

Manuel de Validation

Fascicule V3.01 : Statique linéaire des structures linéiques

Document : V3.01.111

SLL111 - Réponse statique d'une poutre béton armé (section en T) à comportement linéaire

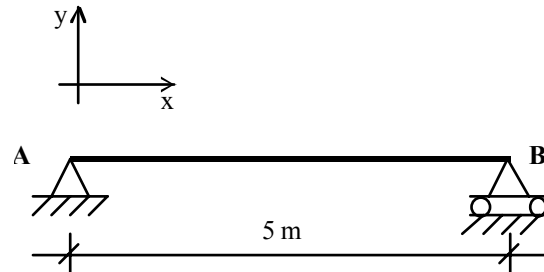
Résumé :

Le problème consiste à analyser la réponse d'une poutre en béton armé par l'intermédiaire d'une modélisation poutre multifibre. Ce test correspond à une analyse statique d'une poutre ayant un comportement linéaire. Trois cas de charge successifs sont testés : une force ponctuelle, le poids propre et une élévation de température. Pour le premier cas de charge, deux maillages de la section, l'un grossier et l'autre plus fin sont testés.

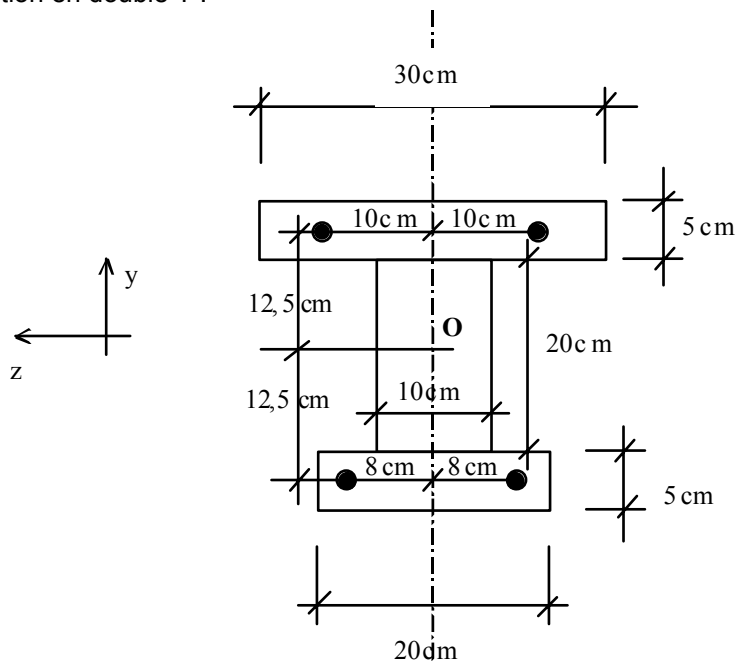
1 Caractéristiques générales

1.1 Géométrie

Poutre en flexion trois points, définie par :



Avec une section en double T :



Sur ce schéma, O est situé à mi-hauteur de la section.

La section totale des aciers supérieurs est $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ et celle des aciers inférieurs est $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

1.2 Propriétés de matériaux

- béton : $E = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$; $\nu = 0.2$; $\rho = 2400 \text{ kg.m}^{-3}$; $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- acier : $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$; $\nu = 0.33$; $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$; $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

1.3 Conditions aux limites

Appui simple en B : $dy = 0$

Appui "double" en A : $dx = dy = dz = 0$ de même que $rx = ry = 0$.

1.4 Chargements

Trois cas de charge sont testés successivement :

Chargement 1 : effort concentré au milieu de la poutre, $F = 10000 \text{ N}$

Chargement 2 : poids propre de la poutre, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

Chargement 3 : échauffement homogène de la poutre $\Delta T = 100 \text{ K}$

2 Solution de référence

Les calculs de référence sont effectués à partir d'un simple calcul élastique en RdM.

