

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R4.06 : Sous-structuration**  
**Document : R4.06.04**

# Réponse transitoire par sous-structuration dynamique classique

---

## Résumé :

Ce document présente les bases théoriques des deux méthodes de calcul de réponse transitoire par sous-structuration dynamique implémentées dans le *Code\_Aster*.

La première méthode consiste à réaliser un calcul transitoire par sous-structuration pour lequel les équations du problème sont projetées sur les bases associées à chaque sous-structure. La seconde méthode consiste à déterminer les modes propres de la structure complète par sous-structuration et à projeter sur cette base les équations du problème transitoire.

Dans les deux cas, seul le cas d'une excitation par force imposée sur les sous-structures est actuellement disponible.

---

## Table des matières

---

1	Introduction.....	3
2	Calcul transitoire par projection sur les bases des sous-structures.....	5
2.1	Equations dynamiques vérifiées par les sous-structures séparément.....	5
2.2	Assemblage des sous-structures.....	6
2.3	Equations dynamiques vérifiées par la structure globale.....	6
2.4	Double dualisation des conditions aux limites.....	7
2.5	Traitement de la matrice d'amortissement.....	8
2.6	Traitement des conditions initiales.....	8
3	Calcul transitoire sur une base modale calculée par sous-structuration.....	9
3.1	Calcul des modes propres de la structure complète par sous-structuration.....	9
3.2	Equation dynamique vérifiée par la structure globale.....	9
4	Etude comparative des deux méthodes développées.....	11
5	Mise en œuvre dans le <i>Code_Aster</i> .....	12
5.1	Etude des sous-structures séparément.....	12
5.2	Assemblage du modèle généralisé.....	12
5.3	Calcul de la base modale de la structure complète et projection.....	13
5.4	Résolution et restitution sur base physique.....	13
6	Conclusion.....	14
7	Bibliographie.....	15

## 1 Introduction

Les composants de centrale nucléaire sont souvent de taille importante, de géométrie complexe et parfois constitués d'un assemblage de plusieurs éléments. Pour modéliser la dynamique de ces structures, les outils d'analyse vibratoire classiques sont alors mal adaptés et il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes de réduction telles les techniques de synthèse modale qui ont été développées dans le *Code\_Aster*.

Les méthodes de synthèse modale associent des techniques issues de la sous-structuration et de la recombinaison modale [bib4]. Ainsi, le domaine d'étude est découpé en plusieurs sous-structures et le comportement vibratoire de la structure complète est déterminé en fonction des caractéristiques vibratoires de chacune d'entre elles. Par ailleurs, chaque sous-structure, est représentée par une base de projection particulière, composée de modes propres et de déformées statiques d'interface, sur laquelle sont projetées les équations du problème ([R4.06.02], [R4.06.03] et [bib4]).

Du point de vue purement informatique, ces méthodes présentent deux avantages importants. D'une part, elles permettent de limiter la taille mémoire nécessaire au stockage des grandeurs utilisées lors du calcul et d'autre part, les temps de calcul sont généralement très réduits. Du point de vue de l'organisation d'un projet d'étude, les techniques de sous-structuration sont particulièrement intéressantes car elles permettent de valider, étape par étape, les modèles des sous-structures. Les difficultés liées à la modélisation d'une structure complexe peuvent donc être abordées séparément, ce qui en rend les résolutions plus aisées.

Plusieurs outils de calcul par sous-structuration dynamique sont actuellement disponibles dans le *Code\_Aster*. Ils permettent de réaliser des calculs modaux [R4.06.02] et des calculs de réponse harmonique [R4.06.03]. Les travaux réalisés pour implanter le calcul de réponse harmonique par sous-structuration dynamique dans le *Code\_Aster*, ont conduit à définir le traitement du vecteur des forces extérieures et de la matrice d'amortissement visqueux.

L'objet de cette documentation de référence est de présenter les bases théoriques des deux méthodes de calcul de réponse transitoire par sous-structuration dynamique disponibles dans le *Code\_Aster*. La première consiste à réaliser un calcul transitoire par sous-structuration pour lequel les équations du problème sont projetées sur les bases associées à chaque sous-structure. La difficulté réside dans la double dualisation des conditions aux limites qui aboutit à une matrice de masse singulière. Pour utiliser les schéma d'intégration explicites (qui nécessitent l'inversion de la matrice de masse), il faut donc modifier le traitement des interfaces dans l'opérateur de calcul de la réponse transitoire. La seconde méthode consiste à déterminer les modes propres de la structure complète par sous-structuration et à projeter sur cette base les équations du problème transitoire. L'étape de restitution sur base physique des résultats généralisés finaux doit donc tenir compte de cette double projection.

