLRESUV TEMP v 0 0. 0. 1.1 -1.5 0. 1.69334E+01
TEMPERAT NO2 RLRESUV TEMP v 0 0. 0. 1.1 -1.0 0. 1.88532E+01
TEMPERAT NO3 RLRESUV TEMP v 0 0. 0. 1.1 -0.5 0. 1.19433E+01
TEMPERAT NO4 RLRESUV TEMP v 0 0. 0. 1.1 -0.0 0. 2.15978E+01
```

#### Exemple 6.2-1 : Tracé, via IMPR\_TABLE, dans le fichier résultat

Pour de plus amples informations, le lecteur pourra consulter [bib6], [U4.50.02] ou les cas-tests du type SENST<00>[V1.01.15\*].

#### Remarques :

- En paramétrant à bon escient les chargements et matériaux « dérivés » dans le fichier de commande, on peut aussi avoir accès à certaines dérivés composées. Cf la remarque du [§6.3].
- La syntaxe des commandes spécifiques de la sensibilité (DEFI\_PARA\_SENSI, MEMO\_NOM\_SENSI) peut être amené à changer suivant les choix architecturaux qui seront pris (automatisation du processus de détection et de paramétrage des champs dérivés par le superviseur ou non). La méthodologie ne sera pas par contre modifiée et on pourra toujours passer en « manuelle ». L'utilisateur restant alors seul juge de la pertinence de ces calculs « hors limites ».
- Lors de la construction des champs dérivés, dans AFFE\_MATERIAU ou AFFE\_CHAR\_THER, on n'a pas besoin de spécifier la « nullité » des champs insensibles. Ils sont initialisés par défaut à zéro.

Pour être complètement exhaustif sur le paramétrage, concluons par une fonctionnalité qui peut intéresser de futurs mainteneurs/développeurs ou des utilisateurs « pointus ». Le déroulement exact du calcul (options calculées avec leur champ IN et OUT, chargements et matériaux pris en compte...) ainsi que les astuces déployées pour réutiliser l'existant sont tracés dans le fichier message si on notifie INFO=2 dans le solveur thermique incriminé et dans CALC\_ELEM (pour les options FLUX\_ELGA/NO\_TEMP).

```
*****
CALCUL DE SECOND MEMBRE THERMIQUE: NXACMV

TYPESE/INST          : 3      5.00000000000000
CALCUL LINEAIRE      : F
```

.....

```
--> CALCUL COMPLEMENTAIRE EN SENSIBILITE
--> BLUFF DE L'OPTION: T- EST REMPLACE PAR (DT/DS)-
```

Titre : Calcul de sensibilités en thermique  
Auteur(s) : O. BOITEAU

Date : 01/07/03  
Clé : R4.03.02-A Page : 59/66

```
--> ET RAJOUT D'UN NOUVEAU TERME SOURCE
--> OPTION          :CHAR_SENS_EVOLNI
    LPAIN/LCHIN     :PGEOMER MAIL      .COORDO
    LPAIN/LCHIN     :PTEMPER  &&OP0186VAR_____001
```

.....

```
NBRE DE CHARGES : 6
BOUCLE SUR LES CHARGES DE TYPE NEUMANN LIN
  CHARGE          :CH3
  EXICHA/NOMCHS   : 1 ?????????
  CHARGE          :CH4
  EXICHA/NOMCHS   : 1 ?????????
```

```
--> CALCUL COMPLEMENTAIRE EN SENSIBILITE
--> ECHANGE/NUMCHM : 2
--> BLUFF DE L'OPTION: CARTE TEXT+/- NULLE
--> K              : 1
--> OPTION          :CHAR_THER_TEXT_F
    LPAIN/LCHIN     :PT_EXTF  &&VECHTH.T_EXTNUL
    LPAIN/LCHIN     :PGEOMER MAIL      .COORDO
```

**Exemple 6.2-2 : Tracé de THER\_LINAIRE ou THER\_NON\_LINE,  
via INFO=2, dans le fichier message.**

