

Manuel de Validation**Fascicule V3.90 : Références théoriques de tests en statique linéaire****Document : V3.90.001**

Calcul d'un portique plan hyperstatique élastique

Résumé :

Le but de cette note est d'exposer la méthode de calcul utilisée pour déterminer la solution de référence du cas-test SSLL 14, intitulé : "Portique plan articulé en pied".

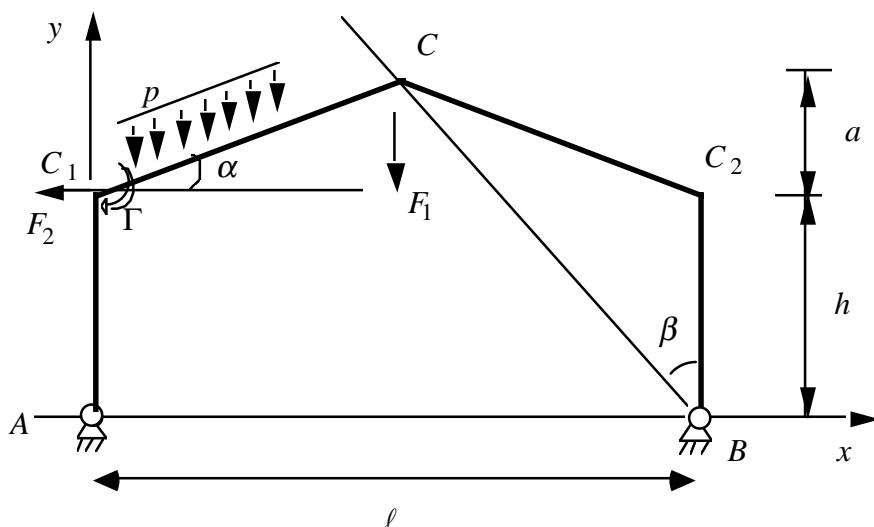
On utilise la méthode des forces (hyperstaticité 1), en ne tenant compte que de l'énergie de flexion : hypothèse poutres élancées.

On considère quatre cas de charge séparément.

Table des matières

1 Sollicitations isostatiques sous charge réelle répartie p sur $C_1 C$	4
1.1 Réactions d'appuis isostatiques	4
1.2 Sollicitations	5
1.3 Diagrammes	6
2 Sollicitations sous force concentrée F_1 (vers le bas)	7
2.1 Réactions d'appui	7
2.2 Sollicitations	7
2.3 Diagrammes (F_1 vers le bas)	8
3 Sollicitations sous la force concentrée F_2 (vers la gauche)	8
3.1 Réactions d'appui	8
3.2 Sollicitations	9
3.3 Diagrammes	9
4 Sollicitations sous le couple concentré Γ (positif)	10
4.1 Réactions d'appui	10
4.2 Sollicitations	10
4.3 Diagrammes (Γ positif)	11
5 Sollicitations sous le moment X hyperstatique	12
5.1 Réactions d'appui	12
5.2 Sollicitations	12
5.3 Diagrammes	13
6 Sollicitations sous charges fictives ponctuelles en C	13
6.1 Réactions d'appui	13
6.2 Sollicitations	14
6.3 Diagrammes	14
7 Détermination du moment X hyperstatique	15
7.1 Charge répartie p sur $C_1 C$	16
7.2 Charge ponctuelle F_1 en C	17
7.3 Charge ponctuelle F_2 en C_1	18
7.4 Couple ponctuel Γ en C_1	19
7.5 Récapitulatif	20
8 Calcul du déplacement en C	20
8.1 Charge répartie p sur $C_1 C$	20
8.2 Charge ponctuelle F_1 en C	21
8.3 Charge ponctuelle F_2 en C_1	21
8.4 Couple ponctuel Γ en C_1	22

8.5 Calcul de $d = \int \frac{m \cdot M_1}{EI}$	22
8.6 Récapitulatif des déplacements u_C et v_C	23



On considère le portique ci-contre, soumis à diverses charges.

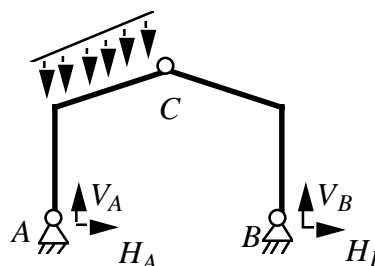
Hyperstaticité de degré 1.
Inconnue hyperstatique : X :
moment en C .

Chargement vertical réparti p sur
 $C_1 C$.

Deux forces F_1 , F_2 , et un couple Γ
en C_1 .

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2a}{\ell} = 0,4 \cdot (\Rightarrow (\cos \alpha)^{-1} = \sqrt{1,16} = 1,077033) \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{\ell}{2(a+h)} = \frac{1}{1,2} \end{cases}$$

$$b = \frac{\ell}{2 \cos \alpha} ; \sin \alpha = a/b$$



1 Sollicitations isostatiques sous charge réelle répartie p sur $C_1 C$

1.1 Réactions d'appuis isostatiques

$$H_A + H_B = 0 ; V_A + V_B = \frac{p\ell}{2 \cos \alpha} ; \ell V_B = \frac{p\ell^2}{8 \cos \alpha}$$

La partie CB est articulée et chargée seulement à ses extrémités :

$$\begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge \mathbf{BC} = \mathbf{0} \Leftrightarrow H_B = -V_B \cdot \operatorname{tg} \beta$$

D'où les réactions isostatiques :

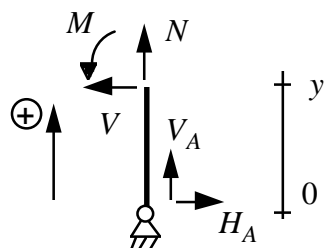
$$H_A = \frac{p\ell}{8 \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta ; V_A = \frac{3p\ell}{8 \cos \alpha} ; H_B = -\frac{p\ell}{8 \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta ; V_B = \frac{p\ell}{8 \cos \alpha}$$

Remarque :

$$\left| \frac{\ell \operatorname{tg} \beta}{8 \cos \alpha} = \frac{b\ell}{8(a+h)} \right|$$

