

Manuel de Validation**Fascicule V7.03 : Thermo-mécanique stationnaire linéaire des systèmes volumiques
Document V7.03.101**

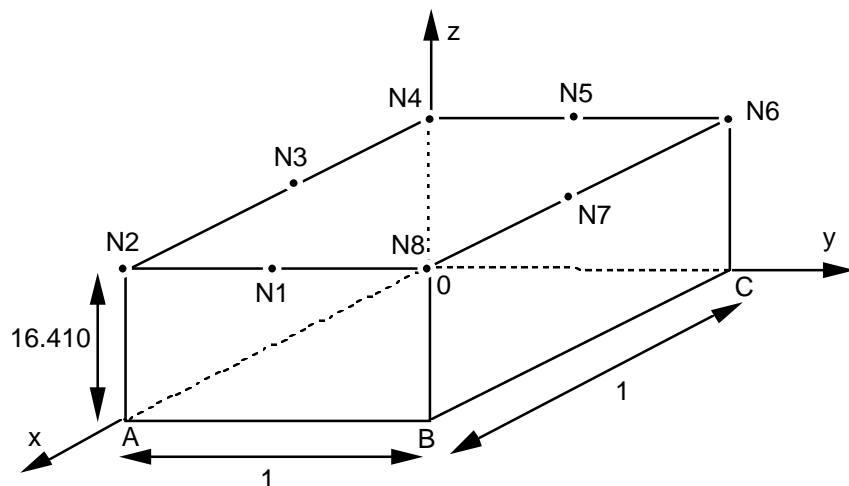
HPLV101 - Homogénéisation d'un matériau homogène

Résumé :

Ce test éprouve, dans une situation triviale où le matériau est homogène, la résolution des problèmes thermique et mécanique stationnaires, avec des chargements correspondants à un gradient de température et à une déformation imposée, voisins de ceux correspondant aux problèmes élémentaires de la méthode d'homogénéisation périodique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



	x	y	z
N4	0	0	16.410
N8	1.	1.	16.410
N3	0.5	0	16.410

1.2 Propriétés de matériaux

$E = 1.0 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

$k = 1.0 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$

$C_p = 0 \text{ J/(}^\circ\text{C.m}^3\text{)}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Mécanique 3D :

Plan $z = 0$:

$dz = 0$

pour le chargement membranaire ;

$dx = 0, dy = 0$

pour le chargement de flexion

Plans $y = 0, y = 1$:

$dy = 0$

Plans $x = 0, x = 1$:

$dx = 0$

Nœud : O

$dz = 0$

(pour le seul chargement de flexion)

Chargement :

$$\text{déformation membranaire : } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{flexion uniforme imposée : } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Mécanique 2D, contraintes planes :

Axe : $x = 0$

$dx = 0$

(ces conditions ne correspondent pas à l'application de la méthode d'homogénéisation).

Nœud : O

$dy = 0$

$$\text{Chargement : déformation } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ uniforme imposée}$$

- Thermique 3D et 2D :

Plan $x = 0$

temp = 0

(cette condition ne correspond pas à l'application de la méthode d'homogénéisation).

Chargement : gradient $\mathbf{G} = (-1, 0, 0)$ uniforme imposé.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

- En thermique : on résout le problème thermique stationnaire :

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta, \quad \forall \theta \in V, \quad \text{avec } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Les conditions aux limites choisies ici ne sont pas celles nécessaires à la méthode d'homogénéisation : on trouverait en effet $T = 0$ partout.

La solution est alors (vérifiant les conditions définies en [§1.3]) : $T(x, y, z) = -x$

L'énergie potentielle est alors à l'équilibre : $W^{th} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T = -\frac{1}{2} |\Omega|$ ici

- En mécanique : on résout le problème d'élastostatique :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in W,$$

pour les cas :

chargement 3D membranaire	chargement 3D de flexion	chargement 2D contraintes planes
$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les solutions sont :

- en 3D, chargement **membranaire** : $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{\nu z}{(1-\nu)} \right);$

l'énergie potentielle à l'équilibre est :

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = -\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right)^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu)$$

- en 3D, chargement de **flexion** : $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{\nu z^2}{2(1-\nu)} \right);$

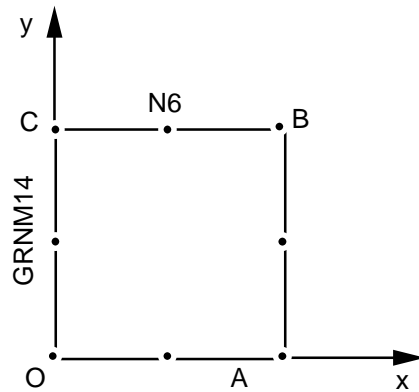
$$W^{pot} = -\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right)^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{h^3}{3}$$

- en 2D, chargement plan : $\mathbf{u}(x, y) = (-x, 0);$

$$W^{pot} = \frac{-|\Omega|}{2(1-\nu^2)}$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Conditions aux limites et chargement :

