

Manuel de Validation**Fascicule V2.01 : Dynamique linéaire des systèmes discrets****Document V2.01.104**

SDLD104 - Extrapolation de mesures locales sur un modèle complet (discret)

Résumé :

Il s'agit d'un test de dynamique linéaire discret.

Le but est de tester la commande `PROJ_MESU_MODAL` dans le cas d'un système discret. Cette commande permet de projeter des réponses transitoires dynamiques expérimentales en un certain nombre de points sur une base modale d'une modélisation numérique.

Ce test contient 2 modélisations :

- la projection se fait sur un concept de base modale de type `[mode_meca]`,
- la projection se fait sur un concept de base modale de type `[base_modale]`.

Pour les 2 modélisations, les mesures expérimentales fournies sont identiques et permettent de tester la recherche des nœuds en vis-à-vis, la prise en compte d'une orientation locale et le traitement d'un échantillonnage en temps constant ou non, pour des mesures en déplacement.

Dans les deux cas, la solution de référence est déterminée analytiquement (par Maple) ; la projection est réalisée dans la configuration favorable où le nombre de modes est égal au nombre de mesures.

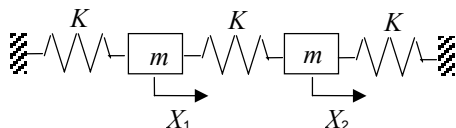
Les réponses en déplacement obtenues après projection sont identiques aux déplacements de référence fournis en données.

Les valeurs des vitesses et des accélérations déduites des déplacements obtenus après projection sont proches de celles obtenues analytiquement. Les faibles écarts constatés sont dus aux erreurs d'approximation engendrées par la détermination via un schéma linéaire en temps des vitesses et accélérations.

1 Problème de référence

1.1 Description du système

Nous considérons le système représenté par le schéma ci-dessous :



1.2 Masses et rigidité

Les trois ressorts sont de rigidité identique : $k = 1000$ N/m.

Les deux masses sont égales à $m = 10$ kg.

1.3 Conditions aux limites et chargement

Les deux extrémités sont encastrées.

Le chargement est une force axiale en traction appliquée sur la masse m_1 , sinusoïdale en fonction du temps, de pulsation ω .

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution analytique de ce problème est présentée ci-dessous.

- Modes et fréquences de vibration :
Le système suivant caractérise la dynamique des masses :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.1-1}$$

Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.1-2}$$

Les 2 fréquences propres du système sont donc données par :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \text{éq 2.1-3}$$

et les déformations modales associées sont :

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{éq 2.1-4}$$

Les matrices généralisées sont :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}} &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \\ \overline{\mathbf{K}} &= \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{éq 2.1-5}$$

- Réponse transitoire :

L'effort sinusoïdal est appliqué sur la première masse : $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t)$

Le système dynamique vérifié est le suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad \text{éq 2.1-6}$$

En projetant sur la base des modes propres, nous obtenons :

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \eta = \Phi^T \mathbf{F} \quad \text{éq 2.1-7}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t) \quad \text{éq 2.1-8}$$

Nous aboutissons donc au système découplé suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 = \frac{1}{2}\sin(\omega t) \\ m\ddot{\eta}_2 + 3k\eta_2 = \frac{1}{2}\sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{éq 2.1-9}$$

La solution de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} \eta_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + \frac{\sin(\omega t)}{2m(\omega_1^2 - \omega^2)} \\ \eta_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) + \frac{\sin(\omega t)}{2m(\omega_2^2 - \omega^2)} \end{cases} \quad \text{éq 2.1-10}$$

Les déplacements dans l'espace physique sont obtenus par la formule de Ritz :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi \eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 \end{pmatrix} \quad \text{éq 2.1-11}$$

On en déduit les expressions de :

$$x_1(t) \text{ et } x_2(t) \quad \text{éq 2.1-12}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) + \frac{\sin(\omega t)}{2m} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \\ x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) - A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) + \frac{\sin(\omega t)}{2m} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{cases}$$

A l'instant initial, le système est au repos, d'où les expressions finales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_2} \sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \\ x_2(t) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_2} \sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{cases} \quad \text{éq 2.1-13}$$

Les vitesses des deux masses sont calculées en dérivant les déplacements par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{\omega}{2m} \left(\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_2 t)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{\omega}{2m} \left(\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_2 t)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{cases} \quad \text{éq 2.1-14}$$

Les accélérations des deux masses sont calculées en dérivant les vitesses par rapport au temps :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = \frac{\omega}{2m} \left(\frac{\omega \sin(\omega t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\omega \sin(\omega t) - \omega_2 \sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \\ \ddot{x}_2(t) = \frac{\omega}{2m} \left(\frac{\omega \sin(\omega t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{\omega \sin(\omega t) - \omega_2 \sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{cases} \quad \text{éq 2.1-15}$$

2.2 Résultats de référence

La comparaison des résultats porte sur les déplacements, vitesses et accélérations suivant l'axe des deux masses, à cinq instants différents.