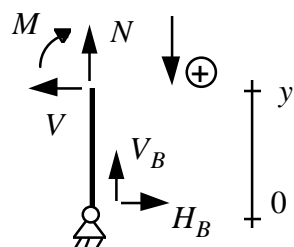
1.2 Sollicitations

Poutre A C₁



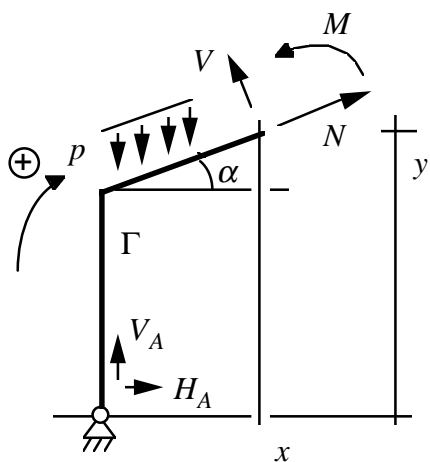
$$\begin{cases} N_{iso} = -\frac{3 p \ell}{8 \cos \alpha} \\ V_{iso} = \frac{p \ell}{8 \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta \\ M_{iso} = -\frac{p \ell}{8 \cos \alpha} y \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

Poutre C₂ B



$$\begin{cases} N_{iso} = -\frac{p \ell}{8 \cos \alpha} \\ V_{iso} = -\frac{p \ell}{8 \cos \alpha} \operatorname{tg} \beta \\ M_{iso} = -\frac{p \ell}{8 \cos \alpha} y \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

Poutre C₁ C

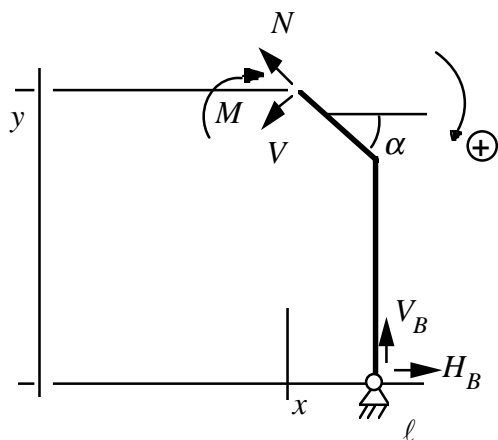


$$\begin{cases} N_{iso} = -H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha + \frac{p x}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \\ = -\frac{p \ell}{8} \left(\operatorname{tg} \beta + 3 \operatorname{tg} \alpha - 8 \operatorname{tg} \alpha \frac{x}{\ell} \right) \\ V_{iso} = H_A \sin \alpha - V_A \cos \alpha + \frac{p x}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha \\ = \frac{p \ell}{8} (\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha - 3 + 8 x / \ell) \\ M_{iso} = -\frac{p x^2}{2 \cos \alpha} + V_A x - H_A y \\ = \frac{p}{\cos \alpha} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{3 \ell x}{8} - \frac{\ell y \operatorname{tg} \beta}{8} \right) \quad (= 0 \text{ en } C!) \end{cases}$$

$$M_{iso} = -\frac{p \ell}{8(a+h)} \left(2 s^2 \left(\frac{a+h}{b} \right) - s(2a+3h) + bh \right)$$

$$\text{avec } s = x / \cos \alpha \in [0, b]$$

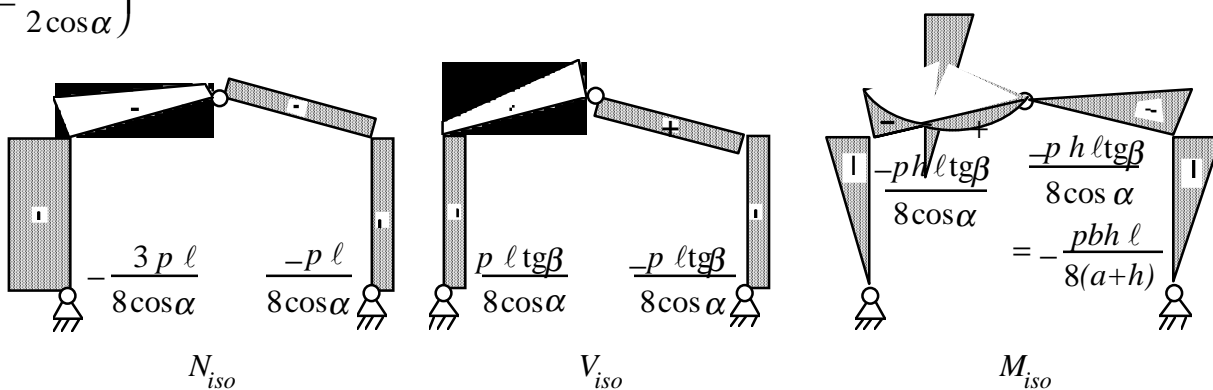
Poutre C C₂



$$\left\{ \begin{array}{l} N_{iso} = H_B \cos \alpha - V_B \sin \alpha \\ \quad = -\frac{p\ell}{8}(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \\ V_{iso} = H_B \sin \alpha + V_B \cos \alpha \\ \quad = -\frac{p\ell}{8}(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1) \\ M_{iso} = H_B y + V_B(\ell - x) \\ \quad = -\frac{p\ell}{8\cos \alpha}(y \operatorname{tg} \beta - (\ell - x)) \quad (= 0 \text{ en } C!) \end{array} \right.$$

1.3 Diagrammes

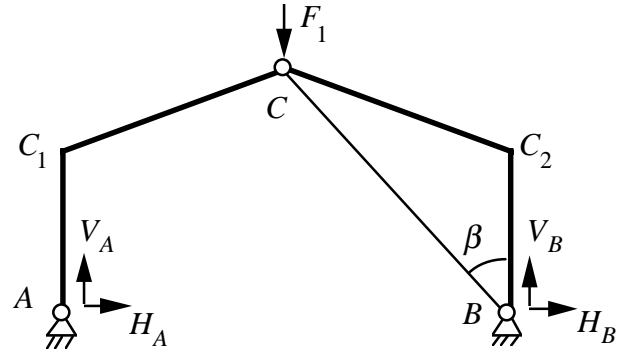
$$\left(b = \frac{\ell}{2\cos \alpha} \right)$$



2 Sollicitations sous force concentrée F_1 (vers le bas)

2.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned} H_A + H_B &= 0 ; \\ V_A + V_B &= F_1 ; \\ \begin{pmatrix} H_A \\ V_A \end{pmatrix} \wedge \mathbf{AC} &= \mathbf{0} = \begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge \mathbf{BC} \end{aligned}$$



