

Manuel de Référence
Fascicule R4.06 : Sous-structuration
Document : R4.06.02

Calcul modal par sous-structuration dynamique classique et cyclique

Résumé :

Ce rapport présente les bases théoriques des méthodes de calcul modal par synthèse modale. Nous débutons par la description de la transformation de RITZ et des méthodes de recombinaison modale qui en découlent. Puis, nous présentons la synthèse modale qui utilise les techniques classiques de sous-structuration et de recombinaison modale.

Les outils de calcul modal par synthèse modale implémentés dans le *Code_Aster*, sont, ensuite, passés en revue. Nous présentons, tout d'abord, les techniques de sous-structuration dynamique classique de CRAIG-BAMPTON et de MAC NEAL. Puis, nous abordons les méthodes de sous-structuration dynamique cyclique. Complètement dédiées à l'étude des structures à répétitivité cyclique, elles tirent le meilleur parti des particularités géométriques de la structure. Les méthodes de CRAIG-BAMPTON et de MAC NEAL, développées dans ce cadre, sont exposées.

Table des matières

1 Introduction	3
2 Synthèse modale	4
2.1 Transformation de RITZ	4
2.2 Recombinaison modale	5
2.3 Synthèse modale	6
2.3.1 Les modes normaux	7
2.3.2 Les déformées statiques	7
2.4 Conditions de liaison entre sous-structures	8
3 Calcul modal par sous-structuration dynamique classique	11
3.1 Introduction	11
3.2 Méthode de Craig-Bampton	11
3.3 Méthode de Mac Neal	13
3.3.1 Premier cas	16
3.3.2 Deuxième cas	16
3.4 Mise en œuvre dans le <i>Code_Aster</i>	18
3.4.1 Etude des sous-structures séparément	18
3.4.2 Assemblage et résolution	18
3.4.3 Restitution sur base physique	18
4 Calcul modal par sous-structuration dynamique cyclique	19
4.1 Introduction	19
4.2 Répétitivité cyclique	19
4.2.1 Définition	19
4.2.2 Propagation d'onde	20
4.2.3 Notion de diamètres et de cercles nodaux	21
4.2.4 Conditions aux limites	22
4.3 Méthodes de sous-structuration cyclique	23
4.3.1 Méthode de Craig-Bampton	23
4.3.2 Méthode de Mac Neal	28
4.4 Mise en œuvre dans le <i>Code_Aster</i>	32
5 Conclusion	32
6 Bibliographie	33

1 Introduction

Devant la complexité des structures mécaniques, souvent constituées d'un assemblage de plusieurs composants, les méthodes numériques ou expérimentales classiques de la mécanique vibratoire se révèlent coûteuses, parfois même inutilisables. En parfaite cohérence avec l'organisation modulaire des grands projets, les méthodes de sous-structuration apparaissent comme le moyen le plus efficace de réaliser l'étude vibratoire de l'ensemble à partir du comportement dynamique des composants [bib4].

Dans ce rapport, nous présentons, tout d'abord, les bases théoriques des méthodes de synthèse modale. Elles associent des techniques de sous-structuration et de recombinaison modale. Chaque sous-structure est représentée par une base de projection composée de modes propres dynamiques et de déformées statiques aux interfaces. L'étude des conditions de liaison entre sous-structures est simplifiée par la considération de maillages compatibles.

Puis, nous présentons les deux techniques de calcul modal par sous-structuration classique, implémentées dans le *Code_Aster* [bib6] : les méthodes de Craig-Bampton et de Mac Neal. Elles se distinguent par l'utilisation de bases différentes pour les sous-structures.

Enfin, nous présentons les techniques de calcul modal par sous-structuration cyclique. Les méthodes implémentées dans le *Code_Aster* [bib5], permettant le calcul des modes d'une structure à répétitivité cyclique à partir de l'étude de l'un de ses secteurs sont exposées.

Notations générales :

ω_m	: Pulsation maximale d'un système (rad.s ⁻¹)
\mathbf{M}	: Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis
\mathbf{K}	: Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis
\mathbf{q}	: Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis
\mathbf{f}_{ext}	: Vecteur des forces extérieures au système
\mathbf{f}_L	: Vecteur des forces de liaison appliquées à une sous-structure
Φ	: Matrice contenant les vecteurs d'une base de projection organisés en colonne
η	: Vecteur des degrés de liberté généralisés
\mathbf{B}	: Matrice d'extraction des degrés de liberté d'interface
\mathbf{L}	: Matrice de liaison
T	: Energie cinétique
U	: Energie de déformation
\mathbf{Id}	: Matrice identité
λ	: Matrice diagonale des rigidités généralisées
$\mathbf{R}_e(\omega)$: Matrice de flexibilité dynamique résiduelle
$\mathbf{R}_e(0)$: Matrice de flexibilité statique résiduelle

Remarque :

L'exposant k caractérise les grandeurs relatives à la sous-structure S^k et les grandeurs généralisées sont surmontées d'une barre : par exemple $\overline{\mathbf{M}}^k$ est la matrice de masse généralisée de la sous-structure S^k .

2 Synthèse modale

La sous-structuration dynamique consiste à déterminer le comportement d'une structure à partir des caractéristiques vibratoires de chacun de ses composants ([bib3] et [bib4]). Les méthodes implémentées dans le *Code_Aster*, utilisent simultanément les techniques classiques de recombinaison modale et de sous-structuration dynamique.

Ces méthodes, bien que différentes de celle des éléments finis, adoptent une démarche assez comparable. Elles font apparaître trois étapes essentielles :

Etape 1 : étude numérique de chaque composant par la détermination de leurs caractéristiques vibratoires. Le travail consiste à identifier des modes propres et des déformées statiques par des techniques classiques de la mécanique vibratoire. Si on assimile chaque sous-structure à un super-élément, cette étape est similaire au calcul élémentaire.

Etape 2 : raccordement des sous-structures. On utilise les caractéristiques vibratoires déterminées précédemment pour chaque composant, et on tient compte de leur liaisonnement. Ce travail constitue l'étape de sous-structuration proprement dite. Il s'apparente à un assemblage.

Etape 3 : la résolution et une phase de remontée permettent d'obtenir la solution recherchée dans le repère physique de la structure globale.

2.1 Transformation de RITZ

La transformation de RITZ fait l'objet de la documentation de référence [R5.06.01]. Nous rappelons ici son principe. Pour le problème de la détermination numérique des modes propres réels du système non amorti associé à la structure, que nous désignerons par **modes propres**, on se ramène à la résolution du problème de minimisation suivant :

Soit δ déplacement virtuel, on cherche : $\text{Min}_{\delta} \frac{1}{2} \delta^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \delta$
dont la solution \mathbf{q} vérifie :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad \text{éq 2.1-1}$$

La méthode de RITZ consiste à chercher la solution de l'équation de minimisation sur un sous-espace de l'espace des solutions. Considérons la matrice Φ contenant les vecteurs de la base du sous-espace en question, organisés en colonnes. Restreinte à cet espace de dimension réduite, l'équation de minimisation prend la forme :

$$\text{Min}_{\mathbf{p}=\Phi\delta} \frac{1}{2} \mathbf{p}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p}$$

Soit la solution recherchée :

$$\mathbf{q} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad \text{éq 2.1-2}$$

elle vérifie :

$$(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \text{éq 2.1-3}$$

où : $\boldsymbol{\eta}$ est le vecteur des déplacements généralisés,

$$\bar{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$$

Après avoir résolu le système [éq 2.1-3], l'obtention des modes propres dans la base physique se fait à l'aide de la relation [éq 2.1-2]. La transformation de RITZ permet donc de remplacer le problème aux valeurs propres initial [éq 2.1-1] par un problème de même nature [éq 2.1-3], mais de dimension réduite. Les nouvelles matrices de rigidité et de masse restent symétriques.

Cependant, cette transformation doit être utilisée avec prudence. En effet, la nouvelle base étant incomplète, une approximation est faite au niveau de la projection. La précision du résultat final dépend alors du choix des vecteurs de base et l'erreur relative due à cette diminution du nombre d'inconnues doit être estimée.

2.2 Recombinaison modale

Une utilisation classique de la transformation de RITZ, est l'analyse dynamique par recombinaison modale. Elle est couramment utilisée pour le calcul de la réponse d'une structure à une excitation basse fréquence. Nous nous limiterons ici au calcul de la réponse à une excitation d'une structure conservative. Dans ce cas, la méthode des éléments finis nous permet de nous ramener à l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{ext} \quad \text{éq 2.2-1}$$

Si l'on applique la transformation de RITZ, avec comme base incomplète de projection, les premiers modes propres de la structure, la relation [éq 2.2-1] devient :

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{K}}\boldsymbol{\eta} = \bar{\mathbf{f}}_{ext} \quad \text{éq 2.2-2}$$

Où : $\bar{\mathbf{f}}_{ext} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}_{ext}$ est le vecteur des forces généralisées.

Les modes propres sont orthogonaux relativement aux matrices de masse et de rigidité. L'équation différentielle [éq 2.2-2] fait donc apparaître des matrices diagonales : le système est alors constitué d'équations découplées. Chacune d'entre elles est l'équation d'un oscillateur à un degré de liberté de type masse-ressort qui fait apparaître les masse, rigidité et force généralisées relatives au mode j (respectivement : m_j , k_j , f_j).

Si l'on considère la transformation de RITZ [éq 2.2-2], au niveau d'un degré de liberté, on a :

$$q_i = \sum_j \Phi_{ij} \eta_j$$

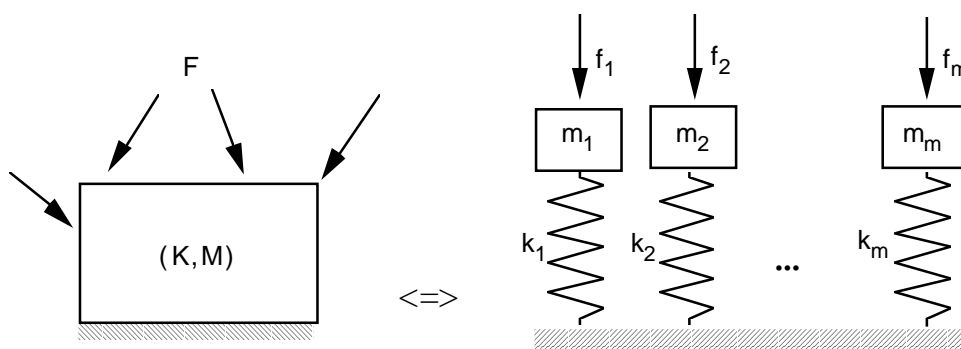
Où :

q_i est la i ème coordonnée du vecteur \mathbf{q} ,

η_j est la j ème coordonnée du vecteur $\boldsymbol{\eta}$,

Φ_{ij} est la composante de la i ème ligne et de la j ème colonne de la matrice $\boldsymbol{\Phi}$.

