

**Manuel de Validation****Fascicule V7.90 : Références théoriques de tests en thermo-mécanique****Document V7.90.02**

# HSNV100 - Elasto-plasticité sous charge thermique

**Résumé :**

Construire la solution de référence pour tester le traitement de la relation de comportement sur une situation 0D (champ uniforme), en élasto-plasticité sous charge thermique, à déplacement imposé et température croissante. La limite d'élasticité dépend de la température. La modélisation de la géométrie peut être :

- 2D axisymétrique ou contraintes planes,
- 3D.

Cette solution correspond au test HSNV100 [V7.22.100].

## Table des matières

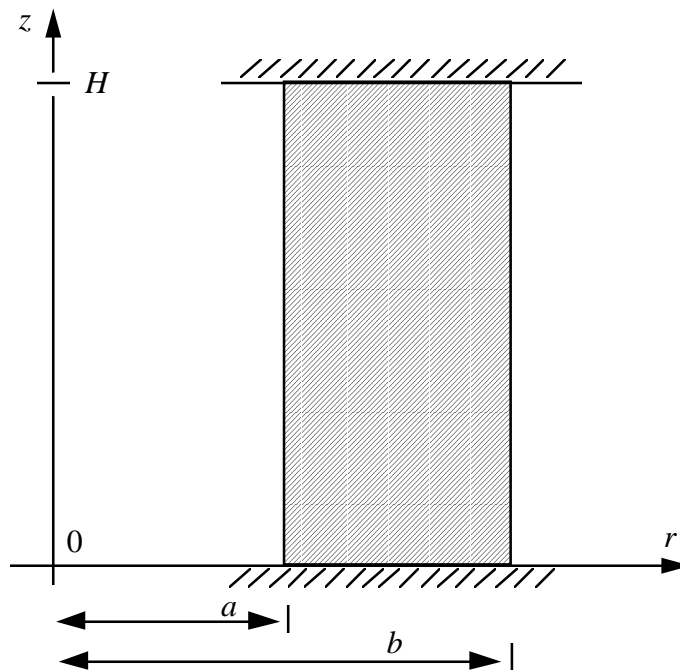
1 Présentation .....	3
2 Cinématique, équilibre .....	4
2.1 Cas axisymétrique (2D) .....	4
2.2 Cas parallélépipédique .....	4
3 Relation de comportement.....	5
4 Chargement thermique .....	6
5 Solution .....	7
5.1 Phase élastique .....	8
5.2 Phase élastoplastique .....	9
6 Application numérique.....	10

## 1 Présentation

Le problème modèle étudié est tel que la solution soit uniforme en espace, sans aucun effort extérieur donné, de manière à ne tester que le traitement de la relation de comportement.

On considère ainsi le solide suivant :

- hauteur  $H$ ,
- axisymétrique (de rayons  $a$  et  $b$ ),
- ou parallélépipédique (épaisseur  $b - a$ ).



Il est placé entre deux plateaux rigides lubrifiés.

Le matériau est thermoélastoplastique homogène (voir ci-après) à écrouissage isotrope et critère de Von Mises.

On suppose la température uniforme en espace, et croissante.

## 2 Cinématique, équilibre

### 2.1 Cas axisymétrique (2D)

Champs de déplacement :  $\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r$  (blocage en  $z$ )

$$\text{Champs de déformation : } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_r/r \end{pmatrix} \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} r \\ z \\ \theta \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Champs de contraintes : } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{cf. conditions aux limites}) \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} r \\ z \\ \theta \end{pmatrix} \right)$$

### 2.2 Cas parallélépipédique

Champs de déplacement :  $\mathbf{u} = u_x(x) \mathbf{e}_x + u_y(y) \mathbf{e}_y$  (blocage en  $z$ )

$$\text{Champs de déformation : } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_y' \end{pmatrix} \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Champs de contraintes : } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{cf. conditions aux limites}) \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \right)$$

Le cas pourra être étudié en contraintes planes et en 3D.