D'où :

$$H_A = \frac{1}{2} F_1 \operatorname{tg} \beta ; \quad V_A = \frac{1}{2} F_1 ; \quad H_B = -\frac{1}{2} F_1 \operatorname{tg} \beta ; \quad V_B = \frac{1}{2} F_1$$

2.2 Sollicitations

Poutre $A C_1$:

$$\begin{cases} N_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 \\ V_{iso} = \frac{1}{2} F_1 \operatorname{tg} \beta \\ M_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 y \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

Poutre $C_2 B$:

$$\begin{cases} N_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 \\ V_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 \operatorname{tg} \beta \\ M_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 y \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

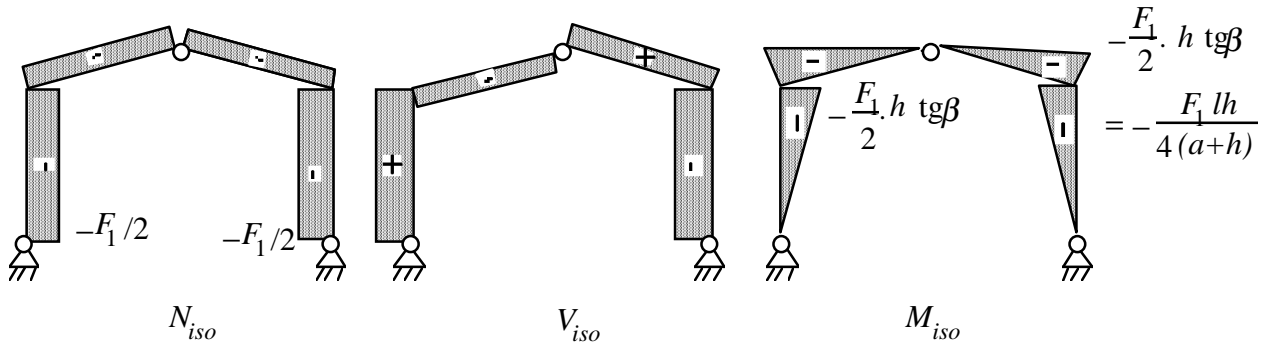
Poutre $C_1 C$:

$$\begin{cases} N_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha + \sin \alpha) \\ V_{iso} = \frac{1}{2} F_1 (\operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha) \\ M_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 (y \operatorname{tg} \beta - x) \end{cases}$$

Poutre $C C_2$:

$$\begin{cases} N_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha + \sin \alpha) \\ V_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 (\operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha) \\ M_{iso} = -\frac{1}{2} F_1 (y \operatorname{tg} \beta - (\ell - x)) \end{cases}$$

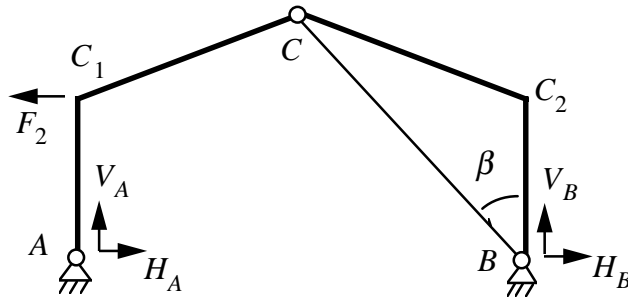
2.3 Diagrammes (F_1 vers le bas)



3 Sollicitations sous la force concentrée F_2 (vers la gauche)

3.1 Réactions d'appui

- $H_A + H_B = F_2$;
- $V_A + V_B = 0$;
- $\ell V_B + h F_2 = 0$
- $\begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge \mathbf{BC} = 0$



D'où :

$$H_A = F_1 \left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta \right) ; \quad V_A = F_2 \frac{h}{\ell} ; \quad H_B = F_1 \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta ; \quad V_B = -F_2 \frac{h}{\ell}$$

Remarque :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2(a+h)} ; \quad \left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta \right) = \frac{2a+h}{2(a+h)} \\ \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{h\ell}{2b(a+h)} ; \quad \operatorname{tg} \beta \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\ell^2 - 4(a^2 + ah)}{4b(a+h)} \end{array} \right.$$

3.2 Sollicitations

Poutre A C₁ :

$$\begin{cases} N_{iso} = -F_2 h / \ell \\ V_{iso} = F_2 \left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta\right) \\ M_{iso} = -F_2 y \left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta\right) \end{cases}$$

Poutre C₂ B :

$$\begin{cases} N_{iso} = F_2 h / \ell \\ V_{iso} = F_2 \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta \\ M_{iso} = -F_2 \frac{h}{\ell} y \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

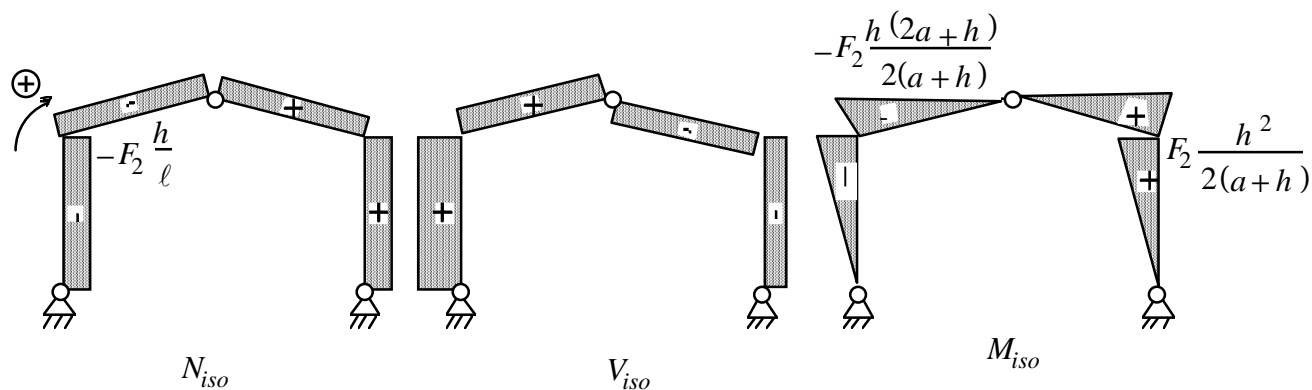
Poutre C₁ C :

$$\begin{cases} N_{iso} = -F_2 \left(\left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta\right) \cos \alpha + \frac{h}{\ell} \sin \alpha \right) \\ V_{iso} = F_2 \left(\left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta\right) \sin \alpha - \frac{h}{\ell} \cos \alpha \right) \\ M_{iso} = F_2 \left(\frac{h}{\ell} x - \left(1 - \frac{h}{\ell} \operatorname{tg} \beta\right) y \right) \end{cases}$$