2.3 Incertitude sur la solution

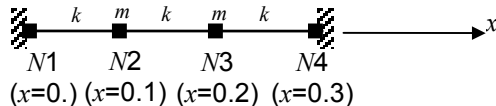
La solution de référence est exacte.

Le modèle discret représente parfaitement le problème posé (la base modale est complète ; il n'y a donc pas d'approximation liée à une éventuelle troncature modale). Le nombre de modes de la base de projection modale est égal au nombre de mesures, donc la solution de l'inversion est exacte (par opposition à une solution approchée d'un problème inverse généralisé). Si la recherche des nœuds en vis-à-vis est bonne, les déplacements obtenus après projection doivent être en parfaite adéquation avec les valeurs expérimentales. Les vitesses et accélérations sont déterminées par dérivation des contributions modales identifiées via un schéma d'approximation linéaire en temps, pouvant donc générer quelques erreurs.

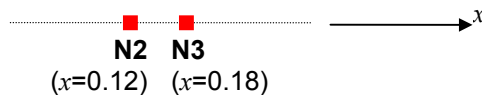
3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation et des maillages

- Maillage numérique :
Le maillage numérique est réalisé directement au format ASTER. Il comporte 4 nœuds et 3 mailles discrètes.



- Maillage expérimental :
Le maillage de mesure ne comprend que 2 éléments ponctuels et 2 nœuds :



3.2 Caractéristiques des mesures

Les mesures expérimentales fournies sont :

- Au nœud N3 :
Les données sont les déplacements axiaux, multipliés par $(-\sqrt{2}/2)$, et appliqués dans la direction $-X$. L'orientation locale indiquée dans le fichier de commande est (45. 0. 0.)
L'échantillonnage du temps est constant : le temps initial est 0 s, le pas de temps est 10^{-3} s et le nombre d'instants est 1001 (i.e. jusqu'à un temps final de 1 s).
- Au nœud N2 :
Les données sont les déplacements axiaux, appliqués dans la direction x .
L'échantillonnage du temps est variable : tous les instants sont indiqués de 0 s à 1 s, par pas de 10^{-3} s (1001 instants au total).

Les valeurs sont issues du calcul analytique réalisé avec Maple.

3.3 Caractéristiques de la base modale

Les deux seuls modes sont stockés dans un concept de type `[mode_meca]` créé par la commande `MODE_ITER_SIMULT`. Leurs fréquences propres sont identiques aux fréquences propres analytiques.

3.4 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	DISCRET	CARA	'M_T_D_N 'K_T_D_L'
	ORIENTATION REPERE	'ANGL_NAUT' 'LOCAL'	
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	TOUT NOEUD	
AFFE_MODELE	TOUT	'MECANIQUE'	'DIST_T'
ASSE_MATRICE			
CALC_MATR_ELEM	OPTION	'MASS_MECA'	
		'RIGI_MECA'	
MODE_ITER_SIMULT	CALC_FREQ	OPTION	'BANDE'
NUME_DDL			
NUME_DDL_GENE			
PROJ_MATR_BASE			
PROJ_MESU_MODAL	MESURE		
	REGULARISATION		
REST_BASE_PHYS	TOUT_CHAM	'OUI'	
TEST_RESU	NOM_CHAM CRITERE	'DEPL'	
		'VITE'	
		'ACCE'	
		'RELATIF'	

