

**Manuel de Validation**  
**Fascicule V3.04 : Statique linéaire des structures volumiques**  
**Document : V3.04.110**

# SSLV110 - Fissure elliptique dans un milieu infini

---

## Résumé :

Il s'agit d'un test en statique pour un problème tridimensionnel. Ce test permet de calculer le taux de restitution d'énergie global et local sur le fond de fissure par la méthode  $\theta$ .

Les rayons des couronnes d'intégration sont variables le long de la fissure, et le taux de restitution d'énergie local est calculé suivant 2 méthodes différentes (LEGENDRE et LAGRANGE).

L'intérêt du test est la validation de la méthode  $\theta$  en 3D et des points suivants :

- comparaison des résultats avec une solution analytique,
- stabilité des résultats suivant les couronnes d'intégration,
- comparaison entre 2 méthodes différentes pour le calcul de  $g$  local,
- 2 cas de chargements équivalents (pression répartie et chargement volumique).

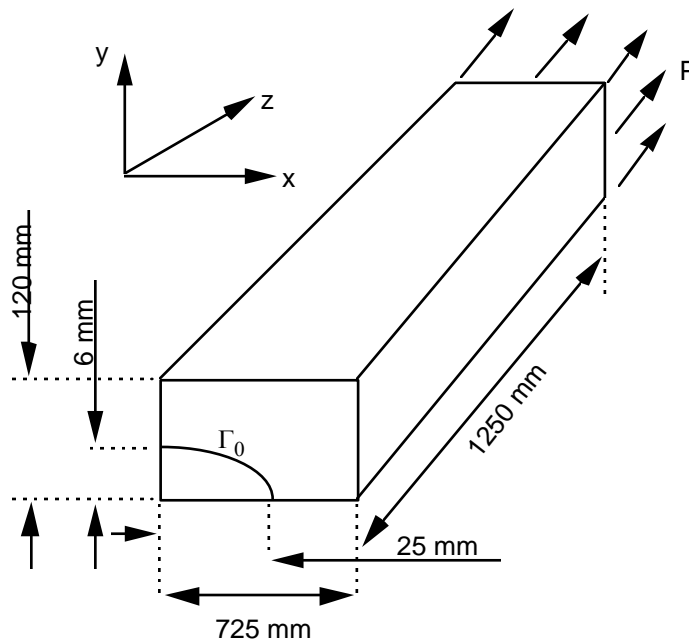
Ce test contient 4 modélisations différentes.

La 3-ème modélisation teste les dérivées de  $G$  par rapport aux paramètres matériau et chargement.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Il s'agit d'une fissure elliptique plongée dans un milieu supposé infini. On ne modélise qu'un huitième d'un parallélépipède :



$\Gamma_0$  : fond de fissure elliptique

### 1.2 Propriétés matériaux

$$E = 210\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Symétrie par rapport aux 3 plans principaux :

$$U_x = 0. \text{ dans le plan } X = 0.$$

$$U_y = 0. \text{ dans le plan } Y = 0.$$

$$U_z = 0. \text{ dans le plan } Z = 0. \text{ hors de la fissure}$$

Les conditions de chargements sont soit :

$$P = 1 \text{ MPa dans le plan } Z = 1250 \text{ mm (modélisations A et B)}$$

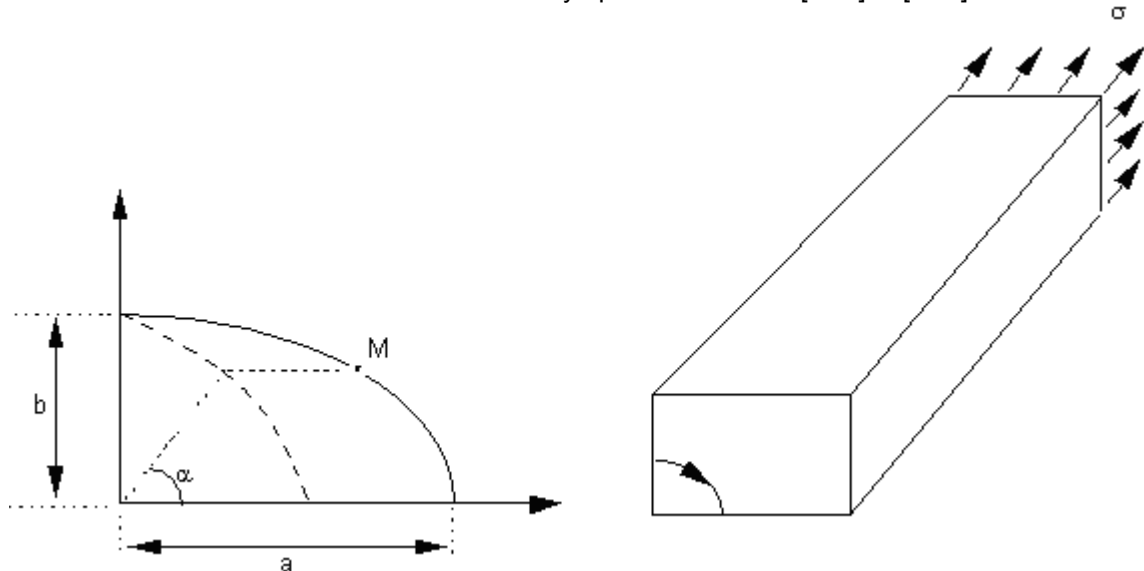
soit :