L'opérateur de calcul de réponse transitoire qui reçoit la sous-structuration est l'opérateur `DYNA_TRAN_MODAL` [U4.54.03]. S'appuyant sur des méthodes de recombinaison modale, il a été conçu pour résoudre des problèmes transitoires en coordonnées généralisées et il est très efficace pour les problèmes de grande taille dont il permet de réduire le nombre de degrés de liberté. D'autre part, il supporte la prise en compte de non-linéarités localisées (aux noeuds) que l'on souhaite généraliser au cas de la sous-structuration.

Dans ce rapport, nous présentons les deux méthodes de calcul transitoire par sous-structuration disponible dans le *Code\_Aster*, ainsi que leur mise en œuvre.

**Notations générales :**

$N_s$	: Nombre de sous-structures
$\mathbf{M}$	: Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{K}$	: Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{C}$	: Matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{q}$	: Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis
$\mathbf{f}_{ext}$	: Vecteur des forces extérieures au système
$\mathbf{f}_L$	: Vecteur des forces de liaison appliquées au système
$\Phi$	: Matrice des vecteurs de la base des sous-structures
$\eta$	: Vecteur des degrés de liberté généralisés
$\mathbf{B}$	: Matrice d'extraction des degrés de liberté d'interface
$\mathbf{L}$	: Matrice de liaison
$\mathbf{Id}$	: Matrice identité
$\lambda$	: Multiplicateurs de Lagrange

**Remarque :**

L'exposant  $k$  caractérise les grandeurs relatives à la sous-structure  $S^k$  et les grandeurs généralisées sont surmontées d'une barre : par exemple  $\bar{\mathbf{M}}^k$  est la matrice de masse généralisée de la sous-structure  $S^k$ .

## 2 Calcul transitoire par projection sur les bases des sous-structures

### 2.1 Equations dynamiques vérifiées par les sous-structures séparément

Soit une structure  $S$  composée de  $N_s$  sous-structures notées  $S^k$ . Nous supposons que chaque sous-structure est modélisée en éléments finis. Le comportement vibratoire des sous-structures résulte des forces extérieures qui lui sont appliquées et des forces de liaison qu'exercent sur elles les autres sous-structures. Ainsi, pour  $S^k$ , nous avons :

$$\mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{C}^k \dot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{K}^k \mathbf{q}^k = \mathbf{f}_{ext}^k + \mathbf{f}_L^k \quad \text{éq 2.1-1}$$

où :

$\mathbf{M}^k$  est la matrice de masse issue de la modélisation éléments finis de  $S^k$ ,  
 $\mathbf{C}^k$  est la matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis de  $S^k$ ,  
 $\mathbf{K}^k$  est la matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis de  $S^k$ ,  
 $\mathbf{f}_{ext}^k$  est le vecteur des forces extérieures appliquées à  $S^k$ ,  
 $\mathbf{f}_L^k$  est le vecteur des forces de liaison appliquées à  $S^k$ ,  
 $\mathbf{q}^k, \dot{\mathbf{q}}^k$  et  $\ddot{\mathbf{q}}^k$  sont les vecteurs déplacement, vitesse et accélération issus de la modélisation éléments finis.

Le champ de déplacement inconnu, issu de la modélisation éléments finis, est recherché sur un espace approprié, de dimension réduite (transformation de Ritz) selon la formule :

$$\mathbf{q}^k = \Phi^k \boldsymbol{\eta}^k \quad \text{éq 2.1-2}$$

où :

$\boldsymbol{\eta}^k$  est le vecteur des coordonnées généralisées de  $S^k$ ,  
 $\Phi^k$  est la matrice contenant les vecteurs modaux associés aux modes propres dynamiques et aux déformées statiques d'interface de  $S^k$ .

