

Manuel de Référence
Fascicule R4.05 : Analyse sismique
Document : R4.05.03

Réponse sismique par méthode spectrale

Résumé :

L'étude de la réponse d'une structure sous l'effet de mouvements imposés de type sismique, avec un mouvement imposé unique (mono appui) ou multiple (multi appuis) est possible en analyse transitoire (time history). On se reportera à la note [R4.05.01].

Pour des études de dimensionnement, on peut ne s'intéresser qu'à une estimation des efforts maximaux induits par les sollicitations, pour évaluer la marge de sécurité avec des règlements de construction, sans recourir à une analyse transitoire.

La méthode spectrale s'appuie sur la notion de spectre d'oscillateur d'un accélérogramme de séisme. On détaille la méthode d'élaboration de ce spectre de réponse disponible dans l'opérateur `CALC_FONCTION` [U4.32.04].

On montre comment ce spectre d'oscillateur peut être utilisé pour évaluer un majorant de la réponse en déplacement relatif d'un oscillateur simple. Cette approche se justifie si on ne désire pas connaître l'histoire des déplacements et des efforts, en se limitant à l'analyse des effets inertiels.

La méthode spectrale utilise des notions générales de la méthode de recombinaison modale [R5.06.01].

On décrit les différentes règles de combinaison utilisables pour obtenir un majorant réaliste mais conservatif de la réponse maximale de la structure. Ces méthodes sont disponibles dans l'opérateur `COMB_SISM_MODAL` [U4.84.01].

Table des matières

1	Notion de spectre d'oscillateur.....	4
1.1	Mouvement imposé défini par un accélérogramme A (t)	4
1.2	Spectre d'oscillateur d'un accélérogramme	5
1.2.1	Spectre d'oscillateur en déplacement relatif	5
1.2.2	Spectre d'oscillateur en pseudo vitesse relative	6
1.2.3	Spectre d'oscillateur en pseudo accélération absolue.....	7
1.3	Détermination du spectre d'oscillateur	7
1.4	Représentation et utilisation des spectres d'oscillateurs.....	8
1.4.1	Représentation tri logarithmique	8
1.4.2	Utilisation des spectres d'oscillateurs.....	8
1.5	Spectres d'oscillateurs utilisés pour des études.....	9
1.5.1	Spectre de sol de conception et vérification des bâtiments	9
1.5.2	Spectre de plancher de vérification des équipements	10
2	Réponse sismique par recombinaison modale	10
2.1	Rappels de la formulation	10
2.1.1	Mouvement imposé unique : mono appui	11
2.1.2	Mouvement imposé multiple : multi appuis	12
2.1.3	Résumé	13
2.2	Réponse en base modale.....	13
2.2.1	Réponse temporelle d'un oscillateur modal	13
2.2.2	Facteur de participation modal en mono appui.....	14
2.2.3	Facteur de participation modal en multi appuis.....	14
3	Réponse sismique par méthode spectrale	15
3.1	Réponse spectrale d'un oscillateur modal en mono appui.....	15
3.2	Réponse spectrale d'un oscillateur modal en multi appuis	16
3.3	Généralisation à d'autres grandeurs	16
4	Règles de combinaison des réponses modales.....	17
4.1	Direction du séisme et réponse directionnelle.....	17
4.2	Choix des modes propres à combiner.....	17
4.2.1	Expression de l'énergie de déformation modale	17
4.2.2	Expression de l'énergie cinétique modale.....	18
4.2.3	Conclusion	19
4.3	Correction statique par pseudo-mode	19
4.3.1	Mono appui.....	19
4.3.2	Multi appuis	20
4.4	Généralités sur les règles de combinaison	20
4.4.1	Combinaison arithmétique.....	20
4.4.2	Combinaison en valeur absolue	21

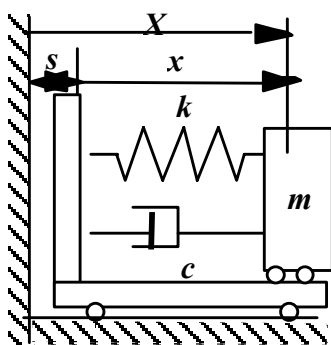
4.4.3 Combinaison quadratique simple.....	21
4.5 Etablissement de la réponse directionnelle en mono appui	21
4.5.1 Réponse combinée des oscillateurs modaux	21
4.5.1.1 Somme des valeurs absolues	22
4.5.1.2 Combinaison quadratique simple (CQS).....	22
4.5.1.3 Combinaison quadratique complète (CQC)	22
4.5.1.4 Combinaison de ROSENBLUETH.....	23
4.5.1.5 Combinaison avec règle des 10%	23
4.5.2 Contribution de la correction statique des modes négligés	23
4.6 Etablissement de la réponse directionnelle en multi appuis	23
4.6.1 Calcul de la réponse globale.....	23
4.6.2 Calcul séparé des composantes primaire et secondaire de la réponse	24
4.6.3 Réponse combinée des oscillateurs modaux	24
4.6.4 Contribution du pseudo mode.....	24
4.6.5 Contribution des mouvements d'entraînement	24
4.6.6 Combinaison des réponses directionnelles d'appuis.....	25
4.7 Combinaison des réponses directionnelles	25
4.7.1 Combinaison quadratique	25
4.7.2 Combinaison de NEWMARK	25
4.8 Avertissement sur les combinaisons.....	26
4.9 Pratiques réglementaires	26
4.9.1 Partition des composantes primaires et secondaires de la réponse	26
4.9.2 Méthode du spectre enveloppe.....	27
5 Bibliographie	28
Annexe 1 Réponse transitoire d'un oscillateur simple amorti.....	29
Annexe 2 Mouvement imposé d'un système à un d.d.l. en translation	31
Annexe 3 Mouvement imposé non périodique d'un système à un d.d.l.	33

1 Notion de spectre d'oscillateur

La méthode spectrale pour l'étude de la réponse d'une structure sous l'effet de mouvements imposés de type sismique s'appuie sur la notion de spectre d'oscillateur d'un accélérogramme de séisme.

1.1 Mouvement imposé défini par un accélérogramme $A(t)$

Pour un mouvement imposé s de type sismique, on peut traiter la problème en déplacement absolu X ou en déplacement relatif x tel que : $X = x + s$. Les équations générales du mouvement d'un oscillateur simple s'écrivent alors :



Mouvement absolu

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = c\dot{s} + ks$$

Mouvement relatif

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{s}$$

On retient la formulation à partir du **mouvement relatif** pour deux raisons principales :

- l'analyse sismique des structures utilise les contraintes induites par les effets inertiels du séisme, contraintes calculées à partir des déformations de la structures qui s'expriment à partir des déplacements relatifs ;
- la caractérisation du signal d'excitation peut se réduire dans ce cas à l'accélérogramme du séisme $\ddot{s}=A(t)$, grandeur fournie directement par les sismographes. Les signaux de déplacement s et de vitesse \dot{s} ne sont en général pas disponibles dans les bases de données géotechniques.

Pour la détermination de la réponse d'un oscillateur simple à un mouvement imposé et les notations conventionnelles on se reportera à l'annexe 2 [R4.05.03 Annexe 2].

L'équation réduite est dans ce cas, si le séisme est défini par un accélérogramme $A(t)$, accélération absolue appliquée à la base :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{s} = -A(t) \quad \text{éq 1.1-1}$$

La solution de ce problème est l'intégrale de DUHAMEL présentée à l'annexe A [éq A3.3-1] :

$$x(t) = \frac{1}{\omega'_0} \int_0^t A(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin \omega'_0(t-\tau) d\tau = f(A, \xi, \omega'_0) \quad \text{éq 1.1-2}$$

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

1.2 Spectre d'oscillateur d'un accélérogramme

La notion de spectre d'oscillateur a été introduite initialement pour comparer entre eux les effets de différents accélérogrammes. Le spectre de FOURIER d'un signal $A(t)$ renseigne sur son contenu fréquentiel. La réponse d'un système mécanique à un mouvement imposé à la base dépend largement des caractéristiques dynamiques de ce système : fréquences propres et amortissement réduit (ξ, ω'_0) . L'annexe A détaille cet aspect.

Si l'on souhaite connaître la valeur maximale de la réponse d'un oscillateur simple aux paramètres (A, ξ, ω'_0) , on doit évaluer l'intégrale de DUHAMEL qui fournit la réponse de l'oscillateur [éq 1.1-2] à une excitation imposée à la base.

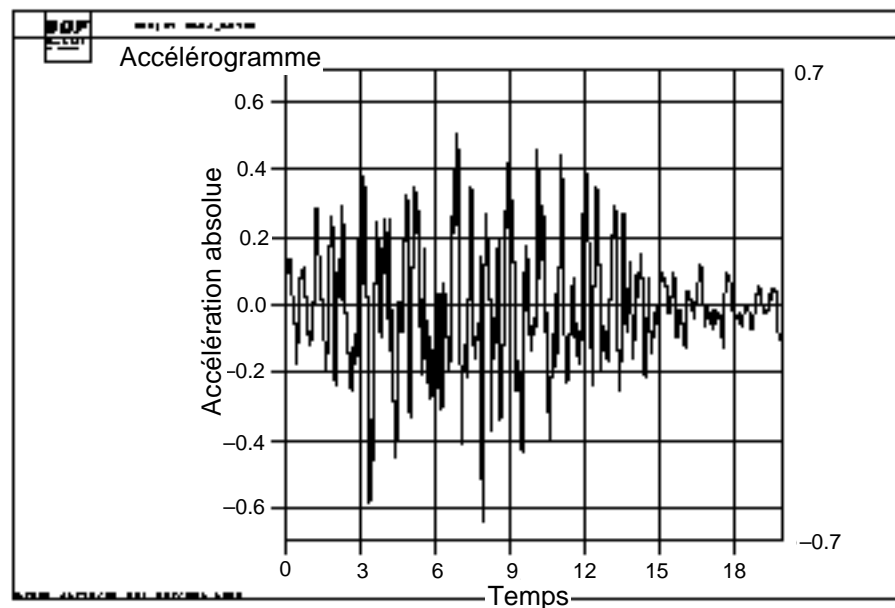


Figure 1.2-a : Accélérogramme

1.2.1 Spectre d'oscillateur en déplacement relatif

A partir de l'intégrale de DUHAMEL, on peut définir le spectre d'oscillateur d'un accélérogramme $A(t)$ comme la fonction des valeurs maximales du déplacement relatif $x(t) = f(A, \xi, \omega'_0)$ pour chaque valeur de (ξ, ω'_0) en rappelant que $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$.

$$S_{rox}(A, \xi, \omega'_0) = |x(t)|_{\max}$$

$$x(t) = \frac{1}{\omega'_0} \int_0^t A(\tau) e^{-\xi \omega'_0 (t-\tau)} \sin \omega'_0 (t-\tau) d\tau = f(A, \xi, \omega'_0)$$

On constate, sur la figure [Figure 1.2.1-a] qu'au delà d'une certaine fréquence (35 Hz ici), dite fréquence de coupure du spectre, il n'y a pas d'amplification dynamique significative : le déplacement relatif est nul.