Il apparaît donc que la réponse de la structure s'exprime comme la recombinaison pondérée de réponses d'oscillateurs à un degré de liberté découplés. La transformation de RITZ permet, dans ce cas, de définir un schéma équivalent de la structure, qui fait apparaître les oscillateurs à un degré de liberté associés aux modes propres identifiés. Leur raideur et leur masse sont les rigidités généralisées (k_j) et les masses généralisées (m_j) des modes correspondants.



Réservée essentiellement aux études en basses fréquences, la recombinaison modale consiste à utiliser les propriétés d'orthogonalité des modes propres d'une structure pour simplifier l'étude de sa réponse vibratoire. Outre l'intérêt de diminuer l'ordre du problème numérique à résoudre, la transformation de RITZ, dans ce cas, permet également de découpler les équations différentielles et de dégager une interprétation physique du résultat obtenu. Selon la fréquence d'excitation, on utilisera une base modale plus ou moins tronquée. Il faut cependant estimer l'erreur de troncature pour s'assurer de la validité du résultat.

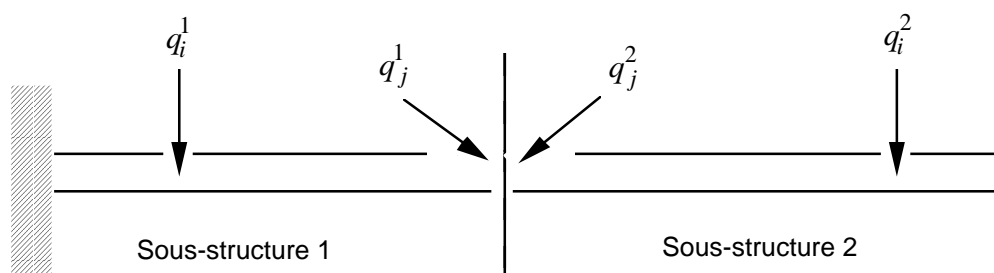
2.3 Synthèse modale

De façon générale, les méthodes de synthèse modale consistent à utiliser simultanément la sous-structuration dynamique (découpage en sous-structures) et la recombinaison modale au niveau de chaque sous-structure. Souvent confondue, par abus de langage, avec la sous-structuration dynamique, la synthèse modale n'est qu'un cas particulier de celle-ci.

La sous-structuration dynamique consiste à considérer le déplacement d'une sous-structure dans le mouvement d'ensemble, comme sa réponse aux forces de liaison qui la relient aux autres composants.

La synthèse modale signifie que l'on calcule ce mouvement, au niveau de chaque sous-structure, par recombinaison modale. On utilise donc une base de projection qui caractérise chaque sous-structure. En effet, si la structure globale est trop importante pour être soumise à un calcul modal, les dimensions des sous-structures permettent d'effectuer ce travail. La synthèse modale impose d'étudier d'abord séparément chaque composant, afin de déterminer leur base de projection.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons les types de modes et déformées statiques utilisés dans les méthodes de synthèse modale à l'aide de l'exemple simple suivant :



Le vecteur des degrés de liberté de la sous-structure est caractérisé par un exposant qui définit le numéro de la sous-structure, et un indice qui permet de distinguer les degrés de liberté internes (indice i), des degrés de liberté de frontière (indice j).

$$\mathbf{q}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^k \\ \mathbf{q}_j^k \end{Bmatrix}$$

On est amené, pour étudier la sous-structure k , à définir une impédance au niveau des degrés de liberté de liaison. Dans le cadre des développements réalisés dans le *Code_Aster*, elle est soit nulle, soit infinie.

Les vecteurs de base utilisés dans les méthodes implémentées dans le *Code_Aster* sont :

- les modes normaux,
- les modes contraints,
- les modes d'attache.

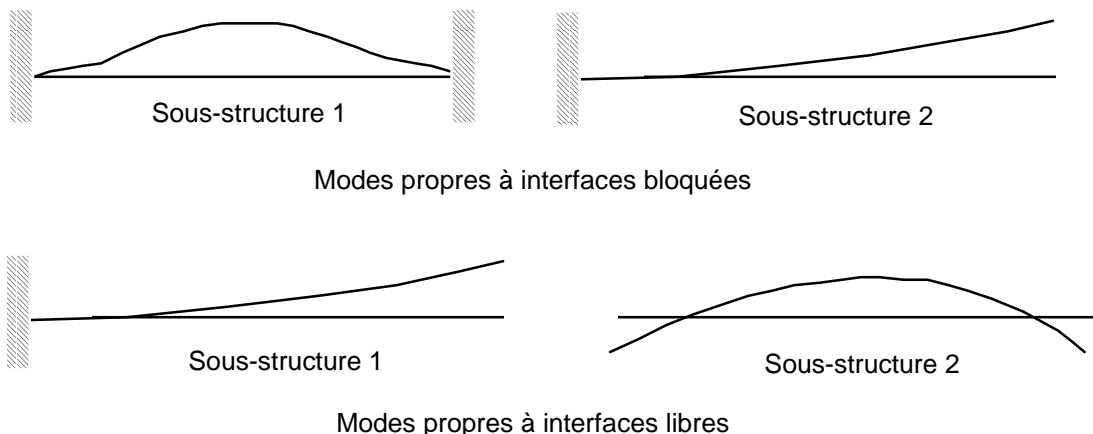
2.3.1 Les modes normaux

Les modes propres ou modes normaux sont avantageusement utilisés comme base de projection des sous-structures pour plusieurs raisons :

- ils peuvent être calculés ou/et mesurés,
- ils offrent des propriétés intéressantes d'orthogonalité par rapport aux matrices de masse et de rigidité de la sous-structure.

Ils peuvent être de deux types selon la condition donnée aux interfaces de liaison :

- modes propres à interfaces bloquées,
- modes propres à interfaces libres.

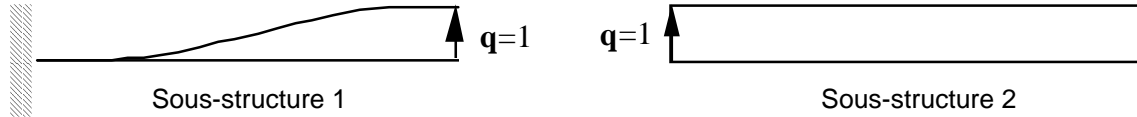


Notons que dans le cas d'une sous-structure libre, les modes de corps rigide (ou modes d'ensemble) existants font partie de la base de transformation.

2.3.2 Les déformées statiques

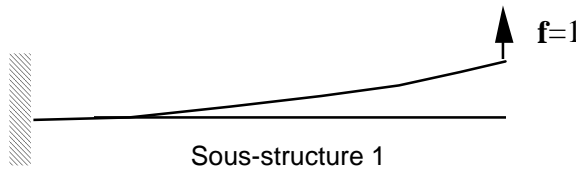
On définit un mode d'interface à chaque degré de liberté de liaison de chaque sous-structure. Selon les cas, il peut s'agir de modes contraints ou de modes d'attache.

Les modes contraints sont des déformées statiques que l'on joint aux modes normaux à interfaces bloquées pour corriger les effets dus à leurs conditions aux limites. Un mode contraint est défini par la déformée statique obtenue en imposant un déplacement unité sur un degré de liberté de liaison, les autres degrés de liberté de liaison étant bloqués.



Modes contraints

Les modes d'attache sont des déformées statiques que l'on joint aux modes normaux à interfaces libres pour diminuer l'effet de la troncature modale. Un mode d'attache est défini par la déformée statique obtenue en imposant une force unitaire à un degré de liberté de liaison, les autres degrés de liberté de liaison étant libres.



Mode d'attache

Dans le cas d'une sous-structure possédant des modes de corps rigide (ici, la sous-structure 2), sa matrice de rigidité n'est plus inversible et il n'est pas possible de calculer ses modes d'attache. Il est alors nécessaire de bloquer certains degrés de liberté pour rendre la structure isostatique.

2.4 Conditions de liaison entre sous-structures

Considérons le problème de deux sous-structures S^1 et S^2 liaisonnées de manière rigide. Pour que le mouvement de la structure complète soit continu, il faut imposer l'égalité des déplacements des deux composants à l'interface et la loi d'action-réaction :

$$\forall M \in S^1 \cap S^2 \quad \mathbf{u}^1(M) = \mathbf{u}^2(M) \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_L^1(M) = -\mathbf{f}_L^2(M) \quad \text{éq 2.4-1}$$

Où :

- $\mathbf{u}^1(M)$ représente le champ de déplacements de la sous-structure 1,
- $\mathbf{u}^2(M)$ représente le champ de déplacements de la sous-structure 2,
- $\mathbf{f}_L^1(M)$ représente le champ des forces de liaison appliquées à la sous-structure 1,
- $\mathbf{f}_L^2(M)$ représente le champ des forces de liaison appliquées à la sous-structure 2.

Dans le *Code_Aster*, nous nous limitons au cas de maillages compatibles. Cela signifie qu'ils vérifient les propriétés suivantes :

- les mailles de chacune des sous-structures S^1 et S^2 s'appuient strictement sur les mêmes nœuds en leur intersection,
- les éléments finis associés à ces mailles de liaison sont les mêmes de part et d'autre de la frontière.

Dès lors, la condition [éq 2.4-1] est strictement équivalente à la formulation ci-dessous :

$$\mathbf{q}_{S^1 \cap S^2}^1 = \mathbf{q}_{S^1 \cap S^2}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{L_{S^1 \cap S^2}}^1 = -\mathbf{f}_{L_{S^1 \cap S^2}}^2 \quad \text{éq 2.4-2}$$

Où :

$\mathbf{q}_{S^1 \cap S^2}^k$ est le vecteur des degrés de liberté aux nœuds d'interface $S^1 \cap S^2$ de la sous-structure k ,
 $\mathbf{f}_{L_{S^1 \cap S^2}}^k$ est le vecteur des forces de liaison aux nœuds d'interface $S^1 \cap S^2$ de la sous-structure k .