Poutre C C₂ :

$$\begin{cases} N_{iso} = F_2 \frac{h}{\ell} (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha + \sin \alpha) \\ V_{iso} = F_2 \frac{h}{\ell} (\operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha) \\ M_{iso} = F_2 \frac{h}{\ell} (y \cdot \operatorname{tg} \beta - (\ell - x)) \end{cases}$$

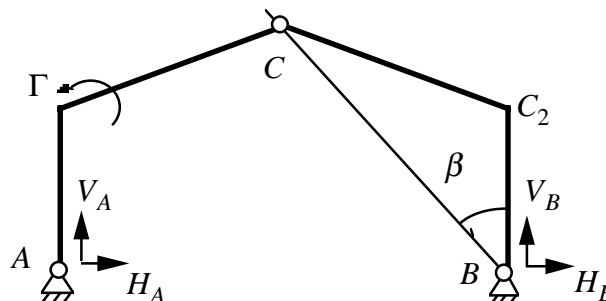
3.3 Diagrammes



4 Sollicitations sous le couple concentré Γ (positif)

4.1 Réactions d'appui

- $H_A + H_B = 0$;
 $V_A + V_B = 0$;
 $\ell V_B + \Gamma = 0$
- $\begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge \mathbf{BC} = 0$



D'où :

$$\begin{aligned} H_A &= -\Gamma \operatorname{tg} \beta / \ell & ; & & V_A &= \Gamma / \ell \\ H_B &= \Gamma \operatorname{tg} \beta / \ell & ; & & V_B &= -\Gamma / \ell \end{aligned}$$

Remarque :

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \beta}{\ell} \right| = \frac{1}{2(a+h)}$$

4.2 Sollicitations

Poutre $A C_1$:

$$\begin{cases} N_{iso} &= -\Gamma / \ell \\ V_{iso} &= -\Gamma \operatorname{tg} \beta / \ell \\ M_{iso} &= \Gamma y \operatorname{tg} \beta / \ell \end{cases}$$

Poutre $C_2 B$:

$$\begin{cases} N_{iso} &= \Gamma / \ell \\ V_{iso} &= \Gamma \operatorname{tg} \beta / \ell \\ M_{iso} &= \Gamma y \operatorname{tg} \beta / \ell \end{cases}$$

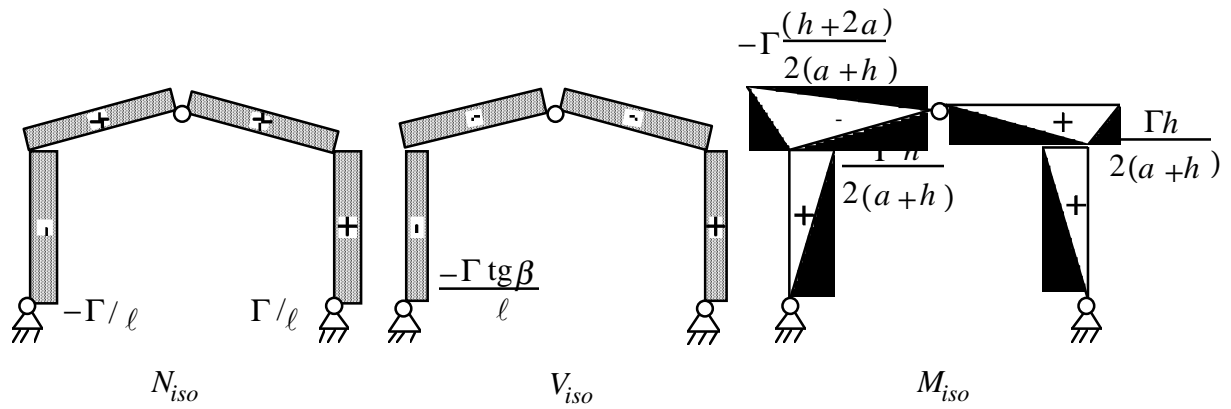
Poutre $C_1 C$:

$$\begin{cases} N_{iso} &= \frac{\Gamma}{\ell} (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha - \sin \alpha) \\ V_{iso} &= -\frac{\Gamma}{\ell} (\operatorname{tg} \beta \sin \alpha + \cos \alpha) \\ M_{iso} &= \frac{\Gamma}{\ell} (x + y \operatorname{tg} \beta - \ell) \end{cases}$$

Poutre $C C_2$:

$$\begin{cases} N_{iso} &= \frac{\Gamma}{\ell} (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha + \sin \alpha) \\ V_{iso} &= \frac{\Gamma}{\ell} (\operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha) \\ M_{iso} &= \frac{\Gamma}{\ell} (y \operatorname{tg} \beta - (\ell - x)) \end{cases}$$

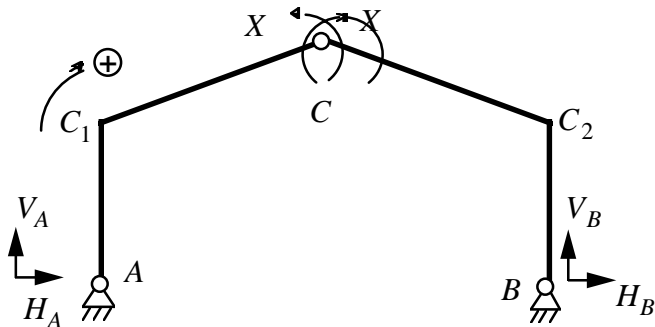
4.3 Diagrammes (Γ positif)



5 Sollicitations sous le moment X hyperstatique

5.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned} H_A + H_B &= 0 ; \\ V_A + V_B &= 0 ; \\ \ell V_B &= 0 ; \\ H_B(a+h) - X &= 0 \end{aligned}$$



D'où les réactions :

$$H_A = -\frac{X}{a+h} ; V_A = 0 ; H_B = \frac{X}{a+h} ; V_B = 0$$

5.2 Sollicitations

Poutre $A C_1$:

$$\begin{cases} N_X = 0 \\ V_X = -\frac{X}{a+h} \\ M_X = \frac{X}{a+h} y \end{cases}$$

