

**Manuel de Validation****Fascicule V5.01 : Dynamique non linéaire des systèmes discrets****Document V5.01.100**

# **SDND100 - Lâcher d'un patin frottant avec frottement de type Coulomb**

---

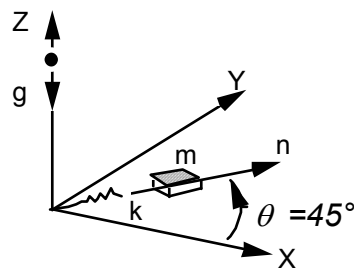
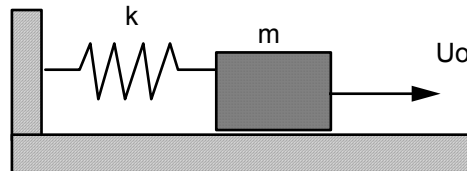
**Résumé**

On considère le système unidirectionnel à un degré de liberté constitué d'une masse en contact frottant de type Coulomb sur un plan rigide, et d'un ressort l'attachant à un point fixe. La masse est lâchée dans une position initiale hors équilibre. Elle oscille jusqu'à l'arrêt complet au bout d'un temps fini.

Les deux premières modélisations correspondent à la réponse transitoire par recombinaison modale du patin frottant, la troisième correspond à sa réponse transitoire directe. Les trois calculs sont comparés à la solution analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Direction de déplacement :  $\theta = 45^\circ$  dans le plan XY

### 1.2 Propriétés de matériaux

Raideur du ressort :	$k = 10\,000 \text{ N/m}$
Masse ponctuelle :	$m = 1 \text{ kg}$
Pesanteur :	$g = 10 \text{ m/s}^2$
Coefficient de Coulomb :	$\mu = 0,1$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le système repose sur le plan  $Z = 0$  sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement de Coulomb de  $\mu = 0,1$ .

### 1.4 Conditions initiales

Déplacement initial de la masse :  $r_0 = 0,85 \text{ mm}$  selon la direction  $\theta$ .

Vitesse initiale nulle.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour un système sans amortissement, l'équation différentielle à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} m \ddot{r} + k r = \mu |F_n| & \text{avec } F_n = -mg \operatorname{sign}(\dot{r}) \\ r(t=0) = r_0 \geq 0 \\ \dot{r}(t=0) = 0 \end{cases}$$

On montre [bib1] que la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$r(t) = \frac{\mu |F_n|}{k} + \left(r_0 - \frac{\mu |F_n|}{k}\right) \cos \omega_0 t$$

L'amplitude des extrema, qui proviennent tous les  $t_{n+1} = \frac{n\pi}{\omega_0}$ , obéit à la loi de récurrence suivante :

$$\begin{cases} r(t_{n+1}) = (-1)^n \left[ r_0 - \frac{\mu |F_n|}{k} \right] \cos \omega_0 t \\ \text{avec } n = 1, 2, \dots, N \text{ tel que } \left| \frac{r(t_{n+1})}{r_0} \right| < \frac{\mu |F_n|}{k r_0} \end{cases}$$

Le mouvement s'arrête quand  $\left| \frac{r(t_{n+1})}{r_0} \right| < \frac{\mu |F_n|}{k r_0}$  à la position  $r(t_{n+1})$ .

### 2.2 Résultats de référence

Valeurs des déplacements dans la direction  $\theta$  pour les instants de changement de signe de la vitesse ( $r(t_1)$ ,  $r(t_2)$ , ...,  $r(t_5)$  établis ci-dessus).

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

### 2.4 Références bibliographiques

- [1] F. AXISA - Méthodes d'analyse en dynamique non linéaire des structures : non-linéarités de contact - Cours IPSI du 28 au 30 mai 1991

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Un élément de type DIS\_T sur une maille POI1 est utilisé pour modéliser le système. Des conditions de relations entre degrés de liberté sont employées pour imposer au mouvement d'être unidirectionnel dans la direction  $\theta$  :

```
LIAISON_DDL : ( NOEUD: NO1
                  DDL : ('DX' 'DY')
                  COEF_MULT : (0.707 -0.707)
                  COEF_IMPO : 0.)
```

Un obstacle de type PLAN\_Z (deux plans parallèles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe Oy, soit NORM\_OBST: (0., 1., 0.). L'origine de l'obstacle est ORIG\_OBST: (0., 0., 1.). Il reste à définir son jeu qui donne le demi-écartement entre les plans.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

Comme  $F_n = mg$ , on a alors  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de 20 N/m (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5$ . L'obstacle PLAN\_Z ayant pour origine Z = 1 et le solide étant en Z = 0 ; un jeu de 0,5m créera un enfoncement  $\delta n = 0,5$  m d'où JEU : 0.5

Raideur de choc tangentielle :  $K_T = 400\,000$  N/m : elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle :  $5.10^{-4}$ s.