En effet, les maillages des deux sous-structures S^1 et S^2 coïncidant, les fonctions de forme associées aux éléments finis sont les mêmes à l'interface. Il suffit donc d'imposer l'égalité aux nœuds des interfaces de liaison de chaque sous-structure pour imposer l'égalité sur tout le domaine de liaison.

Introduisons les matrices d'extraction des degrés de liberté d'interface $\mathbf{B}_{S^1 \cap S^2}^k$:

$$\mathbf{q}_{S^1 \cap S^2}^k = \mathbf{B}_{S^1 \cap S^2}^k \mathbf{q}^k \quad \text{éq 2.4-3}$$

En utilisant l'équation de projection [éq 2.1-2], la condition de continuité des déplacements [éq 2.4-2] et la formulation ci-dessus appliquées aux deux sous-structures, on obtient :

$$\mathbf{B}_{S^1 \cap S^2}^1 \Phi^1 \boldsymbol{\eta}^1 = \mathbf{B}_{S^1 \cap S^2}^2 \Phi^2 \boldsymbol{\eta}^2$$

Soit :

$$\mathbf{L}_{S^1 \cap S^2}^1 \boldsymbol{\eta}^1 = \mathbf{L}_{S^1 \cap S^2}^2 \boldsymbol{\eta}^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_{S^1 \cap S^2}^k = \mathbf{B}_{S^1 \cap S^2}^k \Phi^k \quad \text{éq 2.4-4}$$

où :

$\mathbf{L}_{S^1 \cap S^2}^1$ est la matrice de liaison de S^1 associée à l'interface $S^1 \cap S^2$,
 $\mathbf{L}_{S^1 \cap S^2}^2$ est la matrice de liaison de S^2 associée à l'interface $S^1 \cap S^2$.

Comme nous le verrons dans les prochains chapitres, quelle que soit la méthode choisie, le problème aux valeurs propres de la structure globale, muni de ses conditions aux limites, peut s'écrire sous la forme :

$$(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \text{éq 2.4-5}$$

$$\mathbf{L} \boldsymbol{\eta} = 0$$

Les matrices de masse et de rigidité généralisées, le vecteur des degrés de liberté généralisés et la matrice de liaison qui apparaissent ici, sont définis sur la structure globale. Ils prennent une forme particulière à chaque méthode (Craig-Bampton, Mac Neal, classique, cyclique) qui sera explicitée plus tard. Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ permet de traduire la loi d'action-réaction à laquelle sont soumises les interfaces.

Il s'agit donc d'un problème classique de recherche de valeurs propres, auquel est associée une équation de contrainte linéaire. Dans le *Code_Aster*, ce type de problème est résolu par double dualisation des conditions aux limites [R3.03.01].

Ainsi, on peut démontrer que ce système est également solution du problème de minimisation de la fonctionnelle suivante [bib6] :

$$f = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) \cdot dt$$

$$\text{où } \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \bar{\mathbf{K}} \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \bar{\mathbf{M}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + (\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2)^T \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2)^2$$

Les variables de cette fonctionnelle sont les coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ et les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ (en nombre égal à 2 fois le nombre d'équations de liaison). Le dernier terme de la fonctionnelle impose l'égalité des coefficients de Lagrange.

L'extremum est atteint pour les valeurs des variables qui annulent les dérivées de f , quels que soient a et b réels :

$$-\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\lambda}_2 = 0$$

$$\mathbf{L}^T (\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2) + (\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \boldsymbol{\eta} = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\lambda}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{L} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{L}^T & \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{Id} & \mathbf{L} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La double dualisation aboutit donc à un problème matriciel symétrique réel. On démontre [R3.03.01] qu'elle permet de rendre les algorithmes de triangulation de matrice inconditionnellement stables.

Cette méthode permet donc de traiter la connexion d'interfaces correspondant à des types de base modale différents sans coût de gestion d'une élimination toujours délicate. D'autre part, elle est relativement simple. L'inconvénient majeur de cette formulation est de conduire à des systèmes assemblés finaux de dimensions plus importantes que dans la cas de l'élimination. En effet, le couplage des équations matricielles a été fait en introduisant un nombre de degrés de liberté supplémentaires égal à deux fois le nombre d'équations de liaison. Cet accroissement des dimensions des matrices peut donc être très important. Notons que les degrés de liberté de Lagrange introduits sont, dans ce cas, les forces appliquées aux interfaces pour assurer la liaison entre les deux sous-structures.

3 Calcul modal par sous-structuration dynamique classique

3.1 Introduction

Après avoir étudié séparément les différentes étapes de la sous-structuration, et les techniques qu'elles mettent en jeu, il paraît intéressant de présenter les deux principales méthodes de sous-structuration dynamique : la méthode de Craig-Bampton et celle de Mac Neal.

Craig-Bampton utilise, comme base de projection des sous-structures, des modes contraints et des modes normaux à interfaces fixes [bib1].

Par ailleurs, Mac Neal utilise, comme base de projection des sous-structures, des modes d'attache et des modes normaux à interfaces libres [bib2].

3.2 Méthode de Craig-Bampton

La présentation suivante ne fait intervenir que deux sous-structures S^1 et S^2 , mais elle est généralisable à un nombre quelconque de composants. Après avoir étudié séparément chaque sous-structure, leurs bases de projection (modes normaux à interfaces fixes et modes contraints) sont connues. Pour chacune d'entre elles (identifiée par l'exposant k), on établit une partition des degrés de liberté, distinguant le vecteur des degrés de liberté internes \mathbf{q}_i^k et le vecteur des degrés de liberté de liaison \mathbf{q}_j^k :

$$\mathbf{q}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^k \\ \mathbf{q}_j^k \end{Bmatrix}$$

Soient :

Φ^k la matrice des vecteurs propres de la sous-structure S^k ,

Ψ^k la matrice des modes contraints de la sous-structure S^k .

La base de projection de S^k est caractérisée par la matrice :

$$\Phi^k = [\Phi^k \Psi^k]$$

La transformation de RITZ (équation [éq 2.1-2]), nous permet d'écrire :

$$\mathbf{q}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^k \\ \mathbf{q}_j^k \end{Bmatrix} = [\Phi^k \Psi^k] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^k \\ \boldsymbol{\eta}_j^k \end{Bmatrix} = \Phi^k \boldsymbol{\eta}^k \quad \text{éq 3.2-1}$$

$\boldsymbol{\eta}_i^k$ est le vecteur des degrés de liberté généralisés associés aux modes propres de S^k ,

$\boldsymbol{\eta}_j^k$ est le vecteur des degrés de liberté généralisés associés aux modes contraints de S^k .

Or les modes normaux sont déterminés avec des interfaces fixes, et chaque mode contraint est obtenu en imposant un déplacement unitaire à un degré de liberté de liaison, les autres étant bloqués. Les coordonnées généralisées relatives aux déformées statiques sont alors les valeurs des degrés de liberté de liaison :

$$\mathbf{q}_j^k = \boldsymbol{\eta}_j^k$$

Intéressons nous à la contribution du composant S^k d'un point de vue énergétique. Les énergies cinétique et de déformation sont :

$$T^k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^k T \mathbf{M}^k \dot{\mathbf{q}}^k = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Phi}^k \dot{\boldsymbol{\eta}}^k)^T \mathbf{M}^k \boldsymbol{\Phi}^k \dot{\boldsymbol{\eta}}^k = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^k T \overline{\mathbf{M}}^k \dot{\boldsymbol{\eta}}^k$$

$$U^k = \frac{1}{2} \mathbf{q}^k T \mathbf{K}^k \mathbf{q}^k = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Phi}^k \boldsymbol{\eta}^k)^T \mathbf{K}^k \boldsymbol{\Phi}^k \boldsymbol{\eta}^k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^k T \overline{\mathbf{K}}^k \boldsymbol{\eta}^k$$

Ces expressions font apparaître les projections des matrices de masse et de rigidité sur la base de la sous-structure. Ces matrices, dites généralisées, vérifient un certain nombre de propriétés :

- du fait de l'orthogonalité des modes normaux par rapport aux matrices de rigidité et de masse, le bloc supérieur gauche de ces matrices est diagonal. De plus, nous considérerons que ces modes sont normés par rapport à la matrice de masse,
- on peut également démontrer que les modes contraints sont orthogonaux aux modes normaux par rapport à la matrice de rigidité [bib6].

Les matrices de rigidité et de masse généralisées ont donc la forme suivante :

$$\overline{\mathbf{K}}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^k & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Psi}^{kT} \mathbf{K}^k \boldsymbol{\Psi}^k \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{M}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & \boldsymbol{\Phi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\Psi}^k \\ \boldsymbol{\Psi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\Phi}^k & \boldsymbol{\Psi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\Psi}^k \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.2-2}$$

où $\boldsymbol{\lambda}^k$ est la matrice des rigidités généralisées associées aux modes propres de S^k .

Le choix de la base de projection à interfaces bloquées conduit donc à un couplage des modes normaux et des déformées statiques par la matrice de masse.

Dans le cas du calcul des modes propres de la structure globale, les forces extérieures appliquées au système sont nulles. D'autre part, au niveau de chaque liaison, du fait de la loi d'action-réaction et de la continuité des déplacements, le travail des forces de liaison est nul. Ceci s'explique physiquement par le fait que les forces de liaison sont des forces internes à la structure globale.

Ainsi, au niveau de la structure complète, seules les énergies cinétique et de déformation sont non nulles :

$$T = T^1 + T^2 = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^1 T \overline{\mathbf{M}}^1 \dot{\boldsymbol{\eta}}^1 + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 T \overline{\mathbf{M}}^2 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2$$

$$U = U^1 + U^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^1 T \overline{\mathbf{K}}^1 \boldsymbol{\eta}^1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^2 T \overline{\mathbf{K}}^2 \boldsymbol{\eta}^2$$

Le travail des forces de liaison étant nul, les équations d'Euler-Lagrange relatives aux modes propres de la structure globale sont :

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^1 & 0 & \mathbf{L}^{1T} \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}^2 & \mathbf{L}^{2T} \\ \mathbf{L}^1 & \mathbf{L}^2 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^1 \\ \boldsymbol{\eta}^2 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.2-3}$$

Dès lors, le problème aux valeurs propres de la structure complète peut être exprimé par le système [éq 2.4-5] que nous avons étudié au chapitre 2.4 :

$$(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$\mathbf{L} \boldsymbol{\eta} = 0$$

Ainsi, le calcul des modes propres de la structure globale par la méthode de Craig-Bampton consiste à résoudre un problème aux valeurs propres matriciel de dimension réduite. Les matrices qu'il met en jeu sont symétriques et se calculent à partir des bases des sous-structures. Cette résolution nous donne les fréquences propres et les coordonnées généralisées des modes recherchés. On obtient leurs coordonnées physiques sur les maillages des sous-structures en utilisant la relation [éq 3.2-1]. Cette étape est appelée : étape de restitution sur base physique.