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Identification		Référence	Code_Aster	différence
DEPL_X (m)	au nœud N2 (masse 1)	à $t = 0.1$ s	$1.745 \cdot 10^{-4}$	0.01 %
		à $t = 0.3$ s	$6.797 \cdot 10^{-4}$	0.01 %
		à $t = 0.5$ s	$-1.217 \cdot 10^{-3}$	0.01 %
		à $t = 0.7$ s	$5.214 \cdot 10^{-4}$	-0.01 %
		à $t = 0.9$ s	$9.031 \cdot 10^{-4}$	0.00 %
DEPL_X (m)	au nœud N3 (masse 2)	à $t = 0.1$ s	$9.154 \cdot 10^{-6}$	0.00 %
		à $t = 0.3$ s	$6.414 \cdot 10^{-4}$	0.00 %
		à $t = 0.5$ s	$-8.636 \cdot 10^{-4}$	0.00 %
		à $t = 0.7$ s	$-1.107 \cdot 10^{-4}$	0.03 %
		à $t = 0.9$ s	$1.633 \cdot 10^{-3}$	0.02 %
VITE_X (m/s)	au nœud N2 (masse 1)	à $t = 0.1$ s	$4.586 \cdot 10^{-3}$	0.65 %
		à $t = 0.3$ s	$-7.598 \cdot 10^{-3}$	0.85 %
		à $t = 0.5$ s	$-1.581 \cdot 10^{-4}$	$7.81 \cdot 10^{-5}$ m/s
		à $t = 0.7$ s	$9.382 \cdot 10^{-3}$	-0.30 %
		à $t = 0.9$ s	$-7.481 \cdot 10^{-3}$	0.75 %
VITE_X (m/s)	au nœud N3 (masse 2)	à $t = 0.1$ s	$4.328 \cdot 10^{-4}$	1.79 %
		à $t = 0.3$ s	$3.671 \cdot 10^{-3}$	-0.84 %
		à $t = 0.5$ s	$-1.539 \cdot 10^{-2}$	-0.20 %
		à $t = 0.7$ s	$2.453 \cdot 10^{-2}$	0.15 %
		à $t = 0.9$ s	$-1.899 \cdot 10^{-2}$	0.68 %
ACCE_X (m/s ²)	au nœud N2 (masse 1)	à $t = 0.1$ s	$6.112 \cdot 10^{-2}$	-0.20 %
		à $t = 0.3$ s	$-1.306 \cdot 10^{-1}$	-0.46 %
		à $t = 0.5$ s	$1.571 \cdot 10^{-1}$	1.85 %
		à $t = 0.7$ s	$-5.657 \cdot 10^{-2}$	2.53 %
		à $t = 0.9$ s	$-1.124 \cdot 10^{-1}$	0.53 %
ACCE_X (m/s ²)	au nœud N3 (masse 2)	à $t = 0.1$ s	$1.562 \cdot 10^{-2}$	3.58 %
		à $t = 0.3$ s	$-6.031 \cdot 10^{-2}$	3.18 %
		à $t = 0.5$ s	$5.102 \cdot 10^{-2}$	5.33 %
		à $t = 0.7$ s	$7.428 \cdot 10^{-2}$	-5.19 %
		à $t = 0.9$ s	$-2.364 \cdot 10^{-1}$	-4.28 %

Remarque :

La vitesse au nœud N2 à l'instant $t = 0.5$ s étant relativement proche de zéro, la comparaison est réalisée pour ce cas en valeur absolue.

4.2 Paramètres d'exécution

Version : STA5 (5.05)

Machine : CLASTER

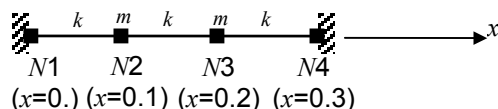
Encombrement mémoire : 100 Mo

Temps CPU User : 9.05 secondes

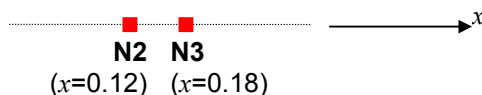
5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation et des maillages

- Maillage numérique :
Le maillage numérique est réalisé directement au format ASTER. Il comporte 4 nœuds et 3 mailles discrètes.



- Maillage expérimental :
Le maillage de mesure ne comprend que 2 éléments ponctuels et 2 nœuds :



5.2 Caractéristique des mesures

Les mesures expérimentales fournies sont :

- Au nœud $N3$:
Les données sont les déplacements axiaux, multipliés par $(-\sqrt{2}/2)$, et appliqués dans la direction $-x$. L'orientation locale indiquée dans le fichier de commande est (45. 0. 0.).
L'échantillonnage du temps est constant : le temps initial est 0 s, le pas de temps est 10^{-3} s et le nombre d'instants est 1001 (i.e. jusqu'à un temps final de 1 s).
- Au nœud $N2$:
Les données sont les déplacements axiaux, appliqués dans la direction X .
L'échantillonnage du temps est variable : tous les instants sont indiqués de 0 s à 1 s, par pas de 10^{-3} s (1001 instants au total).

Les valeurs sont issues du calcul analytique réalisé avec Maple.

5.3 Caractéristiques de la base modale

Les deux seuls modes sont stockés dans un concept de type `[base_modale]`, créé par la commande `DEFI_BASE_MODAL`. L'interface, de type Craig-Bampton, est placée sur le degré de liberté en déplacement suivant x du nœud $N2$ (correspondant à la masse m 1). La base modale contient donc un mode dynamique (avec $N2$ bloqué) et un mode statique.