2.1 Centre élastique

En flexion simple, pour un comportement élastique, l'axe neutre passe par le centre élastique (barycentre des sections pondéré par les modules des matériaux) :

$$C \text{ tel que } \int_S E \overrightarrow{CM} dS = \vec{0}$$

On détermine d'abord la position des centres de gravité du béton seul G_b et de l'acier seul G_a par rapport au point O.

$$y_{G_b} = \frac{0,125 \times 0,3 \times 0,05 - 0,125 \times 0,2 \times 0,05}{0,2 \times 0,05 + 0,1 \times 0,2 + 0,3 \times 0,05} = 1,38888 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$y_{G_a} = \frac{0,125 \times 3 - 0,125 \times 4}{3 + 4} = -1,78571 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$z_{G_a} = z_{G_b} = 0 \text{ m}$$

On peut ensuite déterminer la position par rapport à O du centre élastique C.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{E_a S_a \overrightarrow{OG_a} + E_b S_b \overrightarrow{OG_b}}{E_a S_a + E_b S_b}$$

La section de béton S_b est $0,045 \text{ m}^2$ et la section d'acier S_a est $7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Le module d'Young du béton est $2 \cdot 10^{10} \text{ MPa}$ et celui de l'acier $21 \cdot 10^{10} \text{ MPa}$. On a donc

$$y_C = \frac{2 \times 0,045 \times 1,38888 - 21 \times 7 \cdot 10^{-4} \times 1,78571}{2 \times 0,045 + 21 \times 7 \cdot 10^{-4}} = 0,94317 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$z_C = 0 \text{ m}$$

2.2 Moments quadratiques

Les moments quadratiques des sections rectangulaires de béton sont calculées par la formule suivante :

$$\frac{bh^3}{12} + b \times h \times d^2$$

Où, b représente la largeur, h la hauteur et d la distance du centre de gravité de la section par rapport à l'axe pour lequel on calcule le moment.

On obtient alors le moment quadratique de la section de béton par rapport à l'axe z passant par le centre élastique :

$$I_{\text{béton}} = \frac{0,3 \times 0,05^3}{12} + (0,3 \times 0,05) (0,125 - 0,94317 \cdot 10^{-2})^2 + \frac{0,1 \times 0,2^3}{12} + (0,1 \times 0,2) (0,94317 \cdot 10^{-2})^2$$

$$+ \frac{0,2 \times 0,05^3}{12} + (0,2 \times 0,05) (0,125 + 0,94317 \cdot 10^{-2})^2 = 0,4547 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Les inerties des aciers sont calculées par la formule suivante :

$$\frac{\pi\phi^4}{64} + S \times d^2 \approx S \times d^2$$

Où, ϕ représente le diamètre de l'acier, S la section d'acier et d la distance du centre de gravité de la section par rapport à l'axe pour lequel on calcule le moment. Le diamètre des aciers étant petit, on néglige le premier terme.

On obtient alors le moment quadratique des sections d'acier par rapport à l'axe z passant par le centre élastique :

$$3.10^{-4} \times (0,125 - 0,94317.10^{-2})^2 + 4.10^{-4} \times (0,125 + 0,94317.10^{-2})^2 = 0,1124.10^{-4} \text{ m}^4$$

Pour la section complète de la poutre, le moment quadratique pondéré par les modules d'Young des matériaux est :

$$EI = 2.10^{10} \times 0,4547.10^{-3} + 21.10^{10} \times 0,1124.10^{-4} = 11,4544.10^6 \text{ Pa.m}^4$$

2.3 Cas de charge 1

Pour le cas de charge 1 (charge concentrée au milieu de la poutre), la flèche est calculée par la formule de RDM suivante :

$$f = \frac{F \times l^3}{48EI}$$

Ce qui donne la flèche :

$$f = \frac{10000 \times 5^3}{48 \times 11,4544.10^6} = 2,2735.10^{-3} \text{ m}$$

On peut également calculer les efforts généralisés suivants :

- l'effort tranchant au début de la poutre (partie gauche) vaut $\frac{F}{2} = 5000 \text{ N}$,
- le moment fléchissant au milieu de la poutre vaut : $\frac{F \times l}{4} = 1,25.10^4 \text{ N.m}$.