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1

Nombre de mailles et types : 1 POI1

#### 3.3 Fonctionnalités testées

##### Commandes

AFFE_CHAM_NO	GRANDEUR	'DEPL_R'
PROJ_VECT_BASE	VECT_ASSE	
PROJ_MATR_BASE	MATR_ASSE	
DEFI_OBSTACLE	TYPE	'PLAN_Y'
		'PLAN_Z'
DYNA_TRAN_MODAL	DEPL_INIT_GENE	
	METHODE	'EULER'
REST_BASE_PHYS	CHOC	

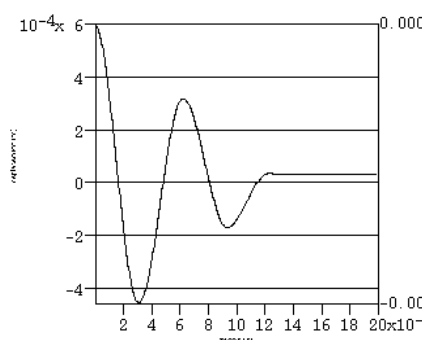
## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

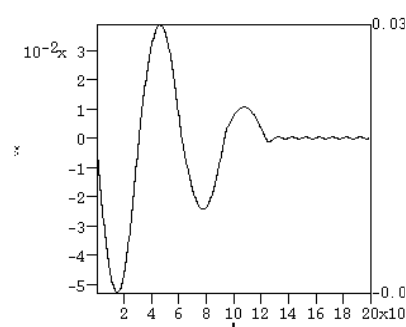
Valeurs des déplacements (en mètres) dans la direction  $\theta$  pour les instants de changement de signe de la vitesse sur la période de temps (0 ; 0.3 s).

Identification	instant (s)	Référence	Déplacement Aster	différence %
DY = r2 cos45	$\pi \times 10^{-2}$	-4.596E-4	-4.595E-4	-0.02
DY = r3 cos45	$2\pi \times 10^{-2}$	3.182E-4	3.181E-4	-0.045
DY = r4 cos45	$3\pi \times 10^{-2}$	-1.768E-4	-1.767E-4	-0.07
DY = r5 cos45	$4\pi \times 10^{-2}$	3.536E-5	3.550E-5	0.41

On présente ci dessous l'évolution du déplacement et de la vitesse au point NO1



Déplacement du point NO1



Vitesse du point NO1

### 4.2 Paramètres d'exécution

Version : STA 5.02  
Machine : SGI ORIGIN2000  
Temps CPU User : 2.21 secondes

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans la modélisation B, on considère le patin et le plan comme deux structures mobiles. Chaque structure est alors modélisée par un noeud et un élément de type POI1. Le noeud NO2 est supposé bloqué, il matérialise le plan de frottement. On impose des conditions de relations entre degrés de liberté au noeud NO1 (qui modélise le patin) pour que le mouvement soit unidirectionnel dans la direction  $\theta$ .

```
LIAISON_DDL : ( NOEUD: NO1
                  DDL : ('DX' 'DY')
                  COEF_MULT : (0.707 -0.707)
                  COEF_IMPO : 0.)
```

Un obstacle de type BI\_PLAN\_Z (deux plans parallèles mobiles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe Oy, soit NORM\_OBST: (0., 1., 0.). Par défaut, l'origine de l'obstacle est située à mi distance des noeuds NO1 et NO2. Il reste à définir les paramètres DIST\_1 et DIST\_2 qui représentent l'épaisseur de matière autour des noeuds de choc.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

Comme  $F_n = mg$ , on a alors  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de 20 N/m (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5$  m. Sachant que les deux noeuds NO1 et NO2 sont géométriquement confondus, on choisit par exemple DIST\_1 = DIST\_2 =  $\delta n / 2$ .