$$FZ = 8.10^{-4} \text{ N/mm}^3 \text{ sur tous les éléments de volume (chargement équivalent au précédent) (modélisations C et D).}$$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est une solution analytique issue de SIH [bib1] et [bib2].



On note que l'angle  $\alpha$  désigne ici l'angle paramétrique du point M (angle par rapport à l'axe Ox du projeté de M sur le cercle de rayon  $b$ ) et non la coordonnée polaire de ce point.

$$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi b}} = \frac{1}{E(k)} \left[ \sin^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha \right]^{1/4} \quad \text{avec } k = \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \left( 1 - k^2 \sin^2 \varphi \right)^{1/2} d\varphi$$

Ici :  $a = 25 \text{ mm}$   $b = 6 \text{ mm}$ , donc  $k = 0,9707728$

Les valeurs de l'intégrales elliptiques  $E(k)$  sont tabulées dans [bib3], en fonction de  $\text{asin}(k)$  qui vaut ici  $76,11^\circ$ . On trouve alors :  $E(k) = 1,0672$ .

D'où le facteur d'intensité des contraintes en  $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$  :  $K_I(\alpha) = 4,0680 \left[ \sin^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha \right]^{1/4}$

Puis, à partir de la formule d'Irwin (déformation plane) :  $g(\alpha) = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I(\alpha)^2$

Le taux de restitution global de l'énergie  $G_{ref}$  se calcule par intégration de  $g(\alpha)$  :  $G_{ref} = 5,76 \cdot 10^{-3} \text{ J/mm}$ .

#### Dérivées de G (modélisation C) :

Pour la dérivée de G par rapport au module d'Young E, on peut écrire :

$$G = \frac{\beta}{E} \quad (\text{avec } \beta = 302,4) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial G}{\partial E} = -\frac{G}{E}$$

D'autre part, en faisant varier le chargement  $F_z$ , on trouve :

$$G = \gamma F_z^2 \text{ avec } \gamma = 2276,9 \text{ donc } \frac{\partial G}{\partial F_z} = 2\gamma F_z$$

