

Manuel de Validation**Fascicule V6.02 : Statique non linéaire des structures linéiques****Document : V6.02.125**

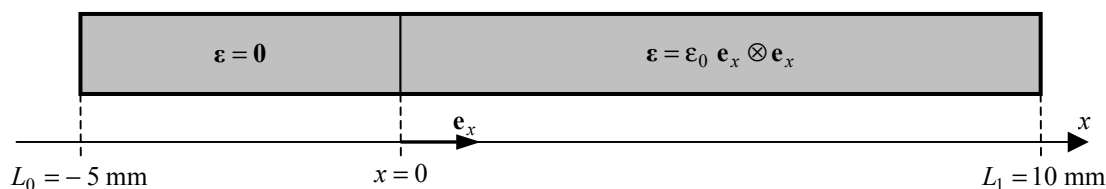
SSNL125 - Traction d'un barreau fragile : endommagement à gradient

Résumé :

Ce test permet la validation de la loi d'endommagement fragile à gradient dans une situation unidimensionnelle non homogène. De par son caractère 1D, ce problème admet une solution analytique qui exhibe deux régimes de couches limites : l'une de longueur finie (existence d'une frontière libre entre la zone endommagée et la zone saine) et l'autre de longueur infinie (elle s'étend jusqu'à la frontière de la pièce).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



La structure étudiée est une barre de 15 mm de long. Le problème étant purement 1D, sa section est sans influence.

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau obéit à une loi de comportement élastique fragile (ENDO_FRAGILE) à gradient d'endommagement (modélisation *_GRAD_VARI).

ELAS	ECRO_LINE	NON_LOCAL
E = 20 000 Mpa	SY = 2 Mpa	LONG_CARA = 5.099 mm
NU = 0	D_SIGM_EPSI = - 20 000 MPa	

1.3 Conditions de chargement

On impose à la partie gauche de la barre (5 mm de long) de rester rigide (blocage des degrés de liberté de déplacement). Quant à la partie droite de la barre, elle est soumise à une déformation axiale uniforme ε_0 , c'est-à-dire à un déplacement imposé dont la distribution spatiale est linéaire. Un seul paramètre contrôle donc l'intensité du chargement : le niveau de déformation imposée ε_0 .

Dans les directions perpendiculaires à l'axe de la barre, les déplacements sont bloqués : le problème est purement 1D. En outre, comme le coefficient de Poisson est nul, aucune contrainte de bridage ne se développe dans ces directions.

2 Solution de référence

Dans le cas de la loi de comportement à gradients d'endommagement [R5.03.18], deux équations aux dérivées partielles doivent être résolues : l'équation d'équilibre et l'équation de comportement. Obtenir une solution analytique s'avère généralement délicat, même pour des structures unidimensionnelles. Pour valider néanmoins ce modèle, on s'attache à un problème plus simple pour lequel l'équation d'équilibre n'a pas besoin d'être résolue, c'est-à-dire que le champ de déplacement est fixé partout. L'équation de comportement est alors pilotée par l'énergie de déformation élastique w connue en tout point de l'espace.

2.1 Caractérisation de la solution

Plus précisément, on considère une barre dont une partie est astreinte à demeurer sans déformation tandis que l'autre est soumise à une déformation homogène. On étudie alors la couche limite d'endommagement qui se développe à l'interface de ces deux zones. L'équation différentielle de comportement est la suivante dans les zones où le critère est atteint, c'est-à-dire là où l'endommagement évolue :

$$w = k(d) - c \frac{\partial^2 d}{\partial \hat{x}^2} \quad \text{où} \quad k(d) = w^y \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma - d} \right)^2 \quad \text{éq 2.1-1}$$

où w^y , γ et c sont des paramètres du matériau, voir à nouveau [R5.03.18] pour la correspondance avec les grandeurs fournies dans `DEFI_MATERIAU`, tandis que \hat{x} désigne la variable d'espace. On normalise dorénavant les variables du problème en introduisant :

$$e = \frac{w}{w^y (1 + \gamma)^2} \quad x = \hat{x} (1 + \gamma) \sqrt{\frac{2 w^y}{c}} \quad a = 1 + \gamma - d \quad \text{éq 2.1-2}$$