La transformation de Ritz [éq 2.1-2], appliquée à l'équation dynamique transitoire de la sous-structure [éq 2.1-1], permet d'écrire :

$$\overline{\mathbf{M}}^k \ddot{\boldsymbol{\eta}}^k + \overline{\mathbf{C}}^k \dot{\boldsymbol{\eta}}^k + \overline{\mathbf{K}}^k \boldsymbol{\eta}^k = \overline{\mathbf{f}}_{ext}^k + \overline{\mathbf{f}}_L^k \quad \text{éq 2.1-3}$$

où :

$\overline{\mathbf{M}}^k = \Phi^{kT} \mathbf{M}^k \Phi^k$  est la matrice de masse généralisée de  $S^k$ ,  
 $\overline{\mathbf{C}}^k = \Phi^{kT} \mathbf{C}^k \Phi^k$  est la matrice d'amortissement généralisée de  $S^k$ ,  
 $\overline{\mathbf{K}}^k = \Phi^{kT} \mathbf{K}^k \Phi^k$  est la matrice de rigidité généralisée de  $S^k$ ,  
 $\overline{\mathbf{f}}_{ext}^k = \Phi^{kT} \mathbf{f}_{ext}^k$  est le vecteur des forces extérieures généralisées appliquées à  $S^k$ ,  
 $\overline{\mathbf{f}}_L^k = \Phi^{kT} \mathbf{f}_L^k$  est le vecteur des forces de liaison généralisées appliquées à  $S^k$ ,  
 $\boldsymbol{\eta}^k, \dot{\boldsymbol{\eta}}^k$  et  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}^k$  sont les vecteurs déplacement, vitesse et accélération généralisés.

Le problème défini par l'équation [éq 2.1-3] est symétrique. D'autre part, sa dimension est déterminée par le nombre de modes pris en considération (modes dynamiques et déformées statiques). On est donc amené à résoudre un problème transitoire classique mais de taille réduite.

## 2.2 Assemblage des sous-structures

Après avoir étudié chaque sous-structure séparément, on se propose d'établir les équations qui régissent leur assemblage. Considérons deux sous-structures  $S^k$  et  $S^l$  reliées entre elles au niveau de l'interface  $S^k \cap S^l$ . On admet que leurs maillages respectifs sont compatibles [R4.06.02]. Ainsi, au niveau de l'interface, les noeuds coïncident et les mailles en vis à vis sont identiques. Dès lors, la loi d'action-réaction et la continuité des déplacements aux interfaces, qui traduisent l'assemblage de  $S^k$  et  $S^l$ , s'écrivent :

$$\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k = -\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^l \quad \mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k = \mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^l$$

où :

- $\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k$  est le vecteur des forces de liaison appliquées à la sous-structure  $S^k$ , au niveau de l'interface  $S^k \cap S^l$ .
- $\mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k$  est le vecteur des degrés de liberté de l'interface  $S^k \cap S^l$  issus de la modélisation éléments finis de la sous-structure  $S^k$ .

Introduisons les matrices d'extraction des degrés de liberté de l'interface  $S^k \cap S^l$  :

$$\mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k = \mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^k \mathbf{q}^k$$

$$\mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^l = \mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^l \mathbf{q}^l$$

En utilisant la transformation de Ritz et la formulation ci-dessus appliquées aux deux sous-structures, on obtient :

$$\mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^k \Phi^k \boldsymbol{\eta}^k = \mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^l \Phi^l \boldsymbol{\eta}^l$$

Soit :

$$\mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^k \boldsymbol{\eta}^k = \mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^l \boldsymbol{\eta}^l$$

où :  $\mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^k$  est la matrice de liaison associée à l'interface  $S^k \cap S^l$  de  $S^k$ .

## 2.3 Equations dynamiques vérifiées par la structure globale

L'écriture matricielle de l'équation dynamique vérifiée par la structure globale, s'écrit simplement à partir des équations dynamiques vérifiées par chaque sous-structure :

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}^1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \overline{\mathbf{M}}^k & \\ & & & \dots \\ & & & & \overline{\mathbf{M}}^{N_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^1 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}^k \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}}^{N_s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \overline{\mathbf{C}}^k & \\ & & & \dots \\ & & & & \overline{\mathbf{C}}^{N_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^k \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^{N_s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}^1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \overline{\mathbf{K}}^k & \\ & & & \dots \\ & & & & \overline{\mathbf{K}}^{N_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}^{N_s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{ext}^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_{ext}^k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_{ext}^{N_s} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_L^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_L^k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_L^{N_s} \end{Bmatrix}$$