Cette méthode est intéressante si l'on envisage une étude numérique des sous-structures. En effet, les modes normaux à interfaces fixes et les modes contraints se prêtent bien au calcul. En revanche, leur détermination expérimentale est délicate.

On montre en outre que cette méthode, est d'ordre 2 en ω / ω_m où ω_m est la plus grande pulsation propre identifiée.

3.3 Méthode de Mac Neal

Il serait possible de présenter cette méthode de façon similaire à celle de Craig-Bampton, l'unique différence résidant dans l'utilisation des modes normaux à interfaces libres et des modes d'attache. Cependant, il paraît intéressant d'adopter une démarche légèrement différente, qui permet d'aboutir à un critère de troncature, et de faire apparaître les modes d'attache comme la contribution statique des modes propres non identifiés.

Comme précédemment, on considère le problème du calcul des modes propres d'une structure à 2 composants. La méthode est généralisable à un nombre quelconque de sous-structures. Dans la suite nous identifierons toute grandeur associée à la sous-structure S^k par l'exposant k .

Nous nous limitons, ici, au calcul modal de la structure globale, donc les forces extérieures sont nulles.

Aussi, le déplacement de S^k dans le mouvement de la structure globale, vérifie l'équation d'équilibre dynamique suivante :

$$(\mathbf{K}^k - \omega^2 \mathbf{M}^k) \mathbf{q}^k = \mathbf{f}_L^k \quad \text{éq 3.3-1}$$

où \mathbf{f}_L^k est le vecteur des forces de liaison appliquées à S^k .

Nous allons considérer que la base de projection de S^k est constituée de **tous** ses modes propres à interfaces libres. Ainsi, la dimension du problème projeté est égale à la dimension du problème issu de la modélisation éléments finis. Nous supposons, en outre, qu'un certain nombre de ces modes a été déterminé, les autres étant inconnus :

$$\mathbf{q}^k = \begin{bmatrix} \Phi_1^k & \Phi_2^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1^k \\ \eta_2^k \end{Bmatrix} = \Phi^k \eta^k$$

Où :

- Φ_1^k est la matrice des vecteurs modaux identifiés de la sous-structure S^k ,
- Φ_2^k est la matrice des vecteurs modaux non identifiés de la sous-structure S^k ,
- η_1^k est le vecteur des degrés de liberté généralisés associés aux modes propres identifiés de S^k ,
- η_2^k est le vecteur des degrés de liberté généralisés associés aux modes propres non identifiés de S^k .

L'équation [éq 3.3-1] devient, avec les coordonnées généralisées définies précédemment :

$$(\Phi^{kT} \mathbf{K}^k \Phi^k - \omega^2 \Phi^{kT} \mathbf{M}^k \Phi^k) \eta^k = \Phi^{kT} \mathbf{f}_L^k$$

soit :

$$(\bar{\mathbf{K}}^k - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}^k) \eta^k = \Phi^{kT} \mathbf{f}_L^k \quad \text{éq 3.3-2}$$

Les modes propres sont orthogonaux par rapport aux matrices de masse et de rigidité et nous choisissons de les normer par rapport à la matrice de masse. On a donc :

$$\bar{\mathbf{K}}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{M}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.3-3}$$

Considérons maintenant l'ensemble des deux sous-structures. Chacune d'entre elles vérifie les équations [éq 3.3-2] et [éq 3.3-3]. L'ensemble de ces équations dynamiques constitue le système suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \eta_1^1 \\ \eta_1^2 \\ \eta_2^1 \\ \eta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_1^2 \\ \Phi_2^1 \\ \Phi_2^2 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{L_1}^1 \\ \mathbf{f}_{L_1}^2 \\ \mathbf{f}_{L_2}^1 \\ \mathbf{f}_{L_2}^2 \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.3-4}$$

En regroupant les modes identifiés et les modes non identifiés :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^1 \\ \boldsymbol{\eta}_1^2 \\ \boldsymbol{\eta}_2^1 \\ \boldsymbol{\eta}_2^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{coordonnées des modes identifiés} \\ \text{coordonnées des modes non identifiés} \end{array} \quad \text{éq 3.3-5}$$

L'équation traduisant la transformation de RITZ devient :

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\Phi}_1 \quad \boldsymbol{\Phi}_2] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.3-6}$$

Avec ces notations, le système d'équations dynamiques [éq 3.3-4] devient :

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & 0 \\ 0 & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\Phi}_1^T \quad \boldsymbol{\Phi}_2^T] \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{L_1} \\ \mathbf{f}_{L_2} \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.3-7}$$

Ce système d'équations traduit le comportement dynamique des sous-structures séparément. Il ne représente pas le mouvement de la structure globale. Pour cela, il faut lui adjoindre les conditions de liaison entre les deux composants.

Les équations entre sous-structures qui assurent leur liaisonnement dérivent des équations [éq 2.4-2] et [éq 2.4-4], ainsi que de l'organisation de la base que nous avons choisie [éq 3.3-5] :

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{éq 3.3-8}$$

$$\mathbf{f}_{L_1} = -\mathbf{f}_{L_2} \quad \text{éq 3.3-9}$$

Les équations [éq 3.3-7] et [éq 3.3-9] nous permettent d'exprimer les coordonnées généralisées relatives aux modes non identifiés :

$$\boldsymbol{\eta}_2 = -(\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_2^T \mathbf{f}_{L_1} \quad \text{éq 3.3-10}$$

A partir des équations [éq 3.3-8] et [éq 3.3-10], on obtient donc :

$$\mathbf{L}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{L}_2 (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_2^T \mathbf{f}_{L_1} = 0 \quad \text{éq 3.3-11}$$

Or, d'après la formule [éq 2.4-4], on sait que l'on peut écrire les matrices de liaison, sous la forme :

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{B}_k \boldsymbol{\Phi}_k \quad \text{éq 3.3-12}$$

On a donc, d'après [éq 3.3-11] et [éq 3.3-12] :

$$-\mathbf{B}_1 \Phi_1 \eta_1 + \mathbf{B}_2 \Phi_2 (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \Phi_2^T \mathbf{f}_{L_1} = 0 \quad \text{éq 3.3-13}$$

On voit apparaître la matrice de flexibilité dynamique résiduelle associée aux modes non identifiés :

$$\mathbf{R}_e(\omega) = \Phi_2 (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \Phi_2^T \quad \text{éq 3.3-14}$$

La force de liaison est non nulle aux degrés de liberté de liaison des sous-structures. Nous avons donc :

$$\mathbf{f}_{L_1} = \mathbf{B}_1^T \mathbf{f}_{L_1}$$

Dès lors, le problème matriciel [éq 3.3-7] peut se ramener au système équivalent suivant :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id} & -\Phi_1^T \mathbf{B}_1^T \\ -\mathbf{B}_1 \Phi_1 & \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_e(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \mathbf{f}_{L_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.3-15}$$

Ce problème a pour inconnues les coordonnées généralisées associées aux modes propres identifiés et les forces de liaison appliquées à la première sous-structure.

Il y a 2 cas selon que l'on prend en compte ou non la matrice de flexibilité résiduelle.

3.3.1 Premier cas

On néglige la matrice de flexibilité dynamique résiduelle associée aux modes non identifiés : $\mathbf{R}_e(\omega) = 0$.

La méthode de sous-structuration dynamique résultante est donc très simple. Elle a le désavantage de s'appuyer sur une méthode de recombinaison modale très sensible aux effets de troncature.

3.3.2 Deuxième cas

On utilise un développement limité : $\mathbf{R}_e(\omega) = \mathbf{R}_e(0) + O(\omega^2 / \omega_m^2)$:

Adoptons les notations suivantes :

Soient :

n	le nombre de modes de la base complète,
m	le nombre de modes non identifiés,
Φ	la matrice des n modes normaux à interfaces libres,
Ψ	la matrice des n modes d'attache (définie pour tous les degrés de liberté du système),
$\lambda_i = \omega_i^2$	la matrice diagonale des n valeurs propres.

La matrice complète des modes d'attache vérifie : $\mathbf{K}\Psi = \mathbf{Id} \Leftrightarrow \Psi = \mathbf{K}^{-1}$

La base modale complète des modes normaux à interfaces libres constitue une base orthonormale. La matrice de raideur, exprimée dans cette base s'écrit :

$$\bar{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \lambda$$

De la même manière :

$$\bar{\mathbf{K}}^{-1} = \Phi^T \mathbf{K}^{-1} \Phi = \lambda^{-1}$$

On en déduit donc une nouvelle expression de la matrice complète des modes d'attache :

$$\Psi = \mathbf{K}^{-1} = \Phi \lambda^{-1} \Phi^T$$

Comme les modes propres sont orthogonaux deux à deux et la matrice des valeurs propres est diagonale, la matrice complète des modes d'attache prend la forme finale :

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \lambda_i^{-1} \varphi_i^T$$

Considérons maintenant la matrice de flexibilité dynamique résiduelle, issue de la méthode de Mac Neal :

$$\mathbf{R}_e(\omega) = \Phi_2 (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \Phi_2^T = \sum_{i=m+1}^n \varphi_i (\lambda_i - \omega^2)^{-1} \varphi_i^T$$

Pour mettre en évidence l'effet de troncature modale, nous pouvons approximer cette matrice par son développement à l'ordre 1 :

$$\mathbf{R}_e(\omega) \approx \sum_{i=m+1}^n \varphi_i \lambda_i^{-1} \left(1 + \frac{\omega^2}{\lambda_i} \right) \varphi_i^T$$

Lorsque le nombre de modes identifiés est suffisamment important, la contribution dynamique devient négligeable devant la contribution statique :

$$\frac{\omega^2}{\lambda_i} \ll 1 \Rightarrow \mathbf{R}_e(\omega) \approx \mathbf{R}_e(0) = \sum_{i=m+1}^n \varphi_i \lambda_i^{-1} \varphi_i^T$$

où $\mathbf{R}_e(0)$ est la matrice de flexibilité statique résiduelle.