Thermique : GROUP_NO : GRNM14 : TEMP : 0.0
 GRAD_TEMP_INIT : FLUX_X : -1.0

Mécanique : GROUP_NO : GRNM14 : DX : 0.0
 (contraintes planes) NOEUD : O DY : 0.0
 EPSI_INIT : EPXX : -1.0

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
AFFE_CHAR_THER	GRAD_TEMP_INIT	TOUT FLUX_X	'OUI'	[U4.25.02]
AFFE_CHAR_MECA	EPSI_INIT	TOUT EPXX	'OUI'	[U4.25.01]
POST_ELEM	ENER_POT	TOUT	'OUI'	[U4.61.04]

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Point	Grandeur	Référence	Aster	% différence	Tolérance %
CMP					
A	TEMP	-1.0000	-1.00000	0.000	10 ⁻⁶
A	DX	-1.0000	-1.00000	0.000	10 ⁻⁶
N6	DX	-0.5000	-0.50000	0.000	10 ⁻⁶

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence	Aster	% différence
M1	Thermique	-0.500000000	-0.500000	10 ⁻⁸
M1	Mécanique	-0.549450550	+0.549451	10 ⁻⁸

4.2 Remarques

Le Code_Aster fournit la valeur de l'énergie de déformation, égale à l'opposé de l'énergie potentielle à l'équilibre (cas élastique).

4.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.18

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 16 mégamots

Système :

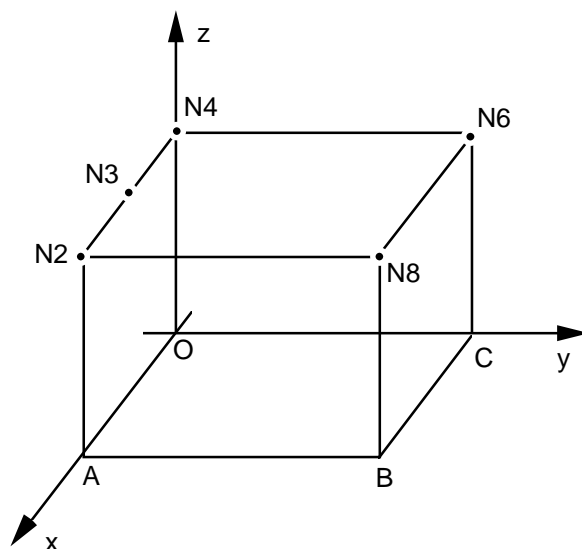
Temps CPU User :

UNICOS 8.0

3.7 secondes

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Nom des mailles des faces :	ZEGAL0	YEGAL0	YEGAL1	XEGAL0	XEGAL1
Sommets :	B C O A	O A N2 N4	B C N6 N8	C O N4 N6	A B N8 N2

Conditions aux limites :

```

ZERO : DEFI_CONSTANTE (VALE : 0.0) ;
FCT1:DEFI_FONCTION(Nom_para:'Z',VALE: (0.0 0.0 1.0 1.0));
Thermique :
GROUP_NO : XEGAL0 : TEMP : 0.0
GRAD_TEMP_INIT : FLUX_X : -1.0
Mécanique :
GROUP_NO : YEGAL0 : DY = 0.0
           XEGAL1 : DX = 0.0
           YEGAL1 : DY = 0.0
           XEGAL0 : DZ = 0.0
Cas membranaire :
GROUP_NO : ZEGAL0 : DZ = 0.0
EPSI_INIT : EPXX : -1.0
Cas flexion :
GROUP_NO : ZEGAL0 : DX = ZERO,  DY = ZERO
           NOEUD : 0             DZ = ZERO
           EPSI_INIT :           EPXX : FCT1

```

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
AFFE_CHAR_THER	GRAD_TEMP_INIT	TOUT		[U4.25.02]
		FLUX_X		
AFFE_CHAR_MECA	EPSI_INIT	EPXX		[U4.25.01]
AFFE_CHAR_MECA_F	EPSI_INIT	EPXX		[U4.25.01]
POST_ELEM	ENER_POT	TOUT	'OUI'	[U4.61.04]

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Cas	Grandeur	Point	Référence	Aster	% différence
Thermique	temp	N8	-1.000000	-1.000000	10^{-10}
	temp	N3	-0.500000	-0.500000	10^{-10}
Mécanique membrane	dz	N4	-7.03285714	-7.03285714	10^{-10}
	dz	N8	-7.03285714	-7.03285714	10^{-10}
Mécanique flexion	dz	N4	57.70459285	57.70459285	10^{-10}
	dz	N8	57.70459285	57.70459285	10^{-10}

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence	Aster	% différence
M1	Thermique	-8.20500	-8.20500	10^{-7}
M1	Mécanique	-2.0287088	-2.02871	10^{-7}
	Membrane Flexion	-1.8210238 10^2	-1.82102 10^2	10^{-7}

6.2 Paramètres d'exécution

Version : 3.05.30

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 16 mégamots

Système :

Temps CPU User :

UNICOS 8.0

16.51 secondes

7 Synthèse des résultats

Les résultats sont exacts à des erreurs d'arrondi près, puisque les solutions cherchées font partie de l'espace des éléments finis choisis pour la modélisation.