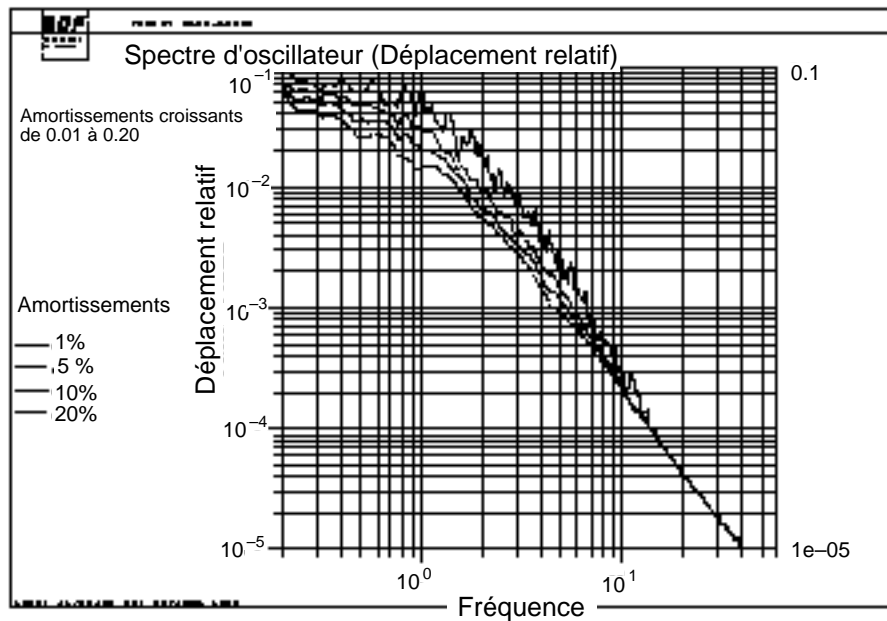


Figure 1.2.1-a : Spectre d'oscillateur en déplacement relatif

1.2.2 Spectre d'oscillateur en pseudo vitesse relative

Pour des structures avec amortissement réduit faible $\xi < 0.2 = 20\%$, pour lesquelles il est acceptable d'assimiler ω_0 et ω'_0 on utilise couramment le spectre de pseudo vitesse défini par :

$$S_{ro\dot{x}}(A, \xi, \omega_0) = \omega_0 S_{rox}(A, \xi, \omega_0) = \omega_0 |x(t)|_{\max}$$

La pseudo vitesse est la valeur de la vitesse qui donne une valeur de l'énergie cinétique de la masse de l'oscillateur égale à celle de l'énergie de déformation maximale du ressort :

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}(t))^2 = \frac{1}{2} m [S_{ro\dot{x}}(A, \xi, \omega_0)]^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 |x(t)|_{\max}^2 = \frac{1}{2} k |x(t)|_{\max}^2 = E_p$$

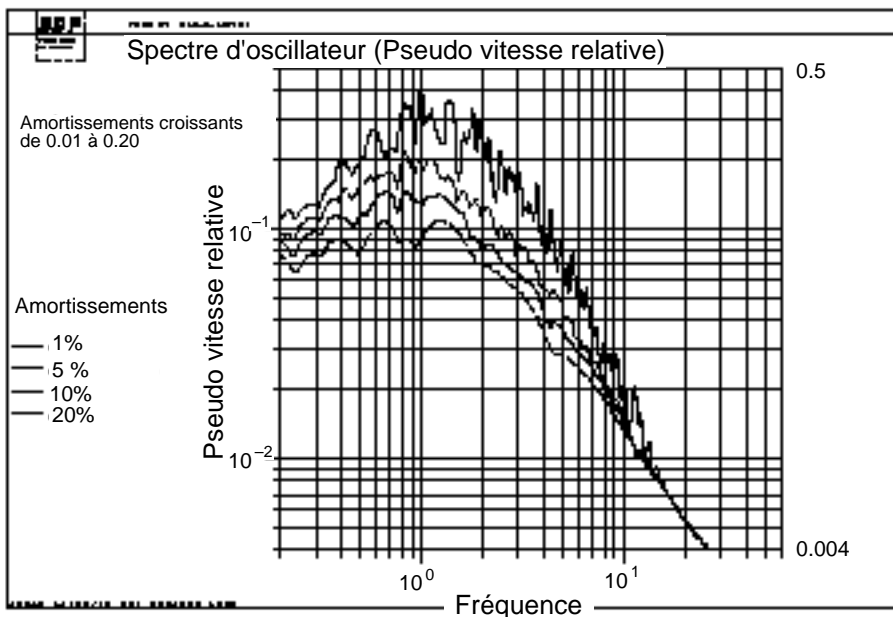


Figure 1.2.2-a : Spectre d'oscillateur en pseudo vitesse relative

1.2.3 Spectre d'oscillateur en pseudo accélération absolue

De même pour un amortissement réduit faible on peut définir le spectre de pseudo accélération défini par :

$$S_{ro\ddot{x}}(A, \xi, \omega_0) = \omega_0^2 S_{rox}(A, \xi, \omega_0) = \omega_0^2 |x(t)|_{\max}$$

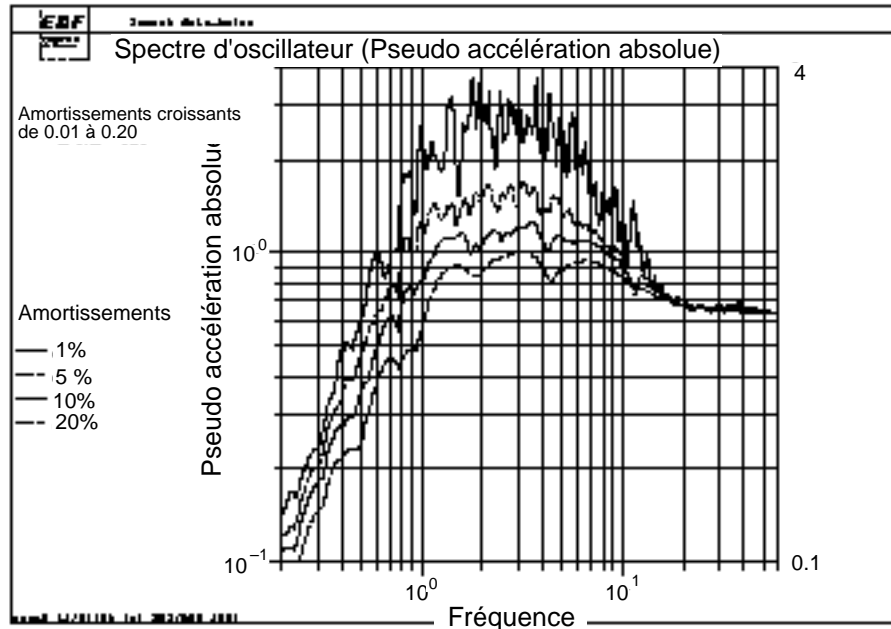


Figure 1.2.3-a : Spectre d'oscillateur en pseudo accélération absolue

L'intérêt de ce spectre de pseudo accélération réside dans le fait que $S_{ro\ddot{x}}(A, \xi, \omega_0)$ est une bonne approximation du maximum d'accélération absolue $\ddot{X}(t)$. En effet, à l'instant où le déplacement relatif est maximal, la vitesse relative s'annule et l'équation réduite s'écrit $\ddot{x} + 0 + \omega_0^2 x_{\max} = -\ddot{s}$ ce qui nous montre que

$$|\ddot{X}|_{\max} = |\ddot{x} + \ddot{s}|_{\max} = |\omega_0^2 x_{\max}| = \omega_0^2 S_{rox}(A, \xi, \omega_0) = S_{ro\ddot{x}}(A, \xi, \omega_0)$$

Pour cette raison, ce spectre d'oscillateur est appelé **spectre de pseudo accélération absolue**.

L'asymptote de ce spectre à haute fréquence (accélération à période nulle) correspond à la réponse d'un oscillateur de haute fréquence propre, c'est-à-dire très rigide. Dans ce cas, la masse tend à suivre intégralement le mouvement imposé de la base. Cette asymptote correspond donc à l'accélération maximale $|A(t)|_{\max}$ du mouvement imposé (sol ou point d'accrochage de l'oscillateur). Elle est atteinte en pratique à partir de la fréquence de coupure du spectre. Pour cette raison, on dit qu'un accélérogramme est calé, par exemple, sur 0.15 g, quand son amplitude maximale et son spectre d'oscillateur de pseudo accélération absolue à période nulle sont égaux à 0.15 g.

1.3 Détermination du spectre d'oscillateur

La détermination du spectre d'oscillateur d'un accélérogramme $A(t)$ est disponible dans l'opérateur CALC_FONCTION [U6.62.04] avec le mot clé SPEC_OSCI : il est obtenu par intégration numérique de l'équation de DUHAMEL par la méthode de NIGAM [R5.05.01]. Cette commande fournit le spectre de pseudo accélération absolue et, sur demande, le spectre de pseudo vitesse ou le spectre de déplacement relatif.

1.4 Représentation et utilisation des spectres d'oscillateurs

1.4.1 Représentation tri logarithmique

Les spectres de réponse d'oscillateur sont couramment représentés par des graphiques tri logarithmiques qui permettent de lire sur un seul graphique les trois grandeurs : le déplacement relatif, la pseudo vitesse relative, la pseudo accélération absolue.

Cette représentation est obtenue en traçant le spectre de pseudo vitesse relative $S_{ro}\dot{x}$ en coordonnées log-log telles que $\log S_{ro}\dot{x} = f(\log \omega_0)$ sur lequel on reporte deux graduations complémentaires à $\pm 45^\circ$ si l'échelle des graduations logarithmiques est la même sur les deux axes :

- une graduation logarithmique à $+45^\circ$ pour mesurer les déplacements relatifs $\log S_{ro}x = \log(\omega_0 S_{ro}\dot{x}) = \log S_{ro}\dot{x} + \log \omega_0$
- une graduation logarithmique à -45° pour mesurer les accélérations absolues

$$\log S_{ro}\ddot{x} = \log\left(\frac{S_{ro}\dot{x}}{\omega_0}\right) = \log S_{ro}\dot{x} - \log \omega_0$$