```
*****
      CALCUL DE FLUX THERMIQUES
  OPTION DE CALCUL      FLUX_ELGA_TEMP
  MODELE                MOTH
  SD EVOL_THER DONNEE   TH
      RESULTAT          TH
  MATERIAU PRIS EN COMPTE CMAT
  NOMBRE DE NUMERO D'ORDRE 1
  NOMBRE DE PARAMETRES SENSIBLES 7
*****
```

```
OP0058 *****
INST/IAUX/IORDR 0. 1 0
NRPASS/TYPERSE/NOPASE 1 3 PS1
CHTEMP/CHTESETH_PS1 .001.000000 / TH .001.000000
--> OPTION          :FLUX_ELGA_TEMP
    LPAIN/LCHIN     :PGEOMER MAIL      .COORDO
    LPAIN/LCHIN     :PMATERC CMAT      .MATE_CODE
    LPAIN/LCHIN     :PTEMPER  TH_PS1   .001.000000
    LPAIN/LCHIN     :PTEMPSR  &&MECHTI.CH_INST_R
    LPAIN/LCHIN     :PTEREF
    LPAIN/LCHIN     :PMATSEN  CMAT_PS1.MATE_CODE
    LPAIN/LCHIN     :PTEMSEN  TH       .001.000000
```

**Exemple 6.2-3 : Tracé de CALC\_ELEM,  
via INFO=2, dans le fichier message.**

### 6.3 Périmètre d'utilisation

Le périmètre d'utilisation des calculs de sensibilités thermiques peut se formuler en quelques points :

1. **Les calculs de sensibilité thermiques s'appuie sur les opérateurs THER\_LINEAIRE et THER\_NON\_LINE.** Ils traitent des problèmes thermiques, linéaires ou non, isotrope ou anisotrope, stationnaire ou transitoire.
2. Ils n'ont pas été encore étendus aux problèmes de séchage et d'hydratation qui sont aussi traité par THER\_NON\_LINE (option THER\_HYDR ou SECH\_\* de COMP\_THER\_NL/RELATION). Si ce type de problématique a été retenue pour un calcul de sensibilité, le calcul s'arrête en ERREUR\_FATALE après en avoir signifié la raison.
3. De manière exhaustive, ces calculs de sensibilités concernent toutes les mailles supports (TRIA3/6, QUAD4/8/9, TETRA4/10, PENTA6/13/15, PYRAM5/10 et HEXA8/20/27) et toutes les modélisations isoparamétriques (PLAN, PLAN\_DIAG, AXIS, AXIS\_DIAG, 3D et 3D\_DIAG). Si d'autres modélisations (seul THER\_LINEAIRE accepte d'autres modélisations que les habituels éléments isoparamétriques) sont présentes dans le maillage (COQUE\_ ou AXIS\_FOURIER) le calcul s'arrête (option -1 devant la ligne des options idoines du catalogue d'éléments) en ERREUR-FATALE, après en avoir signifié la raison.
4. En s'appuyant sur le périmètre d'utilisation du code, on n'a pas prévu le calcul de sensibilité (de la température et de son flux) en présence de conductivité non-linéaire.
5. On a accès à la **sensibilité du champ de température** (et de son flux cf. [§5]) **par rapport à tous les paramètres de chargements et toutes les caractéristiques matériau. Ceux-ci ne devant dépendre que des variables d'espace.**
6. **Les seules exceptions sont** l'entropie (une entropie constante en fonction de la température, cela n'aurait aucun sens !), les coefficients multiplicateurs des conditions de Dirichlet généralisées (calcul de sensibilité non implanté car il a peu de sens avec des coefficients souvent discrets) et les conductivités anisotropes (limitations informatiques, absence de la modélisation THER\_ORTH\_FO).
7. On peut, par contre, calculer la sensibilité par rapport à une des composantes d'un flux normal vectoriel.
8. Le calcul fournit, à la fois, le champ de température standard et les sensibilités de ce même champ par rapport aux paramètres fournis au mot-clé SENSIBILITE de l'opérateur thermique. Par contre, pour le calcul du flux (via CALC\_ELEM et/ou CALC\_NO), on ne calcule que la partie sensibilité. Pour obtenir aussi celui du champ de température standard, il faut réitérer l'opération sans le mot-clé SENSIBILITE.