Auxquelles, il faut ajouter les équations de liaison :

$$\forall k, l \quad \mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^k \boldsymbol{\eta}^k = \mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^l \boldsymbol{\eta}^l \quad \mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k = -\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^l$$

Ce système peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{K}}\boldsymbol{\eta} = \bar{\mathbf{f}}_{ext} + \bar{\mathbf{f}}_L \quad \text{éq 2.3-1}$$

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\eta} = 0 \quad \text{éq 2.3-2}$$

$$\forall k, l \quad \mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k = -\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^l \quad \text{éq 2.3-3}$$

## 2.4 Double dualisation des conditions aux limites

Le problème condensé, donné ci-dessus, se présente sous la forme d'un système transitoire auquel est associée une équation de contrainte linéaire (en force et déplacement). Dans le *Code\_Aster*, ce type de problème est classique et il est résolu par double dualisation des conditions aux limites [R3.03.01], c'est à dire par l'introduction de variables auxiliaires encore appelées multiplicateurs de Lagrange pour dualiser les conditions aux limites. Après introduction des multiplicateurs de Lagrange, le système matriciel se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{C}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{L} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{L}^T & \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{Id} & \mathbf{L} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{f}}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{éq 2.4-1}$$

où :  $\boldsymbol{\lambda}_1$  et  $\boldsymbol{\lambda}_2$  sont les multiplicateurs de Lagrange.

On le constate, l'introduction des multiplicateurs de Lagrange rend singulière la matrice de masse. Dès lors, l'utilisation des schéma d'intégration explicites développés dans l'opérateur *DYNA\_TRAN\_MODAL* [U4.54.03] du *Code\_Aster* est impossible car ils nécessitent l'inversion de la matrice de masse.

Pour rendre la matrice non singulière, il suffit de dualiser avec les mêmes multiplicateurs de Lagrange, la condition sur la dérivée seconde des équations de liaison.

Ainsi la condition de continuité des déplacements [éq 2.3-2] est modifiée par le système équivalent [éq 2.4-2] :

$$\forall t \quad \mathbf{L}\boldsymbol{\eta} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{L}(\boldsymbol{\eta} + \ddot{\boldsymbol{\eta}}) = 0 \\ \mathbf{L}\boldsymbol{\eta}^\circ = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\eta}}^\circ = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.4-2}$$

où  $\boldsymbol{\eta}^\circ$  et  $\dot{\boldsymbol{\eta}}^\circ$  sont les déplacement et vitesse généralisées initiales.

Le système matriciel qui en découle est de la forme [bib7] :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{L} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{L}^T & \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{Id} & \mathbf{L} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{C}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{L} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{L}^T & \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{Id} & \mathbf{L} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{f}}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{éq 2.4-3}$$

On constate que la matrice de masse a la même forme que la matrice de raideur. Elle est donc inversible. Ce système est donc parfaitement équivalent à l'équation [éq 2.4-1] (il vérifie à tout instant les conditions de liaison) et il peut être traité, sous cette forme, par l'opérateur DYNA\_TRAN\_MODAL.

## 2.5 Traitement de la matrice d'amortissement

On constate que la condition de continuité des déplacements, formulée dans l'équation [éq 2.4-2], se traduit par une équation du second ordre non amortie. Lors de la résolution par pas de temps d'un problème transitoire, toute erreur numérique risque de s'auto-entretenir, diminuant ainsi la stabilité de l'algorithme. Pour optimiser l'amortissement de l'erreur numérique, il suffit de dualiser la condition sur la dérivée première des équations de liaison avec les mêmes multiplicateurs de Lagrange multipliés par 2 (de manière à rendre cet amortissement critique) :

$$\forall t \quad \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\eta}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{L}(\boldsymbol{\eta} + 2\dot{\boldsymbol{\eta}} + \ddot{\boldsymbol{\eta}}) = 0 \\ \mathbf{L}\boldsymbol{\eta}^\circ = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\eta}}^\circ = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.5-1}$$

Le système matriciel qui en découle est de la forme [bib7] :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{L} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{Id} & \mathbf{L} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.\mathbf{Id} & 2.\mathbf{L} & 2.\mathbf{Id} \\ 2.\mathbf{L}^T & \mathbf{C} & 2.\mathbf{L}^T \\ 2.\mathbf{Id} & 2.\mathbf{L} & -2.\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{L} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{K} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{Id} & \mathbf{L} & -\mathbf{Id} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On constate donc que le traitement de l'erreur numérique sur les équations de liaison conduit à modifier la matrice d'amortissement du problème transitoire. Cette modification est tout à fait comparable à celle qui est réalisée sur la matrice de masse.