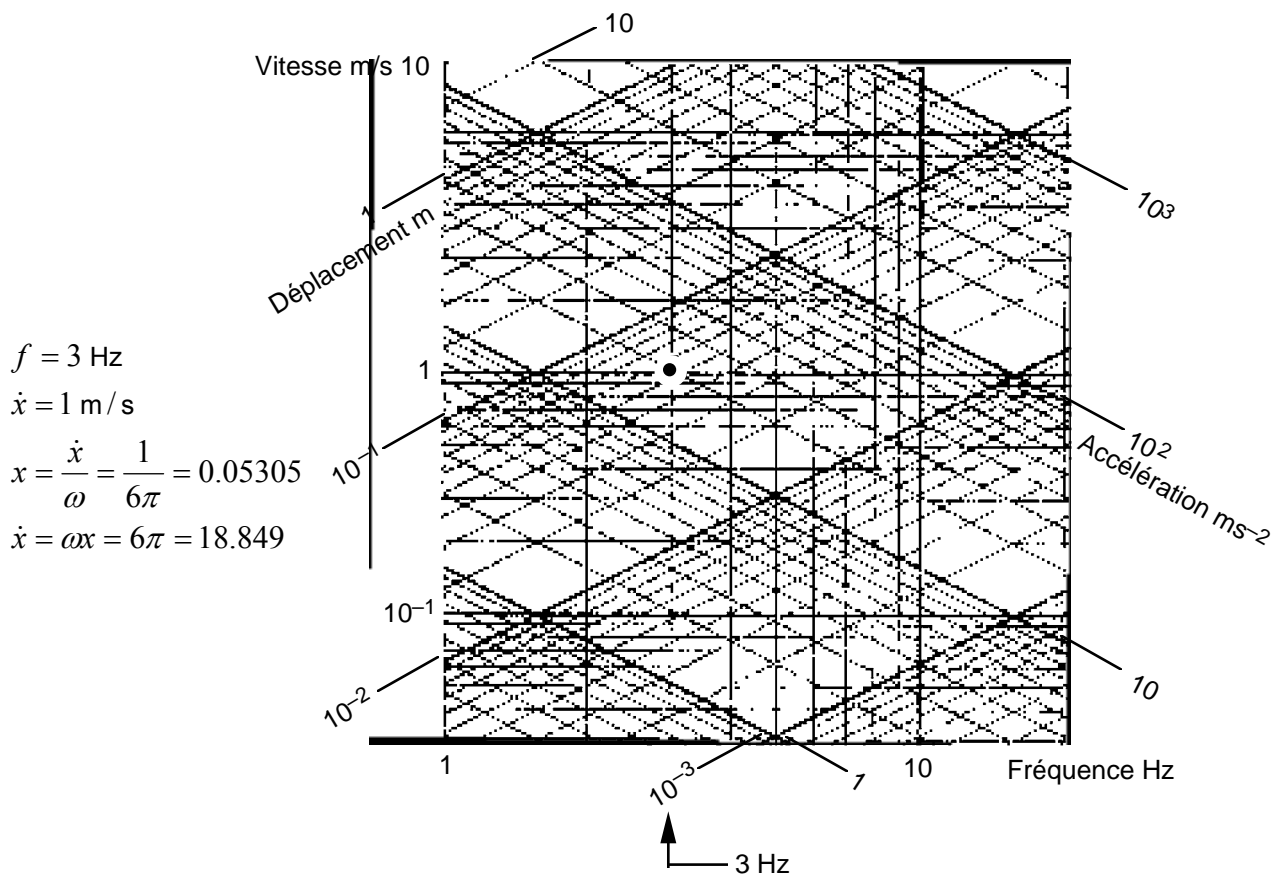


Figure 1.4.1-a : Représentation tri logarithmique

1.4.2 Utilisation des spectres d'oscillateurs

Pour évaluer la réponse maximale d'un oscillateur modal (ω_i, ξ_i) à un accélérogramme $A(t)$, on utilise le spectre de pseudo accélération absolue.

Il est représenté dans le *Code_Aster*, par une nappe constituée de plusieurs fonctions $Sro\ddot{x} = f(freq)$ à $\xi_n = cte$.

On utilise une interpolation linéaire sur l'amortissement réduit pour $\xi_n < \xi_i < \xi_{n+1}$ car l'amplification dynamique à la résonance pour $\omega = \omega_0$ (soit $\eta = 1$) est égale à $\frac{x_m}{s_0} = \frac{1}{2\xi_i}$ [éq A2.2-3].

La variation du module de la réponse au voisinage de la résonance justifie également une interpolation logarithmique pour $\omega_m < \omega_i < \omega_{m+1}$. Le spectre d'oscillateur doit être représenté avec une discrétisation en fréquence suffisamment fine pour limiter les effets de l'interpolation.

1.5 Spectres d'oscillateurs utilisés pour des études

Pour les études d'installations industrielles, telles que les centrales nucléaires, l'analyse sismique conduit à établir plusieurs modèles :

- un modèle du génie civil de conception des bâtiments pour déterminer :
 - les sollicitations accidentelles pour le calcul des ossatures de ces bâtiments ;
 - les mouvements imposés aux points d'accrochage des équipements (cuve de réacteur, appuis des réseaux de tuyauteries, armoires électriques, ..) à différents niveaux des bâtiments ;
- des modèles d'étude de vérification de chaque équipement soumis aux mouvements imposés amplifiés par le comportement dynamique des bâtiments.

1.5.1 Spectre de sol de conception et vérification des bâtiments

A ce stade, les équipements ne sont connus que comme des surcharges inertielles et l'on peut admettre qu'ils n'apportent aucune rigidité au bâtiment. Les structures sont dans ce cas soumises à un spectre de sol.

Le contenu fréquentiel d'un spectre d'oscillateur reflète celui de l'accélérogramme utilisé et est donc "marqué" par les propriétés du sol au lieu d'enregistrement. Pour élaborer le spectre de sol au stade du projet, il est donc recommandé d'établir les spectres d'oscillateurs pour plusieurs accélérogrammes et de construire un spectre enveloppe qui lisse les anti résonances.

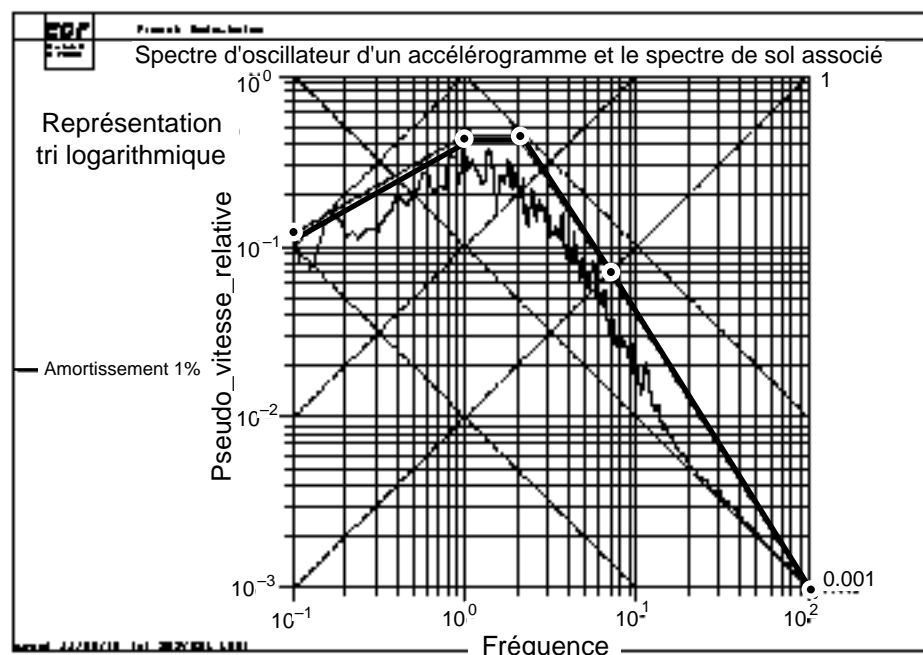


Figure 1.5.1-a : Spectre de sol pour un projet

Remarque :

Dans de nombreux cas on ne connaît pas le mouvement de rotation imposé par le séisme, puisque les accélérogrammes de séismes connus sont issus d'enregistrements de sismo-graphes, capteurs à un degré de liberté de translation.

1.5.2 Spectre de plancher de vérification des équipements

L'étude du comportement dynamique des équipements soumis aux mouvements imposés par la structure support aux points d'appuis est possible à partir des accélérogrammes de réponse en ces points, résultats de l'analyse transitoire du comportement du bâtiment : ces accélérogrammes, dits de plancher, permettent de construire des spectres de planchers.

Pour une vérification de l'équipement, on peut se limiter à une analyse spectrale à partir des spectres de plancher et des déplacements différentiels imposés aux appuis.

Les spectres de plancher sont représentatifs de l'amplification dynamique apportée par la structure support : un lissage du spectre peut être utile pour prendre en considération l'incertitude sur la position des fréquences propres du bâtiment, mais on veillera à conserver des marges réalistes, puisque le spectre de sol est déjà un majorant de la sollicitation sismique. Le spectre d'oscillateur doit être représenté avec une discrétisation en fréquence suffisamment fine pour "capter" les résonances de la structure.

Remarque :

Des techniques de détermination directe des spectres de planchers, à partir du spectre de sol et des modes de la structures ont été mises au point [bib1], mais ne sont pas disponibles actuellement dans le Code_Aster.

2 Réponse sismique par recombinaison modale**2.1 Rappels de la formulation**

La méthode spectrale d'analyse sismique s'appuie sur la formulation de la réponse dynamique transitoire par recombinaison modale présentée dans les documents "Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non linéaire" [R5.06.01] et "Analyse sismique par méthode directe ou recombinaison modale" [R4.05.01].

Résumons les principes de la démarche détaillée dans la note [R4.05.01] pour une structure représentée sous forme discrétisée par le système matriciel :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad \text{éq 2.1-1}$$

Notations en mouvement absolu

\mathbf{U} représente toutes les composantes du mouvement (ddl de structure et ddl soumis à un mouvement imposé) : on les sépare sous la forme $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$. Les opérateurs décrivant la structure deviennent : $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_{xs} \\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss} \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c}_{xs} \\ \mathbf{c}_{sx} & \mathbf{c}_{ss} \end{bmatrix}$ $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_{xs} \\ \mathbf{m}_{sx} & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix}$

Le problème en mouvement relatif de la structure par rapport aux appuis avec la décomposition Mouvement absolu = Mouvement relatif + Mouvement d'entraînement conduit à introduire le changement de variable $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{E}$.

Notations en mouvement relatif

\mathbf{u} représente toutes les composantes du mouvement (ddl de structure et ddl soumis à un mouvement imposé) qui s'écrit, avec la partition précédente, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. La partition des composantes d'entraînement donne, en exprimant l'entraînement des ddl de structure comme une combinaison linéaire des mouvements imposés aux appuis, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}\mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$

Hypothèse

On suppose qu'aucune force d'excitation n'est appliquée sur les d.d.l. de structure ce qui réduit le second membre $\mathbf{F}(t)$, avec la même partition à $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$

Le passage du mouvement absolu au mouvement relatif peut s'écrire en introduisant l'opérateur de passage Ψ :

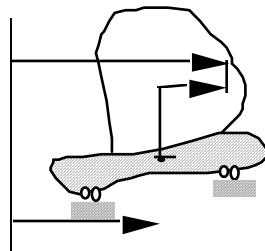
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \mathbf{u} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}\mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Le système [eq. 2.1-1] prend alors la forme générale :

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{s}} \end{pmatrix} + \Psi^T \mathbf{C} \Psi \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{s}} \end{pmatrix} + \Psi^T \mathbf{K} \Psi \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \Psi^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad \text{eq 2.1-2}$$

2.1.1 Mouvement imposé unique : mono appui

Le mouvement d'entraînement correspond alors à un mouvement de corps solide : le vecteur d'entraînement en tout point de la structure peut s'exprimer comme une combinaison linéaire $\varphi_R \mathbf{s}$ des composantes de déplacement imposé au centre de gravité de la fondation, où les φ_R est la matrice des **modes de corps rigide** de la structure réduits aux ddl de structure, ce qui conduit à :



$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_R \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \varphi_R \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Les propriétés des modes de corps rigide Cf. [R4.05.01] conduisent à :

$$\Psi^T \mathbf{K} \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Psi^T \mathbf{C} \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Psi^T \mathbf{M} \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m} \varphi_R + \mathbf{m}_{xs} \\ \varphi_R^T \mathbf{m} + \mathbf{m}_{sx} & \mathbf{m}_R \end{bmatrix}$$

ce qui permet bien de découpler le système [eq 2.1-2]

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = - \mathbf{m} \left(\varphi_R + \mathbf{m}^{-1} \mathbf{m}_{xs} \right) \ddot{\mathbf{s}} \quad \text{eq 2.1.1-1}$$

Dans ce cas la transformation met bien en évidence l'effet inertiel du chargement sismique.

