

Manuel de Validation
Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des structures volumiques
Document V6.04.122

SSNV122 - Rotation et traction suivieuse hyper-élastique d'un barreau

Résumé :

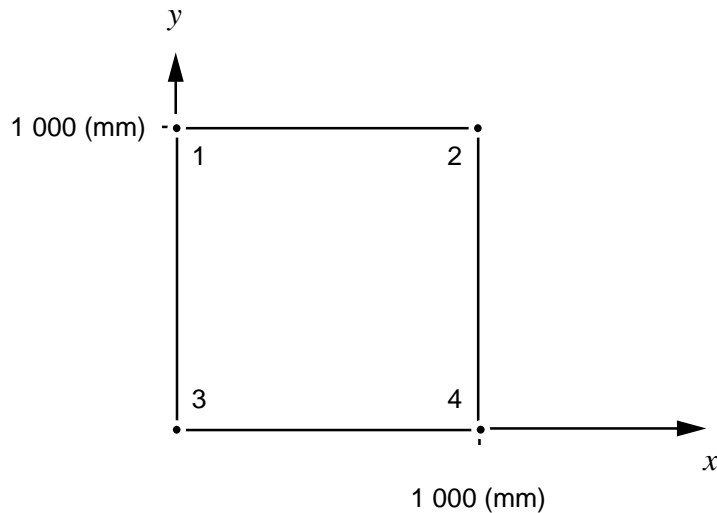
Ce test de mécanique quasi-statique consiste à faire tourner de 90° un barreau parallélépipédique et à le soumettre à une traction importante au moyen de forces suivieuses. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyper-élastiques (commande `STAT_NON_LINE [U4.32.01]`, mot-clé `COMP_ELAS`), et donc en particulier les grandes rotations, pour une relation de comportement élastique linéaire, ainsi que la prise en compte de forces suivieuses (commande `STAT_NON_LINE [U4.32.01]` mot clé `TYPE_CHARGE : 'SUIV'`).

Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA8, modélisation A).

Les résultats obtenus par le *Code_Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

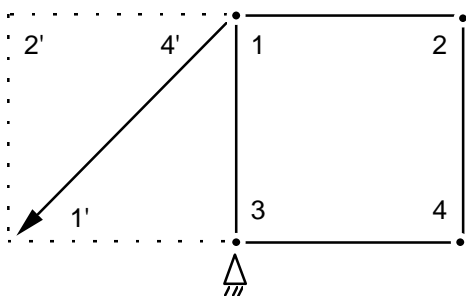
Comportement hyper-élastique de SAINT VENANT - KIRCHHOFF :

$$\mathbf{S} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E} \quad \begin{array}{l} E = 200\,000. \text{ MPa} \\ \nu = 0.3 \end{array}$$

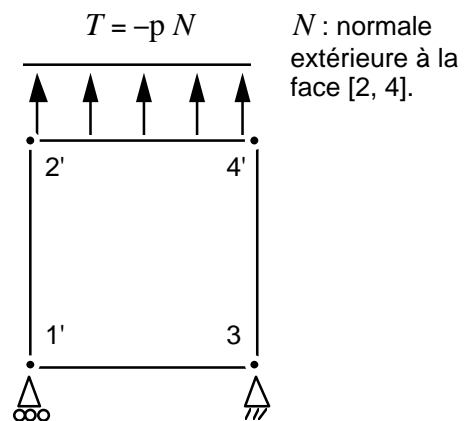
1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement est appliqué en deux temps : tout d'abord, une rotation d'ensemble de la structure, suivie par une traction exercée par des forces suivieuses.

Rotation d'ensemble ($0 < t < 1 \text{ s}$)



Traction ($1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$)



2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Il s'agit d'un problème plan. On peut chercher la solution sous la forme d'une rotation rigide suivie d'une dilatation d'un facteur a dans une direction et b dans l'autre :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rotation}} \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traction}} \begin{pmatrix} b(-Y) \\ a X \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad u = \begin{pmatrix} -X & -bY \\ AX & -Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation et la déformation de Green-Lagrange sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} e_x &= \frac{a^2 - 1}{2} \\ e_y &= \frac{b^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

La relation de comportement conduit à un tenseur de contraintes lagrangiennes diagonal (avec λ et μ les coefficients de Lamé) :

$$\begin{aligned} S_{xx} &= (\lambda + 2\mu) e_x + \lambda e_y \\ S_{yy} &= \lambda e_x + (\lambda + 2\mu) e_y \\ S_{zz} &= \lambda e_x + \lambda e_y \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

On en déduit le tenseur des contraintes de Cauchy, lui aussi diagonal :

$$\sigma_x = \frac{b}{a} S_y \quad \sigma_y = \frac{a}{b} S_x \quad \sigma_z = \frac{1}{ab} S_z$$

Enfin les conditions aux limites s'écrivent :

$$\sigma_x = 0 \quad (\text{bord libre}) \quad \sigma_y = -p \quad (\text{traction})$$

On peut en outre calculer les efforts exercés sur les faces :

$$\begin{aligned} [1, 3] \quad F_y &= -\sigma_y b S_{o[1,3]} \\ [3, 4] \quad F_x &= 0 \\ [1, 2, 3, 4] \quad F_z &= \begin{cases} -\sigma_z ab S_{o[1,2,3,4]} & \text{sur le côté inférieur de la face} \\ \sigma_z ab S_{o[1,2,3,4]} & \text{sur le côté supérieur de la face} \end{cases} \end{aligned}$$

où $S_{o[]}$ représentent les surfaces initiales des faces.

2.2 Résultats de référence

On adopte comme résultats de référence les déplacements, les déformations de Grenn-Lagrange, les contraintes de Cauchy et les forces exercées sur les faces [1, 3], [3, 4] et [1, 2, 3, 4] en fin de chargement ($t = 2$ s).