Par contre, nous n'avons pas souhaité généraliser ce traitement au cas de la résolution des problèmes transitoires non amortis. Cela nous aurait conduit à créer une matrice d'amortissement temporaire. On aurait pu craindre d'augmenter les temps de calcul, sans réel bénéfice. D'ailleurs, il est tout à fait possible à l'utilisateur de définir une matrice d'amortissement dont les coefficients sont nuls. La modification de celle-ci étant automatique, le système transitoire non amorti sera effectivement résolu, tout en optimisant le traitement de toute erreur numérique intervenant sur les équations de liaison.

## 2.6 Traitement des conditions initiales

Considérons une sous-structure  $S^k$  caractérisée par sa base de projection  $\boldsymbol{\Phi}^k$  composée de modes normaux et de déformées statiques. On suppose qu'initialement la sous-structure  $S^k$  est soumise à un champ de déplacement ou de vitesse (cela ne modifie en rien la démonstration) noté :  $\mathbf{q}_o^k$ . La transformation de Ritz nous permet d'écrire :

$$\mathbf{q}_o^k = \boldsymbol{\Phi}^k \boldsymbol{\eta}_o^k$$

où :  $\boldsymbol{\eta}_o^k$  est le vecteur des déplacements (ou vitesses) généralisé(e)s de  $S^k$  à déterminer.

Le vecteur des déplacements (ou vitesses) généralisé(e)s initiaux(ales) est déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_o^k = \boldsymbol{\Phi}^k \boldsymbol{\eta}_o^k &\Rightarrow \boldsymbol{\Phi}^{kT} \mathbf{q}_o^k = (\boldsymbol{\Phi}^{kT} \boldsymbol{\Phi}^k) \cdot \boldsymbol{\eta}_o^k \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\eta}_o^k = (\boldsymbol{\Phi}^{kT} \boldsymbol{\Phi}^k)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{kT} \mathbf{q}_o^k \end{aligned} \quad \text{éq 2.6-1}$$



### 3 Calcul transitoire sur une base modale calculée par sous-structuration

#### 3.1 Calcul des modes propres de la structure complète par sous-structuration

La seconde méthode développée consiste à résoudre le problème transitoire sur la base modale de la structure complète calculée par sous-structuration.

Chaque sous-structure  $S^k$  est représentée par une base de projection, composée de modes propres dynamiques et de déformées statiques, que nous avons notée :  $\Phi^k$ . La base de projection de la structure complète qui en résulte est notée :  $\Phi$ .

La base modale de la structure complète est calculée par sous-structuration. Chaque mode obtenu est donc combinaison linéaire des vecteurs des bases de projection des sous-structures :

$$\Phi_p = \sum_{k=1}^{N_S} \Phi^k \alpha^k = \Phi \alpha \quad \text{éq 3.1-1}$$

où :

- $\Phi_p$  est la matrice des modes propres de la structure complète,
- $\alpha$  est la matrice des coordonnées modales généralisées de la structure.

La projection des matrices et des vecteurs constitutifs du problème transitoire, sur la base des modes propres de la structure complète calculés par synthèse modale permet de déterminer :

- la matrice de masse généralisée :  $\bar{\bar{M}} = \alpha^T \bar{M} \alpha$
- la matrice de rigidité généralisée :  $\bar{\bar{K}} = \alpha^T \bar{C} \alpha$
- éventuellement la matrice d'amortissement généralisé :  $\bar{\bar{C}} = \alpha^T \bar{C} \alpha$
- le vecteur des forces extérieures généralisées :  $\bar{\bar{f}}_{ext} = \alpha^T \bar{f}_{ext}$

Du fait de l'orthogonalité des modes propres de la structure calculés par synthèse modale, par rapport aux matrices  $\bar{M}$  et  $\bar{K}$ , les matrices de masse et de rigidité généralisées obtenues ci-dessus sont diagonales :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{M}} &= \alpha^T \bar{M} \alpha = (\Phi \alpha)^T \bar{M} \Phi \alpha = \Phi_p^T \bar{M} \Phi_p \\ \bar{\bar{K}} &= \alpha^T \bar{K} \alpha = (\Phi \alpha)^T \bar{K} \Phi \alpha = \Phi_p^T \bar{K} \Phi_p \end{aligned} \quad \text{éq 3.1-2}$$