Raideur de choc tangentielle :  $K_T = 400\,000$  N/m : elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle :  $5 \cdot 10^{-4}$  s.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 2

Nombre de mailles et types : 2 POI1

### 5.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

AFFE_CHAM_NO	GRANDEUR	'DEPL_R'
PROJ_VECT_BASE	VECT_ASSE	
PROJ_MATR_BASE	MATR_ASSE	
DEFI_OBSTACLE	TYPE	'BI_PLAN_Z'
DYNA_TRAN_MODAL	DEPL_INIT_GENE	
	METHODE	'EULER'
	CHOC	NOEUD_1
		NOEUD_2
REST_BASE_PHYS		

## 6 Résultats de la modélisation B

---

### 6.1 Valeurs testées

Valeurs des déplacements (en mètres) dans la direction de l'oscillateur pour les instants de changement de signe de la vitesse sur la période de temps (0 ; 0.3 s).

Identification	instant (s)	Référence	Déplacement Aster	différence %
DY = r2 cos45	$\pi \times 10^{-2}$	-4.596E-4	-4.595E-4	-0.02
DY = r3 cos45	$2 \pi \times 10^{-2}$	3.182E-4	3.181E-4	-0.029
DY = r4 cos45	$3 \pi \times 10^{-2}$	-1.768E-4	-1.767E-4	-0.018
DY = r5 cos45	$4 \pi \times 10^{-2}$	3.536E-5	3.543E-5	0.205

### 6.2 Paramètres d'exécution

Version :	STA 5.02
Machine :	SGI ORIGIN2000
Temps CPU User :	2.3 secondes

## 7 Modélisation C

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation correspond à la réponse transitoire directe du patin frottant.

La direction normale de contact est l'axe local X qui correspond dans le cas test à l'axe global Z. Le plan de glissement est le plan local (Y, Z) soit le plan (X, Y) dans le repère global. On oriente donc l'élément de choc à un noeud, avec le mot clé ORIENTATION de l'opérateur AFFE\_CARA\_ELEM de la façon suivante :

```
ORIENTATION: ( MAILLE:EL1 CARA: 'VECT_X_Y'  
                VALE: ( 0. 0. -1. 0. 1. 0. ) )
```

Pour pouvoir obtenir une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance  $\delta n$  telle que :  $F_n = K_n \cdot \delta n$ .

La réaction équilibre le poids du patin, on a donc :  $F_n = mg$  c'est-à-dire  $\delta n = mg / K_n$ .

On a considéré une raideur de choc normale de 20 N/m (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc  $\delta n = 0,5$  d'où DIST\_1 = 0.5.

La raideur de choc tangentielle considérée est  $K_T = 400\,000$  N/m, le coefficient de Coulomb vaut 0,1.

La loi de comportement de choc est donc définie de la façon suivante dans DEFI\_MATERIAU :

```
DIS_CONTACT: ( RIGI_NOR: 20.  
                DIST_1: 0.5  
                RIGI_TAN: 400000.  
                COULOMB: 0.1)
```

On utilise un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-4}$  s pour l'intégration temporelle.

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1

Nombre de mailles et types : 1 POI1

### 7.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_MATERIAU	DIS_CONTACT		
AFFE_CARA_ELEM	ORIENTATION	VECT_X_Y	
AFFE_CHAR_MECA	LIAISON_DDL		
AFFE_CHAM_NO			
DYNA_NON_LINE	ETAT_INIT	DEPL_INIT	
	COMP_INCR	RELATION	DIS_CHOC
	HHT		
RECU_FONCTION			



## 8 Résultats de la modélisation C

### 8.1 Valeurs testées

Valeurs des déplacements dans la direction de l'oscillateur pour les instants approchés de changement de signe de la vitesse sur la période de temps (0 ; 0.2 s).

Identification	instants (s)	Référence	déplacement Aster	différence %
DY = r2 cos45	$\pi \times 10^{-2}$	-4,585E-04	-4,58552E-04	0,011
DY = r3 cos45	$2 \pi \times 10^{-2}$	3,173E-04	3,17331E-04	0,01
DY = r4 cos45	$3 \pi \times 10^{-2}$	-1,754E-04	-1,75481E-04	0,046
DY = r5 cos45	$4 \pi \times 10^{-2}$	3,550E-05	3,54945E-05	-0,016

### 8.2 Paramètres d'exécution

Version :	STA 5.02
Machine :	SGI ORIGIN2000
Temps CPU User :	94 secondes

## 9 Synthèse des résultats

---

La solution analytique du problème avec frottement est reproduite avec une très bonne précision ( $<0.5\%$ ). Cela demande néanmoins l'utilisation d'un paramètre de raideur tangente assez élevé par rapport à la rigidité du système ainsi qu'un pas de temps d'intégration relativement réduit.

Sur cet exemple, le calcul non linéaire direct est beaucoup plus coûteux en temps de calcul, facteur 20, que celui sur base modale.