Poutre $C_2 B$:

$$\begin{cases} N_X = 0 \\ V_X = \frac{X}{a+h} \\ M_X = \frac{X}{a+h} y \end{cases}$$

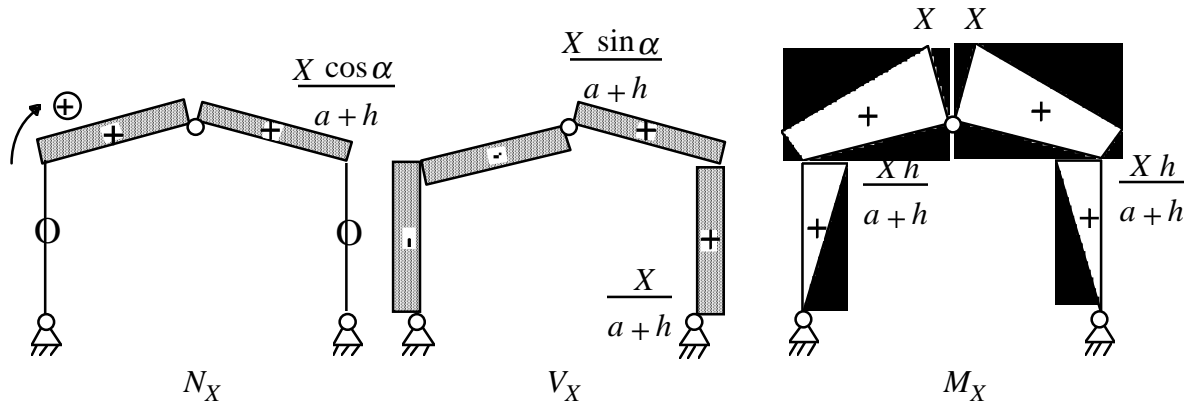
Poutre $C_1 C$:

$$\begin{cases} N_X = \frac{X}{a+h} \cos \alpha \\ V_X = -\frac{X}{a+h} \sin \alpha \\ M_X = \frac{X}{a+h} y = \frac{X}{a+h} (h + x \operatorname{tg} \alpha) \end{cases}$$

Poutre $C C_2$:

$$\begin{cases} N_X = \frac{X}{a+h} \cos \alpha \\ V_X = \frac{X}{a+h} \sin \alpha \\ M_X = \frac{X}{a+h} y \end{cases}$$

5.3 Diagrammes



6 Sollicitations sous charges fictives ponctuelles en C

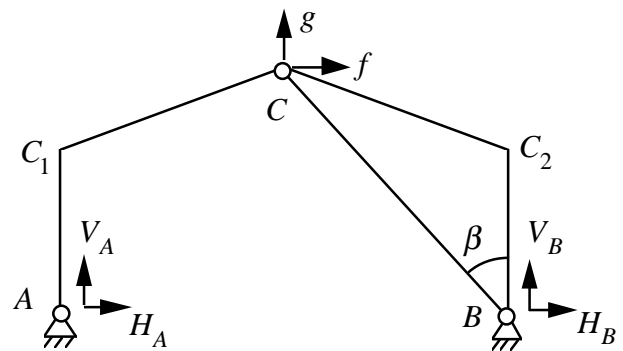
Afin de calculer les déplacements en C, à l'aide du Principe des travaux Virtuels (cf. le paragraphe [§8]), il est nécessaire d'établir les diagrammes de sollicitations sous l'action de deux forces "fictives" f et g appliquées en C.

6.1 Réactions d'appui

$$H_A + H_B = -f ;$$

$$V_A + V_B = -g ;$$

$$\begin{pmatrix} H_A \\ V_A \end{pmatrix} \wedge \mathbf{AC} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge \mathbf{BC}$$



D'où :

$$H_A = -\frac{1}{2}(f + g \tan \beta) ; \quad V_A = -\frac{1}{2}(g + f \cot \beta)$$

$$H_B = -\frac{1}{2}(f - g \tan \beta) ; \quad V_B = -\frac{1}{2}(g - f \cot \beta)$$

6.2 Sollicitations

Poutre $A C_1$:

$$\begin{cases} n = \frac{1}{2}(g + f \cot g \beta) \\ v = -\frac{1}{2}(f + g \operatorname{tg} \beta) \\ m = \frac{1}{2}(f + g \operatorname{tg} \beta) y \end{cases}$$

Poutre $C_2 B$:

$$\begin{cases} n = \frac{1}{2}(g - f \cot g \beta) \\ v = -\frac{1}{2}(f - g \operatorname{tg} \beta) \\ m = -\frac{1}{2}(f - g \operatorname{tg} \beta) y \end{cases}$$

Poutre $C_1 C$:

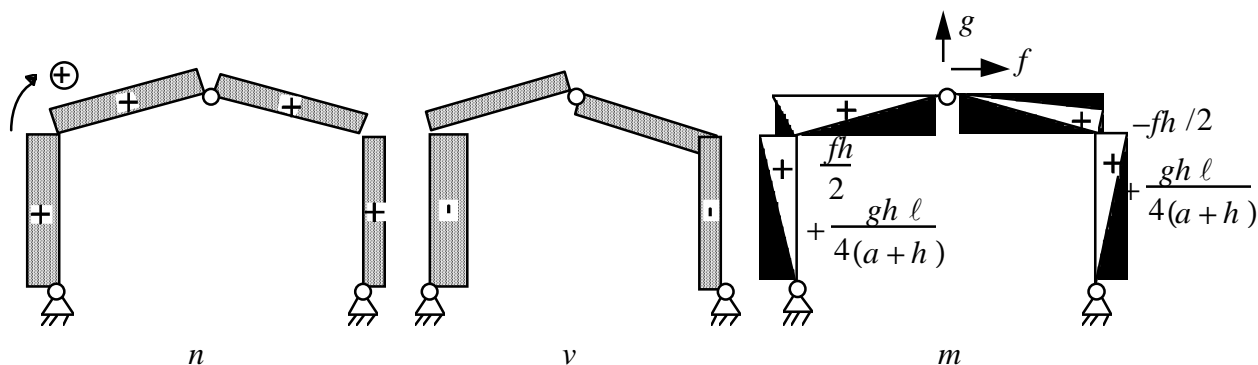
$$\begin{cases} n = \frac{1}{2}(f + g \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha + \frac{1}{2}(g + f \cot g \beta) \sin \alpha \\ v = -\frac{1}{2}(f + g \operatorname{tg} \beta) \sin \alpha + \frac{1}{2}(g + f \cot g \beta) \cos \alpha \\ m = +\frac{1}{2}(f + g \operatorname{tg} \beta) y - \frac{1}{2}(g + f \cot g \beta) x \end{cases}$$