#### 3.2 Equation dynamique vérifiée par la structure globale

La structure complète est soumise aux forces extérieures qui lui sont appliquées. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f_{ext} \quad \text{éq 3.2-1}$$

Le champ de déplacement inconnu, issu de la modélisation éléments finis, est remplacé par sa projection sur la base des modes propres de la structure, selon la formule :

$$\mathbf{q} = \Phi_p \boldsymbol{\eta} \quad \text{éq 3.2-2}$$

où :  $\boldsymbol{\eta}$  est le vecteur des coordonnées généralisées de la structure.

La transformation de Ritz [3.2-2], appliquée à l'équation dynamique transitoire de la structure [3.2-1], permet d'écrire :

$$\overline{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \overline{\mathbf{C}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\eta} = \overline{\mathbf{f}}_{ext} \quad \text{éq 3.2-3}$$

L'étape de restitution sur base physique nécessite de tenir compte de la double projection (sur la base modale de la structure complète, puis sur les bases de projection des sous-structures - cf. éq 3.2-4).

$$\mathbf{q} = \Phi_p \boldsymbol{\eta} = \Phi \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\eta} \quad \text{éq 3.2-4}$$

Le problème défini par l'équation [éq 3.2-3] est de forme tout à fait classique. On est amené à résoudre un problème transitoire symétrique dont la dimension est déterminée par le nombre de modes calculés par sous-structuration et dont les matrices de masse et de rigidité sont diagonales.

Notons enfin que le traitement des conditions initiales est identique au cas du calcul transitoire par projection sur les bases des sous-structures (cf. § 2.6).

## 4 Etude comparative des deux méthodes développées

Les bases théoriques, associées aux deux méthodologies mises en œuvre dans le *Code\_Aster* pour réaliser un calcul de réponse transitoire en utilisant les techniques de sous-structuration, ont été présentées dans les chapitres précédents. Nous précisons, ici, leurs particularités essentielles.

La première méthodologie consiste à faire un calcul de réponse transitoire par sous-structuration. L'équation vérifiée par la structure complète est alors projetée sur les bases des sous-structures. La précision de cette méthode est donc directement déterminée par l'étendue de ces bases. Ces dernières peuvent être enrichies sans aboutir à des temps de calcul prohibitifs car les sous-structures sont, en principe, de tailles relativement réduites. Quoi qu'il en soit, il est difficile d'estimer l'effet de troncature modale à la seule connaissance des modes des bases des sous-structures. D'autre part, les bases de projection des sous-structures sont composées de modes qui ne sont pas tous orthogonaux entre eux (modes propres et déformées statiques). Les matrices de masse et de rigidité généralisées constitutives du problème transitoire final sont donc non-diagonales. Globalement, leur largeur de bande peut être déterminée à partir du nombre de déformées statiques des bases de projection des sous-structures [R4.06.02]. La durée d'intégration dans l'opérateur de calcul transitoire `DYNA_TRAN_MODAL` sera donc d'autant plus longue qu'il y aura de degrés de liberté d'interface. D'autre part, le pas de temps d'intégration maximal admissible par les schéma d'intégration explicites est déterminé à partir de la fréquence maximale de la base de projection. Dans le cas d'un calcul transitoire par sous-structuration, cette fréquence résulte, en principe, des modes statiques dont les termes diagonaux sont élevés dans la matrice de rigidité généralisée et faibles dans la matrice de masse généralisée. Dès lors, le pas de temps d'intégration ne peut pas être déterminé a priori. L'expérience montre qu'il est très faible, au regard des fréquences propres des bases des sous-structures et que l'utilisation du schéma d'intégration à pas de temps adaptatif de `DYNA_TRAN_MODAL` est très profitable.