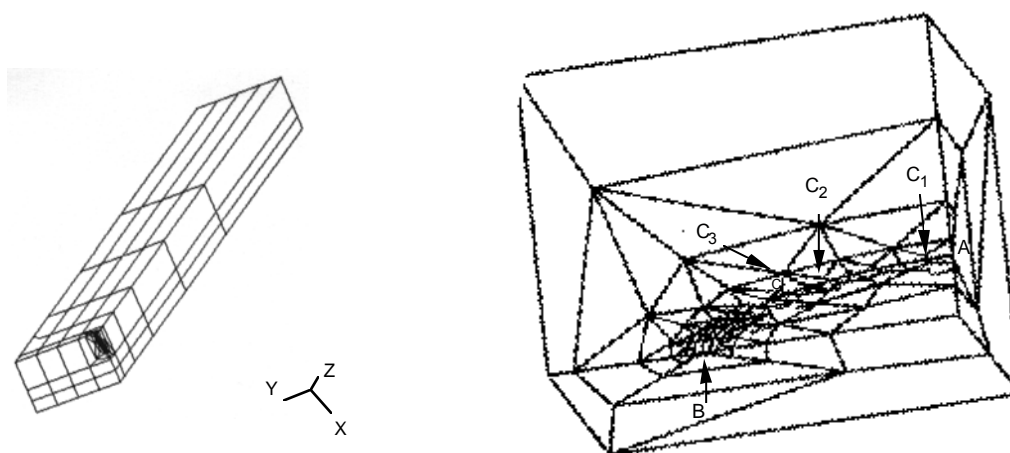
## 2.2 Bibliographie

- [1] G.C. SIH : Mathematical Theories of Brittle Fracture - FRACTURE, vol II - Academic Press - 1968
- [2] M.K. KASSIN et G.C. SIH : Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings J. Appl. Mech., 88, 601-611, 1966.
- [3] H. TADA, P. PARIS, G. IRWIN : The Stress Analysis of Cracks Handbook - Third Edition - ASM International - 2000

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

A = N01099 (s = 0.)  
B = N01259 (s = 26.68)  
C = N01179 (s = 17.8 ;  $\alpha = \pi/4$ )



**Chargement :** Pression unitaire répartie sur la face du bloc opposée au plan de la lèvres :  
P = 1.MPa dans le plan Z = 1250.mm.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716  
Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 3.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_FOND_FISS	LEVRE_SUP	GROUP_MA	TOUT
CALC_THETA	FOND_3D		
	THETA_3D		
CALC_G_THETA_T	RESULTAT	TOUT_ORDRE	
		NUME_ORDRE	
		LIST_ORDRE	
CALC_G_LOCAL_T	'THETA_LEGENDRE'	DEGRE = 7	
	'G_LEGENDRE'		
	R_INF_FO / R_SUP_FO		
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_FACE		

### 3.4 Remarques

Le degré des polynômes de LEGENDRE utilisés pour calculer g(s) est 7 (valeur maximum Aster).

Pour les 3 couronnes d'intégration, les rayons R\_INF et R\_SUP varient linéairement le long du fond de fissure.

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global G,
- le taux de restitution d'énergie local g en tous les nœuds du fond de fissure.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME\_CHAR' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le G global calculé ici correspond au quart du G de référence défini précédemment, seul un huitième de parallélépipède étant représenté.

Identification	Référence	Aster	% différence
G Couronne C <sub>1</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.410 10 <sup>-3</sup>	-2.1
G Couronne C <sub>2</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.451 10 <sup>-3</sup>	0.8
G Couronne C <sub>3</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.424 10 <sup>-3</sup>	-1.1
g (A) couronne C <sub>1</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	6.829 10 <sup>-5</sup>	-4.8
g (A) couronne C <sub>2</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.239 10 <sup>-5</sup>	0.95
g (A) couronne C <sub>3</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	6.864 10 <sup>-5</sup>	-4.3
g (B) couronne C <sub>1</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.48 10 <sup>-5</sup>	-13.8
g (B) couronne C <sub>2</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.57 10 <sup>-5</sup>	-8.7
g (B) couronne C <sub>3</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.90 10 <sup>-5</sup>	-6.9
g (C) couronne C <sub>1</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	4.992 10 <sup>-5</sup>	-4.3
g (C) couronne C <sub>2</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.124 10 <sup>-5</sup>	-1.7
g (C) couronne C <sub>3</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.013 10 <sup>-5</sup>	-3.9

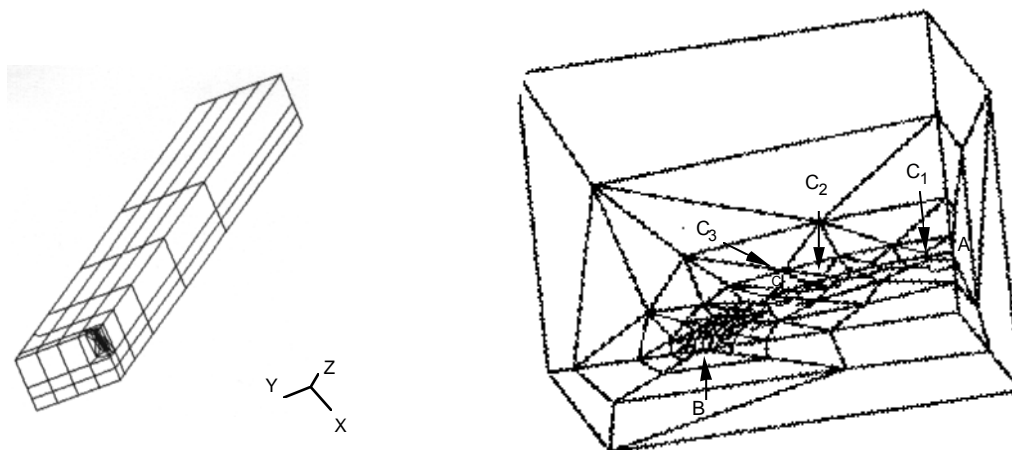
### 4.2 Remarque

Les résultats sont assez stables entre les couronnes sauf au point B où la variation de g(s) est plus grande et les résultats éloignés de la solution de référence. On peut expliquer cet écart par le maillage de qualité médiocre.