Poutre $C C_2$:

$$\begin{cases} n = -\frac{1}{2}(f - g \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha + \frac{1}{2}(g - f \cot g \beta) \sin \alpha \\ v = -\frac{1}{2}(f - g \operatorname{tg} \beta) \sin \alpha - \frac{1}{2}(g - f \cot g \beta) \cos \alpha \\ m = -\frac{1}{2}(f - g \operatorname{tg} \beta) y - \frac{1}{2}(g - f \cot g \beta)(\ell - x) \end{cases}$$

6.3 Diagrammes

Voici les diagrammes de sollicitations sous l'action des deux forces "fictives" f et g . On considère ici : $f \geq 0$, $g \geq f \cot g \beta$.



7 Détermination du moment X hyperstatique

On se place en élasticité ; on ne considère que l'énergie de flexion, les poutres étant élancées. L'état naturel est supposé vierge (pas de précontraintes ni de déplacement d'appui).

Le potentiel complémentaire est alors :

$$F^*(X) = \int_{poutres} \frac{(M_{iso} + M_1 \cdot X)^2}{EI_1} + \int_{charpentes} \frac{(M_{iso} + M_1 \cdot X)^2}{EI_2}$$

Il est stationnaire à l'équilibre, d'où :

$$\delta \cdot X = \left[\int_{pot.} \frac{M_1^2}{EI_1} + \int_{charp.} \frac{M_1^2}{EI_2} \right] \cdot X = - \int_{pot.} \frac{M_1 \cdot M_{iso}}{EI_1} - \int_{charp.} \frac{M_1 \cdot M_{iso}}{EI_2} = S$$

Le coefficient de souplesse δ est la somme de :

$$\int_{poutres} \frac{M_1^2}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \left(\frac{h}{a+h} \right)^2$$

$$\int_{charpentes} \frac{M_1^2}{EI_2} = \frac{2b}{EI_2} \left[\left(\frac{h}{a+h} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+h} \right)^2 + \frac{ah}{(a+h)^2} \right]$$

soit :

$$E \cdot \delta = \frac{2}{(a+h)^2} \left[\frac{h^3}{3I_1} + \frac{b(3h^2 + a^2 + 3ah)}{3I_2} \right]$$

Application numérique :

Dans l'exemple considéré :

$$I_1 = 2I_2 = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$h = 2a = 8 \text{ m} ; \quad \ell = 20 \text{ m} ; \quad b = \frac{\ell}{2} \sqrt{1,16}$$

D'où :

$$\delta = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \underbrace{\frac{h^2}{3} \left(h + \frac{19b}{2} \right)}_{2353.45347 \text{ m}^3}$$

On étudie l'un après l'autre les divers chargements pour calculer les seconds membres S .

7.1 Charge répartie p sur $C_1 C$

Le second membre S dû à p est :

$$-\int_{\text{poteaux}} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \cdot \left(\frac{h}{a+h}\right) \cdot \left(\frac{pblh}{8(a+h)}\right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{ph^3 b \ell}{24}$$

$$-\int_{C C_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{pb^2 h \ell}{8(a+h)EI_2} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h}\right)\right) = \frac{1}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{phb^2 \ell (3h+a)}{48}$$

$$\begin{aligned} -\int_{C_1 C} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} &= \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{p\ell}{8(a+h)^2} \int_0^b \left[2s^2 \left(\frac{a+h}{b}\right) - s(2a+3h) + bh \right] \cdot \left[h + s \cdot \frac{a}{b} \right] ds \\ &= \frac{1}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{p\ell b^2}{48} (h^2 - 2ah - a^2) \end{aligned}$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{p\ell b}{96} \left[\frac{4h^3}{I_1} + \frac{hb(3h+a)}{I_2} + \frac{b(h^2 - 2ah - a^2)}{I_2} \right]$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad p = 3\,000 \text{ N/m (vers le bas)}$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{p\ell b h^2}{96} \left[4h + \frac{13}{2}b \right]$$

$$43\,946\,021.89 \text{ N}\cdot\text{m}^4$$

D'où :

- le moment en C :

$$\mathbf{X} = \mathbf{18\,672.994 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

- la réaction en A :

$$H_A = p \cdot \frac{b\ell}{8(a+h)} - \frac{X}{a+h} = \frac{p b \ell / 8 - X}{(a+h)}$$

$$H_A = \mathbf{5\,175.37 \text{ N}}$$

$$V_A = \frac{3pb}{4} - 0$$

$$V_A = \mathbf{24\,233.24 \text{ N}}$$

7.2 Charge ponctuelle F_1 en C

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{\text{poteaux}} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \cdot \left(\frac{h}{a+h} \right) \left(\frac{F_1 \ell h}{4(a+h)} \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{F_1 \ell h^3}{12}$$

$$\begin{aligned} -\int_{\text{charpentes}} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} &= \frac{2b}{EI_2} \cdot \frac{F_1 \cdot \ell h}{4(a+h)} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h} \right) \right) \\ &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{F_1 b \ell h (3h+a)}{24} \end{aligned}$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{F_1 \ell h}{24} \left[\frac{2h^2}{I_1} + \frac{b(3h+a)}{I_2} \right]$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad F_1 = 20\,000 \text{ N (vers le bas)}$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \underbrace{\frac{F_1 \ell h^2}{24} [2h+7b]}_{97\,485\,127,76 \text{ N}\cdot\text{m}^4}$$

