

**Manuel de Validation**  
**Fascicule V6.01 : Statique non linéaire en axisymétrie**  
**Document V6.01.106**

## **SSNA106 - Cylindre creux soumis à un comportement thermoviscoélastique**

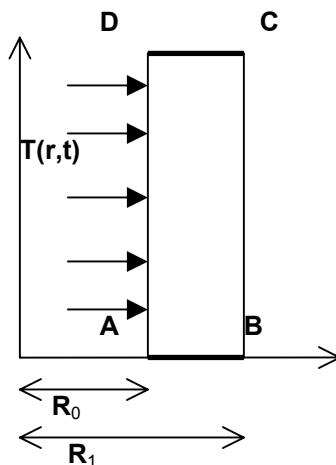
---

### **Résumé :**

Ce cas-test permet de valider la loi de LEMAITRE implantée dans le *Code\_Aster* dans le cas de comportement thermoviscoélastique linéaire. Les résultats trouvés sont comparés à une solution analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



$R_0$  1 m  
 $R_1$  2 m

### 1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young :  $E = 1$  MPa  
Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$   
Coefficient de dilatation :  $\alpha = 0.7$

Loi de LEMAITRE :

$$g(\sigma, \lambda, T) = \left( \frac{1}{K} \frac{\sigma}{\lambda^{\frac{1}{m}}} \right)^n \text{ avec } \frac{1}{K} = 1, \frac{1}{m} = 0, n = 1$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargement

**Conditions aux limites :**

Le cylindre est bloqué en DY sur les côtés [AB] et [CD].

**Chargement :**

Le cylindre est soumis à un champ de température  $T(r, t) = tr^2$

## 2 Solutions de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

L'ensemble de cette démonstration peut être lue avec plus de détails dans le document [bib1].

Dans le cas d'un matériau isotrope viscoélastique linéaire, on peut décrire le comportement au cours du temps à l'aide de deux fonctions  $I(t)$  et  $K(t)$  de telle sorte que les déformations et les contraintes peuvent s'écrire :

$$\varepsilon(t) = (I + K) * \frac{d\sigma(t)}{d\tau} - K * \frac{d(Tr(\sigma(t)))}{d\tau} \mathbf{I}_3 + \alpha T(r, t) \mathbf{I}_3$$

où  $\mathbf{I}_3$  désigne la matrice identité de rang 3

et \* le produit de convolution :  $(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$

Le problème thermoélastique équivalent, en passant par le transformée de Laplace est :

$$\begin{cases} \varepsilon^+ = (I^+ + K^+) \sigma^+ - K^+ Tr(\sigma^+) \mathbf{I}_3 + \frac{\alpha r^2}{p} \mathbf{I}_3 \\ \sigma_r^+ = \frac{d\sigma_r^+}{dr} = \frac{1}{r} (\sigma_\theta^+ - \sigma_r^+) \\ \varepsilon_z^+ = 0 \\ (r \varepsilon_\theta^+) = \varepsilon_r^+ \end{cases}$$

En éliminant le signe « + » :

$$\begin{cases} \sigma_r + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ (I + K) \sigma_z - K (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + \frac{\alpha r^2}{p} = 0 \\ \left[ r \left( (I + K) \sigma_\theta - K (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + \frac{\alpha r^2}{p} \right) \right] = (I + K) \sigma_r - K (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + \frac{\alpha r^2}{p} \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} \sigma_r + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ \sigma_z = \frac{K}{I} (\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{\alpha r^2}{pI} \\ \left[ r \left( (I + K) \sigma_\theta - \frac{(I + K)K}{I} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{\alpha r^2}{p} \right) \right] = (I + K) \sigma_r - \frac{(I + K)K}{I} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{(I + K) \alpha r^2}{p} \end{cases}$$

$$(I + K)\sigma_\theta + r \left( (I + K)\sigma_\theta - \frac{(I + K)K}{I}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{(I + K)}{I} \frac{\alpha r^2}{p} \right) = (I + K)\sigma_r$$

D'après l'équation d'équilibre, on a  $\sigma_\theta = r\sigma_r' + \sigma_r$ , on obtient :

$$(I + K)\sigma_r' + r \left( (I + K)(r\sigma_r' + \sigma_r) - \frac{(I + K)K}{I}(2\sigma_r + r\sigma_r') + \frac{(I + K)}{I} \frac{\alpha r^2}{p} \right) = 0,$$

$$\left[ (2\sigma_r + r\sigma_r') + \frac{\alpha r^2}{p(I - K)} \right] = 0,$$

$$2\sigma_r + r\sigma_r' = A + \frac{\alpha r^2}{p(K - I)} \text{ ce qui en intégrant par rapport à } r \text{ donne :}$$

$$\sigma_r = \frac{A}{2} + \frac{B}{r^2} + \frac{\alpha r^2}{4p(K - I)},$$

les conditions aux limites  $\sigma_r(r_0) = \sigma_r(r_1) = 0$  donnent :

$$A = -\frac{\alpha}{2p(K - I)}(r_0^2 + r_1^2)$$

$$B = \frac{\alpha r_0^2 r_1^2}{4p(K - I)}$$

On a donc en reprenant les notations initiales :

$$\begin{cases} \sigma_r^+ = \frac{\alpha}{4p(I^+ - K^+)}(r_0^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}) \\ \sigma_\theta^+ = \frac{\alpha}{4p(I^+ - K^+)}(r_0^2 + r_1^2 - 3r^2 + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}) \\ \sigma_z^+ = \frac{\alpha}{p(I^+ - K^+)}(\frac{K^+}{I^+} \frac{(r_0^2 + r_1^2)}{2} - r^2) \end{cases}$$

Soit, en prenant la transformée inverse,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2k}(1 - e^{-bt}) \left( r_0^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2k}(1 - e^{-bt}) \left( r_0^2 + r_1^2 - 3r^2 + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{k} \left[ (1 - e^{-bt}) \left( \frac{r_0^2 + r_1^2}{2} - r^2 \right) + \frac{r_0^2 + r_1^2}{r^2} (1 - e^{-Ekt}) \right] \end{pmatrix}$$

On en déduit  $\varepsilon_V$  et  $w$  :

$$w(r, t) = \frac{1 - 2\nu}{Ek} \alpha r \left[ (1 - e^{-bt}) \left[ r_0^2 + r_1^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} \right] + (1 - e^{-Ekt}) \left[ \frac{-(r_0^2 + r_1^2)}{4} \right] + \frac{3Ekt}{4(1 - 2\nu)} \left[ \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} + r^2 \right] \right]$$

## 2.2 Résultats de référence

Déplacement DX sur le nœud B

## 2.3 Incertitude sur la solution

0% : solution analytique

## 2.4 Références bibliographiques

- [1] Ph. De BONNIERES, deux solutions analytiques de problèmes axisymétriques en viscoélasticité linéaire et avec contact unilatéral, Note HI-71/8301

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie

### 3.2 Caractéristiques du maillage

120 mailles QUAD4

### 3.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_MATERIAU	LEMAITRE	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	LEMAITRE

## 4 Résultats de la modélisation A

---

### 4.1 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence	Aster	Ecart %
DX(B)	0.24	1.110	1.1106	0.05%

## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats calculés par le *Code\_Aster* sont en accord avec les solutions analytiques mais dépendent très fortement du raffinement du maillage.