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

A = N01099 (s = 0.)  
B = N01259 (s = 26.68)  
C = N01179 (s = 17.8)



**Chargement :** Pression unitaire répartie sur la face du bloc opposée au plan de la lèvre :  
 $P = 1 \text{ MPa}$  dans le plan  $Z = 1250 \text{ mm}$ .

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716  
Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 5.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_FOND_FISS	LEVRE_SUP	GROUP_MA
CALC_THETA	FOND_3D	
	THETA_3D	
CALC_G_THETA_T		
CALC_G_LOCAL_T	'THETA_LAGRANGE'	
	'G_LEGENDRE'	DEGRE = 4
	R_INF_FO / R_SUP_FO	
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_FACE	

### 5.4 Remarques

'THETA\_LAGRANGE' : le champ  $\theta$  est discrétisé à partir des fonctions de formes des nœuds du fond de fissure, mais  $g(s)$  est toujours discrétisé à partir des polynômes de LEGENDRE.

Le degré des polynômes de LEGENDRE utilisés pour calculer  $g(s)$  est 4 [R7.02.01].

Pour les 3 couronnes d'intégration, les rayons  $R_{\text{INF}}$  et  $R_{\text{SUP}}$  varient linéairement le long du fond de fissure.

## 6 Résultats de la modélisation B

### 6.1 Valeurs testées

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global G,
- le taux de restitution d'énergie local g en tous les nœuds du fond de fissure.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME\_CHAR' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le G global calculé ici correspond au quart du G de référence défini précédemment, seul un huitième de parallélépipède étant représenté.

Identification	Référence	Aster	% différence
G Couronne C <sub>1</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.410 10 <sup>-3</sup>	-2.1
G Couronne C <sub>2</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.451 10 <sup>-3</sup>	0.8
G Couronne C <sub>3</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.424 10 <sup>-3</sup>	-1.1
g (A) couronne C <sub>1</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.120 10 <sup>-5</sup>	-0.7
g (A) couronne C <sub>2</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.452 10 <sup>-5</sup>	3.9
g (A) couronne C <sub>3</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.431 10 <sup>-5</sup>	3.6
g (B) couronne C <sub>1</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.608 10 <sup>-5</sup>	-6.6
g (B) couronne C <sub>2</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.662 10 <sup>-5</sup>	-3.4
g (B) couronne C <sub>3</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.706 10 <sup>-5</sup>	-0.9
g (C) couronne C <sub>1</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	4.978 10 <sup>-5</sup>	-4.5
g (C) couronne C <sub>2</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.096 10 <sup>-5</sup>	-2.3
g (C) couronne C <sub>3</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.014 10 <sup>-5</sup>	-3.9

### 6.2 Remarque

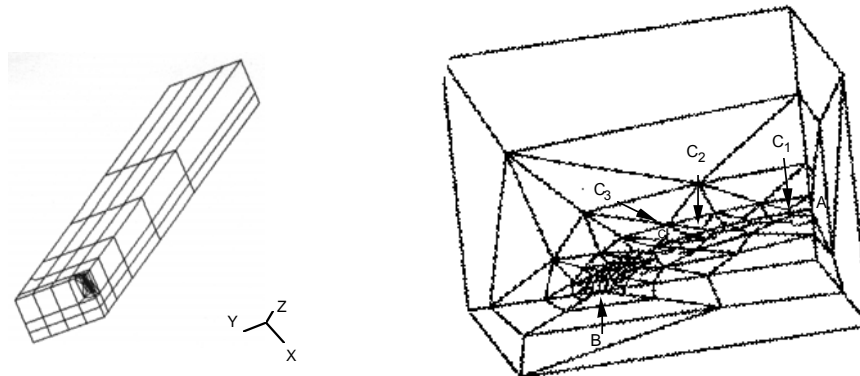
Les résultats sont meilleurs que dans la modélisation A au point B, mais la disparité entre les couronnes reste forte.