Cette matrice peut être calculée en fonction de la matrice des modes d'attache :

$$\mathbf{R}_e(0) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \lambda_i^{-1} \varphi_i^T - \sum_{i=1}^m \varphi_i \lambda_i^{-1} \varphi_i^T \Rightarrow \mathbf{R}_e(0) = \Psi - \sum_{i=1}^m \varphi_i \lambda_i^{-1} \varphi_i^T$$

Le second terme de cette formulation est calculable de façon exacte, puisqu'il ne fait intervenir que les modes (à interfaces libres) identifiés.

Enfin, notons que dans la méthode de Mac Neal, seule la contribution des modes d'attache aux nœuds d'interface est nécessaire.

La résolution du système [éq 3.3-4] nous permet de déterminer les fréquences propres de la structure globale et les coordonnées généralisées des modes propres. La remontée à l'expression des modes propres dans les bases physiques des sous-structures se fait par la relation suivante :

$$\mathbf{q}^k = \Phi_1^k \boldsymbol{\eta}_1^k + \mathbf{R}_e^k(0) \mathbf{B}_1^{kT} \mathbf{f}_{L_1}^k$$

La méthode de Mac Neal aboutit donc, dans le cas du calcul des modes de la structure globale, à un problème aux valeurs propres de taille réduite. Les matrices de masse et de rigidité issues de la sous-structuration sont symétriques. Deux méthodes sont en réalité proposées, selon que l'on prend en compte ou non la flexibilité résiduelle. La littérature sur le sujet tend à montrer que l'usage de la flexibilité résiduelle est indispensable pour obtenir des résultats fiables [bib2].

3.4 Mise en œuvre dans le Code_Aster

3.4.1 Etude des sous-structures séparément

La base de projection de chaque sous-structure est composée de modes propres dynamiques et de déformées statiques.

Les modes propres dynamiques de la sous-structure sont calculés avec les opérateurs classiques du Code_Aster : `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.02] et `MODE_ITER_INV` [U4.52.01]. Dans le cas de la sous-structuration de Craig-Bampton, les interfaces de liaison doivent être bloquées. Ceci est réalisé avec l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01].

L'opérateur `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.55.03] permet de définir les interfaces de connexion de la sous-structure. En particulier, on précise le type de l'interface, qui peut être soit "CRAIGB" (Craig-Bampton), soit "MNEAL" (Mac Neal), soit enfin "AUCUN".

L'opérateur `DEFI_BASE_MODEALE` [U4.55.04] permet de calculer la base de projection complète de la sous-structure. Ainsi, les modes dynamiques calculés précédemment sont recopiés. Par ailleurs, les déformées statiques sont calculées en fonction du type défini dans l'opérateur `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.55.03]. Si le type est "CRAIGB", on calcule les modes contraints des interfaces de la sous-structure. Si le type est "MNEAL", on calcule les modes d'attache des interfaces de la sous-structure. Si le type est "AUCUN", on ne calcule pas de déformée statique, ce qui correspond à une base de type Mac Neal sans correction statique.

L'opérateur `MACR_ELEM_DYNA` [U4.55.05] calcule les matrices généralisées de rigidité et de masse de la sous-structure, ainsi que les matrices de liaison.

3.4.2 Assemblage et résolution

Le modèle de la structure complète est déterminé par l'opérateur `DEFI_MODELE_GENE` [U4.55.06]. En particulier, chaque sous-structure est définie par le macro-élément qui lui correspond (issu de `MACR_ELEM_DYNA`) et les angles de rotation qui permettent de l'orienter. Les liaisons entre sous-structures sont définies par la donnée des noms des deux sous-structures impliquées et de ceux des deux interfaces en vis à vis.

La numérotation du problème généralisé complet est réalisée par l'opérateur `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07]. Les matrices de masse et de raideur généralisées de la structure complète sont assemblées en fonction de cette numérotation avec l'opérateur `ASSE_MATR_GENE` [U4.55.08].

Le calcul des modes propres de la structure complète est réalisé par les opérateurs `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.02] ou `MODE_ITER_INV` [U4.52.01].

3.4.3 Restitution sur base physique

La restitution des résultats sur les maillages initiaux des sous-structures est réalisée par l'opérateur `REST_BASE_PHYS` [U4.64.01].

Pour diminuer la durée des traitements graphiques lors des visualisations, il est possible de créer un maillage grossier par l'opérateur `DEFI_SQUELETTE` [U4.75.01]. Ce maillage, ignoré pendant le calcul, sert de support aux visualisations.

4 Calcul modal par sous-structuration dynamique cyclique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons la synthèse des méthodes de sous-structuration dynamique cyclique. Nous donnons une définition de la répétitivité cyclique (ou symétrie cyclique) et nous présentons les principales incidences de cette propriété sur le comportement dynamique de la structure (cercles et diamètres nodaux, modes doubles). Puis, nous exposons, de manière assez détaillée, les deux méthodes de sous-structuration dynamique cyclique, implémentées dans le *Code_Aster*. Des améliorations ont été apportées aux méthodes classiques, par la prise en compte de la présence des nœuds de l'axe.

Ces méthodes supposent que le maillage du secteur de base est tel que ses traces sur les interfaces droite et gauche sont coïncidentes (maillages compatibles).

Notations spécifiques à la sous-structuration cyclique :

N	=	nombre de secteurs
α	=	angle formé par le secteur de base
β	=	déphasage inter-secteur
O_z	=	axe de la symétrie cyclique
θ	=	rotation d'angle α et d'axe O_z
$\text{Re}(Z)$	=	partie réelle du complexe Z
$\text{Im}(Z)$	=	partie imaginaire du complexe Z
Θ	=	matrice de passage des nœuds de droite aux nœuds de gauche
Θ_a	=	matrice de changement de secteur pour les nœuds de l'axe

Remarque :

L'indice	d	est	relatif	
"	g	"	"	aux degrés de liberté de droite
"	a	"	"	aux degrés de liberté de gauche
"	1	"	"	aux degrés de liberté de l'axe
"	2	"	"	aux modes propres identifiés
"	2	"	"	aux modes propres inconnus

4.2 Répétitivité cyclique

4.2.1 Définition

On dit qu'une structure est à répétitivité cyclique d'axe O_z , s'il existe un angle $0 < \alpha < \pi$ tel que la structure soit géométriquement et mécaniquement invariante par rotation autour de O_z de cet angle. Si α est le plus petit angle vérifiant cette propriété, alors toute portion angulaire d'angle α de la structure est appelée "secteur de base" (ou "secteur irréductible").

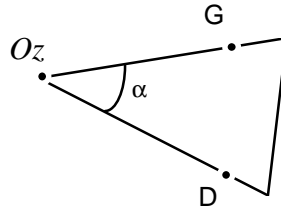
La structure globale est alors composée de N secteurs :

$$N = \frac{2\pi}{\alpha}$$

4.2.2 Propagation d'onde

On note θ la rotation d'axe Oz et d'angle α définie dans \mathbb{R}^3 .

Considérons un secteur de base d'une structure à répétitivité d'axe Oz , et deux points similaires de deux secteurs contigus G et D :



On a la relation entre les points G et D :

$$G = \theta(D)$$

On remarque que la structure est laissée invariante par toute rotation θ^m (avec m entier).

On peut noter que toutes les rotations laissant la structure invariante (géométriquement et mécaniquement) sont en nombre fini :

$$\theta^m \quad m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Considérons une variable d'état scalaire du système mécanique étudié U , et Z le complexe associé :

$$U = \text{Re}(Z) = \text{Re}(U + jV)$$

Il est possible de démontrer, par la théorie des groupes finis, la relation suivante pour les points D et G [bib5] :

$$\exists m \in \{0, 1, \dots, \frac{N}{2}\} \text{ tel que } Z(G) = e^{jm\alpha} Z(D) \quad \text{éq 4.2.2-1}$$

Remarques :

- les quantités sont exprimées dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,
- pour une structure axisymétrique (cas particulier de répétitivité cyclique), m est appelé indice de FOURIER,
- dans le cas d'une onde plane non amortie, $e^{jm\alpha}$ est le déphasage complexe entre deux secteurs contigus ; l'équation signifie que ce déphasage ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs connues,
- il est possible de limiter le nombre des valeurs de m aux valeurs comprises entre 0 et $N/2$; en effet, on montre que l'onde associée au déphasage $N - m$ est identique à celle associée au déphasage m , mais progresse en sens inverse [bib5].

Si N est pair : $m = 0$ et $m = N/2$ correspondent à des modes réels :

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall D \quad U(\theta(D)) = U(D)$$

$$m = N/2 \quad \Rightarrow \quad \forall D \quad U(\theta(D)) = -U(D)$$

Toutes les autres valeurs de m correspondent à des modes apparaissant par paires orthogonales à une fréquence donnée (on parle alors de modes dégénérés) :

$$U = \text{Re}(Z) \quad \text{et} \quad V = \text{Im}(Z)$$

Si N est impair : $m = 0$ correspond à un mode réel non dégénéré :





$$m = 0 \Rightarrow \forall D \quad U(\theta(D)) = U(D)$$

Toutes les autres valeurs de m correspondent à des modes dégénérés apparaissant par paires orthogonales :

$$U = \text{Re}(Z) \quad \text{et} \quad V = \text{Im}(Z)$$

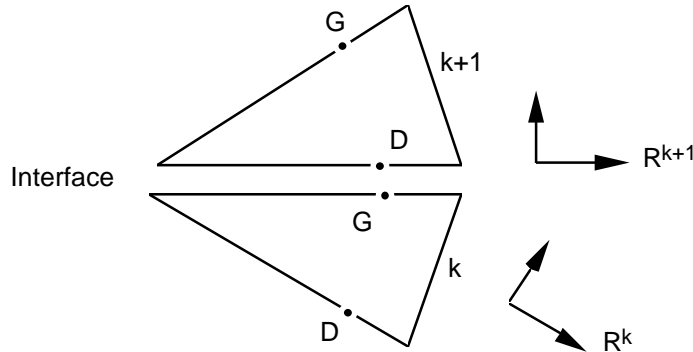
4.2.3 Notion de diamètres et de cercles nodaux

La propriété de répétitivité cyclique, traduite par l'équation [éq 4.2.2-1] permet de connaître a priori l'allure des modes propres de la structure, qui se rapproche fortement de ce que l'on peut observer pour des structures axisymétriques. Si l'on considère un mode propre d'une structure à symétrie cyclique, tous les secteurs ont la même déformée mais avec une amplitude fonction de leur position angulaire, ce que l'on peut traduire par un déphasage entre sous-structures. Ce mode peut être classé à partir du nombre de diamètres et de cercles nodaux qui le caractérisent. Un diamètre nodal (qui n'est confondu avec un diamètre que si la structure est axisymétrique) est une ligne de points de mouvement nul passant par l'axe de répétitivité ; un cercle nodal (qui n'a la forme circulaire que pour les structures axisymétriques) est une ligne de points de mouvement nul, elle même à répétitivité cyclique. On constate que c'est la déformée du mode de la sous-structure sur lequel s'appuie le mode de la structure complète qui détermine le nombre de cercle(s) nodal(aux). Par contre, le nombre de diamètre(s) nodal(aux) est défini par le déphasage entre deux secteurs consécutifs.