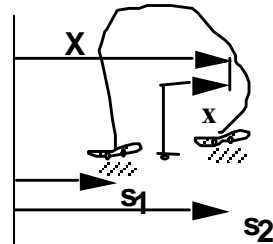
2.1.2 Mouvement imposé multiple : multi appuis

Cette situation correspond à un nombre discret de points de liaison de la structure à des appuis soumis à des déplacements imposés différents. Dans ce cas, la diagonalisation du terme de rigidité est acquise en imposant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_{xs} \\ \mathbf{k}_{sx} & \mathbf{k}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_S \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad \text{d'où } \mathbf{k} \varphi_S + \mathbf{k}_{xs} = \mathbf{0} \quad \text{soit } \varphi_S = -\mathbf{k}^{-1} \mathbf{k}_{xs} \quad \text{éq 2.1.2-1}$$

La matrice φ_S regroupe 6. n_{appuis} modes statiques pour les modèles de structures et 3 fois le nombre d'appuis pour les modèles de milieux continus. Chaque mode statique $\varphi_{S_j} = -\mathbf{k}^{-1} \mathbf{k}_{xs_j}$ est un mode d'attache, correspondant à un déplacement imposé unitaire sur une composante d'appui, les autres composantes étant nulles, et produit par l'opérateur `MODE_STATIQUE` [U4.52.14].

Le changement de repère peut alors s'exprimer par :



$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_S \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \varphi_S \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m} \varphi_S + \mathbf{m}_{xs} \\ \varphi_S^T \mathbf{m} + \mathbf{m}_{sx} & \mathbf{m}_S \end{bmatrix}$$

Concernant les termes d'amortissement, le découplage n'est acquis que si l'amortissement est proportionnel à la rigidité, hypothèse couramment admise, mais n'était pas nécessaire avec les modes rigides.

Ceci permet bien de découpler le système [éq 2.1-2]

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = -\mathbf{m} (\varphi_S + \mathbf{m}^{-1} \mathbf{m}_{xs}) \ddot{\mathbf{s}} \quad \text{éq 2.1.2-2}$$

Cette formulation doit être interprétée comme la décomposition du mouvement de la structure en un mouvement d'entraînement correspondant à une déformée statique instantanée (déplacement différentiel des appuis) et un mouvement relatif correspondant aux effets inertiels autour de cette nouvelle déformée statique.

Cette interprétation est conforme au classement des sollicitations définies par les règles de construction (ASME, RCC-M) :

- les contraintes induites par le mouvement relatif sont, comme pour les sollicitations statiques, des contraintes primaires (effets d'inertie),
- les contraintes induites par les déplacements différentiels des appuis qui sont elles classées en contraintes secondaires.

2.1.3 Résumé

Les équations [éq 2.1.1-1] et [éq 2.1.2-2] conduisent à la forme générale

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{kz} = -\mathbf{m}(\varphi_X + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{m}_{xs})\ddot{\mathbf{s}} = -\mathbf{mO}\ddot{\mathbf{s}} \quad \text{éq 2.1.3-1}$$

Les termes \mathbf{m}_{xs} correspondent aux termes de couplage de la matrice de masse avec les degrés de liberté d'appui : cette fraction de la masse totale est très faible et il est justifié de la négliger. Rappelons que ce terme est effectivement nul pour les modèles de structures dont la matrice de masse est diagonale : modèles masse - ressort, modèles avec éléments de type "lumped mass".

Dans ce cas, on obtient les formules simplifiées :

- mono appui : $\mathbf{O} = \varphi_R$ où φ_R sont les six modes de corps solide
- multi appuis : $\mathbf{O} = \varphi_S$ où φ_S sont les 6 n appuis modes d'attache

Le second membre $-\mathbf{mO}$ est construit par l'opérateur CALC_CHAR_SEISME [U4.63.01].

2.2 Réponse en base modale

2.2.1 Réponse temporelle d'un oscillateur modal

Si la structure étudiée est représentée par son spectre de modes propres réels à basse fréquence φ en base encastree, solution de $(K - M\omega^2)\varphi = 0$ ou de $(k - m\omega^2)\varphi = 0$ on peut introduire une nouvelle transformation $\mathbf{x} = \varphi \mathbf{q}$ et le système d'équations [éq 2.1.3-1] s'écrit, en utilisant la matrice de facteurs de participation modaux \mathbf{P}

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\varphi^T \mathbf{c} \varphi}{\varphi^T \mathbf{m} \varphi} \dot{\mathbf{q}} + \omega^2 \mathbf{q} = -\frac{\varphi^T \mathbf{m} \mathbf{O}}{\varphi^T \mathbf{m} \varphi} \ddot{\mathbf{s}} = -\mathbf{P} \ddot{\mathbf{s}} \quad \text{éq 2.2.1-1}$$

Hypothèse :

Pour des études industrielles relevant de l'analyse sismique par méthode spectrale, on se limite au cas de l'amortissement proportionnel, dit de RAYLEIGH, pour lequel on peut diagonaliser le terme $\frac{\varphi^T \mathbf{c} \varphi}{\varphi^T \mathbf{m} \varphi} = 2\xi\omega$. L'amortissement est alors représenté par un amortissement modal ξ_i , éventuellement différent pour chaque mode propre [R4.05.01].

Chaque mode propre, caractérisé par les paramètres (ω_i, ξ_i) est assimilé à un oscillateur simple dont le comportement est représenté dans le cas général par

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -(\mathbf{P}\ddot{\mathbf{s}})_i \quad \text{éq 2.2.1-2}$$

Rappelons que les $\ddot{\mathbf{s}}$ sont des accélérations d'entraînement.

2.2.2 Facteur de participation modal en mono appui

Lorsque le mouvement d'entraînement est unique, [éq 2.2.1-2] devient

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -p_i \ddot{s} \quad \text{éq 2.2.2-1}$$

avec

$$p_i = \frac{\varphi_i^T \mathbf{m} \mathbf{O}}{\varphi_i^T \mathbf{m} \varphi_i} = \frac{\varphi_i^T \mathbf{m} \varphi_R}{\mu_i} \quad \text{éq 2.2.2-2}$$

où μ_i est la masse modale généralisée, qui dépend de la normalisation du mode propre. Énonçons quelques propriétés des facteurs de participation modale p_i dans le cas des modes rigides de translation, mais extensibles aux modes de rotation.

- Un mode φ_{RX} , que nous noterons δ_X , pour rappeler que les composantes dans la direction X sont unitaires, appartient à l'espace de dimension N degrés de liberté dont les N modes propres constituent une base dans laquelle $\delta_X = \sum_i \alpha_i \varphi_i$.

A partir des propriétés d'orthogonalité des modes propres $\varphi_i^T \mathbf{m} \varphi_i = \mu_i \delta_{ij}$, on identifie les coefficients α_i aux facteurs de participation modale p_{iX} dans la direction X et

$$\delta_X = \sum_i p_{iX} \varphi_i \quad \text{éq 2.2.2-3}$$

- De plus $\delta_X^T \mathbf{m} \delta_X = m_T$ masse totale de la structure ce qui conduit à :

$$\delta_X^T \mathbf{m} \delta_X = \sum_{ij} p_{iX} p_{jX} \varphi_j^T \mathbf{m} \varphi_i = \sum_{ij} p_{iX}^2 \mu_i \text{ et } m_T = \sum_{ij} p_{iX}^2 \mu_i \text{ ou } \sum_{ij} \frac{p_{iX}^2 \mu_i}{m_T} = 1 \quad \text{éq 2.2.2-4}$$

Le paramètre modal p_{iX} dépend de la norme du mode propre et est accessible, pour chaque mode propre dans le concept résultat de type `mode_meca` [U5.01.23] sous le nom `FACT_PARTICI_DX` ; de même $p_{iX}^2 \mu_i$, indépendant de la norme, est accessible sous le nom de `MASS_EFFE_UN_DX`.

2.2.3 Facteur de participation modal en multi appuis

Pour un mouvement imposé multiple, [éq 2.2.1-2] devient :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\sum_j p_{ij} \ddot{s}_j \quad \text{éq 2.2.3-1}$$

avec

$$p_{ij} = \frac{\varphi_i^T \mathbf{m} \mathbf{O}}{\varphi_i^T \mathbf{m} \varphi_i} = \frac{\varphi_i^T \mathbf{m} \varphi_{S_j}}{\mu_i} \quad \text{éq 2.2.3-2}$$

où μ_i est la masse modale généralisée, qui dépend de la normalisation du mode propre et les p_{ij} peuvent être considérés comme des facteurs de participation relatifs au mode i et à une direction j de mouvement imposé d'un appui.

Comme précédemment, on peut établir [bib4] les deux propriétés

$$\varphi_{Sj} = \sum_i p_{ij} \varphi_i \text{ et } \varphi_{Sj}^T \mathbf{m} \varphi_{Sj} = \sum_i p_{ij}^2 \mu_i \quad \text{éq 2.2.3-3}$$

On ne fait, à ce stade, aucune hypothèse de dépendance entre les différents termes p_{ij} . Rappelons que les composantes \ddot{s}_j expriment l'accélération d'entraînement appliquée à une direction d'appui j . Les facteurs de participation p_{ij} ne sont pas construits indépendamment et n'apparaissent que comme variables intermédiaires dans la commande COMB_SISM_MODAL [U4.84.01].

3 Réponse sismique par méthode spectrale

La méthode spectrale est une technique approchée d'évaluation du maximum de la réponse de la structure à partir des maximums de réponse de chaque oscillateur modal lus sur le spectre d'oscillateur de l'excitation.

3.1 Réponse spectrale d'un oscillateur modal en mono appui

La réponse maximale en déplacement relatif d'un oscillateur modal (ω_i, ξ_i) pour une direction X est déterminée en lisant sur un spectre d'oscillateur de pseudo accélération absolue Cf. [§1.4.2] la valeur de la pseudo accélération absolue $a_{iX} = Sro \ddot{x}_X(A, \xi_i, \omega_i)$ et en divisant par ω_i^2 d'où :

$$q_{iX \max} = \frac{Sro \ddot{x}_X(A, \xi_i, \omega_i)}{\omega_i^2} = \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \quad \text{éq 3.1-1}$$

La contribution de cet oscillateur au déplacement relatif de la structure pour la composante x^k dépend du facteur de participation et de la composante φ_i^k dans l'espace physique :

$$x_{iX \max}^k = \varphi_i^k p_{iX} q_{iX \max} = \varphi_i^k p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \quad \text{éq 3.1-2}$$

et la contribution à la pseudo accélération absolue \ddot{x}^k est de même $\ddot{x}_{iX \max}^k = \varphi_i^k p_{iX} a_{iX}$.