Moyennant ces changements de variables, l'équation de comportement s'écrit :

$$e(x) = \frac{1}{a^2} + 2 \frac{d^2 a}{dx^2} \quad \text{éq 2.1-3}$$

On reconnaît là une équation de mouvement dans un champ gravitationnel sous une force imposée. Elle admet une intégrale première dans chacune des deux zones de la barre (indiquée par i) :

$$\left(\frac{da}{dx} \right)^2 - \frac{1}{a} - e_i a = C_i \quad i \in \{0, 1\} \quad e_0 = 0 \quad e_1 = e \quad \text{éq 2.1-4}$$

A ces deux constantes d'intégration C_i viennent s'ajouter deux autres constantes résultant de l'intégration de [éq 2.1-4]. Ces quatre constantes sont fixées par les deux conditions de bord et les conditions de saut à l'interface :

$$\frac{da}{dx}(L_0) = \frac{da}{dx}(L_1) = 0 \quad a(0^+) - a(0^-) = 0 \quad \frac{da}{dx}(0^+) - \frac{da}{dx}(0^-) = 0 \quad \text{éq 2.1-5}$$

On substitue dès maintenant aux deux constantes d'intégration C_i les deux valeurs extrêmes du champ d'endommagement $a_0 = a(L_0)$ et $a_1 = a(L_1)$ en évaluant l'intégrale première [éq 2.1-4] en L_0 et L_1 :

$$C_0 = -\frac{1}{a_0} \quad C_1 = -\frac{1}{a_1} - e a_1 \quad \text{éq 2.1-6}$$

2.2 Résolution du problème dans la zone déchargée

Dans la zone à déformation nulle ($i = 0$), l'intégrale première [éq 2.1-4] apparaît comme une équation différentielle à variable séparable. Compte-tenu de [éq 2.1-6] et de la définition de a_0 , son intégration conduit dans un premier temps à l'équation implicite suivante :

$$x = L_0 - \int_{a_0}^{a(x)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_0} \right)^{-1/2} d\alpha \quad \text{éq 2.2-1}$$

En particulier, en $x = 0$, on obtient :

$$L_0 = \int_{a_0}^{a(0)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_0} \right)^{-1/2} d\alpha \quad \text{éq 2.2-2}$$

Comme il s'agit d'une intégrale propre en a_0 , le second membre a une valeur finie. De plus, l'intégrande étant positive et $a(0)$ minorée par γ , la valeur ultime du champ a (qui correspond à un endommagement total $d = 1$), on observe que L_0 est borné par :

$$|L_0| \leq \int_{a_0}^{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_0} \right)^{-1/2} d\alpha \quad \text{éq 2.2-3}$$

Par conséquent, si la longueur de la zone non chargée est plus grande que cette borne, la solution [éq 2.2-1] n'est plus valide. Cela provient du fait qu'on a supposé que le critère était atteint partout pour écrire l'équation [éq 2.1-1].

Dorénavant, on suppose que la longueur $|L_0|$ est supérieure à la borne [éq 2.2-3]. La couche limite se développe sur une distance finie b_0 totalement incluse dans cette zone. Il s'agit d'une nouvelle inconnue, mais la valeur extrême de l'endommagement a_0 est maintenant connue : en effet, par continuité avec la zone non endommagée qui s'étale de L_0 à b_0 , on a :

$$a_0 = 1 + \gamma \quad \text{éq 2.2-4}$$

Finalement, l'équation [éq 2.2-1] doit être corrigée ; elle s'écrit :

$$x = b_0 - \int_{1+\gamma}^{a(x)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1+\gamma} \right)^{-1/2} d\alpha \quad \text{éq 2.2-5}$$

En exprimant à nouveau cette équation en $x = 0$, on exprime b_0 en fonction de $a(0)$:

$$b_0 = \int_{1+\gamma}^{a(0)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1+\gamma} \right)^{-1/2} d\alpha \quad \text{éq 2.2-6}$$

Finalement, en substituant [éq 2.2-6] dans [éq 2.2-5], on obtient l'équation implicite suivante :

$$x = - \int_{a(0)}^{a(x)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1+\gamma} \right)^{-1/2} d\alpha = (1+\gamma)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\sqrt{\alpha(1+\gamma-\alpha)}}{1+\gamma} - \arccos \sqrt{\frac{1+\gamma-\alpha}{1+\gamma}} \right]_{a(0)}^{a(x)} \quad \text{éq 2.2-7}$$

Ainsi, il apparaît que le profil d'endommagement est totalement piloté par sa valeur en 0, c'est-à-dire, compte-tenu de la condition de continuité [éq 2.1-5], par ce qui se passe dans la zone chargée.