5.4 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	DISCRET	CARA	'M_T_D_N 'K_T_D_L'
	ORIENTATION REPERE	'ANGL_NAUT' 'LOCAL'	
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	TOUT NOEUD	
AFFE_MODELE	TOUT PHENOMENE MODELISATION	'OUI' 'MECANIQUE' 'DIST_T'	
ASSE_MATRICE			
CALC_MATR_ELEM	OPTION	'MASS_MECA' 'RIGI_MECA'	
DEFI_BASE_MODAL	CLASSIQUE		
DEFI_INTERF_DYN	INTERFACE		
MODE_ITER_SIMULT	CALC_FREQ	OPTION	'BANDE'
NUME_DDL			
NUME_DDL_GENE			
PROJ_MATR_BASE			
PROJ_MESU_MODAL	MESURE REGULARISATION		
REST_BASE_PHYS	TOUT_CHAM	'OUI'	
TEST_RESU	NOM_CHAM CRITERE	'DEPL' 'VITE' 'ACCE' 'RELATIF'	

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Identification		Référence	Code_Aster	différence
DEPL_X (m)	au nœud N2 (masse 1)	à $t = 0.1$ s	$1.745 \cdot 10^{-4}$	0.01 %
		à $t = 0.3$ s	$6.797 \cdot 10^{-4}$	0.01 %
		à $t = 0.5$ s	$-1.217 \cdot 10^{-3}$	0.01 %
		à $t = 0.7$ s	$5.214 \cdot 10^{-4}$	-0.01 %
		à $t = 0.9$ s	$9.031 \cdot 10^{-4}$	0.00 %
DEPL_X (m)	au nœud N3 (masse 2)	à $t = 0.1$ s	$9.154 \cdot 10^{-6}$	0.00 %
		à $t = 0.3$ s	$6.414 \cdot 10^{-4}$	0.00 %
		à $t = 0.5$ s	$-8.636 \cdot 10^{-4}$	0.00 %
		à $t = 0.7$ s	$-1.107 \cdot 10^{-4}$	0.03 %
		à $t = 0.9$ s	$1.633 \cdot 10^{-3}$	0.02 %
VITE_X (m/s)	au nœud N2 (masse 1)	à $t = 0.1$ s	$4.586 \cdot 10^{-3}$	0.65 %
		à $t = 0.3$ s	$-7.598 \cdot 10^{-3}$	0.85 %
		à $t = 0.5$ s	$-1.581 \cdot 10^{-4}$	$7.81 \cdot 10^{-5}$ m/s
		à $t = 0.7$ s	$9.382 \cdot 10^{-3}$	-0.30 %
		à $t = 0.9$ s	$-7.481 \cdot 10^{-3}$	0.75 %
VITE_X (m/s)	au nœud N3 (masse 2)	à $t = 0.1$ s	$4.328 \cdot 10^{-4}$	1.79 %
		à $t = 0.3$ s	$3.671 \cdot 10^{-3}$	-0.84 %
		à $t = 0.5$ s	$-1.539 \cdot 10^{-2}$	-0.20 %
		à $t = 0.7$ s	$2.453 \cdot 10^{-2}$	0.15 %
		à $t = 0.9$ s	$-1.899 \cdot 10^{-2}$	0.68 %
ACCE_X (m/s ²)	au nœud N2 (masse 1)	à $t = 0.1$ s	$6.112 \cdot 10^{-2}$	-0.20 %
		à $t = 0.3$ s	$-1.306 \cdot 10^{-1}$	-0.46 %
		à $t = 0.5$ s	$1.571 \cdot 10^{-1}$	1.85 %
		à $t = 0.7$ s	$-5.657 \cdot 10^{-2}$	2.53 %
		à $t = 0.9$ s	$-1.124 \cdot 10^{-1}$	0.53 %
ACCE_X (m/s ²)	au nœud N3 (masse 2)	à $t = 0.1$ s	$1.562 \cdot 10^{-2}$	3.58 %
		à $t = 0.3$ s	$-6.031 \cdot 10^{-2}$	3.18 %
		à $t = 0.5$ s	$5.102 \cdot 10^{-2}$	5.33 %
		à $t = 0.7$ s	$7.428 \cdot 10^{-2}$	-5.19 %
		à $t = 0.9$ s	$-2.364 \cdot 10^{-1}$	-4.28 %

Remarque :

La vitesse au nœud N2 à l'instant $t = 0.5$ s étant relativement proche de zéro, la comparaison est réalisée pour ce cas en valeur absolue.

6.2 Paramètres d'exécution

Version : STA5 (5.05)

Machine : CLASTER

Encombrement mémoire : 100 Mo

Temps CPU User : 9.24 secondes

7 Synthèse des résultats

Pour les deux modélisations, les réponses en déplacement obtenues après projection sont identiques aux déplacements de référence calculés analytiquement avec Maple et fournis en données.

Les valeurs des vitesses et des accélérations déduites des déplacements obtenus après projection sont proches de celles obtenues analytiquement. Les faibles écarts constatés sont dus aux erreurs d'approximation engendrées par la détermination par un schéma linéaire en temps des vitesses et accélérations.