

Manuel de Validation**Fascicule V2.02 : Dynamique linéaire des poutres****Document V2.02.311**

SDLL311 - Réponse dynamique transitoire d'une poutre en traction sous déplacement imposé

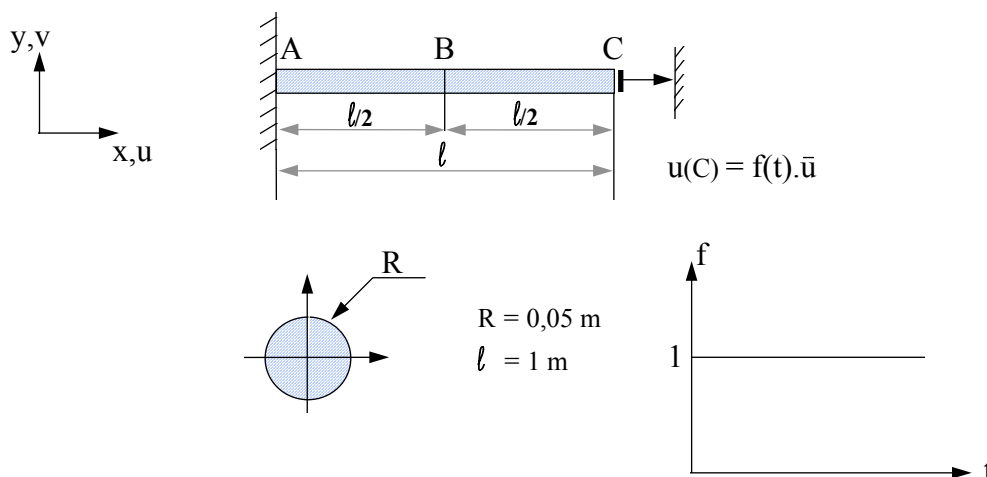
Résumé :

Ce problème-test correspond à une analyse transitoire linéaire d'une barre sollicitée en traction par application d'un déplacement imposé à une extrémité, l'autre extrémité étant encastree. Le déplacement fonction du temps est de type « Heaviside » imposé à partir de l'instant initial.

Les résultats obtenus au milieu de la poutre pour une modélisation à quatre éléments sont comparés à la solution analytique du problème discrétisé par quatre éléments en ne prenant pas en compte les pics instantanés de vitesse et d'accélération à l'instant initial au niveau de l'extrémité où le déplacement est imposé.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

$$E = 98\,696,044 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0$$

$$\rho = 3 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Amortissement proportionnel de Rayleigh : } \mathbf{C} = \lambda \mathbf{K} + \mu \mathbf{M}, \lambda = 5 \cdot 10^{-4}, \mu = 5$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Déplacement imposé à l'extrémité C : $u(C) = \bar{u} f(t)$ avec $\bar{u} = 10^{-3} \text{ m}$ et $f(t)$ évolution en fonction du temps de type Heaviside : $f(t) = 1, t \geq 0$.

Extrémité A encastree.

1.4 Conditions initiales

Déplacement initial nul en tout point.

Vitesse initiale nulle en tout point.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème discrétisé vérifie :

$$\begin{bmatrix} M_{ll} & M_{ld} \\ M_{ld}^T & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_l \\ \ddot{u}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ll} & C_{ld} \\ C_{ld}^T & C_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_l \\ \dot{u}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{ld} \\ K_{ld}^T & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ u_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_d \end{Bmatrix},$$

avec indice l : ddl libre

indice d : ddl imposé

$F_d(t)$ chargements extérieurs appliqués aux nœuds extrémités et conduisant aux déplacements imposés u_d sont inconnus, on élimine donc ces équations et on obtient :

$$[M_{ll}]\{\ddot{u}_l\} + [C_{ll}]\{\dot{u}_l\} + [K_{ll}]\{u_l\} = -[M_{ld}]\{\ddot{u}_d\} - [C_{ld}]\{\dot{u}_d\} - [K_{ld}]\{u_d\}.$$

Les seuls termes non nuls du second membre de ce système sont liés aux variables cinématiques relatives au nœud extrémité où le déplacement est imposé. Or, à $t=0$, \ddot{u}_{dC} et \dot{u}_{dC} ne sont pas définies mais à $t=0^-$ et $t=0^+$, \ddot{u}_{dC} et \dot{u}_{dC} sont nulles. Toute la complexité du problème vient de cela.