3.2 Réponse spectrale d'un oscillateur modal en multi appuis

On procède de la même manière pour déterminer, à partir de la valeur lue \ddot{S}_{jX} sur le spectre d'oscillateur de pseudo accélération absolue associé à \ddot{s}_j , la contribution de l'appui j dans la direction X :

$$q_{iX \max j} = \frac{Sro \ddot{s}_j(A, \xi_i, \omega_i)}{\omega_i^2} = \frac{\ddot{S}_{jX}}{\omega_i^2} \quad \text{éq 3.2-1}$$

L'expression de la contribution de cet oscillateur au déplacement relatif de la structure pour la composante x^k dans l'espace physique et pour un mouvement imposé j devient :

$$x_{iX \max j}^k = \varphi_i^k p_{ijX} q_{iX \max j} = \varphi_i^k p_{ijX} \frac{\ddot{S}_{jX}}{\omega_i^2} \quad \text{éq 3.2-2}$$

3.3 Généralisation à d'autres grandeurs

Remarque :

*La méthode d'analyse spectrale est strictement limitée aux grandeurs dépendant linéairement des déplacements en élasticité linéaire : déformations, contraintes, efforts généralisés, forces nodales, réactions d'appuis.
Notamment elle ne peut s'appliquer à des grandeurs équivalentes de déformation ou de contraintes (VON MISES).*

Pour chaque grandeur R^k , composante d'un champ par éléments il est possible de calculer la composante modale r_i^k associées au mode propre φ_i ce qui conduit à

$$R_{iX \max}^k = r_i^k p_{iX} q_{iX \max} = r_i^k p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \quad \text{éq 3.3-1}$$

ou

$$R_{iX \max j}^k = r_i^k p_{ijX} q_{iX \max j} = r_i^k p_{ijX} \frac{\ddot{S}_{jX}}{\omega_i^2} \quad \text{éq 3.3-2}$$

4 Règles de combinaison des réponses modales

Pour évaluer un majorant de la réponse R de la structure, on doit maintenant combiner les réponses modales $R_{i\max}^k$ définies précédemment. Plusieurs niveaux de combinaison sont nécessaires :

- combinaison des modes propres retenus,
- correction statique par pseudo mode,
- effet des excitations différentes appliquées à des groupes d'appuis,
- combinaison suivant les directions d'excitation sisme.

4.1 Direction du séisme et réponse directionnelle

Différentes considérations conduisent à étudier le comportement sismique séparément suivant chaque direction de l'espace :

- pour l'étude d'un bâtiment sur un sol, l'accélérogramme du mouvement imposé verticalement est différent de celui décrivant le mouvement horizontal, lui même différent suivant deux directions orthogonales de l'espace ;
- pour l'étude d'un équipement, les spectres de plancher diffèrent significativement suivant les trois directions de l'espace, puisqu'ils intègrent les participations de différents modes du bâtiment (flexion de planchers, flexion ou torsion de l'ossature, ..).

Ceci conduit à établir une réponse modale directionnelle R_X à partir de spectres d'oscillateur différents et de facteurs de participation modale établi dans chaque direction X représentant une des directions du repère GLOBAL de définition du maillage (X , Y ou Z) ou une direction particulière définie explicitement par l'utilisateur.

4.2 Choix des modes propres à combiner

Pour représenter correctement les modes de déformation susceptibles d'être excités par le mouvement imposé, il faudrait connaître tous les modes propres de fréquence inférieure à la fréquence de coupure du spectre, au delà de laquelle il n'y a pas d'amplification dynamique significative. Cette condition peut s'avérer difficile à remplir pour les structures complexes ayant un grand nombres de modes propres.

La taille de la base modale nécessaire doit donc être évaluée pour s'assurer qu'aucun mode ayant une contribution importante dans les efforts internes et les contraintes n'a pas été omis dans chaque direction étudiée.

4.2.1 Expression de l'énergie de déformation modale

L'énergie de déformation associée à chaque mode propre $U_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_{i\max}^T \mathbf{k} \mathbf{x}_{i\max}$ peut être exprimée pour une direction particulière

$$U_{iX} = \frac{1}{2} \left(p_i \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \right)^2 \varphi_i^T \mathbf{k} \varphi_i = \frac{1}{2} \left(p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i^2} \right)^2 \omega_i^2 \mu_i = \frac{1}{2} \frac{a_{iX}^2}{\omega_i^2} p_{iX}^2 \mu_i \quad \text{éq 4.2.1-1}$$

Cette expression correspond à une excitation mono appui et peut s'étendre au cas du multi appuis.

Le classement des modes avec des énergies de déformation décroissantes permet de ne pas retenir systématiquement, pour une étude globale de la structure, des modes qui ne produisent pas de déformations significatives. Par contre, pour l'étude de l'effet des sollicitations dans une zone particulière de la structure, il sera nécessaire d'utiliser les modes "locaux" qui peuvent être détectés par une analyse de la répartition de l'énergie de déformation sur des groupes de maille.

Notons que l'on ne dispose pas d'une estimation de l'énergie de déformation totale pour quantifier l'erreur commise en ignorant certains modes.

4.2.2 Expression de l'énergie cinétique modale

L'énergie cinétique associée à chaque mode propre s'écrit $V_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{i \max}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}}_{i \max}$ qui donne

$$V_{iX} = \frac{1}{2} \left(p_{iX} \frac{a_{iX}}{\omega_i} \right)^2 \varphi_i^T \mathbf{m} \varphi_i = \frac{1}{2} \frac{a_{iX}^2}{\omega_i^2} p_{iX}^2 \mu_i \quad \text{éq 4.2.2-1}$$

L'expression [éq 4.2.2-1] fait intervenir la masse modale effective $p_{iX}^2 \mu_i$ définie au [§2.2] ce qui permet d'énoncer le critère de cumul des masses modales effectives unitaires [éq 2.2.2-4]

Critère de cumul des masses modales effectives

La qualité d'une base modale, du point de vue de la représentation des propriétés inertielles de la structure, est évaluée en cumulant, pour cette direction, les masses modales effectives unitaires des modes disponibles. Un seuil d'admissibilité de 95% de la masse totale est couramment admis. Le même critère peut s'appliquer partiellement dans le cas d'une excitation multi appuis avec n modes en comparant $\varphi_{Sj}^T \mathbf{m} \varphi_{Sj}$ et $\sum_i^n p_{ij}^2 \mu_i$.

Estimation de l'erreur commise avec une base modale incomplète

Le critère de cumul des masses modales effectives ne peut pas toujours être satisfait. En effet on se limite en général à une base modale de n modes propres avec $n \text{ modes} \ll N \text{ ddl}$. Pour des fondations rigides, le spectre des fréquences propres nécessaires dépasse couramment la fréquence de coupure du spectre d'oscillateur.

A partir de l'expression [éq 4.2.2-1] on peut écrire l'énergie cinétique totale sous la forme

$$V_X = \sum_1^n V_{iX} + \sum_1^N V_{iX}$$

qui permet d'exprimer l'erreur absolue à partir de [éq 3.1-1]

$$2\Delta V_X = \sum_{n+1}^N V_{iX} = \sum_{n+1}^N \frac{a_{iX}^2}{\omega_i^2} p_{iX}^2 \mu_i \leq \frac{a_{(n+1)X}^2}{\omega_i^2} \sum_{n+1}^N p_{iX}^2 \mu_i$$

en notant $a_{(n+1)X} = Sro \ddot{x}_X(A, \xi_{\min}, \omega_{n+1})$ la valeur lue sur le spectre de pseudo accélération absolue pour $\omega_n \geq \omega_{n+1}$ et l'amortissement modal le plus faible ξ_{\min} susceptible de donner l'amplitude majorante. Si la fréquence maximale de la base f_n dépasse la fréquence de coupure alors $a_{(n+1)X} = a_{nX} = |A(t)_{\max}|$. Ceci donne un majorant de l'erreur absolue

$$\Delta V_X \leq \frac{1}{2} \frac{a_{(n+1)X}^2}{\omega_i^2} \sum_{n+1}^N p_{iX}^2 \mu_i = \frac{1}{2} \frac{a_{(n+1)X}^2}{\omega_i^2} \left(m_T - \sum_1^n p_{iX}^2 \mu_i \right) \quad \text{éq 4.2.2-2}$$

4.2.3 Conclusion

Les grandeurs permettant de choisir les modes nécessaires à chaque analyse sont disponibles dans le *Code_Aster* (opérateur `POST_ELEM` avec les options `MASS_INER`, `ENER_POT` et `ENER_CIN` et paramètres modaux `FACT_PARTICI_DX` et `MASS_EFFE_UN_DX` dans le concept résultat de type `mode_meca` [U5.01.23]).

Aucun critère d'admissibilité automatique n'est programmé actuellement et les grandeurs

$\varphi_{Sj}^T \mathbf{m} \varphi_{Sj}$ et $\sum_1^n p_{ij}^2 \mu_i$, nécessaires à la vérification du critère pour une excitation multi appuis, ne sont pas imprimées.

4.3 Correction statique par pseudo-mode

4.3.1 Mono appui

L'évaluation d'un majorant de la réponse à une excitation sismique nécessite, comme le suggère l'analyse précédente, une correction par un terme représentant la contribution statique des modes propres négligés.

Si l'on soumet la structure à une accélération uniforme quasi-statique dans la direction X , la réponse φ_{aX} est solution de $\mathbf{k} \varphi_{aX} = \mathbf{m} \delta_X \mathbf{I}$, sans amplification dynamique. Le champ de déplacement φ_{aX} des nœuds de la structure soumise à une accélération uniforme dans chaque direction est produit par l'opérateur `MODE_STATIQUE` [U4.52.14] avec le mot clé `PSEUDO_MODE`.

En décomposant cette déformée sur la base des modes propres on obtient cf. [§2.2.2]

$$\mathbf{k} \varphi_{aX} = \mathbf{m} \sum_1^N p_{iX} \varphi_i \text{ d'où } \varphi_{aX} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{m} \sum_1^N p_{iX} \varphi_i = \sum_1^N \frac{p_{iX}}{\omega_i^2} \varphi_i$$

Ceci permet d'introduire un pseudo-mode φ_{cX} , pour chaque direction, en soustrayant au mode quasi statique φ_{aX} les contributions statiques des modes utilisés φ_i

$$\varphi_{cX} = \varphi_{aX} - \sum_1^n \frac{p_{iX}}{\omega_i^2} \varphi_i \quad \text{éq 4.3.1-1}$$

L'expression [éq 4.3.1-1] est homologue du terme $\left(m_T - \sum_1^n p_{iX}^2 \mu_i \right)$ de l'[éq 4.2.2-2] et le pseudo mode permet de compléter la base incomplète de modes propres pour introduire une correction des effets statiques des modes négligés. La contribution du pseudo mode est la valeur lue sur le spectre de pseudo accélération absolue $a_{(n+1)X} = S_{ro} \ddot{x}_X(A, \xi_{\min}, \omega_{n+1})$, pour $\omega_n \geq \omega_{n+1}$ et l'amortissement modal le plus faible ξ_{\min} .

La correction à apporter aux déplacements relatifs et aux grandeurs qui s'en déduisent (efforts généralisés, contraintes, réactions d'appuis) en excitation mono appui est alors $x_{cX}^k = \varphi_{cX}^k a_{(n+1)X}$ conformément aux conditions d'estimation de l'erreur Cf. [§ 4.2.2].

Pour l'évaluation de la correction d'accélération absolue on obtient :

$$\ddot{x}_{cX}^k = \left(\delta_X - \sum_1^n p_{iX} \varphi_i \right)^k a_{(n+1)X}$$

4.3.2 Multi appuis

En excitation multi appuis, la formulation du pseudo mode et de sa contribution reprennent le principe précédent.