## 7 Modélisation C

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

A = N01099 (s = 0.)  
B = N01259 (s = 26.68)  
C = N01179 (s = 17.8)



**Chargement :** Force volumique FZ équivalente à une pression unitaire sur la face du bloc opposée au plan de la lèvres :

FORCE\_INTERNE : FZ =  $8.10^{-4}$  N/mm<sup>3</sup> sur tous les éléments de volume.

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716

Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 7.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_FOND_FISS	LEVRE_SUP	GROUP_MA
CALC_THETA	FOND_3D	
	THETA_3D	
CALC_G_THETA_T	SENSIBILITE	
CALC_G_LOCAL_T	'THETA_LEGENDRE '	DEGRE = 7
	'G_LEGENDRE '	
	R_INF_FO / R_SUP_FO	
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_INTERNE	

### 7.4 Remarques

Le degré des polynômes de LEGENDRE utilisés pour calculer g(s) est 7 (valeur maximum Aster).

Pour les 3 couronnes d'intégration, les rayons R\_INF et R\_SUP varient linéairement le long du fond de fissure.

## 8 Résultats de la modélisation C

### 8.1 Valeurs testées

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global G,
- le taux de restitution d'énergie local g en tous les nœuds du fond de fissure,
- les dérivées de G par rapport à E et au chargement en force volumique Fz.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME\_CHAR' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le G global calculé ici correspond au quart du G de référence défini précédemment, seul un huitième de parallélépipède étant représenté.

Identification	Référence	Aster	% différence
G Couronne C <sub>1</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.437 10 <sup>-3</sup>	-0.2
G Couronne C <sub>2</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.479 10 <sup>-3</sup>	2.7
G Couronne C <sub>3</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.450 10 <sup>-3</sup>	0.7
g (A) couronne C <sub>1</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	6.962 10 <sup>-5</sup>	-2.9
g (A) couronne C <sub>2</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.379 10 <sup>-5</sup>	+2.9
g (A) couronne C <sub>3</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	6.997 10 <sup>-5</sup>	-2.4
g (B) couronne C <sub>1</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.509 10 <sup>-5</sup>	-12.2
g (B) couronne C <sub>2</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.598 10 <sup>-5</sup>	-7.1
g (B) couronne C <sub>3</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.629 10 <sup>-5</sup>	-5.2
g (C) couronne C <sub>1</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.085 10 <sup>-5</sup>	-2.5
g (C) couronne C <sub>2</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.219 10 <sup>-5</sup>	0.1
g (C) couronne C <sub>3</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.107 10 <sup>-5</sup>	-2.1
DG/dE couronne C <sub>1</sub>	-6.8610 10 <sup>-9</sup>	-6.842 10 <sup>-9</sup>	-0.2
DG/dE couronne C <sub>2</sub>	-6.8610 10 <sup>-9</sup>	-7.041 10 <sup>-9</sup>	2.7
DG/dE couronne C <sub>3</sub>	-6.8610 10 <sup>-9</sup>	-6.907 10 <sup>-9</sup>	0.7
DG/dFz couronne C <sub>1</sub>	3.599	3.592	-0.1
DG/dFz couronne C <sub>2</sub>	3.599	3.697	2.7
DG/dFz couronne C <sub>3</sub>	3.599	3.629	0.9

### 8.2 Remarque

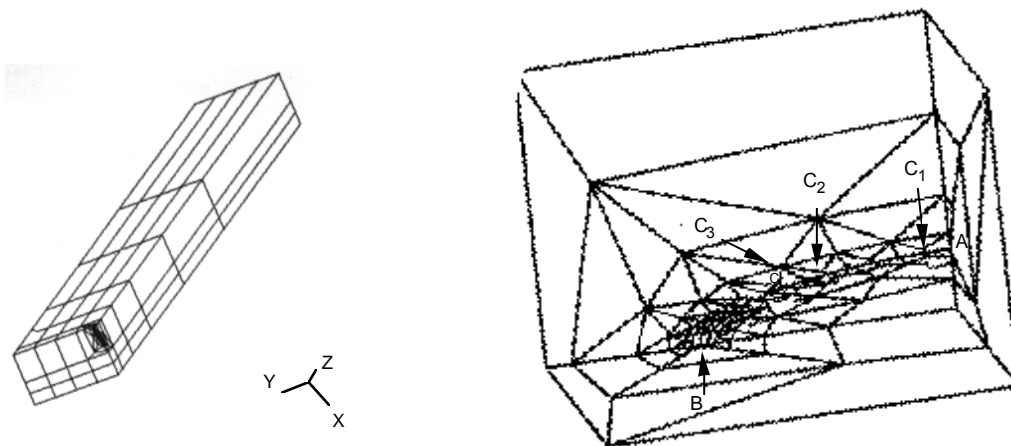
Les résultats sont assez stables entre les couronnes. On note toujours de moins bons résultats au nœud B.