2.3 Résolution du problème dans la zone chargée

Dans la zone à déformation nulle ($i = 1$), l'intégrale première [éq 2.1-4] apparaît également comme une équation différentielle à variable séparable. Compte-tenu de [éq 2.1-6] et de la définition de a_1 , son intégration conduit dans un premier temps à l'équation implicite suivante (moyennant le changement de variable $u = a - a_1$) :

$$x = L_1 - \int_0^{a(x)-a_1} \left[\frac{a_1 (a_1 + u)}{e a_1 u^2 + (e a_1^2 - 1)u} \right]^{1/2} du \quad \text{éq 2.3-1}$$

A nouveau, il s'agit d'une intégrale propre, excepté dans le cas $e a_1^2 = 1$, c'est-à-dire l'endommagement correspondant à la sollicitation e dans un problème homogène. Cela signifie que l'endommagement extrême a_1 est d'autant plus proche de la solution homogène que la barre est longue : la couche limite dans la zone chargée est non bornée et s'étend asymptotiquement vers la réponse homogène.

En exprimant l'équation [éq 2.3-1] en $x = 0$, on obtient une équation permettant de déterminer a_1 en fonction de $a(0)$:

$$L_1 = \int_0^{a(0)-a_1} \left[\frac{a_1 (a_1 + u)}{e a_1 u^2 + (e a_1^2 - 1)u} \right]^{1/2} du \quad \text{éq 2.3-2}$$

Toutefois, pour simplifier la résolution analytique de ce problème, on suppose dorénavant que la barre est suffisamment longue, de sorte qu'une solution approchée de [éq 2.3-2] est donnée par :

$$e a_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = e^{-1/2} \quad \text{éq 2.3-3}$$

Quant au profil d'endommagement dans la zone chargée, il est lui aussi totalement paramétré par $a(0)$, puisqu'en combinant [éq 2.3-1], [éq 2.3-2] et [éq 2.3-3] on obtient :

$$x = \int_{a(x)}^{a(0)} \frac{a_1 \alpha^{1/2}}{\alpha - a_1} d\alpha = 2a_1 \left[\sqrt{\alpha} - \sqrt{a_1} \arg \tanh \sqrt{\frac{a_1}{\alpha}} \right]_{a(x)}^{a(0)} \quad \text{éq 2.3-4}$$

2.4 Détermination de l'endommagement à l'interface

Revenons sur la démarche d'intégration. Initialement, nous attendions quatre constantes d'intégration : C_0 , C_1 et les deux résultant de l'intégration des intégrales premières [éq 2.1-4]. Puis, aux deux constantes C_0 et C_1 ont été substituées les deux valeurs extrêmes de l'endommagement a_0 et a_1 , elles aussi inconnues. En exploitant les conditions aux limites de Neumann dans [éq 2.1-6], on a implicitement déterminé les deux constantes d'intégration complémentaires pour n'exprimer les profils d'endommagement qu'en fonction des seules valeurs a_0 et a_1 , voir les équations [éq 2.2-1] et [éq 2.3-1]. Finalement, on a substitué aux constantes a_0 et a_1 la valeur de l'endommagement à l'interface $a(0)$, égale à gauche et à droite puisque le saut de a_y est nul. Cette substitution s'est opérée en remarquant que la zone endommagée est de taille finie dans la zone déchargée, contrairement à la zone chargée où nous avons privilégié une solution approchée, plus simple sur le plan analytique.

Par conséquent, il ne reste plus qu'une constante d'intégration à déterminer, l'endommagement à l'interface $a(0)$ grâce à la dernière condition inutilisée, la nullité du saut des dérivées à l'interface.