## 3 Relation de comportement

Ecrouissage isotrope, linéaire (module tangent  $E_T$  constant).

Critère de Von Mises.

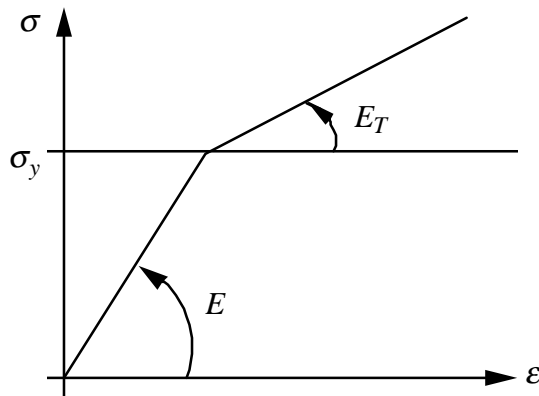
Les coefficients élastiques,  $E$  et  $\nu$ , ainsi que le module tangent  $E_T$  sont invariants suivant la température.

La limite d'élasticité  $\sigma_y$  varie selon la température  $T$  :

$$\sigma_y(T) = \sigma_y^o (1 - s(T - T^o))$$

(pour le domaine de température étudié,  $\sigma_y$  est positif !).

Le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  est constant.



$$2\mu = \frac{E}{1 + \nu}$$

$$3K = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

La loi de comportement s'écrit (variable interne scalaire  $p$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{1}{9K} \text{tr} \sigma \mathbf{Id} + \frac{1}{2\mu} \sigma^D + \epsilon^P + \alpha(T - T^o) \mathbf{Id} \\ \text{avec : } \sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \mathbf{Id} \quad (\text{déviateur des contraintes}) \\ \dot{\epsilon}^P = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^D}{\|\sigma\|_{\epsilon q}} \quad , \quad \text{avec } \|\sigma\|_{\epsilon q} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D \cdot \sigma^D} \\ \dot{p} = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma, p) = \|\sigma\|_{\epsilon q} - R(p) < 0 \\ \dot{p} \geq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma, p) = 0 \end{array} \right.$$

$R(p)$  désigne la fonction d'écrouissage :

$$R(p) = \sigma_y + \frac{E E_T}{E - E_T} p$$

Le taux  $\dot{p}$  peut être exprimé, lorsque  $f(\sigma, p) = 0$ . En effet, de  $\dot{p} f$  identiquement nul, on tire :  $\dot{p} \dot{f} + \ddot{p} f = 0$ . Ainsi, quand on est sur le critère ( $f = 0$ ), nécessairement  $\dot{f} = 0$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma^D \cdot \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\text{éq}}\|} - R_{,T} \cdot \dot{T} - R_{,p} \dot{p} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \cdot \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\text{éq}}\|} + \sigma_y^o s \dot{T} - \frac{E E_T}{E - E_T} \cdot \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{p} = \frac{E - E_T}{E E_T} \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \cdot \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\text{éq}}\|} + \sigma_y^o s \dot{T} \right) \quad \text{si } \dot{p} \geq 0, \quad \text{pour } \|\sigma\|_{\text{éq}} = R(p)$$

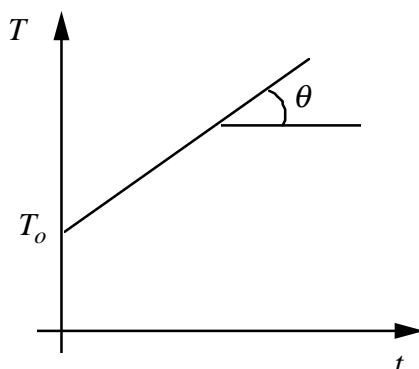
(critère atteint, en "charge")