D'où

- le moment en C :

$$X = 41\,422.161 \text{ N}\cdot\text{m}$$

- la réaction en A :

$$H_A = \frac{1}{4} \cdot F_1 \frac{\ell}{a+h} - \frac{X}{a+h} = \frac{F_1 \ell / 4 - X}{(a+h)}$$

$$H_A = 4\,881.4866 \text{ N}$$

$$V_A = \frac{1}{2} F_1 - 0$$

$$V_A = 10\,000.0 \text{ N}$$

7.3 Charge ponctuelle F_2 en C_1

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$\begin{aligned}
-\int_{A C_1} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} &= \frac{h}{3 EI_1} \cdot \left(\frac{h}{a+h} \right) \cdot \frac{F_2 h(2a+h)}{2(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{F_2 h^3(2a+h)}{12} \\
-\int_{C_2 B} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} &= \frac{h}{3 EI_1} \cdot \left(\frac{h}{a+h} \right) \cdot \frac{(-F_2 h^2)}{2(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{-F_2 h^4}{12} \\
-\int_{C_1 C} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} &= \frac{b}{EI_2} \frac{F_2 h(2a+h)}{2(a+h)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h} \right) \right] \\
&= \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{F_2 b h (3h^2 + 7ah + 2a^2)}{24} \\
-\int_{C C_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} &= \frac{b}{EI_2} \frac{-F_2 h^2}{2(a+h)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h} \right) \right] = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{-F_2 b h^2 (3h+a)}{24}
\end{aligned}$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{F_2 h a}{12} \left(\frac{2h^2}{I_1} + \frac{b}{I_2} (3h+a) \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad F_2 = 10\,000 \text{ N (vers la gauche)}$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \underbrace{\frac{F_2 h^2 a}{12} (2h+7b)}_{19\,497\,025.55 \text{ N}\cdot\text{m}^4}$$

D'où :

- le moment en C :

$$\mathbf{X} = \mathbf{8\,284.4321 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

- la réaction en A :

$$H_A = F_2 \cdot \frac{2a+h}{2(a+h)} - \frac{X}{a+h} = \frac{F_2(a+h/2) - X}{(a+h)}$$

$$H_A = \mathbf{5\,976.297 \text{ N}}$$

$$V_A = F_2 h / \ell$$

$$V_A = \mathbf{4\,000.00 \text{ N}}$$

7.4 Couple ponctuel Γ en C_1

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\text{poteaux}} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} &= \frac{-2h}{3EI_1} \cdot \left(\frac{h}{a+h} \right) \cdot \frac{\Gamma h}{2(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{-\Gamma \cdot h^3}{6} \\
 - \int_{C_1 C} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} &= \frac{b}{EI_2} \frac{\Gamma(h+2a)}{2(a+h)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{\Gamma(h+2a)(3h+a)b}{24} \\
 - \int_{C C_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} &= \frac{b}{EI_2} \frac{-\Gamma h}{2(a+h)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h} \right) \right] = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{-\Gamma h b \cdot (3h+a)}{24}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{-\Gamma}{12} \left(\frac{2h^3}{I_1} - \frac{ab(3h+a)}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad \Gamma = -100\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (sens aiguilles de montre)}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{-\Gamma}{6} \left[h^3 - ab(3h+a) \right] \\
 &= 11\,571\,281.93 \text{ N} \cdot \text{m}^4
 \end{aligned}$$

D'où

- le moment en C :

$$X = 4\,916.7243 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- la réaction en A :

$$H_A = \frac{-\Gamma}{2(a+h)} - \frac{X}{a+h} = \frac{-\Gamma/2 - X}{(a+h)}$$

$$H_A = 4\,576.394 \text{ N}$$

$$V_A = \frac{\Gamma}{\ell}$$

$$V_A = 5\,000.000 \text{ N}$$

7.5 Récapitulatif

CAS	Moment en C (N.m)	Réactions en A (N)	
		H_A	V_A
p sur $C_1 C$	18672.994	5175.37	24233.240
F_1 en C	41422.161	4881.487	10000.000
F_2 en C_1	8284.432	5976.297	4000.000
Γ en C_1	4916.724	4576.394	5000.000
TOTAL		22033.31	43233.24

Remarque

Rappel : dans le poteau A C_1 : effort normal = $-V_A$, effort tranchant = H_A .

8 Calcul du déplacement en C

On ne considère aussi que l'énergie élastique de flexion (poutres élancées). En appliquant le Principe des Travaux virtuels sur la structure soumise aux forces fictives du paragraphe [§6], travaillant dans les déplacements cherchés, on calcule les nombres w et d dépendant linéairement de f et g :

$$f \cdot u_C + g \cdot v_C = \int_{pot.} \frac{m \cdot (M_{iso} + X M_1)}{EI_1} + \int_{charp.} \frac{m \cdot (M_{iso} + X M_1)}{EI_2} = w + Xd, \forall (f, g)$$

8.1 Charge répartie p sur $C_1 C$

$$\int_{poteaux} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \cdot \frac{gh\ell}{4(a+h)} \cdot \frac{-pbh\ell}{8(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{-gpbh^3 \ell^2}{96}$$

$$\int_{C_1 C} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_2} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{-p\ell h b^2}{384} \cdot (2f(a+h) + g\ell) \cdot (h-a)$$

$$\int_{C C_2} \frac{M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{3EI_2} \cdot \frac{pbh\ell}{8(a+h)} \cdot \left(\frac{fh}{2} - \frac{g\ell h}{4(a+h)} \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{-pb^2 \ell h^2 (g\ell - 2f(a+h))}{192}$$

D'où :

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{-pbh\ell}{384} \cdot \left(\frac{4g\ell h^2}{I_1} + \frac{g\ell b(3h-a) - 2fb(a+h)^2}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad p = 3000 \text{ N/m (vers le bas)}$$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \left(g\ell \left(2h + \frac{5}{2}b \right) - \frac{9}{2}fbh \right) \cdot \underbrace{\frac{-pbh^2 \ell}{192}}_{-215406.5922 \text{ N.m}^3}$$

8.2 Charge ponctuelle F_1 en C

$$\int_{poteaux} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \cdot \frac{gh\ell}{4(a+h)} \cdot \frac{-F_1 h\ell}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{-F_1 gh^3 \ell^2}{48}$$

$$\int_{charp.} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_2} = \frac{2b}{3EI_2} \cdot \frac{gh\ell}{4(a+h)} \cdot \frac{-F_1 h\ell}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{-F_1 gbh^2 \ell^2}{48}$$

D'où (on constate que w ne dépend pas de f pour ce chargement) :

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{-F_1 gh^2 \ell^2}{48} \left(\frac{h}{I_1} + \frac{b}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad F_1 = 20\,000 \text{ N (vers le bas)}$$

$$w = \frac{2g}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \underbrace{\frac{-F_1 h^2 \ell^2}{48}}_{315\,100\,365.0 \text{ N}\cdot\text{m}^5} \cdot (h+2b)$$