Le champ de déplacement $\varphi_{ajX} = k^{-1} m \varphi_{sX}$ des nœuds de la structure soumise à une accélération unitaire de l'appui j dans la direction X est produit par l'opérateur `MODE_STATIQUE` [U4.52.14] avec le mot clé `PSEUDO_MODE`.

La correction à apporter aux déplacements relatifs et aux grandeurs qui s'en déduisent s'écrit alors pour l'appui j dans la direction X :

$$x_{cjX} = \varphi_{cjX} a_{(n+1)jX} \text{ avec } \varphi_{cjX} = \varphi_{ajX} - \sum_1^n \frac{P_{ijX} \varphi_i}{\omega_i^2}$$

Pour l'accélération absolue, la correction s'écrit :

$$\ddot{x}_{cjX} = \left(\varphi_{sX} - \sum_1^n \varphi_i P_{ijX} \right) a_{(n+1)jX}$$

4.4 Généralités sur les règles de combinaison

Les règles de combinaison ou de cumul des différentes composantes, modales ou directionnelles, sont multiples et plus ou moins complexes à mettre en oeuvre.

On présente les méthodes "naturelles" du point de vue de leur aptitude à fournir un majorant réaliste des sollicitations induites dans une structure représentée par une base de modes propres réels issus d'un modèle en élasticité linéaire, majorant estimé sans analyse transitoire pour une grandeur de composante G^k , que l'on nommera G_{\max}^k . Pour la suite le suffixe *max* désigne l'estimation de la valeur maximale atteinte au cours de l'excitation sismique, en ignorant l'instant où elle a été atteinte) et l'indice *r* s'applique à des modes propres, des pseudo modes, des directions d'appuis, ...

Remarque :

Quelle que soit la méthode de combinaison utilisée, la valeur d'une composante obtenue par combinaison ne peut servir de donnée pour calculer une nouvelle grandeur : par exemple le calcul d'un majorant d'un déplacement différentiel entre deux points doit être calculé mode par mode, puis combiné.

4.4.1 Combinaison arithmétique

$$G_{\max}^k = \sum_r G_{r \max}^k$$

Elle n'est pas utilisable puisque la méthode spectrale fait abstraction des instants où les valeurs maximales sont atteintes dans deux directions ou pour deux modes différents. Aucune relation de phase, et donc de signe, n'existe entre les contributions à combiner. Elles n'est donc disponible que dans le cas des déplacements différentiels en multi appui.

4.4.2 Combinaison en valeur absolue

$$G_{\max}^k = \sum_r |G_{r \max}^k|$$

De façon évidente, elle peut fournir une borne supérieure, puisqu'elle suppose que toutes les contributions atteignent leur maximum au même instant avec le même signe. Trop pénalisante, elle est disponible, mais inutilisable industriellement.

4.4.3 Combinaison quadratique simple

Cette méthode est aussi connue sous la dénomination SRSS (Square Root of Sum of Squares).

$$G_{\max}^k = \sqrt{\sum_r (G_{r \max}^k)^2}$$

Hypothèse :

L'hypothèse qui justifie cette méthode de combinaison peut s'énoncer :

le maximum probable de l'énergie stockée dans la structure est la somme des maximums probables de l'énergie stockée sur chacun des modes et sur chacune des composantes directionnelles du séisme, c'est-à-dire que vis à vis de l'énergie, les modes propres et les composantes du séisme sont découplés. Elles est analogue à la règle d'addition des variables aléatoires gaussiennes et à moyenne nulle.

La validité de cette hypothèse, qui sera discutée pour chaque cas particulier d'utilisation de cette méthode de combinaison, n'est pas établie et diverses propositions ont été présentées pour obtenir une meilleure approximation dans les cas où elle est mise en défaut cf. [§3.4.1.2] suivants.

Par ailleurs, on pourra se reporter à [bib3] pour une critique de cette approche, notamment de son aptitude à estimer un maximum probable des déformations et des contraintes, mais l'approche alternative qu'elle évoque n'a fait l'objet d'aucun développement dans le *Code_Aster*.

4.5 Etablissement de la réponse directionnelle en mono appui

La réponse directionnelle, définie précédemment, est obtenue par combinaison quadratique simple de deux termes que nous allons discuter :

$$R_X = \sqrt{R_m^2 + R_c^2}$$

R_m réponse combinée des oscillateurs modaux

R_c contribution de la correction statique des modes négligés (pseudo mode)

Les hypothèses justifiant la méthode de combinaison quadratique simple, à ce niveau, ne semblent pas devoir être remises en cause [bib1]. Pour simplifier les notations on note R_m au lieu de R_{mX} , ...

4.5.1 Réponse combinée des oscillateurs modaux

La réponse de la structure R_m , dans une direction de séisme, est obtenue par une des combinaisons possibles des contributions de chacun des modes propres pris en considération pour cette direction. Le nombre de méthodes possibles prouve simplement la difficulté de dégager une justification suffisante pour garantir une estimation conservatrice et réaliste. Si la combinaison quadratique simple (SRSS ou CQS) est évoquée par tous, on retiendra de [bib1] qu'elle est souvent mise en défaut et on lui préférera la combinaison quadratique complète (CQC). Les autres méthodes sont disponibles pour des comparaisons éventuelles.

4.5.1.1 Somme des valeurs absolues

Cette combinaison correspond à une hypothèse de dépendance complète des oscillateurs associés à chaque mode propre et conduit à une surévaluation systématique de la réponse :

$$R_m = \sum_i^n |R_i|$$

4.5.1.2 Combinaison quadratique simple (CQS)

En considérant que la contribution de chaque oscillateur modal est une variable aléatoire indépendante, une estimation de la réponse maximale, pour la composante de déplacement x_{\max}^k , peut être obtenue par combinaison quadratique simple des contributions de chaque mode d'où, pour une excitation mono appui :

$$x_{\max}^k = \sqrt{\sum_i^n \left(x_{i\max}^k \right)^2} = \sqrt{\sum_i^n \left(\varphi_i^k p_i q_{i\max} \right)^2} \quad \text{éq 4.5.1.2-1}$$

D'une manière générale, pour toute grandeur R_i associée à un oscillateur modal (ω_i, ξ_i) .

$$R_m = \sqrt{\sum_i^n R_i^2}$$

Elle constitue une bonne approximation de la réalité quand le spectre d'oscillateur définissant le séisme est à large bande de fréquences et où les modes propres de la structure sont bien séparés les uns des autres et se situent à l'intérieur ou au voisinage de cette bande. Elle est notamment mise en défaut dans le cas où des modes propres sont à des fréquences voisines ou pour des modes éloignés du pic d'excitation. [bib2]. Les autres méthodes de combinaison des réponses modales tentent de corriger ce point.

4.5.1.3 Combinaison quadratique complète (CQC)

La combinaison quadratique complète (établie par DER KIUREGHIAN [bib5]) apporte une correction à la règle précédente en introduisant des coefficients de corrélation dépendant des amortissements et des distances entre modes propres voisins :

$$R_m = \sqrt{\sum_{i_1} \sum_{i_2} \rho_{i_1 i_2} R_{i_1} R_{i_2}}$$

avec le coefficient de corrélation :

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} \omega_i \omega_j (\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j) \omega_i \omega_j}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4\xi_i \xi_j \omega_i \omega_j (\omega_i^2 + \omega_j^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) \omega_i^2 \omega_j^2}$$

ou en introduisant le rapport de pulsation ou de fréquences entre deux modes $\eta = \omega_j / \omega_i$

$$\rho_{ij} = \frac{8\eta \sqrt{\xi_i \xi_j} \eta (\xi_i + \xi_j \eta)}{(1 - \eta^2)^2 + 4\eta \xi_i \xi_j (1 + \eta^2) + 4\eta^2 (\xi_i^2 + \xi_j^2)}$$

et pour ξ constant

$$\rho_{ij} = \frac{8 \xi^2 \eta (1 + \eta) \sqrt{\eta}}{(1 - \eta^2)^2 + 4 \xi^2 \eta (1 + \eta^2) + 8 \xi^2 \eta^2}$$

4.5.1.4 Combinaison de ROSENBLUETH

Cette règle (proposée par E. ROSENBLUETH et J. ELORDY [bib6]) introduit une corrélation entre modes, différente de celle de la méthode CQC. Les réponses des oscillateurs sont combinées par double somme (Double Sum Combination) :

$$R_m = \sqrt{\sum_{i_1} \sum_{i_2} \rho_{i_1 i_2} R_{i_1} R_{i_2}}$$

Elle nécessite une donnée supplémentaire, la durée s de la phase "forte" du séisme. Le coefficient de corrélation est alors :

$$\rho_{ij} = \left(1 + \left(\frac{\omega'_i - \omega'_j}{\xi'_i \omega_i + \xi'_j \omega_j} \right)^2 \right)^{-1} \quad \text{où } \omega'_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i'^2} \quad \text{et } \xi'_i = \xi_i + \frac{2}{s \omega_i}$$

4.5.1.5 Combinaison avec règle des 10%

Les modes voisins (dont les fréquences diffèrent de moins de 10%) sont d'abord combinés par sommation des valeurs absolues. Les valeurs résultant de cette première combinaison sont ensuite combinées quadratiquement (combinaison quadratique simple). Cette méthode a été proposée par le règlement américain U.S. Nuclear Regulatory Commission (Regulatory Guide 1.92 - Février 1976) pour atténuer le conservatisme de la méthode de somme des valeurs absolues. Elle reste en défaut pour des structures avec un spectre de fréquences propres dense et ne devrait plus être utilisée.

4.5.2 Contribution de la correction statique des modes négligés

La contribution du pseudo mode Cf. [§4.3.1] peut être combinée quadratiquement car l'indépendance avec les contributions des modes de vibration n'est pas contestée.

4.6 Etablissement de la réponse directionnelle en multi appuis

4.6.1 Calcul de la réponse globale

Dans ce cas, on retient comme ordre des combinaisons une démarche analogue à celle retenue pour l'excitation mono appui sans que cela soit complètement justifié.

On établit les réponses directionnelles pour chaque mouvement \ddot{s}_j appliqué : on notera R_{jX} le résultat de cette combinaison. Pour obtenir cette réponse directionnelle il faudra donc une nouvelle étape de combinaison en tenant compte de la dépendance ou de l'indépendance des \ddot{s}_j .

Le schéma de traitement devient :

- pour chaque mouvement imposé \ddot{s}_j calcul des réponses directionnelles

$$R_{jX} = \sqrt{R_{mj}^2 + R_{cj}^2 + R_{ej}^2}$$

R_{mj} réponse combinée des oscillateurs modaux

R_{cj} contribution de la correction statique des modes négligés (pseudo mode)

R_{ej} contribution du mouvement d'entraînement de l'appui j

- combinaison des réponses R_{jX}

4.6.2 Calcul séparé des composantes primaire et secondaire de la réponse

Chaque composante fait l'objet d'un traitement séparé similaire. Cette démarche est adaptée aux post traitement RCC-M en vigueur pour l'analyse sismique des tuyauteries [§ 4.9] :

composante primaire R_{ix} (réponse inertielle) :

- pour chaque mouvement imposé \ddot{s}_j calcul des réponses directionnelles

$$R_{IjX} = \sqrt{R_{mj}^2 + R_{cj}^2}$$

R_{mj} réponse combinée des oscillateurs modaux

R_{cj} contribution de la correction statique des modes négligés (pseudo mode)

- combinaison des réponses R_{IjX}

composante secondaire R_{II} (réponse quasi statique) :

- combinaison des réponses R_{ej}

4.6.3 Réponse combinée des oscillateurs modaux

La réponse de la structure R_{mj} , dans une direction de séisme, est obtenue par une des combinaisons possibles des contributions de chacun des modes propres pris en considération pour cette direction. Le critère de choix de la méthode de combinaison des contributions des modes est le même que pour une excitation mono appui et on utilisera préférentiellement la méthode CQC.