## 4 Chargement thermique

Température uniforme en espace

$$T(t) = \theta t + T_o, \quad \theta > 0$$

$$t \in [0, t_{\text{fin}}] ; \quad \text{avec } t_{\text{fin}} < \frac{1}{s \theta}$$



Etat initial vierge :  $\sigma_L = 0$  ;  $p = 0$

## 5 Solution

Le champ de contraintes étant uniaxial, on a :

$$\sigma^D = \frac{\sigma_L}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\|\sigma\|_{\dot{\epsilon}_q} = |\sigma_L|$$

et :

$$\dot{\epsilon}^P = \frac{\dot{p}}{2} \cdot \text{sgn}(\sigma_L) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation de comportement conduit à :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_L - \frac{\dot{p}}{2} \text{sgn}(\sigma_L) + \alpha \dot{T} (= \dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{yy} \text{ pour le cas du parallélépipède}) \\ \dot{\epsilon}_{zz} = 0 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_L + \dot{p} \text{sgn}(\sigma_L) + \alpha \dot{T} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \alpha \dot{T} + \frac{1-2\nu}{2E} \cdot \dot{\sigma}_L \\ \dot{p} = \text{sgn}(\sigma_L) \cdot \left( -\alpha \dot{T} - \frac{\dot{\sigma}_L}{E} \right) = 0 \quad \text{si } |\sigma_L| < R(p) \\ \quad = \text{Max} \left[ 0; \frac{E-E_T}{E E_T} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma^D \cdot \dot{\sigma}^D}{\|\sigma\|_{\dot{\epsilon}_q}} + \sigma_y^o s \dot{T} \right) \right] \quad \text{sinon} \end{cases}$$

C'est-à-dire, dans le cas  $|\sigma_L| = R(p)$  (critère atteint) :

$$\dot{p} = \text{Max} \left[ 0; \frac{E-E_T}{E E_T} \left( \text{sgn}(\sigma_L) \cdot \dot{\sigma}_L + \sigma_y^o s \dot{T} \right) \right]$$

## 5.1 Phase élastique

Au début du chargement thermique,  $|\sigma_L|$  étant inférieur à  $\sigma_y$ ,  $\dot{p}$  est nul.

D'où :

$$\dot{\sigma}_L = -E \alpha \dot{T} ; \quad \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \alpha \dot{T}(1+\nu).$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_L = -E \alpha \theta t & (\text{compression } \sigma_L < 0) \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \alpha \theta(1+\nu) t \end{cases}$$

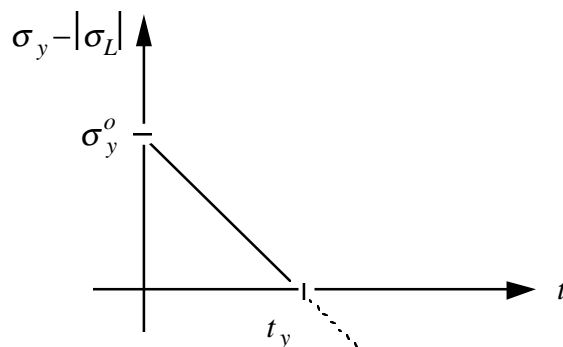
### Validité de la solution élastique

Le critère est :

$$|\sigma_L(t)| - \sigma_y(t) = E \theta t - \sigma_y^o(1 - s \theta t) \leq 0$$

Le critère n'est pas franchi pour  $t = [0, t_y]$ , avec :

$$t_y = \frac{\sigma_y^o}{\theta(E \alpha + \sigma_y^o s)}$$



A l'instant  $t_y$  :

$$\sigma_L(t_y) = -\frac{E \alpha \sigma_y^o}{E \alpha + \sigma_y^o s}$$



## 5.2 Phase élastoplastique

$t \geq t_y$ . On est sur le critère. Alors :

$$\dot{p} = \text{Max} \left[ 0 ; \frac{E - E_T}{E E_T} \left( \dot{\sigma}_L \text{sgn}(\sigma_L) + \sigma_y^o s \dot{T} \right) \right]$$