2.4 Cas de charge 2

Pour le cas de charge 2 (poids propre de la poutre), la flèche est calculée par la formule de RDM suivante :

$$f = \frac{5 \times p \times l^4}{384 EI}$$

où p est la charge linéique due au poids des matériaux :

$$p = g(\rho_a S_a + \rho_b S_b) = 9,8 \times (2800 \times 7.10^{-4} + 2400 \times 0,045) = 1111,9 \text{ N.m}^{-1}$$

Ce qui donne la flèche :

$$f = \frac{5 \times 1111,9 \times 5^4}{384 \times 11,4544.10^6} = 7,9.10^{-4} \text{ m}$$

2.5 Cas de charge 3

Pour le cas de charge 3 (élévation homogène de température), la poutre étant isostatique et les coefficients de dilatation du béton et de l'acier étant identiques, la solution est simple :

Les contraintes et efforts généralisés sont nuls.

L'allongement de la poutre est : $\Delta l = \alpha \times l \times \Delta T$

Ce qui donne avec les valeurs de notre cas :

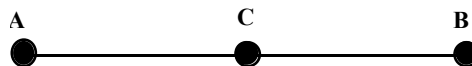
$$\Delta l = 10^{-5} \times 5 \times 100 = 5.10^{-3} \text{ m}$$

3 Modélisation

3.1 Caractéristiques de la modélisation

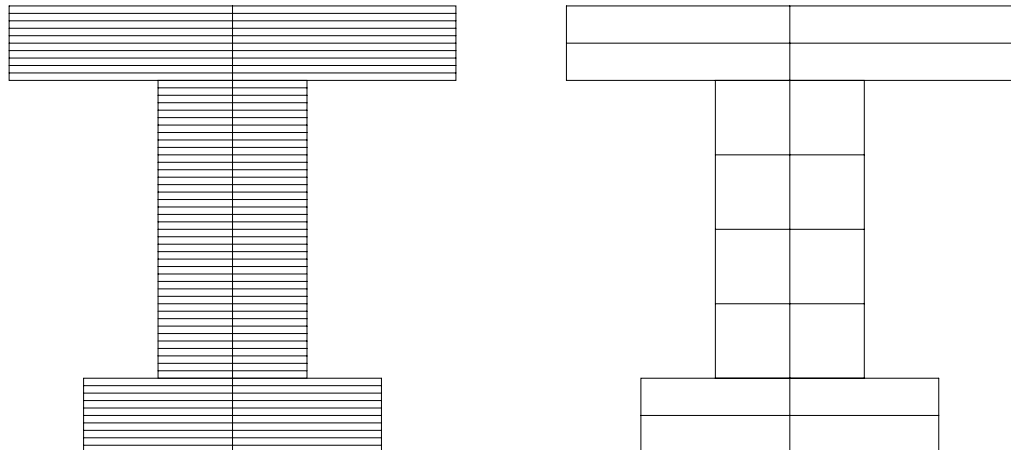
Maillage longitudinal de la poutre :

Nous avons 3 nœuds et deux éléments (POU_D_EM).



La partie béton de la section transversale de la poutre est maillée (AFFE_SECT) tandis que les aciers sont donnés directement sous forme de 4 fibres ponctuelles dans AFFE_CARA_ELEM (AFFE_PONCT).

Deux maillages de la partie béton sont testés pour le cas de charge 1. Le maillage fin est constitué de 120 fibres et le maillage grossier est constitué de 16 fibres :



Remarque :

Le problème étant 2D, une seule fibre dans la largeur pourrait sembler suffisante (multicouches), mais cela conduirait à avoir des termes nuls dans la matrice de rigidité (l'inertie propre des fibres n'étant pas prise en compte) et à une erreur lors de la résolution du système d'équations.