4.6.4 Contribution du pseudo mode

Le terme correctif par pseudo mode Cf. [§4.3.2] peut être combiné quadratiquement.

4.6.5 Contribution des mouvements d'entraînement

Le mouvement d'entraînement de la structure n'étant pas uniforme, on peut rajouter un terme au calcul de la réponse directionnelle. Ceci n'est pas nécessaire si l'on choisit de considérer cette contribution statique comme un cas de charge spécifique induisant des contraintes secondaires. Ce terme est défini à partir du déplacement relatif maximal qui ne peut être connu à partir des seuls spectres de pseudo accélération absolue des appuis.

$$R_{ej} = \varphi_{Sj} \delta_{j\max}$$

φ_{Sj} mode statique pour l'appui j

$\delta_{j\max}$ déplacement relatif maximal de l'appui j par rapport à un appui de référence (pour lequel $\delta_{j\max} = 0$)

4.6.6 Combinaison des réponses directionnelles d'appuis

Cette étape est obligatoire, mais le choix de la méthode de combinaison des réponses directionnelles reste très ouvert. En effet l'hypothèse d'indépendance des \ddot{s}_j dépend fortement des modes propres de la structure support de l'équipement étudié. Une analyse du système étudié est nécessaire pour regrouper les appuis par groupes : par exemples pour une tuyauterie reliant deux bâtiments, le groupe des appuis du bâtiment 1, celui du bâtiment 2 et enfin celui des appuis intermédiaires.

Pour chaque groupe on pourra choisir une des trois méthodes :

Combinaison quadratique : $R_X = \sqrt{\sum R_{jX}^2}$

Combinaison linéaire : $R_X = \sqrt{\sum R_{jX}}$

Combinaison en valeur absolue : $R_X = \sqrt{\sum |R_{jX}|}$

La règle de combinaison peut être la même pour tous les appuis ou différenciée suivant les appuis ou groupes d'appuis définis par une occurrence du mot clé facteur COMB_MULT_APPUI. Dans ce cas la réponse totale est obtenue par :

$$R_X = \sqrt{\sum_q R_{qX}^2 + \left(\sum_l R_l\right)^2 + \left(\sum_a |R_a|\right)^2}$$

où q appuis combinés quadratiquement, l appuis combinés linéairement, a appuis combinés en valeur absolue.

4.7 Combinaison des réponses directionnelles

Deux règles de combinaison des réponses directionnelles sont disponibles.

4.7.1 Combinaison quadratique

Cette combinaison correspond à l'hypothèse d'indépendance stricte des réponses dans chaque direction cf. [§ 3.3.3]. Rappelons que cette règle de combinaison n'a aucune signification géométrique, bien que les trois directions d'analyse soient orthogonales.

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}$$

Les hypothèses justifiant la méthode de combinaison quadratique simple, à ce niveau, ne semblent pas devoir être remises en cause [bib3], mais cette méthode n'est pas la plus utilisée.

4.7.2 Combinaison de NEWMARK

Cette règle de combinaison empirique est la plus couramment utilisée et conduit en général à des estimations légèrement plus fortes que la précédente. Elle suppose que lorsque l'une des réponses directionnelles est maximale, les autres sont au plus égales aux 4/10 de leurs contributions maximales respectives. Pour chacune des directions $i (X, Y, Z)$, on calcule les 8 valeurs :

$$R_i = \pm R_X \pm 0,4 R_Y \pm 0,4 R_Z$$

Ce qui conduit, par permutation circulaire, à 24 valeurs et $R = \text{Max} (R_i)$

4.8 Avertissement sur les combinaisons

Plusieurs remarques s'imposent pour mettre en garde l'utilisateur sur la façon d'utiliser les méthodes de combinaison et les grandeurs combinées dans une note d'étude.

Remarque 1 :

Si l'on souhaite utiliser des combinaisons arithmétiques (direction) et des combinaisons quadratiques (modes) les cumuls quadratiques doivent toujours s'effectuer en dernier.

Remarque 2 :

Toute combinaison quadratique ne s'applique qu'aux grandeurs pour lesquelles en valeurs instantanées le cumul a le sens d'une somme : combinaison des composantes de déplacement, ou effort généralisé ou de contrainte de chaque mode propre.

La combinaison quadratique modale ou directionnelle ne peut donc s'appliquer à des intensités de contrainte (contraintes principales, de Von Mises, de Tresca).

Remarque 3 :

Les résultats d'une combinaison, quel que soit la règle de cumul, ne doit pas servir de données pour calculer d'autres grandeurs : par exemple un déplacement différentiel entre deux points (ou une déformation) ne peut être calculé qu'à partir des déplacements différentiels modaux que l'on combine ensuite.

A fortiori les efforts généralisés et les contraintes ne peuvent être calculés que mode par mode avant toute combinaison et non à partir de forces d'inerties déduites des champs d'accélération obtenus par combinaison des accélérations modales.

4.9 Pratiques réglementaires

4.9.1 Partition des composantes primaires et secondaires de la réponse

Les différents supports d'une ligne de tuyauterie peuvent être animés de mouvements différents. Un même tronçon de tuyauterie peut se répartir sur des bâtiments différents, des niveaux ou des équipements différents. Il subit donc une excitation multiple. Ceci se traduit par deux types de chargement [§ 2.1.2] :

- une excitation dont le contenu fréquentiel varie d'un support à l'autre et qui constitue un chargement primaire selon la classification RCC-M,
- des Déplacements Différentiels Sismiques (DDS) induisant un état de contrainte par déplacements imposés aux appuis et classé comme secondaire.

Les moments généralisés résultants de ces 2 chargements interviennent séparément dans les inéquations de dimensionnement RCC-M et à plusieurs niveaux. Ainsi, pour les tuyauteries de niveaux 2 et 3, les DDS non pris en compte avec le chargement sismique inertiel dans l'inéquation 10, sont cumulés avec les cas de déplacements d'ancrage d'origine thermique dans l'inéquation 7.

En vue d'un post traitement RCC-M approfondie, Il est donc nécessaire de disposer des composantes primaire et secondaire de la réponse sismique.

D'une manière plus générale, la méthode de combinaison des réponses d'appuis peut différer suivant que l'on traite le cas des composantes inertielles ou différentielles. De plus le nombre d'appui concerné par ces deux sommations peut ne pas être égal. On est souvent amené à imposer des mouvements différentiels d'ensemble même pour des appuis associés à des spectres utilisateurs différents. D'autre part, des DDS formulés en rotation sont parfois à considérer. Ils ne peuvent être associés à un chargement inertiel (limité aux translations).

Code_Aster propose donc deux traitements :

- Détermination de la réponse globale :
Les contributions inertielle et statique d'entraînement sont cumulées lors du calcul des réponses directionnelles d'appui [§4.6].
- Partition des composantes primaires et secondaires de la réponse globale :
Les deux contributions précédentes ne sont plus cumulées lors du calcul des réponses directionnelles et font l'objet de 2 traitements indépendants :
 - La composante inertielle s'obtient en supprimant le terme d'entraînement R_{ej} dans le calcul de la réponse globale [§ 4.6].
 - La composante statique est déterminée en combinant les termes d'entraînement définis sous le mot clef `DEPL_MULT_APPUI`. Les méthodes de combinaison de ces cas de charge DDS sont renseignées dans le mot clé `COMB_DEPL_APPUI`.

4.9.2 Méthode du spectre enveloppe

Même si les tuyauteries sont soumises à une excitation sismique multiple, la pratique courante est de se ramener au calcul d'une structure mono-supportée tout en conservant les cas de charge DDS. Cette démarche simplifiée implique de définir un spectre unique par direction pour tous les supports de la tuyauterie. Pour chaque direction, on adopte alors un spectre « enveloppe » des différents spectres aux supports. Les spectres retenus pour les directions horizontales X et Y sont identiques. Dans la quasi totalité des cas, cette méthode est génératrice de « marge de dimensionnement ».

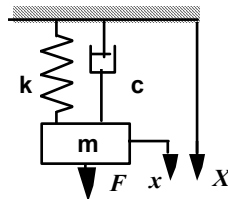
5 Bibliographie

- [1] "Génie Parasismique" Ouvrage collectif - Presses de l'E.N.P.C. (1985)
- [2] "État de l'art en matière de calcul dynamique des structures" Jacques BETBEDER-MATIBET in Génie Parasismique (1985)
- [3] "Le problème de la superposition des modes propres en vibration. Utilisation des modes propres de déformation des éléments." Vincent GUILLOT in Génie Parasismique (1985)
- [4] "Calcul des structures soumises à des excitations multiples" Jean RIGAUDEAU - Pierre SOLLOGOUB in Génie Parasismique (1985)
- [5] "A response spectrum method for random vibrations" DER KIUREGHIAN in Report UCB/EERC - 80/15 Berkeley (1980)
- [6] "Response of linear systems to certain transient disturbances" ROSENBLUETH, ELORDY in Proceedings, Fourth World conference on earthquake engineering-Santiago of Chile (1969)
- [7] "Short communication : a remplacement for the SRSS method in seismic analysis" DER KIUREGHIAN, WILSON, BAYO in "Earthquake engineering and structural dynamics", vol 9 (1980)
- [8] Analyse sismique transitoire [R4.05.01] - J.R. LEVESQUE, Françoise WAECKEL
- [9] Opérateur COMB_SISM_MODAL [U4.84.01] indice E1
- [10] Opérateur CALC_FONCTION [U4.32.04] indice F1

Annexe 1 Réponse transitoire d'un oscillateur simple amorti

A1.1 Vibration forcée d'un système à un d.d.l. en translation

Pour un oscillateur simple de rigidité k , de masse m et d'amortissement visqueux c , l'équation du mouvement est de la forme :



$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = 0$$

pour laquelle les notations traditionnelles sont :

la pulsation propre du système non amorti :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

l'amortissement critique :

$$c_{critique} = 2m\omega_0$$

l'amortissement réduit :

(exprimé en pourcentage de l'amortissement critique)

$$\xi = \frac{c}{c_{critique}} = \frac{c}{2m\omega_0}$$

la pulsation propre du système amorti :

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

la déflexion statique pour une force F_0 :

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

la fréquence réduite :

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

équation réduite du mouvement :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

La réponse **globale** à une excitation harmonique de la forme $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ est la somme :

- d'une réponse libre $X_l(t)$ solution générale oscillatoire amortie où X_{l0} et φ_0 sont déterminées par les conditions initiales

$$X_l(t) = X_{l0} e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega'_0 t + \varphi_0)$$

- d'une réponse forcée $X_f(t)$ solution particulière permanente $X_f(t) = X_{f0} \cos(\omega t - \varphi)$

$$X_{f0} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

éq A1.1-1

qui s'écrit sous forme réduite :

$$\frac{X_{f0}}{\delta_{st}} = \frac{k X_{f0}}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

