

**Manuel de Validation****Fascicule V6.03 : Statique non linéaire des systèmes plans****Document : V6.03.128**

# **SSNP128 – Validation de l'élément à discontinuité sur une plaque plane**

---

**Résumé :**

Le but de ce test est d'exhiber une solution analytique afin de valider la qualité de l'élément à discontinuité (voir documentation [R7.02.12] pour des détails sur cet élément). L'objectif de ce test est de vérifier que ce modèle conduit à une bonne prédiction de la valeur du saut de déplacement le long d'une fissure. Pour ce faire, on cherche une solution analytique présentant un saut non constant le long d'une discontinuité que l'on compare avec la solution obtenue numériquement. Par ailleurs lorsqu'on cherche à valider une méthode numérique il est préférable de s'assurer de l'unicité de la solution recherchée. Nous verrons que c'est le cas pour la solution analytique présentée si une condition portant sur la taille maximum du domaine étudié en fonction des paramètres du modèle est vérifiée.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , considérons une plaque plane rectangulaire élastique notée  $\Omega = ]0, L[ \times ]0, H[$  (voir [Figure 1.1-a]). Notons  $\Gamma_0 = \{0\} \times ]0, H[$  la face gauche du domaine et  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$  la partie complémentaire du bord.

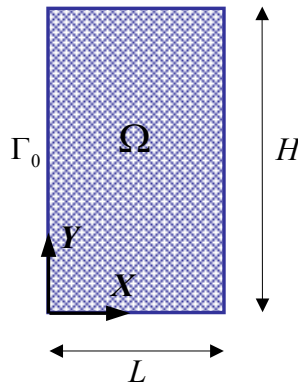


Figure 1.1-a : Schéma de la plaque

Dimensions du domaine  $\Omega$  :

$$L = 1 \text{ mm} , H = 2\pi \text{ mm}$$

### 1.2 Propriétés de matériaux

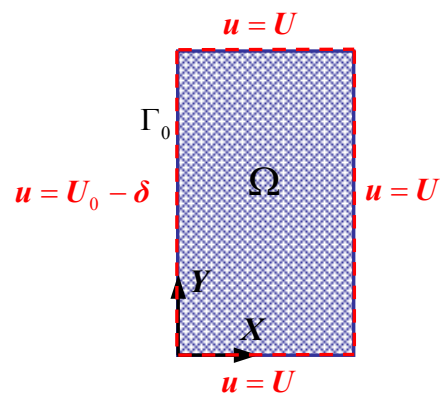
Le matériau est élastique avec une contrainte critique et une ténacité choisies arbitrairement :

$$E = 10 \text{ MPa} , \nu = 0 , \sigma_c = 1.1 \text{ MPa} , G_c = 0.9 \text{ N.mm}^{-1}$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites sont déterminées par la solution analytique présentée dans la partie suivante de telle sorte qu'elles conduisent à une fissure possédant un saut non constant le long de  $\Gamma_0$ . Le chargement correspond à un déplacement imposé sur les bords de la plaque : (voir [Figure 1.3-a]).

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{U}(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{U}_0(y) - \boldsymbol{\delta}(y) & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

**Figure 1.3-a : Schéma du chargement**

Les valeurs  $U$ ,  $U_0$  et  $\delta$  sont définies lors de la construction de la solution de référence dans la partie suivante.

## 2 Solution de référence

Dans cette partie on exhibe une solution analytique avec un saut non constant le long de  $\Gamma_0$ , puis on donne une condition d'unicité de la solution.

### 2.1 Solution analytique

La fonction d'Airy  $\Phi(x, y)$  gouvernée par l'équation  $\Delta\Delta\Phi = 0$  sur  $\Omega$ , dans le cas où les efforts extérieurs sont nuls, conduit à des contraintes satisfaisant les équations d'équilibre et de compatibilité en élasticité (voir Fung [bib1]). Les composantes de la contrainte  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dérivent de  $\Phi(x, y)$  de la façon suivante :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \text{éq 2.1-1}$$

Choisissons une fonction bi-harmonique  $\Phi(x, y)$  définie par :

$$\Phi(x, y) = \beta \frac{y^3}{6} + (\alpha x + \gamma) \frac{y^2}{2} + \eta xy$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\eta$  constantes réelles arbitraires. On en déduit d'après [éq 2.1-1] le champ de contrainte :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \alpha x + \beta y + \gamma \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = -\alpha y - \eta \end{cases} \quad \text{éq 2.1-2}$$

En intégrant la loi élastique, si on note  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson (que l'on prend nul), on en déduit le champ de déplacement dans  $\Omega$  vérifiant l'équilibre :

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \left( \alpha \left( \frac{x^2}{2} - y^2 \right) + x(\beta y + \gamma) \right) \\ -\frac{1}{E} \left( \beta \frac{x^2}{2} + 2\eta x \right) \end{pmatrix} \quad \text{éq 2.1-3}$$