Déformée du secteur	Phase entre secteur	Déformée d'ensemble	Famille
Flexion 1	N secteurs en phase		0 cercle 0 diamètre
Flexion 1	N/2 secteurs en phase		0 cercle 1 diamètre
Flexion 2	N secteurs en phase		1 cercle 0 diamètre
Flexion 2	N/secteurs en phase		1 cercle 1 diamètre

4.2.4 Conditions aux limites

Considérons une structure à répétitivité cyclique, et deux secteurs de base successifs de celle-ci :



Les liaisons entre secteurs étant considérées comme parfaites, on a les conditions entre les secteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_g^k &= \mathbf{q}_d^{k+1} && \text{continuité des déplacements} \\ \mathbf{f}_{L_g}^k &= -\mathbf{f}_{L_d}^{k+1} && \text{principe d'action - réaction} \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.4-1}$$

L'exposant indique le numéro du secteur considéré. Les conditions de liaison précédentes sont exprimées dans le repère global.

Par la formule [éq 4.2.2-1] relative à la propagation d'onde dans la structure et en posant : $\beta = m\alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}^{k+1}\}_{k+1} &= e^{j\beta} \{\mathbf{q}^k\}_k \\ \{\mathbf{f}_L^{k+1}\}_{k+1} &= e^{j\beta} \{\mathbf{f}_L^k\}_k \end{aligned}$$

L'indice k signifie que la quantité est exprimée dans le repère lié au secteur k : R^k .

Les équations de liaison [éq 4.2.4-1], écrites dans le repère lié au secteur k font donc intervenir la matrice de passage du secteur k au secteur $k+1$. Cette matrice n'est autre que la matrice de rotation des degrés de liberté de droite vers ceux de gauche, soit la matrice de rotation d'axe O_z et d'angle α , notée : θ .

Nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_g^k\}_k &= e^{j\beta} \theta \{\mathbf{q}_d^k\}_k \\ \{\mathbf{f}_{L_g}^k\}_k &= -e^{j\beta} \theta \{\mathbf{f}_{L_d}^k\}_k \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.4-2}$$

Les conditions aux limites [éq 4.2.4-2] permettent de calculer les modes propres de l'ensemble de la structure à partir d'un seul secteur de base.

Cette formalisation peut être généralisée au cas des nœuds de l'axe. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_a^k\}_k &= e^{j\beta} \theta_a \{\mathbf{q}_a^k\}_k \\ \{\mathbf{f}_{L_a}^k\}_k &= -e^{j\beta} \theta_a \{\mathbf{f}_{L_a}^k\}_k \end{aligned}$$

On vérifie que si β est non nul, le déplacement des nœuds de l'axe est nul (en fait, on note alors la présence d'un ou de plusieurs diamètres nodaux).

4.3 Méthodes de sous-structuration cyclique

4.3.1 Méthode de Craig-Bampton

On considère le problème aux valeurs propres de la structure globale exprimé sur le secteur de base. Ce dernier est donc soumis aux forces de liaison qui lui sont appliquées par les secteurs contigus. Par ailleurs, le secteur de base vérifie les équations de liaison [éq 4.2.4-2]. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} &= \mathbf{f}_L \\ \mathbf{q}_g &= e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{f}_{L_g} &= -e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.1-1}$$

Nous supposons que la base est composée des modes propres dynamiques du secteur de base encastré à ses interfaces, notés $\boldsymbol{\phi}$, et des modes contraints relatifs aux degrés de liberté d'interfaces droite et gauche, notés $\boldsymbol{\psi}_d$ et $\boldsymbol{\psi}_g$.

Compte tenu du fait que la seule contribution aux déplacements d'un degré de liberté d'interface provient du mode contraint correspondant, la transformation de RITZ peut s'écrire :

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & \boldsymbol{\psi}_d & \boldsymbol{\psi}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}$$

Dès lors, en utilisant la transformation de RITZ, le système d'équations [éq 4.3.1-1] devient :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & \boldsymbol{\psi}_d & \boldsymbol{\psi}_g \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{q}_g &= e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{f}_{L_g} &= -e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.1-2}$$

Les matrices surmontées d'une barre sont les projections des matrices éléments finis sur la base modale du secteur de base (matrices généralisées).

On peut démontrer que les modes contraints sont orthogonaux aux modes normaux vis à vis de la matrice de rigidité [bib5]. Ainsi, les produits correspondants sont nuls.

Adoptons les notations suivantes :

- m : indice relatif aux modes propres du secteur,
- d : indice relatif aux modes contraints de l'interface droite,
- g : indice relatif aux modes contraints de l'interface gauche.

On peut donc écrire ces matrices sous la forme :

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{dd} & \bar{\mathbf{K}}_{dg} \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{gd} & \bar{\mathbf{K}}_{gg} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{mm} & \bar{\mathbf{M}}_{md} & \bar{\mathbf{M}}_{mg} \\ \bar{\mathbf{M}}_{dm} & \bar{\mathbf{M}}_{dd} & \bar{\mathbf{M}}_{dg} \\ \bar{\mathbf{M}}_{gm} & \bar{\mathbf{M}}_{gd} & \bar{\mathbf{M}}_{gg} \end{bmatrix}$$

Compte tenu de leur définition, les modes contraints vérifient :

$$\boldsymbol{\Psi}_d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{di} \\ \boldsymbol{\Psi}_{dd} \\ \boldsymbol{\Psi}_{dg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{di} \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Psi}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{gi} \\ \boldsymbol{\Psi}_{gd} \\ \boldsymbol{\Psi}_{gg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{gi} \\ 0 \\ \mathbf{Id} \end{bmatrix}$$

Le second membre de l'équation matricielle [éq 4.3.1-2] devient :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\Psi}_{di} & \mathbf{Id} & 0 \\ \boldsymbol{\Psi}_{gi} & 0 & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \end{bmatrix}$$

En tenant compte de ces notations, développons l'équation matricielle vérifiée par le secteur de base :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{mm} \boldsymbol{\eta}_i - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{mm} \boldsymbol{\eta}_i + \bar{\mathbf{M}}_{md} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{mg} \mathbf{q}_g) &= 0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{dd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{dg} \mathbf{q}_g - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{dm} \boldsymbol{\eta}_i + \bar{\mathbf{M}}_{dd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{dg} \mathbf{q}_g) &= \mathbf{f}_{L_d} \\ \bar{\mathbf{K}}_{gd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{gg} \mathbf{q}_g - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{gm} \boldsymbol{\eta}_i + \bar{\mathbf{M}}_{gd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{gg} \mathbf{q}_g) &= \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{q}_g &= e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{f}_{L_g} &= -e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \end{aligned}$$

Introduisons les deux dernières équations de ce système dans les trois premières :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{K}}_{mm} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm}) \boldsymbol{\eta}_i - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{md} + e^{j\beta} \bar{\mathbf{M}}_{mg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d &= 0 \\ (\bar{\mathbf{K}}_{dd} + e^{j\beta} \bar{\mathbf{K}}_{dg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{dm} \boldsymbol{\eta}_i + (\bar{\mathbf{M}}_{dd} + e^{j\beta} \bar{\mathbf{M}}_{dg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d) &= \mathbf{f}_{L_d} \\ (\bar{\mathbf{K}}_{gd} + e^{j\beta} \bar{\mathbf{K}}_{gg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{gm} \boldsymbol{\eta}_i + (\bar{\mathbf{M}}_{gd} + e^{j\beta} \bar{\mathbf{M}}_{gg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d) &= -e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \end{aligned}$$

L'association des deux dernières équations permet d'éliminer les termes des forces de liaison. On aboutit alors à un problème aux valeurs propres final que l'on peut mettre sous la forme :

$$(\tilde{\mathbf{K}}(\beta) - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}(\beta)) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{éq 4.3.1-3}$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i \\ \mathbf{q}_d \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{dd} + e^{i\beta} \bar{\mathbf{K}}_{dg} \boldsymbol{\theta} + e^{-i\beta} \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{K}}_{gd} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{K}}_{gg} \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{mm} & \bar{\mathbf{M}}_{md} + e^{i\beta} \bar{\mathbf{M}}_{mg} \boldsymbol{\theta} \\ \bar{\mathbf{M}}_{dm} + e^{-i\beta} \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{gm} & \bar{\mathbf{M}}_{dd} + e^{i\beta} \bar{\mathbf{M}}_{dg} \boldsymbol{\theta} + e^{-i\beta} \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{gd} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{gg} \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

Les matrices de masse et de rigidité du problème final sont hermitiennes. Les valeurs propres solutions sont donc réelles. D'autre part, le problème est de taille réduite.

La résolution du problème aux valeurs propres complexes [éq 4.3.1-3] permet de déterminer les coordonnées généralisées complexes des modes propres de la structure globale. Les valeurs complexes des déplacements du secteur de base dans le mode global sont données, à partir des coordonnées généralisées, par la formule suivante :

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & \boldsymbol{\psi}_d + e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\psi}_d \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \quad \text{éq 4.3.1-4}$$

Pour déterminer les valeurs réelles des déplacements, il faut distinguer trois cas selon les valeurs du déphasage inter-secteur :

Cas n° 1 : $\beta = 0$:

Les déplacements \mathbf{q}' donnés par la formule [éq 4.3.1-4] sont alors à valeurs réelles. Tous les secteurs ont même déformée et vibrent en phase. On a alors un seul mode propre réel :

$$\mathbf{q} = \text{Re}(\mathbf{q}') = \mathbf{q}' \quad \text{éq 4.3.1-5}$$

Cas n°2 : $0 < \beta < (N+1)/2$:

Les déplacements fournis par la formule [éq 4.3.1-4] sont à valeurs complexes. A chacun de ces modes complexes correspondent deux modes réels dégénérés orthogonaux :

$$\mathbf{q}_1 = \text{Re}(\mathbf{q}') \quad \mathbf{q}_2 = \text{Im}(\mathbf{q}') \quad \text{éq 4.3.1-6}$$

Cas n°3 : $\beta = N/2$ ($\Rightarrow N$ est pair) :

Les déplacements fournis par [éq 4.3.1-4] sont alors à valeurs complexes. Il y a $N/2$ diamètres nodaux, deux secteurs contigus vibrent alors en opposition de phase. Chaque mode complexe est à l'origine d'un seul mode réel :

$$\mathbf{q} = \text{Re}(\mathbf{q}') = -\text{Im}(\mathbf{q}') \quad \text{éq 4.3.1-7}$$

Prise en compte des nœuds de l'axe :

On suppose dans ce paragraphe que les degrés de liberté portés par les nœuds de l'axe, au même titre que les nœuds d'interfaces droite et gauche, ont été bloqués pour le calcul des modes dynamiques du secteur de base et ont fait l'objet de calculs de modes contraints.