9. Si l'utilisateur, involontairement ou non, demande un calcul de sensibilité par rapport à un paramètre dit « insensible », c'est-à-dire non concerné par le calcul thermique en cours, un message d'alarme le prévient. Aucun calcul n'est produit, la structure de données prévue pour l'accueil de ce CHAMNO est initialisée à zéro, et le calcul se poursuit avec les autres sensibilités demandées.
10. La demande d'une ou plusieurs sensibilités ne fait qu'enrichir la structure de données thermique (EVOL\_THER) et fournit aussi le champ de température dont elles sont la dérivée (cf. n°8). En terme de performance, le calcul d'une sensibilité analytique est bien moins coûteux qu'un calcul standard puisqu'on réutilise la même matrice factorisée.
11. Lors du calcul de la sensibilité du flux thermique via CALC\_ELEM, il faut préciser non seulement le champ matériau utilisé (comme pour le problème standard) mais aussi les chargements incriminés par le ou les paramètres de dérivation.
12. Pour éviter toute confusion (au niveau superviseur, mais aussi au niveau utilisateur !), il ne vaut mieux pas réutiliser plusieurs fois un paramètre sensible dans des chargements ou des matériaux différents.
13. Le calcul de la sensibilité du flux thermique n'a pas été développé, comme pour le problème standard, en COQUE\_PLAN et en COQUE\_AXIS.

**Remarque :**

**En paramétrant à bon escient les chargements et matériaux « dérivés » dans le fichier de commande, on peut aussi avoir accès à certaines dérivés composées. Ainsi si un chargement ou une caractéristique dépend, explicitement ou implicitement, du temps ou de l'espace et que l'on est capable d'exhumer cette dépendance, on peut alors calculer la dérivée de  $T$  (et de son flux) par rapport à ce coefficient de dépendance.**  
**Le principal étant qu'il ne dépende pas aussi de la solution calculée (le champ de température).**  
**Auquel cas, il faudra développer un véritable calcul de sensibilité composé.**

**En bref, le périmètre d'utilisation de cette fonctionnalité regroupe la thermique, linéaire ou non, isotrope ou anisotrope, stationnaire ou transitoire, s'appuyant sur des éléments finis isoparamétriques lumpés ou non. Dans ce cadre là, elle recouvre le même périmètre que celui des opérateurs thermiques incriminés.**

## 6.4 Exemple d'utilisation

Pour se familiariser avec l'emploi de cette nouvelle fonctionnalité, on peut s'inspirer de cette version expurgée du cas test **SENST04A** [V1.01.154]. Dans ce cas test analytique, il s'agit de s'assurer de la validité des dérivés par rapport au coefficient d'échange-paroi et à la conductivité, dans un calcul de réponse thermique transitoire linéaire de deux plaques séparées par un jeu dans lequel on effectue un transfert de chaleur.

Le problème est bidimensionnel, mais les conditions limites font que le champ de température atteint rapidement l'état stationnaire et ne dépend analytiquement que de l'abscisse et des données. On en déduit alors aisément les expressions analytiques des sensibilités du champ de température et de son flux par rapport aux paramètres thermiques qui nous intéressent.