Pour obtenir une solution de référence, nous avons considéré \ddot{u}_{dC} et \dot{u}_{dC} uniformément nulles ce qui revient à ne considérer que les forces internes élastiques à l'extrémité C. Ceci est discutable d'un point de vue physique mais, en adoptant les mêmes hypothèses lors de la modélisation du problème, la validation du Code_Aster peut être menée à bien.

On calcule la solution de référence en traitant le problème suivant :

$$[M_{ll}]\{\ddot{u}_l\} + [C_{ll}]\{\dot{u}_l\} + [K_{ll}]\{u_l\} = -[K_{ld}]\{u_d(t)\} \text{ avec } \{u_l(0)\} = 0 \text{ et } \{\dot{u}_l(0)\} = 0.$$

Pour ce faire, on transporte le problème dans la base modale du système qui vérifie :

$$[M_{ll}]\{\ddot{u}_l\} + [K_{ll}]\{u_l\} = 0.$$

L'amortissement étant diagonal, on obtient le système diagonal :

$$[m_g]\{\ddot{X}\} + [c_g]\{\dot{X}\} + [k_g]\{X\} = \{g(t)\} \text{ où } \{g(t)\} = \{g\} \text{ pour } t \geq 0,$$

$$\text{avec } \{X(0)\} = 0 \text{ et } \{\dot{X}(0)\} = 0.$$

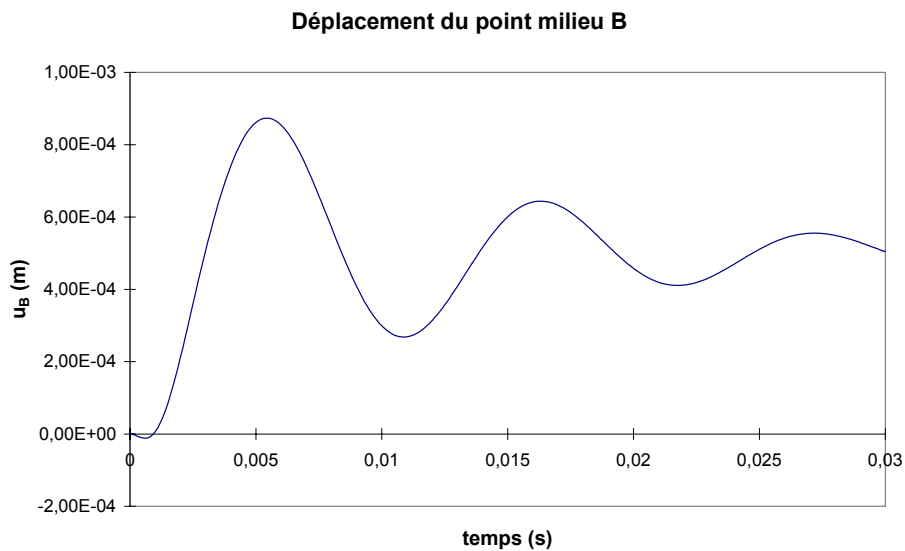
Dans l'espace modal, on résout donc trois équations (3 ddls libres) différentielles du second ordre puis on revient dans l'espace physique. On obtient alors le déplacement du point milieu :

$$u_B(t) = \sum_{i=1}^3 e^{-\lambda_i t} (a_i \cos(\tilde{\omega}_i t) + b_i \sin(\tilde{\omega}_i t)),$$

avec $\tilde{\omega}_i$: i^{ème} pseudo-pulsation propre du système amorti.