La base de projection est donc composée des modes propres dynamiques du secteur de base encastré à ses interfaces, notés ϕ , et des modes contraints relatifs aux degrés de liberté d'interfaces droite, gauche et axe, notés ψ_d , ψ_g et ψ_a .

Comme nous l'avons vu au chapitre 4.2.4, si β est non nul, le déplacement des nœuds de l'axe est nul (présence d'au moins un diamètre nodal). La prise en compte des nœuds de l'axe n'a donc de sens que si $\beta = 0$. Dans cette démonstration, nous nous limiterons à ce cas.

Le problème aux valeurs propres de la structure globale et les équations de liaison, exprimés sur cette base valent alors :

$$(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \\ \mathbf{q}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \psi_d & \psi_g & \psi_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{f}_{L_a} \end{Bmatrix} \quad \text{éq 4.3.1-8}$$

$$\mathbf{q}_g = \boldsymbol{\theta} \mathbf{q}_d \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_a = \boldsymbol{\theta}_a \mathbf{q}_a, \quad \mathbf{f}_{L_g} = -\boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{L_a} = -\boldsymbol{\theta}_a \mathbf{f}_{L_d}$$

Adoptons les notations suivantes :

m : indice relatif aux modes propres du secteur,
d : indice relatif aux modes contraints de l'interface droite,
g : indice relatif aux modes contraints de l'interface gauche,
a : indice relatif aux modes contraints de l'interface axe.

On peut donc écrire les matrices sous la forme :

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{dd} & \bar{\mathbf{K}}_{dg} & \bar{\mathbf{K}}_{da} \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{gd} & \bar{\mathbf{K}}_{gg} & \bar{\mathbf{K}}_{ga} \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{ad} & \bar{\mathbf{K}}_{ag} & \bar{\mathbf{K}}_{aa} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{mm} & \bar{\mathbf{M}}_{md} & \bar{\mathbf{M}}_{mg} & \bar{\mathbf{M}}_{ma} \\ \bar{\mathbf{M}}_{dm} & \bar{\mathbf{M}}_{dd} & \bar{\mathbf{M}}_{dg} & \bar{\mathbf{M}}_{da} \\ \bar{\mathbf{M}}_{gm} & \bar{\mathbf{M}}_{gd} & \bar{\mathbf{M}}_{gg} & \bar{\mathbf{M}}_{ga} \\ \bar{\mathbf{M}}_{am} & \bar{\mathbf{M}}_{ad} & \bar{\mathbf{M}}_{ag} & \bar{\mathbf{M}}_{aa} \end{bmatrix}$$

Compte tenu de leur définition, les modes contraints vérifient :

$$\psi_d = \begin{bmatrix} \psi_{di} \\ \psi_{dd} \\ \psi_{dg} \\ \psi_{da} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{di} \\ \mathbf{Id} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi_g = \begin{bmatrix} \psi_{gi} \\ \psi_{gd} \\ \psi_{gg} \\ \psi_{ga} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{gi} \\ 0 \\ \mathbf{Id} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi_a = \begin{bmatrix} \psi_{ai} \\ \psi_{ad} \\ \psi_{ag} \\ \psi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{ai} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{Id} \end{bmatrix}$$

Le second membre de l'équation matricielle [éq 4.3.1-8] devient :

$$\begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{di} & \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ \psi_{gi} & 0 & \mathbf{Id} & 0 \\ \psi_{ai} & 0 & 0 & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{f}_{L_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{f}_{L_a} \end{bmatrix}$$

En tenant compte de ces notations, développons l'équation matricielle vérifiée par le secteur de base :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{mm} \eta_i - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{mm} \eta_i + \bar{\mathbf{M}}_{md} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{mg} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{M}}_{ma} \mathbf{q}_a) &= 0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{dd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{dg} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{K}}_{da} \mathbf{q}_a - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{dm} \eta_i + \bar{\mathbf{M}}_{dd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{dg} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{M}}_{da} \mathbf{q}_a) &= \mathbf{f}_{L_d} \\ \bar{\mathbf{K}}_{gd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{gg} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{K}}_{ga} \mathbf{q}_a - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{gm} \eta_i + \bar{\mathbf{M}}_{gd} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{gg} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{M}}_{ga} \mathbf{q}_a) &= \mathbf{f}_{L_g} \\ \bar{\mathbf{K}}_{ad} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{ag} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{K}}_{aa} \mathbf{q}_a - \omega^2 (\bar{\mathbf{M}}_{am} \eta_i + \bar{\mathbf{M}}_{ad} \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{ag} \mathbf{q}_g + \bar{\mathbf{M}}_{aa} \mathbf{q}_a) &= \mathbf{f}_{L_a} \\ \mathbf{q}_g &= \boldsymbol{\theta} \mathbf{q}_d \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{L_g} = -\boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{q}_a &= \boldsymbol{\theta}_a \mathbf{q}_d \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{L_a} = -\boldsymbol{\theta}_a \mathbf{f}_{L_d} \end{aligned}$$

Remplaçons, dans les quatre premières équations du système \mathbf{q}_g et \mathbf{f}_{L_g} par leurs expressions respectives, en fonction de \mathbf{q}_d et \mathbf{f}_{L_d} et réécrivons, sous une autre forme, les deux dernières équations du système, relatives aux nœuds de l'axe.

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{K}}_{mm} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm}) \eta_i - \omega^2 \{ (\bar{\mathbf{M}}_{md} + \bar{\mathbf{M}}_{mg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{M}}_{ma} \mathbf{q}_a \} &= 0 \\ (\bar{\mathbf{K}}_{dd} + \bar{\mathbf{K}}_{dg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{da} \mathbf{q}_a - \omega^2 \{ (\bar{\mathbf{M}}_{dm} \eta_i + (\bar{\mathbf{M}}_{dd} + \bar{\mathbf{M}}_{dg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d) + \bar{\mathbf{M}}_{da} \mathbf{q}_a \} &= \mathbf{f}_{L_d} \\ (\bar{\mathbf{K}}_{gd} + \bar{\mathbf{K}}_{gg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{ga} \mathbf{q}_a - \omega^2 \{ (\bar{\mathbf{M}}_{gm} \eta_i + (\bar{\mathbf{M}}_{gd} + \bar{\mathbf{M}}_{gg} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d) + \bar{\mathbf{M}}_{ga} \mathbf{q}_a \} &= -\boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \\ (\bar{\mathbf{K}}_{ad} + \bar{\mathbf{K}}_{ag} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d + \bar{\mathbf{K}}_{aa} \mathbf{q}_a - \omega^2 \{ (\bar{\mathbf{M}}_{am} \eta_i + (\bar{\mathbf{M}}_{ad} + \bar{\mathbf{M}}_{ag} \boldsymbol{\theta}) \mathbf{q}_d) + \bar{\mathbf{M}}_{aa} \mathbf{q}_a \} &= \mathbf{f}_{L_a} \\ \mathbf{q}_a &= (1 + \boldsymbol{\theta}_a) \frac{\mathbf{q}_d}{2} \\ (1 + \boldsymbol{\theta}_a^T) \mathbf{f}_{L_a} &= 0 \end{aligned}$$

On remplace, dans les quatre premières équations du système \mathbf{q}_a par son expression déterminée dans l'avant dernière équation. D'autre part, l'association de la deuxième et de la troisième équation permet d'éliminer les termes des forces de liaison à droite. Enfin, la quatrième équation est multipliée par $(1 + \boldsymbol{\theta}_a^T)$, ce qui permet d'éliminer les termes des forces de liaison à l'axe. On aboutit alors à un problème aux valeurs propres final que l'on peut mettre sous la forme :

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{éq 4.3.1-9}$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_a / 2 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{dd} + \bar{\mathbf{K}}_{dg}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{K}}_{gd} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{K}}_{gg}\boldsymbol{\theta} & (\bar{\mathbf{K}}_{da} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{K}}_{ga})(1 + \boldsymbol{\theta}_a) \\ 0 & (1 + \boldsymbol{\theta}_a^T)(\bar{\mathbf{K}}_{ad} + \bar{\mathbf{K}}_{ag}\boldsymbol{\theta}) & (1 + \boldsymbol{\theta}_a^T)\bar{\mathbf{K}}_{aa}(1 + \boldsymbol{\theta}_a) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{mm} & \bar{\mathbf{M}}_{md} + \bar{\mathbf{M}}_{mg}\boldsymbol{\theta} & \bar{\mathbf{M}}_{ma}(1 + \boldsymbol{\theta}_a) \\ \bar{\mathbf{M}}_{dm} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{gm} & \bar{\mathbf{M}}_{dd} + \bar{\mathbf{M}}_{dg}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{gd} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{gg}\boldsymbol{\theta} & (\bar{\mathbf{M}}_{da} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}}_{ga})(1 + \boldsymbol{\theta}_a) \\ (1 + \boldsymbol{\theta}_a^T)\bar{\mathbf{M}}_{am} & (1 + \boldsymbol{\theta}_a^T)(\bar{\mathbf{M}}_{ad} + \bar{\mathbf{M}}_{ag}\boldsymbol{\theta}) & (1 + \boldsymbol{\theta}_a^T)\bar{\mathbf{M}}_{aa}(1 + \boldsymbol{\theta}_a) \end{bmatrix}$$

Les déplacements de l'axe, divisés par deux, permettent de conserver aux matrices de rigidité et de masse leur caractère hermitien. On restitue les déplacements complexes modaux par la formule suivante :

$$\mathbf{q}' = [\boldsymbol{\phi} \quad \boldsymbol{\psi}_d + e^{j\beta}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\psi}_d \quad 2\boldsymbol{\psi}_a] \tilde{\mathbf{q}}$$