Ainsi, en évaluant les deux intégrales premières en $x = 0$ et en calculant leur différence, on obtient :

$$e a(0) = e a_1 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0} \quad \text{éq 2.4-1}$$

En tenant compte des expressions [éq 2.2-4] et [éq 2.3-3], on en déduit l'expression de l'endommagement à l'interface :

$$a(0) = \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e(1+\gamma)} \quad \text{éq 2.4-2}$$

2.5 Application numérique

Pour l'élasticité, l'écroutissage et la longueur interne, on adopte les caractéristiques suivantes :

$$\begin{array}{llll} E = 2.10^4 \text{ MPa} & \sigma^y = 2 \text{ MPa} & L_b = \sqrt{26} \text{ mm} & \text{éq 2.5-1} \\ \nu = 0 & E^T = -2.10^4 \text{ MPa} & & \end{array}$$

Ces choix conduisent aux paramètres suivants dans l'équation différentielle [éq 2.1-1] :

$$w^y = 10^{-4} \text{ MPa} \quad \gamma = 1 \quad c = 8.10^{-4} \text{ N} \quad \text{éq 2.5-2}$$

Quant à la normalisation, elle devient :

$$x = \hat{x} \quad a = 2 - d \quad w = 4.10^{-4} e \quad \text{éq 2.5-3}$$

La charge évolue entre la valeur d'initiation de l'endommagement et celle pour laquelle l'endommagement atteindrait sa valeur maximale $d = 1$ dans un contexte homogène. Cela se traduit pour la déformation imposée :

$$\frac{1}{4} \leq e \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 10^{-4} \leq \varepsilon \leq 2.10^{-4} \quad \text{éq 2.5-4}$$

2.6 Résultats de référence

La solution de référence est obtenue en prenant une barre de longueur $L_0 = -5$ et $L_1 = 10$. On examine la valeur du champ d'endommagement d pour trois niveaux de chargement et en deux endroits, l'un dans la zone déchargée, l'autre dans la zone chargée.

ε	E	$d(x = -1)$	$d(x = 1)$
$1.414 \cdot 10^{-4}$	0.50	0.0251	0.3437
$1.732 \cdot 10^{-4}$	0.75	0.1106	0.6045
$2.000 \cdot 10^{-4}$	1.00	0.1877	0.7897