éq A1.1-2

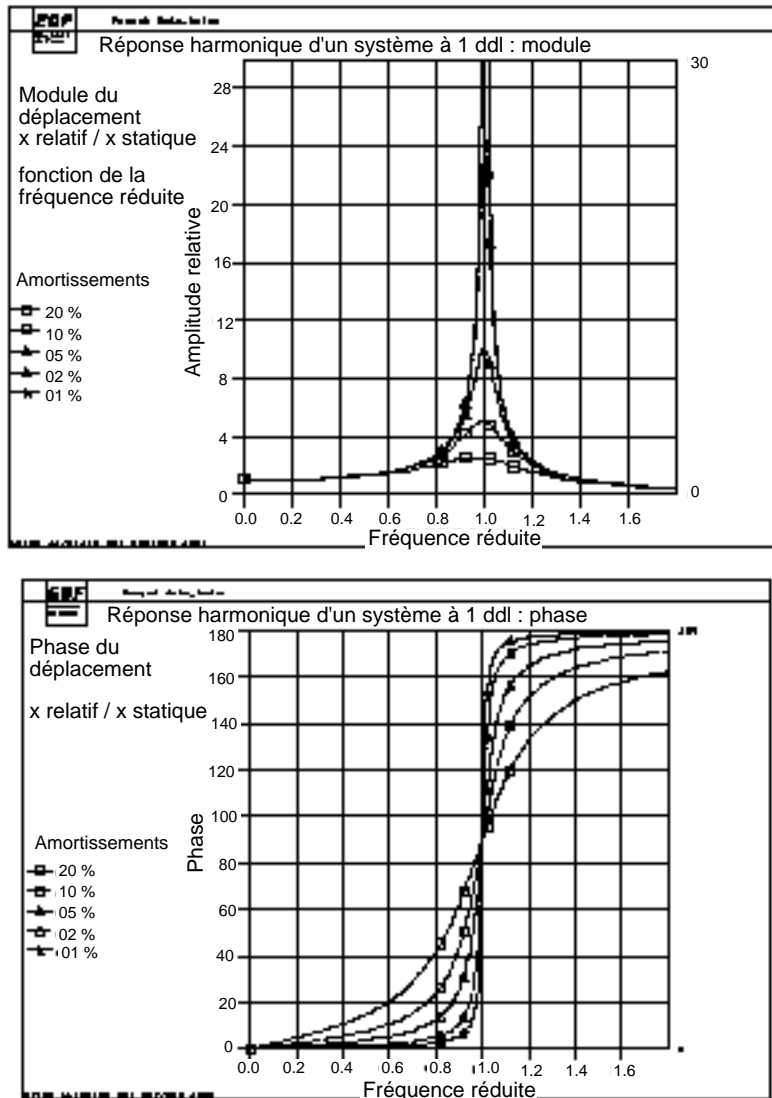


Figure A1.1-a : Réponse d'un oscillateur en force imposée (module et phase)

La réponse à une excitation harmonique de la forme $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$ s'écrit avec une réponse forcée solution particulière permanente $X_f(t) = X_{f0} e^{(j\omega t - \varphi)}$

$$X_{f0} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad \text{éq A1.1-3}$$

qui s'écrit sous forme réduite :

$$\frac{k X_{f0}}{F_0} = \frac{1}{1 - \eta^2 + j 2\xi\eta} \equiv H(j\omega) \quad \varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2}\right) \quad \text{éq A1.1-4}$$

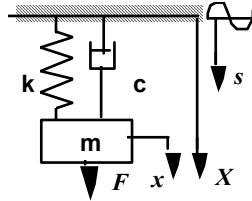
où $H(j\omega)$ est la réponse harmonique complexe d'un oscillateur simple

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}$$

Annexe 2 Mouvement imposé d'un système à un d.d.l. en translation

A2.1 Mouvement absolu d'un système à un d.d.l.

Pour un oscillateur simple de rigidité k , de masse m et d'amortissement visqueux c , l'équation du mouvement **absolu** est de la forme :



$$m\ddot{X} + c(\dot{X} - \dot{s}) + k(X - s) = 0$$

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = ks + c\dot{s}$$

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 s + 2\xi\omega_0\dot{s}$$

La réponse **forcée** à un mouvement imposé harmonique de la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$ est de la forme

$X_m(t) = X_{m0} \cos(\omega t - \varphi_1 - \varphi_2)$ somme de deux termes de réponse, solutions particulières permanentes :

- terme induit par l'excitation en déplacement $X_{d0} \cos(\omega t - \varphi_d)$

$$X_{d0} = \frac{k s_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \varphi_d = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

- terme induit par l'excitation en vitesse $X_{v0} \cos(\omega t - \varphi_v)$

$$X_{v0} = \frac{\omega c s_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \varphi_v = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

ce qui conduit à une réponse forcée totale

$$X_m(t) = X_m \cos(\omega t - \varphi_1 - \varphi_2) \equiv s_0 \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]}} \cos(\omega t - \varphi_1 - \varphi_2)$$

d'où la forme réduite de l'amplitude absolue :

$$\frac{X_m}{s_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\eta)^2}{[(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2]}} \quad \varphi_1 = \arctg\left(\frac{2\xi\eta}{1 - \eta^2}\right) \quad \varphi_2 = \arctg\left(\frac{1}{2\xi\eta}\right)$$

Si le mouvement imposé à la base est exprimé sous forme complexe $s(t) = \text{Re}(s_0 e^{j\omega t})$, l'amplitude relative ou transmissibilité peut s'écrire à partir de la réponse harmonique complexe d'un oscillateur simple $H(j\omega)$

$$\frac{X_m}{s_0} = \sqrt{1 + (2\xi\eta)^2} |H(j\omega)| \quad \text{éq A2.1-1}$$

A2.2 Mouvement relatif d'un système à un d.d.l.

Le problème de la réponse à un mouvement imposé peut être traité en déplacement relatif de la masse par rapport à la base en posant $x = X - s$.

L'équation du mouvement **relatif** pour un mouvement imposé harmonique de la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$ est alors de la forme $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{s}$ ou sous forme réduite :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{s} = \omega^2 s_0 \cos(\omega t) \quad \text{éq A2.2-1}$$

La réponse **forcée** relative est alors, pour une solution permanente $x_{m0} \cos(\omega t - \varphi)$,

$$x_{m0} = \frac{m \omega^2 s_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad \text{éq A2.2-2}$$

qui s'écrit sous forme réduite :

$$\frac{x_{m0}}{s_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \quad \text{éq A2.2-3}$$

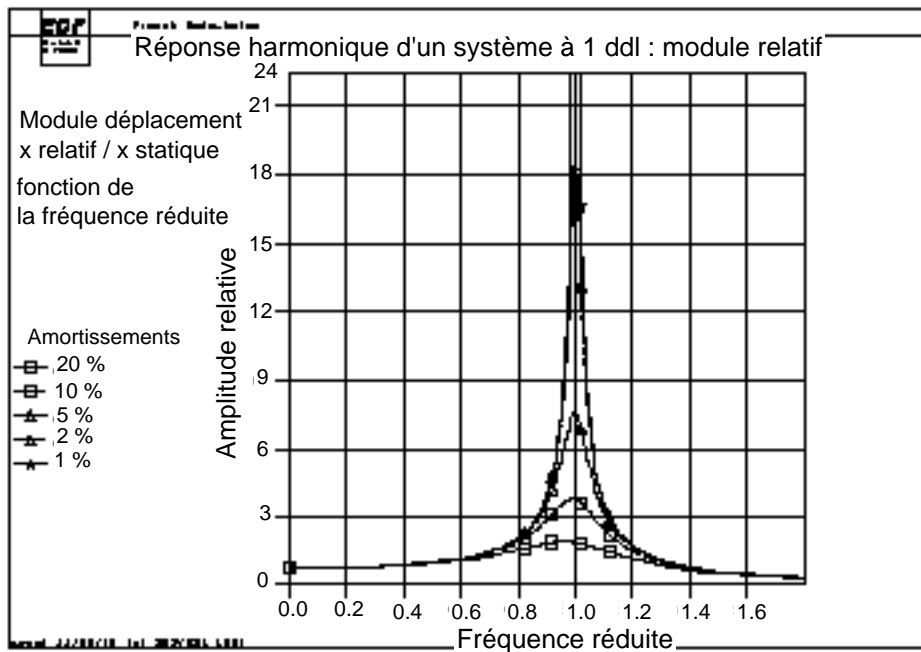


Figure A2.2-a : Réponse d'un oscillateur en mouvement imposé (module du déplacement relatif)

Annexe 3 Mouvement imposé non périodique d'un système à un d.d.l.

Le problème traité précédemment se limitait à un mouvement imposé périodique. Pour une excitation non périodique, d'amplitude variable avec le temps, s'exerçant pendant une durée finie.

A3.1 Réponse impulsionnelle

La forme la plus simple est la force impulsionnelle unitaire, qui appliquée à une masse au repos avant l'application de l'impulsion ($x = \dot{x} = 0$ pour $t < 0$ ou $t = 0^-$) peut s'écrire

$$\tilde{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} \tilde{F} dt = F \cdot dt = 1 = m \dot{X}(t=0) - m \dot{X}(t=0^-) = m \dot{X}_0$$

Les conditions initiales sont alors notées $X(t=0) = X_0 = 0$ et $\dot{X}(t=0) = \dot{X}_0 = \frac{1}{m}$

L'équation générale de la réponse en vibration libre d'un système à un d.d.l.

$$X_l(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(X_0 \cos \omega'_0 t + \frac{\dot{X}_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega'_0} \sin \omega'_0 t \right)$$

devient alors la réponse impulsionnelle $g(t)$ d'un système à un d.d.l.

$$X_l(t) = g(t) = \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{m\omega'_0} \sin \omega'_0 t \quad \text{éq A3.1-1}$$

Pour une impulsion non unitaire $\tilde{F} = F \cdot \Delta t$ la vitesse initiale est $\dot{X}_0 = \frac{F}{m}$ et la réponse devient

$$X_l(t) = \frac{\tilde{F} e^{-\xi\omega_0 t}}{m\omega'_0} \sin \omega'_0 t = \tilde{F} g(t) \quad \text{éq A3.1-2}$$

Si la force impulsionnelle est appliquée à un instant τ quelconque la réponse est

$$X_l(t) = \tilde{F} g(t - \tau)$$

A3.2 Réponse en vibration forcée quelconque

La force d'excitation $F(t)$ peut être décomposée en une série d'impulsions d'amplitude variable $F(\tau)$ appliquées à l'instant τ pendant un temps $\Delta\tau$. Si $\Delta\tau \rightarrow 0$ la réponse à un instant t est obtenue par

$$X(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

et en remplaçant par l'expression de la réponse impulsionnelle [éq A.3-2] on obtient l'équation de convolution pour un système au repos à l'instant 0 de la forme

$$X(t) = \frac{1}{m\omega'_0} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin \omega'_0(t-\tau) d\tau \quad \text{éq A3.2-1}$$

connue sous le nom d'Intégrale de DUHAMEL

A3.3 Réponse en mouvement imposé quelconque

Pour une analyse en mouvement relatif représentée par [éq An2-2]

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{s} = \omega^2 s_0 \cos(\omega t)$$

l'intégrale de DUHAMEL devient

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0'} \int_0^t \ddot{s}(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0'(t-\tau) d\tau \quad \text{éq A3.3-1}$$