Les erreurs sur les dérivées de G sont comparables à celles sur G.

## 9 Modélisation D

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

A = N01099 (s = 0.)  
B = N01259 (s = 26.68)  
C = N01179 (s = 17.8)



**Chargement** : Force volumique  $F_z$  équivalente à une pression unitaire répartie sur la face du bloc opposée au plan de la lèvre :

FORCE\_INTERNE :  $F_z = 8.10^{-4}$  N/mm<sup>3</sup> sur tous les éléments de volume.

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716

Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 9.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_FOND_FISS	LEVRE_SUP	GROUP_MA
CALC_THETA	FOND_3D	
	THETA_3D	
CALC_G_THETA_T		
CALC_G_LOCAL_T	'THETA_LAGRANGE'	
	'G_LEGENDRE'	DEGRE = 7
	R_INF_FO / R_SUP_FO	
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_INTERNE	

### 9.4 Remarques

'THETA\_LAGRANGE' : le champ  $\theta$  est discrétisé à partir des fonctions de formes des nœuds du fond de fissure, mais  $g(s)$  est toujours discrétisé à partir des polynômes de LEGENDRE.

Le degré des polynômes de LEGENDRE utilisés pour calculer  $g(s)$  est 7.

Pour les 3 couronnes d'intégration, les rayons  $R_{INF}$  et  $R_{SUP}$  sont supposés varier linéairement sur le fond de fissure.

## 10 Résultats de la modélisation D

### 10.1 Valeurs testées

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global G,
- le taux de restitution d'énergie local g en tous les nœuds du fond de fissure.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME\_CHAR' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le G global calculé ici correspond au quart du G de référence défini précédemment, seul un huitième de parallélépipède étant représenté.

Identification	Référence	Aster	% différence
G Couronne C <sub>1</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.437 10 <sup>-3</sup>	-0.2
G Couronne C <sub>2</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.479 10 <sup>-3</sup>	2.7
G Couronne C <sub>3</sub>	1.44 10 <sup>-3</sup>	1.450 10 <sup>-3</sup>	0.7
g (A) couronne C <sub>1</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.259 10 <sup>-5</sup>	1.2
g (A) couronne C <sub>2</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.597 10 <sup>-5</sup>	5.9
g (A) couronne C <sub>3</sub>	7.171 10 <sup>-5</sup>	7.575 10 <sup>-5</sup>	5.7
g (B) couronne C <sub>1</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.636 10 <sup>-5</sup>	-4.9
g (B) couronne C <sub>2</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.992 10 <sup>-5</sup>	-1.7
g (B) couronne C <sub>3</sub>	1.721 10 <sup>-5</sup>	1.734 10 <sup>-5</sup>	0.7
g (C) couronne C <sub>1</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.071 10 <sup>-5</sup>	-2.7
g (C) couronne C <sub>2</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.192 10 <sup>-5</sup>	0.4
g (C) couronne C <sub>3</sub>	5.215 10 <sup>-5</sup>	5.108 10 <sup>-5</sup>	-2.1

### 10.2 Remarque

Les résultats sont meilleurs que dans la modélisation C au point B.

## 11 Synthèse des résultats

---

Calcul de g local :

- les 2 méthodes (LEGENDRE et LAGRANGE) donnent sensiblement les mêmes résultats (moins de 5 % d'erreur par rapport à la solution analytique) sauf au point B (point extrémité de l'ellipse sur le grand axe) où la méthode Lagrange est la plus précise,
- cas de charge : les valeurs obtenues avec le chargement volumique sont légèrement supérieures à celles obtenues avec contraintes imposées (y compris pour les valeurs de G). Les différences sont minimales et dues aux intégrations numériques différentes sur le terme de volume et le terme de bord.

Calcul des dérivées de G :

- les erreurs sur les dérivées de G sont faibles et comparables à celles sur G.

Page laissée intentionnellement blanche.