Table 2.6-1 - Résultats de référence

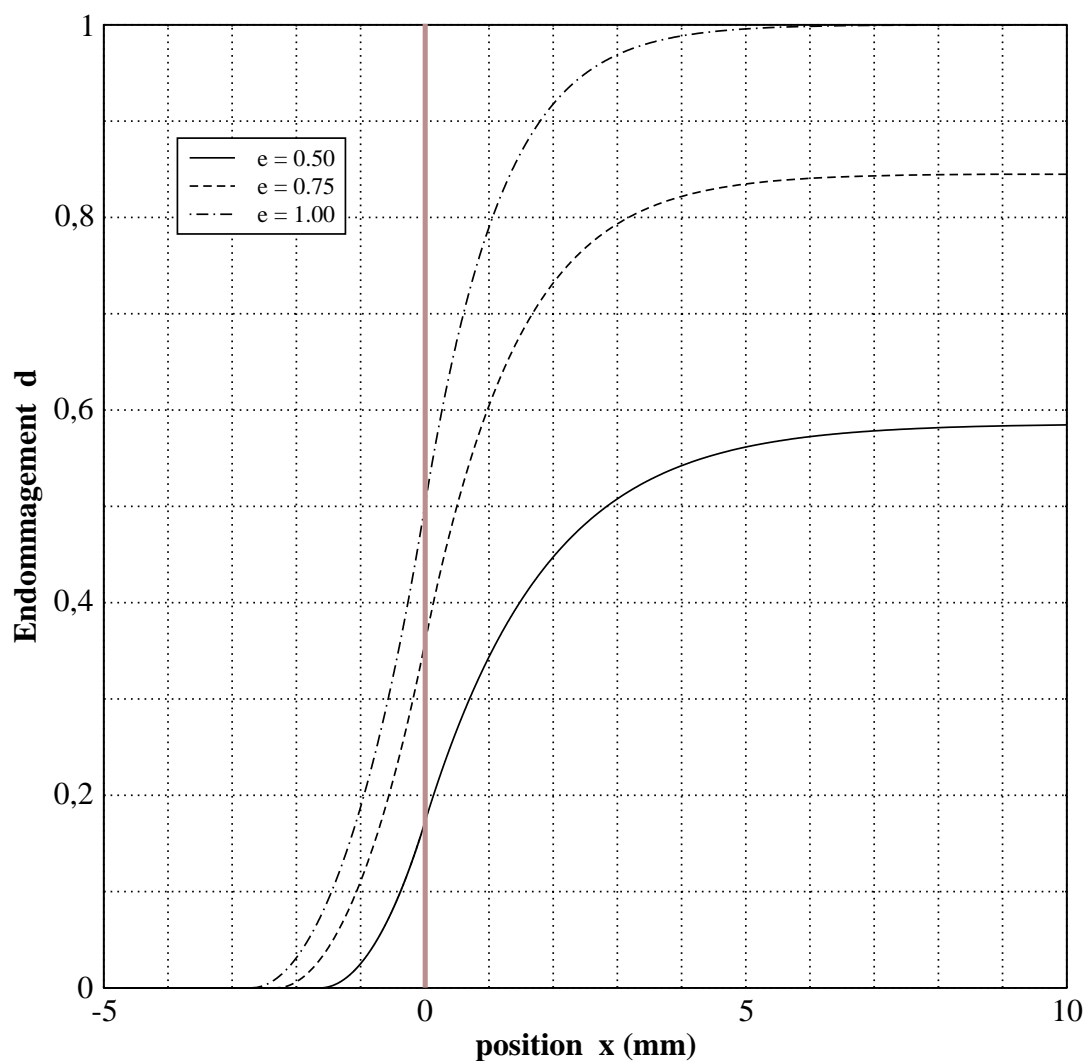


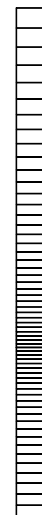
Figure 2.6-a : Profil d'endommagement pour la solution de référence

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation et du maillage

Il s'agit d'une modélisation axisymétrique (AXIS_GRAD_VARI). La géométrie correspondante est un rectangle, c'est-à-dire que le barreau est disposé de manière verticale et sa section (sans influence) est circulaire.

Le maillage est constitué d'un seul élément selon le rayon. Selon l'axe, les plus petits éléments ont une taille de 0.1 mm le long de l'interface et croissent en progression géométrique de raison 1.05 en s'éloignant de l'interface. Le maillage ainsi engendré est finalement constitué de 59 éléments quadrangulaires à 8 nœuds.



4 Résultats de la modélisation A

4.1 Grandeurs testées et résultats

On valide la modélisation et l'algorithme d'intégration de lois non locales en examinant le niveau d'endommagement (variable interne V1) aux différents niveaux de chargement et aux différents lieux géométriques listés dans la [Table 2.6-1]. Les résultats sont réunis dans l'extrait du fichier de résultat ci-dessous.

Identification	Instant	Référence	Aster	Différence
$V1(x = -1)$	$1.414 \cdot 10^{-4}$	2.51000000000000E-02	2.5300980013184E-02	0.801 %
$V1(x = -1)$	$1.414 \cdot 10^{-4}$	3.43700000000000E-01	3.4334039567418E-01	-0.105 %
$V1(x = -1)$	$1.732 \cdot 10^{-4}$	1.10600000000000E-01	1.1070787251591E-01	0.098 %
$V1(x = -1)$	$1.732 \cdot 10^{-4}$	6.04500000000000E-01	6.0422953501431E-01	-0.045 %
$V1(x = -1)$	$2 \cdot 10^{-4}$	1.87700000000000E-01	1.8805237130425E-01	0.188 %
$V1(x = -1)$	$2 \cdot 10^{-4}$	7.89700000000000E-01	7.8950184194123E-01	-0.025 %

5 Synthèse des résultats

On note un très bon accord entre la modélisation et la solution analytique.