4.3.2 Méthode de Mac Neal

On considère le problème aux valeurs propres de la structure globale exprimé sur le secteur de base. Ce dernier est donc soumis aux forces de liaison qui lui sont appliquées par les secteurs contigus. Par ailleurs, le secteur de base vérifie les équations de liaison [éq 4.2.4-2]. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} &= \mathbf{f}_L \\ \mathbf{q}_g &= e^{j\beta}\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}_d \\ \mathbf{f}_{L_g} &= -e^{j\beta}\boldsymbol{\theta}\mathbf{f}_{L_d} \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-1}$$

La base modale utilisée pour réduire les dimensions du problème à résoudre, est une base modale à interfaces libres comprenant des modes dynamiques et les modes d'attache relatifs aux degrés de liberté des interfaces droite et gauche. Supposons que les degrés de liberté du secteur de base sont ordonnés de la manière suivante :

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{degrés de liberté internes} \\ \text{degrés de liberté de l'interface droite} \\ \text{degrés de liberté de l'interface gauche} \end{array}$$

Soient \mathbf{B}_d et \mathbf{B}_g , les matrices rectangulaires d'extraction telles que :

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{B}_d \mathbf{q} \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_g = \mathbf{B}_g \mathbf{q}$$

La condition aux limites sur les déplacements devient avec ces notations :

$$\mathbf{B}_g \mathbf{q} = e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{B}_d \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{B}_{dg} \mathbf{q} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_{dg} = e^{j\beta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{B}_d - \mathbf{B}_g \quad \text{éq 4.3.2-2}$$

Pour les forces, la condition aux limites devient :

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{B}_g^T \mathbf{f}_{L_g} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{f}_{L_d} \Rightarrow \mathbf{f}_L = (\mathbf{B}_g^T - e^{-j\theta} \mathbf{B}_d^T \boldsymbol{\theta}^T) \mathbf{f}_{L_g} = -\mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g}$$

Considérons comme base, pour la transformation de RITZ, l'ensemble des modes propres dynamiques du secteur de base, en distinguant les modes identifiés et les modes inconnus :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{éq 4.3.2-3}$$

où l'indice 1 (resp. 2) fait référence aux modes connus (resp. inconnus). Dans la suite, nous supposons que les modes propres sont normés à la masse modale unitaire.

En remplaçant \mathbf{q} par son expression en fonction des modes propres, et en multipliant à gauche par la transposée de la matrice des modes, les équations matricielles [éq 4.3.2-1] et [éq 4.3.2-2] deviennent :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_1 &= \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{f}_L \\ (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_2 &= \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{f}_L \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\eta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-4}$$

où λ est la matrice des rigidités généralisées (les masses généralisées sont unitaires).

On peut donc en tirer une formulation de $\boldsymbol{\eta}_2$:

$$\boldsymbol{\eta}_2 = (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{f}_L \quad \text{éq 4.3.2-5}$$

Dès lors, on peut éliminer $\boldsymbol{\eta}_2$ du système d'équations [éq 4.3.2-4]. On obtient alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} &= 0 \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_2 (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} &= 0 \end{aligned}$$

Le système final à résoudre peut s'écrire :

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{éq 4.3.2-6}$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \mathbf{f}_{L_g} \end{Bmatrix}$$

Les expressions des matrices de rigidité et de masse sont :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{dg}^T \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 & -\mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $[\mathbf{R}_e(\omega)]$ est la matrice de flexibilité dynamique résiduelle des modes non identifiés :

$$\mathbf{R}_e(\omega) = \boldsymbol{\Phi}_2 (\boldsymbol{\lambda}_2 - \omega^2 \mathbf{Id})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_2^T$$

On approxime la flexibilité dynamique résiduelle par sa contribution statique, en prenant en compte les modes d'attache. Alors, la formule de restitution qui permet de calculer les valeurs complexes des déplacements à partir des coordonnées généralisées des modes solutions de [éq 4.3.2-6] est la suivante :

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 & -\mathbf{R}_e(0) \mathbf{B}_{dg}^T \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}$$

Les valeurs réelles des déplacements sont déterminées, comme pour la méthode de Craig-Bampton, par les formules [éq 4.3.1-5], [éq 4.3.1-6], [et éq 4.3.1-7].

Prise en compte des nœuds de l'axe :

Nous supposons, dans ce paragraphe, que les degrés de liberté portés par les nœuds de l'axe, au même titre que les nœuds d'interfaces droite et gauche, ont fait l'objet de calculs de modes d'attache. Nous nous limitons à $\beta = 0$ qui est le seul cas modifié par la prise en compte des nœuds de l'axe (§ 4.2.4 et 4.3.1). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} &= \mathbf{f}_L \\ \mathbf{q}_g &= \boldsymbol{\theta} \mathbf{q}_d \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{L_g} = -\boldsymbol{\theta} \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{q}_a &= \boldsymbol{\theta}_a \mathbf{q}_a \Rightarrow (1 - \boldsymbol{\theta}_a) \mathbf{q}_a = 0 \\ \mathbf{f}_{L_a} &= -\boldsymbol{\theta}_a \mathbf{f}_{L_a} \Rightarrow \mathbf{f}_{L_a} = (1 - \boldsymbol{\theta}_a^T) \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-7}$$

L'organisation des degrés de liberté du secteur de base est similaire à celle du chapitre précédent :

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{q}_i & \text{degrés de liberté internes} \\ \mathbf{q}_d & \text{degrés de liberté de l'interface droite} \\ \mathbf{q}_g & \text{degrés de liberté de l'interface gauche} \\ \mathbf{q}_a & \text{degrés de liberté de l'interface axe} \end{cases}$$

Soient \mathbf{B}_a la matrice rectangulaire d'extraction des degrés de liberté de l'axe :

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{B}_a \mathbf{q}$$

La condition aux limites sur les déplacements de l'axe devient avec ces notations :

$$(1 - \boldsymbol{\theta}_a) \mathbf{B}_a \mathbf{q} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{aa} \mathbf{q} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_{aa} = (\boldsymbol{\theta}_a - 1) \mathbf{B}_a$$

Pour les forces, la condition aux limites devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_L &= \mathbf{B}_g^T \mathbf{f}_{L_g} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{f}_{L_d} + \mathbf{B}_a^T \mathbf{f}_{L_a} \Rightarrow \mathbf{f}_L = -\mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} + \mathbf{B}_a^T (1 - \boldsymbol{\theta}_a^T) \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} \\ &\Rightarrow \mathbf{f}_L = -\mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} - \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} \end{aligned}$$

La base de la transformation de RITZ est composée de l'ensemble des modes propres libres du secteur de base, en distinguant les modes identifiés (indice 1) et les modes inconnus (indice 2) définie par l'équation [éq 4.3.2-3].

L'équation [éq 4.3.2-7], écrite dans cette base prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_1 &= \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{f}_L \\ (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_2 &= \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{f}_L \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\eta}_2 &= 0 \\ \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\eta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-8}$$

La seconde équation permet de déterminer $\boldsymbol{\eta}_2$ (cf. [éq 4.3.2-5]), qui peut ainsi être éliminé du système. On obtient alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} + \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} &= 0 \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} - \mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} &= 0 \\ \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{B}_{aa} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} - \mathbf{B}_{aa} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, en définissant le vecteur inconnu suivant :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{f}_{L_a} / 2 \end{Bmatrix}$$

On obtient le système final suivant :

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{éq 4.3.2-9}$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{dg}^T & \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{aa}^T \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 & -\mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T & -\mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{aa}^T \\ \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_1 & -\mathbf{B}_{aa} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T & -\mathbf{B}_{aa} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{aa}^T \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La division par deux des forces de liaison appliquées à l'axe permet de conserver aux matrices de rigidité et de masse leur caractère hermitien.

On restitue les déplacements complexes modaux par la formule suivante :

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \phi_l & -\mathbf{R}_e(0)\mathbf{B}_{dg}^T & -2\mathbf{R}_e(0)\mathbf{B}_{aa}^T \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}$$

4.4 Mise en œuvre dans le **Code_Aster**

Le traitement du secteur de base est identique à celui des sous-structures dans la sous-structuration classique. Il fait intervenir les opérateurs : `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.02] ou `MODE_ITER_INV` [U4.52.01], `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.55.03] et `DEFI_BASE_MODEALE` [U4.55.04].

Les modes propres de la structure à symétrie cyclique sont calculés par l'opérateur `MODE_ITER_CYCL` [U4.52.03] en fonction de la base de projection du secteur de base précédemment définie et du nombre de secteurs de la structure complète.

La restitution des résultats sur base physique est identique à la sous-structuration classique. Elle fait intervenir l'opérateur `REST_BASE_PHYS` [U4.64.01] et éventuellement l'opérateur `DEFI_SQUELETTE` [U4.75.01].

5 Conclusion

Les principes de la sous structuration permettent d'exposer la transformation de RITZ et la recombinaison modale pour aboutir à la synthèse modale qui intègre ces deux techniques. Les règles de liaisonnement entre sous-structures sont explicitées.

Deux méthodes ont été développées dans le **Code_Aster** : celle de Craig-Bampton et celle de Mac Neal. Nous présentons, ici, leurs particularités, aussi bien dans la définition de la base modale initiale, que dans son exploitation.

Après avoir exposé la définition d'une structure à symétrie cyclique et les propriétés qui en découlent, nous avons présenté les méthodes de sous-structuration cyclique mises en œuvre dans le **Code_Aster**. Elles se révèlent très intéressantes pour le calcul des modes propres d'une structure à symétrie cyclique, telles que les rotors des machines tournantes dont elles profitent pleinement des caractéristiques géométriques et mécaniques.

6 Bibliographie

- [1] R. ROY, J. CRAIG & M. C. BAMPTON : "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis" AIAA Journal, (July 1968), Vol. 6, N° 7, p. 1313-1319.
- [2] R. H. MAC NEAL : "A hybrid method of component mode synthesis" Computers and Structures, (1971), Vol. 1, p. 581-601.
- [3] J. F. IMBERT : "Analyse des Structures par Eléments Finis" 1979, Cepadues Edition.
- [4] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dynamique en éléments finis". Rapport EDF HP-61/90.149.
- [5] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration cyclique en éléments finis". Rapport EDF HP-61/91.156
- [6] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dans le *Code_Aster*". Rapport EDF HP-61/92.149
- [7] J. PELLET : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Les éléments finis dans Aster" Clé : R3.03.01 "Dualisation des conditions aux limites"
- [8] G. JACQUART : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Dynamique en base modale". Clé : R5.06.01 "Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non-linéaire"

Page laissée intentionnellement blanche.