Notons respectivement  $U_0$  et  $U$  les déplacements sur  $\Gamma_0$  et  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$  donnés par [éq 2.1-3]. Ces derniers correspondent aux conditions aux limites conduisant au champs de contrainte [éq 2.1-2]. A partir de ces données, il est facile de construire un champ de déplacement avec une discontinuité sur le bord  $\Gamma_0$ . En effet, connaissant la contrainte normale  $\sigma.n$  sur  $\Gamma_0$  que l'on note  $F(y)$ , on obtient le saut de déplacement  $\delta(y)$  en inversant la loi de comportement exponentielle de type Barenblatt : CZM\_EXP (voir documentation sur les éléments à discontinuité interne et leur comportement : [R7.02.12]) :

$$\delta(y) = -\frac{G_c F(y)}{\sigma_c \|F(y)\|} \ln \left( \frac{\|F(y)\|}{\sigma_c} \right)$$

pour tout  $y$  dans  $[0, H]$ . Ainsi, le nouveau déplacement imposé sur  $\Gamma_0$  générant un tel saut est égal à  $U_0 - \delta$ . On a donc construit une solution analytique de la plaque plane vérifiant les équations d'équilibre et de compatibilité avec une discontinuité en  $\Gamma_0$  le long de laquelle le saut de déplacement  $\delta$  n'est pas constant. Rappelons les conditions aux limites du problème :

$$\begin{cases} u = U(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \\ u = U_0(y) - \delta(y) & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad \text{éq 2.1-4}$$

## 2.2 Unicité de la solution

Après avoir construit une solution analytique il est important de s'assurer que cette dernière est unique pour pouvoir la comparer avec la solution numérique. On montre, voir [bib2], que l'unicité est garantie dès que la condition suivante, sur la géométrie du domaine ainsi que sur les paramètres matériau, est vérifiée :

$$L < \frac{2\mu G_c}{\sigma_c^2}. \quad \text{éq 2.2-1}$$

Les dimensions de la plaque et les paramètres matériau donnés précédemment vérifient cette condition.

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

L'idée est d'effectuer une simulation numérique correspondant au problème présenté dans la partie précédente et de comparer les résultats obtenus. Les éléments à discontinuité permettent de représenter la fissure le long de  $\Gamma_0$ . Ces derniers ont pour modélisation `PLAN_ELDI` et un comportement `CZM_EXP`. Les autres éléments du maillage sont des `QUAD4` élastiques en modélisation `D_PLAN`.

Les valeurs des paramètres de la fonction d'Airy pour la construction de la solution analytique sont pris de façon arbitraire :

$$\alpha = 0 \text{ MPa.mm}^{-1}, \beta = 1/4\pi \text{ MPa.mm}^{-1}, \gamma = 1/2 \text{ MPa} \text{ et } \eta = 0 \text{ MPa}$$

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

On effectue un maillage de la plaque structuré en quadrangles avec 20 mailles dans la largeur et 50 dans la hauteur. On dispose des éléments à discontinuité le long du côté  $\Gamma_0$  avec la normale dirigée suivant  $-\vec{X}$ . Ceci est réalisé à l'aide du mot clé `CREA_FISS` de `CREA_MAILLAGE` (voir documentation [U4.23.02]).

#### 3.3 Fonctionnalités testées

##### Commandes

<code>STAT NON LINE</code>	<code>COMP INCR</code>	<code>RELATION</code>	<code>CZM_EXP</code>
<code>AFFE MODELE</code>	<code>MODELISATION</code>	<code>PLAN ELDI</code>	
<code>DEFI MATERIAU</code>	<code>RUPT_FRAG</code>	<code>SIGM_C</code>	<code>SAUT_C</code>
<code>CREA_MAILLAGE</code>	<code>CREA_FISS</code>		

#### 3.4 Grandeurs testées et résultats

Grandeur testée	Théorie	Code_Aster	Différence (%)
Variable seuil : VI1 Sur l'élément MJ15	4.9315E-01	4.9363194272125E-01	0.098
Variable seuil : VI1 Sur l'élément MJ45	1.075	1.0757405707848	0.069
Contrainte normale : VI6 Sur l'élément MJ30	4.489E-01	4.4850081901631E-01	-0.089

## 4 Synthèse des résultats

---

Ces résultats nous permettent de conclure que l'élément à discontinuité interne conduit à une bonne approximation de la solution analytique. De plus, une étude sur la dépendance au maillage a été réalisée dans [bib2]. On constate que l'erreur faite sur le saut de déplacement décroît quand on raffine le maillage. Cela permet de conclure que, malgré un saut constant par élément, ce modèle permet de reproduire correctement une fissure avec un saut non constant en raffinant le maillage.

## 5 Bibliographie

---

- [1] FUNG Y.C. : Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall, (1979).
- [2] LAVERNE J. : Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théorique et implantations numériques, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 13, Novembre 2004.

Page laissée intentionnellement blanche.