La deuxième méthodologie consiste à faire un calcul transitoire sur la base modale de la structure complète obtenue par sous-structuration. On sait que l'étape consistant à calculer les modes propres de la structure peut être coûteuse en terme de temps de calcul. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'on considère des forces non linéaires car la base de projection doit alors être suffisamment étendue pour bien représenter la dynamique du système. D'autre part, la base modale sur laquelle est calculée la réponse transitoire est de dimension inférieure à celle déterminée par les vecteurs propres des sous-structures (modes propres et déformées statiques). Elle ne constitue donc pas un système générateur. La double projection revient donc à introduire une fréquence de coupure. On doit donc s'attendre à ce que cette méthode soit moins précise que la précédente. Cependant, le calcul des modes propres permet d'estimer l'effet de troncature modale. D'autre part, il peut permettre de valider les modèles des sous-structures si on dispose de résultats expérimentaux. Finalement, l'intérêt essentiel de cette méthode est que les matrices de masse et de rigidité utilisées dans le calcul transitoire sont diagonales. L'intégration numérique est donc très rapide.

Pour conclure, on constate que le calcul transitoire par sous-structuration s'identifie aux méthodes directes de calcul transitoire. On n'a pas accès aux informations modales et les matrices sont non diagonales. Dans ce cas, on peut dire que les vecteurs des bases de projection des sous-structures jouent le même rôle que les fonctions de forme des éléments finis. Le calcul transitoire sur base modale calculée par sous-structuration s'identifie, quant à lui, aux méthodes de recombinaison modale classique.

## 5 Mise en œuvre dans le Code\_Aster

### 5.1 Etude des sous-structures séparément

Si on souhaite introduire un amortissement de Rayleigh, les paramètres  $\alpha_e$  et  $\beta_e$  de cet amortissement sont définis, par l'opérateur `DEFI_MATERIAU` [U4.23.01].

Les traitements des sous-structures sont identiques au cas du calcul modal [R4.06.02] et harmonique [R4.06.03]. Les modes propres dynamiques sont calculés avec les opérateurs : `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.02] ou `MODE_ITER_INV` [U4.52.01]. Les conditions aux interfaces de liaison sont appliquées avec l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01].

L'opérateur `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.55.03] permet de définir les interfaces de connexion de la sous-structure. L'opérateur `DEFI_BASE_MODEALE` [U4.55.04] permet de calculer la base de projection complète de la sous-structure (recopie des modes propres et calcul des déformées statiques).

L'opérateur `MACR_ELEM_DYNA` [U4.55.05] calcule les matrices généralisées de raideur, de masse et éventuellement d'amortissement de la sous-structure, ainsi que les matrices de liaison. L'amortissement de Rayleigh est pris en compte en complétant l'opérande `MATR_AMOR`. L'amortissement proportionnel est introduit par l'opérande `AMOR_REDUIT`.

Le chargement transitoire est défini, au niveau de la sous-structure, par les opérateurs `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01] (application de la force sur le maillage), `CALC_VECT_ELEM` [U4.41.02] (calcul des vecteurs élémentaires associés) et `ASSE_VECTEUR` [U4.42.03] (assemblage du vecteur de chargement sur le maillage de la sous-structure).

L'opérateur `AFFE_CHAM_NO` [U4.26.01] qui permet d'affecter un champ sur les nœuds d'un modèle permet de décrire le champ de déplacement initial ou/et le champ de vitesse initial de la sous-structure.

### 5.2 Assemblage du modèle généralisé

Comme dans le cas du calcul modal [R4.06.02] et harmonique [R4.06.03], le modèle de la structure complète est défini par l'opérateur `DEFI_MODELE_GENE` [U4.55.06]. Sa numérotation est réalisée par l'opérateur `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07]. Les matrices de masse, de raideur et éventuellement d'amortissement généralisées de la structure complète sont assemblées en fonction de cette numérotation avec l'opérateur `ASSE_MATR_GENE` [U4.55.08].

Les chargements sont projetés sur les bases des sous-structures auxquelles ils sont appliqués, puis assemblés à partir de la numérotation issue de `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07] par l'opérateur `ASSE_VECT_GENE` [U4.55.09].

Les déplacements généralisés initiaux et les vitesses généralisées initiales pour chaque sous-structure, sont calculés par l'opérateur `ASSE_VECT_GENE` [U4.55.09]. Cet opérateur réalise également l'assemblage de ces vecteurs en fonction de la numérotation issue de `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07].

Dans le cas d'un calcul transitoire projeté sur les "bases" des sous-structures, les matrices et vecteurs assemblés généralisés obtenus à l'issue de cette étape sont directement utilisés pour le calcul transitoire. Dans le cas d'un calcul sur la base modale de la structure complète calculée par sous-structuration, il faut réaliser des opérations spécifiques qui sont présentées au § 5.3.