En admettant que l'on soit "en charge" ( $\dot{p} > 0$ ), alors on élimine  $\dot{p}$  pour avoir :

$$\dot{\sigma}_L = -E_T \cdot \dot{T} \left( \alpha + \text{sgn}(\sigma_L) \cdot \frac{E - E_T}{E E_T} s \sigma_y^o \right)$$

puis :

$$\dot{p} = \frac{E - E_T}{E} \cdot \dot{T} \left( -\alpha \text{sgn}(\sigma_L) + \frac{s \sigma_y^o}{E} \right)$$

A  $t = t_y$ ,  $\sigma_L = -E \alpha \theta t_y < 0$  ; on intègre alors ces expressions pour  $t \geq t_y$  ( $\dot{T} = \theta$ ) :

$$\begin{cases} \sigma_L(t) = -E_T \theta (t - t_y) \left[ \alpha - \frac{E - E_T}{E E_T} s \sigma_y^o \right] - \sigma_L(t_y) \\ p(t) = \frac{E - E_T}{E^2} \cdot \theta \left[ \alpha E + s \sigma_y^o \right] (t - t_y) \end{cases}$$

Soit, après réarrangement, ( $t \geq t_y$ ) :

$$\begin{cases} \sigma_L(t) = \sigma_y^o \left( s \theta t - 1 + \frac{E_T}{E} \left( 1 - \frac{t}{t_y} \right) \right) \\ p(t) = \frac{\sigma_y^o (E - E_T)}{E^2} \left( \frac{t}{t_y} - 1 \right) \end{cases}$$

### Validité de cette solution élastoplastique

Il faut s'assurer que  $\sigma_L(t)$  reste négatif. Sachant que  $s \theta t < 1$ , et que  $t > t_y$ , le résultat précédent confirme que  $\sigma_L(t) < 0$ .

Enfin, on remarque que :

$$\text{sgn}(\sigma_L) \frac{1 - 2\nu}{2} \dot{p} + \dot{\epsilon}_{rr} = \alpha(1 + \nu) \dot{T}$$

d'où :

$$\varepsilon_{rr}(t) = \varepsilon_{\theta\theta}(t) = \alpha \theta (1 + \nu) t + \frac{1 - 2\nu}{2} p(t) \quad , \quad \forall t \in [t_y, t_{fin}]$$

(puisque  $\sigma_L(t) < 0$ ).

## 6 Application numérique

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 200\,000 \text{ MPa} \quad ; \quad \nu = 0,3 \quad ; \quad \alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad ; \quad \theta = 1,0 \text{ s}^{-1} \\ \sigma_y^o = 400 \text{ MPa} \quad ; \quad T^o = 0 \text{ }^\circ\text{C} \quad ; \quad s = 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad ; \quad t_{fin} < 100 \text{ s} \\ E_T = 50\,000 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} t_y = 66.6666 \text{ s} \\ \sigma_L(t_y) = -133.333 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{rr}(t_y) = \varepsilon_{\theta\theta}(t_y) = 0.866666 \cdot 10^{-3} \end{array} \right\} \text{ phase élastique}$$

Puis, phase élastoplastique :

$$\begin{array}{ll} \text{à } t = 80 \text{ s :} & \begin{array}{l} \sigma_L(80) = -100.0 \text{ MPa} \\ p(80) = 0.3000 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{rr}(80) = \varepsilon_{\theta\theta}(80) = 1.100 \cdot 10^{-3} \end{array} \\ \text{à } t = 90 \text{ s :} & \begin{array}{l} \sigma_L(90) = -75.00 \text{ MPa} \\ p(90) = 0.5250 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_{rr}(90) = \varepsilon_{\theta\theta}(90) = 1.275 \cdot 10^{-3} \end{array} \end{array}$$