Titre : SLL111 - Eléments de poutre multifibre (droites)
Auteur(s) : S. MOULIN, L. DAVENNE, F. GATUINGT

Date : 05/11/02
Clé : V3.01.111-A Page : 6/8

3.2 Fonctionnalités testées

Commandes

CREA_MALLAGE	CREA_GROUP_MA		
AFFE_MODELE	MAILLAGE	'MECANIQUE'	'POU_D_EM'
DEFI_MATERIAU		'ELAS'	
AFFE_MATERIAU		GROUP_MA	
		MATER	
AFFE_CARA_ELEM	POUTRE	GROUP_MA	
		SECTION	
	ORIENTATION	GROUP_MA	
		CARA	'ANGL_VRIL'
	AFFE_SECT	GROUP_MA	
		MAILLAGE_SECT	
		TOUT_SECT	'OUI'
		COOR_AXE_POUTRE	
		NOM	
	AFFE_FIBRE	GROUP_MA	'SURFACE'
		CARA	
		VALE	
		COOR_AXE_POUTRE	
		NOM	
AFFE_CHAR_MECA	MODELE		
	DDL_IMPO	GROUP_NO	
	FORCE_NODALE	GROUP_NO	
	PESANTEUR		
	TEMP_CALCULEE		
MECA_STATIQUE	MODELE		
	CHAM_MATER		
	CARA_ELEM		
	EXCIT	CHARGE	
CALC_ELEM	REUSE		
	RESULTAT		
	MODELE		
	CHAM_MATER		
	CARA_ELEM		
	OPTION	EFGE_ELNO_DEPL	
	EXCIT		
CALC_NO	REUSE		
	RESULTAT		
	OPTION	EFGE_NOEU_DEPL	

4 Résultats

4.1 Cas de charge 1

	Référence	Modélisation Ar	Erreur relative %
Flèche (maillage fin)	$2,2735 \cdot 10^{-3}$	$2,2740 \cdot 10^{-3}$	0,02
Flèche (maillage grossier)	$2,2735 \cdot 10^{-3}$	$2,2956 \cdot 10^{-3}$	1,0 ⁽¹⁾
Effort tranchant (appuis A)	5000	2500	0,0 ⁽²⁾
Moment fléchissant (Milieu)	$1,25 \cdot 10^4$	$6,25 \cdot 10^3$	0,0 ⁽²⁾

- 1) Les calculs sont effectués sans prendre en compte l'inertie propre de chaque fibre. Les résultats montrent qu'il n'est néanmoins pas très utile d'en tenir compte car la différence entre un maillage grossier et un maillage fin n'est pas flagrante.
Le maillage de la section n'a pas besoin d'être très fin pour avoir des résultats précis (en élasticité).
- 2) L'option `EFGE_NOEU_DEPL` utilisée pour calculer les efforts généralisés aux nœuds fait une moyenne des efforts généralisés de tous les éléments connectés au nœud. Dans notre cas, nous avons 2 éléments de poutre superposés (un pour le béton, un pour l'acier), les efforts calculés sont donc divisés par 2.
Si l'on additionne les valeurs d'efforts par élément (`EFGE_ELNO_DEPL`) de l'élément béton et de l'élément acier, on retrouve bien les valeurs théoriques.

Remarque :

Si on fait un calcul de flèche en prenant O (mi-hauteur) comme axe de référence à la place du centre élastique (`COOR_AXE_POUTRE`), l'erreur relative sur la flèche est de 0,2% (car ici le centre élastique est pratiquement à mi-hauteur (voir 1.2.1)).

4.2 Cas de charge 2

	Référence	Modélisation Ar	Erreur relative %
Flèche (maillage fin)	$7,900 \cdot 10^{-4}$	$7,902 \cdot 10^{-4}$	0,02

4.3 Cas de charge 3

	Référence	Modélisation Ar	Erreur relative %
Allongement	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$	0,0
Efforts	0,00	0,00	0,0

5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats de référence.