On cherche p tel que la dilatation $a = 1,1$

$$\Rightarrow p = -26610.3 \text{ MPa.}$$

La dilatation b et les déplacements sont alors :

$$b = 0.9539 \quad e_x = 0.105 \quad e_y = -0.045$$

Les contraintes de Cauchy valent :

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 26610.3 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 6597.6 \text{ MPa}$$

Enfin, les forces exercées sont :

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= -25384 \quad S_{o[1,3]} \text{ N} \\ F_z &= -6.9228 \cdot 10^9 \text{ N} \quad (\text{côté inférieur}) \end{aligned}$$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

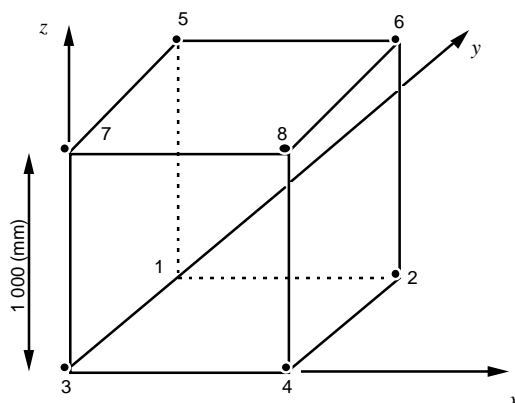
- [1] Eric LORENTZ "Une relation de comportement hyperélastique non linéaire" Note interne EDF/DER HI-74/95/011/0

Page laissée intentionnellement blanche.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA 8
1 maille QUAD4



- phase de rotation rigide $0 \leq t \leq 1$ s
 - $[3,7]$ $DX = 0$ $DY = 0$ $DZ = 0$
 - $[1,5]$ $DX = -1000 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ $DY = -1000\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2}\right)$ $DZ = 0$
 - $[2,6]$ $DZ = 0$
 - $[4,8]$ $DZ = 0$
- phase de traction : $1s \leq t \leq 2s$
 - conditions aux limites (TYPE_CHARGE : 'DIDI')
 - $[3,7]$ $\Delta DX = 0$ $\Delta DY = 0$ $DZ = 0$
 - $[1,5]$ $\Delta DY = 0$ $DZ = 0$
 - $[2,6]$ $DZ = 0$
 - $[4,8]$ $DZ = 0$
 - chargement : pression (négative) sur la face $[2, 4, 8, 6]$
(PRES_REP) : maille $[2, 4, 8, 6]$ (QUAD4) : PRES = $-26610.3 (t-1)$.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8 Nombre de mailles : 2
1 HEXA8
1 QUAD4

3.3 Fonctionnalités testées

Commande			Clés
STAT_NON_LINE	COMP_ELAS	DEFORMATION : 'GREEN'	[U4.32.01]
	EXCIT	TYPE_CHARGE : 'DIDI'	
	EXCIT	TYPE_CHARGE : 'SUIV'	
CALC_NO	OPTION : 'FORC_NODA'	GEOMETRIE : 'DEFORMEE'	[U4.61.03]
CALC_ELEM	OPTION : 'EPSG_ELNO_DEPL'		[U4.61.02]

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Les valeurs sont testées en fin de chargement ($t = 2s$)

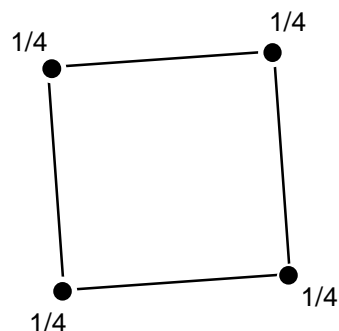
Identification	Référence	Aster	% différence
Déplacement DX (NO2)	-1953.94	-1953.92	0
Déplacement DY (NO2)	100.	100.	0
Contraintes SIXX (PG1)	0	$8 \cdot 10^{-10}$	
Contraintes SIYY (PG1)	26610.3	26610.3	0
Contraintes SIZZ (PG1)	6597.6	6597.6	0
Contraintes SIXY (PG1)	0	$\approx 10^{-26}$	
Contraintes SIXZ (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	
Contraintes SIYZ (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	
Déformation EPXX (PG1)	0.105	0.105	0
Déformation EPHY (PG1)	-0.045	-0.045	0
Déformation EPZZ (PG1)	0	$\approx 10^{-16}$	
Déformation EPXY (PG1)	0	$\approx 10^{-14}$	
Déformation EPXZ (PG1)	0	$\approx 10^{-14}$	
Déformation EPHY (PG1)	0	$\approx 10^{-16}$	
Réaction nodale DX (NO3)	0	$\approx 10^{-3}$	
Réaction nodale DY (NO3)	$-6.3462 \cdot 10^9$	$-6.3461 \cdot 10^9$	-0.001
Réaction nodale DZ (NO3)	$-1.7307 \cdot 10^9$	$-1.7307 \cdot 10^9$	0.004

4.2 Remarques

Calcul de la force nodale :

La force appliquée F sur une face décrite par une maille linéaire se répartit par :

$$F_{\text{noeud}} = \frac{1}{4} F$$



4.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.05.32

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 MW

Temps CPU User : 33.59 secondes

5 Synthèse des résultats

Il apparaît à l'issue de ce test que la solution numérique coïncide remarquablement avec la solution analytique. On remarquera cependant que la forte non linéarité due aux grandes rotations nécessite une discrétisation en temps relativement fine, sans être pénalisante sur la précision puisque, contrairement à une relation de comportement incrémentale, les erreurs ne se cumulent pas d'un pas de temps sur l'autre.