```
# 1. Definition/memorisation des fonctions constantes
PS_UN=DEFI_CONSTANTE( VALE=1.0, );
MEMO_NOM_SENSI ( NOM_UN = PS_UN );
PS_ZERO=DEFI_CONSTANTE( VALE=0.0, );
MEMO_NOM_SENSI ( NOM_ZERO = PS_ZERO );

.....

# 2. Definition des parametres sensibles et des autres parametres
PS1=DEFI_PARA_SENSI( VALE=80.0, );
PS2=DEFI_PARA_SENSI( VALE=40.0, );

.....

# 3.1. Mise en place des materiaux (std et sensible)
MAT=DEFI_MATERIAU( THER_FO=_F( LAMBDA=PS2, RHO_CP=A5 ) )
MEMO_NOM_SENSI( NOM=_F( NOM_SD='MAT',
                        PARA_SENSI=PS2,
                        NOM_COMPOSE='MAT_PS2' ) );
MAT_PS2=DEFI_MATERIAU( THER_FO=_F( LAMBDA = PS_UN,
                                   RHO_CP = PS_ZERO ) )
CMAT=AFFE_MATERIAU( MAILLAGE=MAIL, AFPE=_F( TOUT='OUI', MATER=MAT ) )
MEMO_NOM_SENSI( NOM=_F( NOM_SD='CMAT',
                        PARA_SENSI=PS2,
                        NOM_COMPOSE='CMAT_PS2' ) );
CMAT_PS2=AFFE_MATERIAU( MAILLAGE=MAIL, AFPE=_F( TOUT='OUI', MATER=MAT_PS2 ) )

.....

# 3.2.2 Chargements sensibles (echange-paroi)
CH_1=AFPE_CHAR_THER_F( MODELE=MODTHER,
                       ECHANGE_PAROI=_F( GROUP_MA_1='INTERG',
                                           GROUP_MA_2='INTERD', COEF_H=PS1 ) );
MEMO_NOM_SENSI( NOM=_F( NOM_SD='CH_1',
                       PARA_SENSI=PS1,
```

Titre : *Calcul de sensibilités en thermique*  
Auteur(s) : **O. BOITEAU**

Clé : *R4.03.02-A* Date : *01/07/03*  
Page : *62/66*

```
NOM_COMPOSE='CH_1_PS1' ));  
CH_1_PS1=AFFE_CHAR_THER_F(MODELE=MODTHER,  
    ECHANGE_PAROI=_F(GROUP_MA_1='INTERG',  
    GROUP_MA_2='INTERD',COEF_H=PS_UN));  
  
.....  
# 4.1 Calcul standard + 2 calculs de sensibilité  
MEMO_NOM_SENSI(NOM=(_F(NOM_SD='RESU',  
    PARA_SENSI=PS1,  
    NOM_COMPOSE='RESU_PS1'),  
    _F(NOM_SD='RESU',  
    PARA_SENSI=PS2,  
    NOM_COMPOSE='RESU_PS2')));  
RESU=THER_LINEAIRE(MODELE=MODTHER,CHAM_MATER=CMAT,  
    EXCIT=(_F(CHARGE=CH_0),_F(CHARGE=CH_1)),  
    TEMP_INIT=_F(CHAM_NO=TEMPINIT),  
    SENSIBILITE=(PS1,PS2),  
    INCREMENT=_F(LIST_INST=LINST))  
  