2.2 Résultats de référence

Déplacement, vitesse et accélération du point milieu B de la poutre.



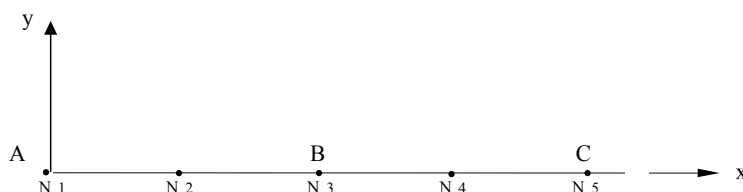
2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique du problème discrétisé en quatre éléments de longueur égale en considérant vitesse et accélération uniformément nulles au point C où le déplacement est imposé.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation en élément de poutre 3D : POU_D_T



Découpage :

AC = 4 mailles SEG2 de longueur égale

Conditions limites :

- Nœud N1(A) encastré
DDL_IMPO DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0
- Nœud N5(C) en déplacement imposé suivant x
DDL_IMPO DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0 DX(t)= \bar{u}

Résolution :

Algorithme d'intégration directe de Newmark

Pas de temps : $\Delta t = 10^{-5}$ s

Durée d'observation : 0,03 s

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 5

Nombre de mailles et type : 4 mailles SEG2

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DYNA_LINE_TRAN

NEWMARK

C.L. DE DIRICHLET PAR VECTASS

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

- Déplacement au point milieu B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement Aster (m)	Différence (%)
0,0054	87,376 e-3	87,3763 e-3	28,6 e-3 %
0,0055	87,360 e-3	87,3598 e-3	-21,9 e-3 %
0,0108	26,818 e-3	26,8178 e-3	-57,0 e-3 %
0,0109	26,800 e-3	26,8000 e-3	-10,3 e-3 %
0,0163	64,386 e-3	64,3865 e-3	84,9 e-3 %
0,0164	64,366 e-3	64,3663 e-3	42,7 e-3 %
0,0217	41,083 e-3	41,0828 e-3	-49,6 e-3 %
0,0218	41,084 e-3	41,0844 e-3	94,0 e-3 %
0,0271	55,525 e-3	55,5247 e-3	-62,6 e-3 %
0,0272	55,530 e-3	55,5305 e-3	93,3 e-3 %

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

idem que la modélisation A

5.2 Caractéristiques du maillage

idem que la modélisation A

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DYNA_LINE_TRAN

NEWMARK

C.L. DE DIRICHLET PAR CHARGE

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

- Déplacement au point milieu B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement Aster (m)	Différence (%)
0,0054	87,376 e-3	87,3763 e-3	28,7 e-3 %
0,0055	87,360 e-3	87,3598 e-3	-21,9 e-3 %
0,0108	26,818 e-3	26,8178 e-3	-56,9 e-3 %
0,0109	26,800 e-3	26,8000 e-3	-10,4 e-3 %
0,0163	64,386 e-3	64,3865 e-3	85,0 e-3 %
0,0164	64,366 e-3	64,3663 e-3	42,9 e-3 %
0,0217	41,083 e-3	41,0827 e-3	-49,6 e-3 %
0,0218	41,084 e-3	41,0844 e-3	94,0 e-3 %
0,0271	55,525 e-3	55,5247 e-3	-62,6 e-3 %
0,0272	55,530 e-3	55,5305 e-3	93,2 e-3 %

7 Synthèse des résultats

Les résultats donnés par *Code_Aster* sont en parfait accord avec les résultats du modèle analytique, que le déplacement en bout poutre soit imposé par un VECTEUR ASSEMBLE ou par une CHARGE.

Attention : les questions de Dirichlet dans DYNALINE_TRAN ne sont compatibles qu'avec la méthode d'intégration de NEWMARK.