### 5.3 Calcul de la base modale de la structure complète et projection

Ce chapitre est spécifique au calcul transitoire sur base modale calculée par sous-structuration.

La base modale de la structure complète est calculée avec les opérateurs classiques du *Code\_Aster* : `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.02] ou `MODE_ITER_INV` [U4.52.01]. On définit une numérotation du problème généralisé final avec l'opérateur `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07]. Les matrices de masse, de raideur et éventuellement d'amortissement généralisées sont projetées sur la base des modes propres de la structure avec l'opérateur `PROJ_MATR_BASE` [U4.55.01]. Les vecteurs généralisés correspondant aux chargements extérieurs sont projetés sur la base des modes propres de la structure avec l'opérateur `PROJ_VECT_BASE` [U4.55.02].

### 5.4 Résolution et restitution sur base physique

Le calcul de la réponse transitoire de la structure complète est réalisé par l'opérateur `DYNA_TRAN_MODAL` [U4.54.03].

La restitution des résultats sur base physique fait intervenir l'opérateur `REST_BASE_PHYS` [U4.64.01] ; elle est identique au cas du calcul modal [R4.06.02] et harmonique [R4.06.03]. On peut utiliser l'opérateur `DEFI_SQUELETTE` [U4.75.01] pour créer un maillage "squelette". Plus grossier que le maillage de calcul, il permet de réduire les durées des traitements graphiques.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce rapport, les travaux réalisés pour introduire, dans le *Code\_Aster*, le calcul de réponse transitoire linéaire par sous-structuration dynamique. Les méthodes qui ont été choisies consistent, pour la première d'entre elles, à projeter les équations transitoires sur les "bases" de chaque sous-structure, composées de modes propres dynamiques et de déformées statiques et pour la seconde, à calculer les modes propres de la structure complète par sous-structuration et à y projeter les équations transitoires.

Nous avons débuté par un exposé des bases théoriques sur lesquelles s'appuient la première méthode de sous-structuration transitoire pour aboutir à la formulation matricielle du problème final. En particulier, un traitement original de l'équation de continuité des déplacements pour rendre la matrice de masse inversible et pour assurer une stabilité optimale de l'algorithme d'intégration, nous a conduits à modifier la forme des matrices de masse et d'amortissement du problème transitoire.

Pour la seconde méthode, la difficulté essentielle consiste à restituer les résultats obtenus en coordonnées généralisées sur la base physique. En effet, il faut tenir compte de la double projection : sur la base modale de la structure complète d'une part, et sur les bases des sous-structures d'autre part.

Les développements réalisés se sont traduits par des modifications des opérateurs `DYNA_TRAN_MODAL` [U4.54.03] et `REST_BASE_PHYS` [U4.64.01]. Leur syntaxe a été très peu modifiée, de manière à ce que leur utilisation soit identique lors d'un calcul par sous-structuration et d'un calcul direct par recombinaison modale.

---

## 7 Bibliographie

---

- [1] C. VARE : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Méthodes d'analyse" Clé : R4.06.02 "Calcul modal par sous-structuration dynamique classique et cyclique"
- [2] C. VARE : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Méthodes d'analyse" Clé : R4.06.03 "Réponse harmonique par sous-structuration dynamique classique"
- [3] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration cyclique en éléments finis" Rapport EDF HP-61/91.156
- [4] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dans le *Code\_Aster*" - Rapport EDF HP-61/92.149
- [5] R. ROY, J. CRAIG & M. C. BAMPTON : "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis" - AIAA Journal, (July 1968), Vol. 6, N° 7, p. 1313-1319.
- [6] R. H. Mac Neal : "A hybrid method of component mode synthesis" Computers and Structures, (1971), Vol. 1, p. 581-601.
- [7] C. VARE : "Cahier des charges de l'implémentation du calcul transitoire linéaire par sous-structuration dynamique dans le *Code\_Aster*" - Rapport D.E.R. HP-61/94.135/B
- [8] C. VARE : "Documentations Utilisateur et Validation des opérateurs de calcul transitoire par sous-structuration" - Rapport D.E.R. HP-61/94.208/A
- [9] J. PELLET : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Les éléments finis dans Aster" - Clé : R3.03.01 "Dualisation des conditions aux limites"

Page laissée intentionnellement blanche.