# 4.2 Calcul du flux aux nœuds  
RESU=CALC_ELEM(reuse=RESU,MODELE=MODTHER,CHAM_MATER=CMAT,  
    RESULTAT=RESU,OPTION='FLUX_ELNO_TEMP',  
    EXCIT=(_F(CHARGE=CH_0),_F(CHARGE=CH_1)),  
    SENSIBILITE=(PS1,PS2))  
RESU=CALC_NO(reuse=RESU,  
    RESULTAT=RESU,OPTION='FLUX_NOEU_TEMP',  
    SENSIBILITE=(PS1,PS2))
```

**Exemple 6.4-1 : Mise en place d'un calcul de sensibilité en thermique linéaire**

## 7 Conclusion/Perspective

Lors de simulations numériques l'obtention d'un résultat brut n'est plus suffisante. L'utilisateur est de plus en plus demandeur de calcul de sensibilité par rapport aux données d'entrée du problème. Cela lui permet d'estimer l'incertitude à laquelle répond le champ résultat en fonction de la loi de variation des données. Cette dérivée est aussi le substrat de base de problèmes inverses (recalage de paramètres...) et de problèmes d'optimisation.

Cette sensibilité peut être obtenue « manuellement », mais l'expérience montre que ces études paramétriques sont souvent coûteuses, peu mutualisables et moins fiables qu'un calcul analytique implanté dans le logiciel de calcul.

**Dans cette note, on se place dans le périmètre d'utilisation des opérateurs thermiques standards du Code\_Aster et on s'intéresse à cette sensibilité analytique du champ de température et de son flux par rapport aux caractéristiques matériau et aux chargements.** On y décrit le processus permettant d'exhumer le système linéaire que vérifie cette dérivée. Afin de minimiser le surcoût calcul, un effort particulier a été apporté pour lier sa résolution à celle du problème initial.

**On détaille les travaux théoriques, numériques et informatiques qui ont présidé à l'implantation de ces calculs de sensibilité dans le code.** On spécifie leurs propriétés et leurs limitations tout en reliant ces considérations à un paramétrage précis des opérateurs incriminés et aux choix de modélisation du code. On a essayé de constamment lier les différents items abordés tout en détaillant, a minima, les démonstrations un peu techniques.

**L'environnement requis, le paramétrage et le périmètre d'utilisation de cette nouvelle fonctionnalité sont décrits. Un exemple extrait d'un cas-test officiel est explicité.**

**Par la suite, les perspectives de ce travail sont de plusieurs ordres :**

- **D'un point de vue fonctionnel**, on pourrait étendre véritablement le périmètre d'utilisation des calculs de sensibilité thermiques (et aussi celui du problème standard sur lequel ils s'adossent) à des conductivités non-linéaires et/ou anisotropes et aux conditions d'échange paroi en lumpé. A peu de frais, on pourrait aussi traiter les problèmes d'hydratation, de séchage et de convection-diffusion.
- D'autre part, des développements restent encore à implanter pour pouvoir traiter convenablement un large spectre de dérivées composées et, en particulier, pour effectuer **des chaînages thermo-mécanique (qui sont la véritable cible des développements actuels)**. On pourra alors obtenir les sensibilités de variables mécaniques (déplacements, déformations et contraintes) par rapport à des chargements ou des caractéristiques matériau du problème thermique.
- **D'un point de vue théorique**, il reste à effectuer une étude « numérico-fonctionnelle » similaire à celle de ce document, pour exhumer les mêmes sensibilités thermiques en **modélisation COQUE et FOURIER**. Cela ouvrira alors un autre champ d'investigation : les sensibilités par rapport aux caractéristiques géométriques des éléments structuraux.

---

## 8 Bibliographie

---

- [1] R. DAUTRAY & J.L. LIONS et al. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Ed. Masson, 1985.
- [2] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. Ed. Dunod, 1969.
- [3] H. BREZIS. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Ed. Masson, 1983.
- [4] V. VENTURINI et al. Etude probabiliste de la cuve par un couplage mécano-fiabiliste. Bilan du projet P1-97-04 : PROMETE. Note HP-26/99/012, nov. 1999.
- [5] G. NICOLAS. Etude d'opportunité du projet I7-01-02. Note HI-72/00/020, 2000.
- [6] G. NICOLAS & J. PELLET. Architecture pour la sensibilité. Note HI-72/01/009.
- [7] G. CORLISS et al. AD of algorithms : from simulation to optimization. Ed. Springer Verlag, 2002.
- [8] S. CAMBIER. Sensibilités de grandeurs vibratoires. Théorie et algorithmes en vue d'une implantation dans le *Code\_Aster*. Note HT-62/01/011.
- [9] C. DUVAL et al. Applicabilité de la différentiation automatique à un système d'EDP régissant les phénomènes thermohydrauliques dans un tube chauffant. Note 96NJ00017, 01/02/96.