8.3 Charge ponctuelle F_2 en C_1

$$\int_{poteaux} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3EI_1} \cdot \frac{F_2 h}{2(a+h)} \cdot \left[-(2a+h) \cdot \left(\frac{fh}{2} + \frac{gh\ell}{4(a+h)} \right) + h \cdot \left(\frac{-fh}{2} + \frac{gh\ell}{4(a+h)} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{-F_2 \cdot h^3}{24} (ag\ell + 2f(a+h)^2)$$

$$\int_{charp.} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_2} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{-F_2 bh^2}{24} (ag\ell + 2f(a+h)^2)$$

D'où :

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{-F_2 h^2}{24} (ag\ell + 2f(a+h)^2) \cdot \left(\frac{h}{I_1} + \frac{b}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad F_2 = 10\,000 \text{ N (vers la gauche)}$$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot (g\ell + 9gh) \cdot \underbrace{\frac{-F_2 h^3 (h+2b)}{48}}_{-3\,151\,003.65 \text{ N}\cdot\text{m}^4}$$

8.4 Couple ponctuel Γ en C_1

$$\begin{aligned} \int_{\text{poteaux}} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_1} &= \frac{h}{3EI_1} \cdot \frac{\Gamma h}{2(a+h)} \cdot \left[\left(\frac{fh}{2} + \frac{g\ell h}{4(a+h)} \right) + \left(-\frac{fh}{2} + \frac{g\ell h}{4(a+h)} \right) \right] \\ &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{\Gamma h^3 \ell g}{24} \\ \int_{\text{charp.}} \frac{m \cdot M_{iso}}{EI_2} &= \frac{b}{3EI_2} \cdot \frac{\Gamma}{2(a+h)} \cdot \left[-(2a+h) \cdot \left(\frac{fh}{2} + \frac{g\ell h}{4(a+h)} \right) + h \left(-\frac{fh}{2} + \frac{g\ell h}{4(a+h)} \right) \right] \\ &= \frac{-2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{\Gamma bh}{24} \cdot (ag\ell + 2f(a+h)^2) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad \Gamma = -100\,000 \text{ Nm}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma h^2}{24}}_{-266\,666.667 \text{ N}\cdot\text{m}^3} (g\ell(h-b) - 9fhb) \\ &= -266\,666.667 \text{ N}\cdot\text{m}^3 \end{aligned}$$

8.5 Calcul de $d = \int \frac{m \cdot M_1}{EI}$

$$\begin{aligned} \int_{\text{poteaux}} \frac{m \cdot M_1}{EI_1} &= \frac{2h}{3EI_1} \cdot \frac{g\ell h}{4(a+h)} \cdot \frac{h}{a+h} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot \frac{g\ell h^3}{12} \\ \int_{\text{charpente}} \frac{m \cdot M_1}{EI_2} &= \frac{2b}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a+h} \right) \right] \frac{g\ell h}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \cdot \frac{g\ell bh(3h+a)}{24} \end{aligned}$$

D'où (on constate que d ne dépend pas de f) :

$$d = \frac{2}{E(a+h)^2} \cdot \frac{g\ell h}{24} \cdot \left(\frac{2h^2}{I_1} + \frac{b(3h+a)}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot g \cdot \underbrace{\frac{\ell h^2}{24}}_{4\,874.2564 \text{ m}^4} (2h+7b) \\ &= 4\,874.2564 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

8.6 Récapitulatif des déplacements u_C et v_C

$$\begin{aligned} I_1 &= 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ E &= 210\,000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

CAS	X	$X \bar{d}$	w_V
pression sur $C_1 C$	18672.994	91016960.3	-184930109.4
F_1 en C	41422.161	201902233.4	-315100365.0
F_2 en C_1	8284.432	40380445.6	-63020073.0
Γ en C_1	4916.724	23965373.4	14775091.25

CAS	w_H	u_C (m)	v_C (m)
pression sur $C_1 C$	83519999.94	0.0110476	-0.012422374
F_1 en C	0.00	0.00	-0.01497330
F_2 en C_1	-226872262.8	-0.03000956	-0.00299466
Γ en C_1	206790328.5	0.0273532	-0.001215646

Note :

$$\begin{aligned} d &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot g \bar{d}, \text{ avec : } \bar{d} = 4\,874.2564 \text{ m}^4 \\ w &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot (g w_V + f w_H) \text{ voir plus haut} \\ u_C &= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \cdot w_H ; \quad v_C = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} (w_V + X \bar{d}) \\ \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} &= 1.32275132 \cdot 10^{-10} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-4} \end{aligned}$$

Comparaison Aster - référence analytique (R.)

CAS		Moment en C (N.m)	Réaction H_A (N)	Réaction V_A (N)	Déplacement u_C (m)	Déplacement v_C (m)
p sur $C_1 C$	R : Aster :	18672.994 18673.20	5175.37 5175.36	24233.24 24233.2	0.0110476 0.0110472	-0.012422374 -0.0124233
F_1 en C	R : Aster :	41422.161 41422.40	4881.487 4881.47	10000.00 10000.0	0.00000 0.0000	-0.01497330 -0.0
F_2 en C_1	R : Aster :	8284.432 8284.34	5976.297 5976.31	4000.00 4000.0	-0.03000956 -0.0300098	-0.00299466 -0.00299450
Γ en C_1	R : Aster :	4916.724 4916.62	4576.394 4576.38	5000.00 5000.0	0.0273532 0.0273536	-0.001215646 -0.00121583

Nota :

Le calcul Aster a été réalisé en prenant des éléments très élancés, de telle sorte que : $S\ell^2 \ll I$. Ainsi, l'énergie de flexion est prédominante. Les valeurs du calcul Aster sont issues du cas-test VPCS appelé SSLL14, avec les données suivantes :

$$I_1 = 5.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 ; \quad I_2 = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 ; \quad E = 210\,000 \text{ MPa},$$

$$h = 2a = 8 \text{ m} ; \quad \ell = 20 \text{ m} ; \quad b = \frac{\ell}{2} \sqrt{1.16},$$

$$p = 3\,000 \text{ N/m (vers le bas)},$$

$$F_1 = 20\,000 \text{ N (vers le bas)},$$

$$F_2 = 10\,000 \text{ N (vers la gauche)},$$

$$\Gamma = -100\,000 \text{ Nm}.$$