## Annexe 1 Notion de dérivée « au sens des distributions »

Plaçons nous dans le cadre d'un bi-matériau et d'une dérivation par rapport à la chaleur volumique d'un de ces matériaux, en thermique linéaire. Le même raisonnement peut être conduit en non-linéaire et par rapport à n'importe quelle autre caractéristique matériau, chargement ou condition limite.

On considère la modélisation de la chaleur volumique globale suivante ( $I_i$  la fonction indicatrice de la  $i$ ème partie  $\bar{\Omega}_i$ )

$$\rho C_p(\mathbf{x}) := \alpha_1 I_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 I_2(\mathbf{x}) \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{éq A1.1}$$

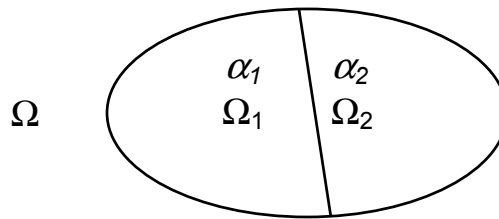


Figure A1-a : Désignation des chaleurs volumiques pour un bi-matériau

Soit la famille de distributions paramétrée par  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} (T_\varepsilon)_\varepsilon \quad \mathfrak{K}_+^* &\rightarrow D'(\Omega \times ]0, \tau[) \\ \varepsilon &\rightarrow T_\varepsilon \end{aligned} \quad \text{éq A1.2}$$

telle que  $T_\varepsilon$  est la solution du problème aux limites

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} (\alpha_1(1+\varepsilon)I_1 + \alpha_2 I_2) \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} - \text{div}(\lambda \nabla T_\varepsilon) = s & \Omega \times ]0, \tau[ \\ T_\varepsilon = f & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial n} = g & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial n} + h T_\varepsilon = h T_{ext} & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ T_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = T^0(\mathbf{x}) & \Omega \end{cases} \quad \text{éq A1.3}$$

On reconnaît bien sûr les solutions d'autant de problèmes de thermique linéaire légèrement décalés (cf. [éq 2-1] afin de pouvoir approximer progressivement, lorsque le petit paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro,  $\frac{\partial T}{\partial \alpha_1}$ .

En écrivant que  $T_0$  et  $T_\varepsilon$  vérifient, respectivement,  $(P_0)$  et  $(P_\varepsilon)$ , et en soustrayant membres à membres les deux EDP on obtient

$$(P_\varepsilon - P_0) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \frac{\partial(T_\varepsilon - T_0)}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla(T_\varepsilon - T_0)) = -\alpha_1 \varepsilon I_1 \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} & \Omega \times ]0, \tau[ \\ T_\varepsilon - T_0 = 0 & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial(T_\varepsilon - T_0)}{\partial n} = 0 & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial(T_\varepsilon - T_0)}{\partial n} + h(T_\varepsilon - T_0) = 0 & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ (T_\varepsilon - T_0)(\mathbf{x}, 0) = 0 & \Omega \end{array} \right. \quad \text{éq A1.4}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par  $\alpha_1 \varepsilon$  cette nouvelle EDP et à faire tendre vers zéro le paramètre  $\varepsilon$ . Le problème au limite devient alors un simple problème mêlé de type Cauchy-Dirichlet-Neumann-Robin homogène similaire au problème initial et comportant toutefois un terme source différent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_1 \varepsilon} (P_\varepsilon - P_0) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) = -I_1 \frac{\partial T_0}{\partial t} & \Omega \times ]0, \tau[ \\ u = 0 & \Gamma_1 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \Gamma_2 \times ]0, \tau[ \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0 & \Gamma_3 \times ]0, \tau[ \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 & \Omega \end{array} \right. \quad \text{éq A1.5}$$

dont on note  $u := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_1 \varepsilon} (T_\varepsilon - T_0)$  la solution. Celle-ci existe et est unique car elle hérite de toutes les bonnes propriétés du problème initial. Par définition, on la désigne alors sous le vocable de « distribution dérivée par rapport à la caractéristique  $\alpha_1$  de la chaleur volumique »  $u := \frac{\partial T}{\partial \alpha_1}$ .

Compte-tenu du processus d'obtention de ce type de dérivée (translation, passage à la limite puis définition d'une distribution dérivée dès que l'on est assuré de son existence et son unicité), **il apparaît que cela revient « formellement » à dériver directement les termes du problème aux limites initial** [éq A1-2], [éq A1-3]. C'est de cette façon que l'on a procédé pour toutes les dérivées exhumées dans ce document. D'ailleurs, pour chacune d'entre elles, on a vérifié que cette dérivation « formelle » produisait le même résultat que le processus décrit précédemment.