

Manuel de Validation**Fascicule V3.04 : Statique linéaire des structures volumiques****Document : V3.04.111**

SSLV111 - Estimateur d'erreur sur une plaque trouée en élasticité linéaire

Résumé :

Ce test valide et compare les 2 versions de l'estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz (version 1 de 1987, notée ZZ1, et version 2 de 1992, notée ZZ2) appliquée au système de l'élasticité linéaire, en statique.

Il comporte 5 modélisations en contraintes planes, correspondant chacune à un type d'élément fini (TRIA3, QUAD4, TRIA6, QUAD8, QUAD9).

La solution analytique est connue et permet de comparer les erreurs estimées avec l'erreur exacte.

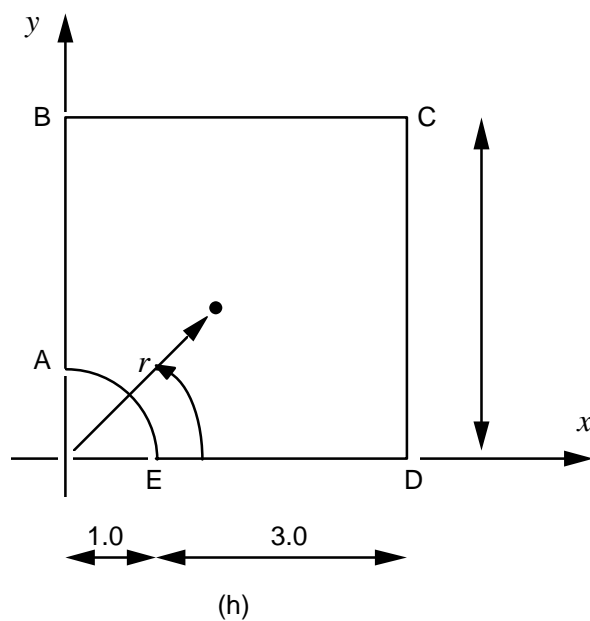
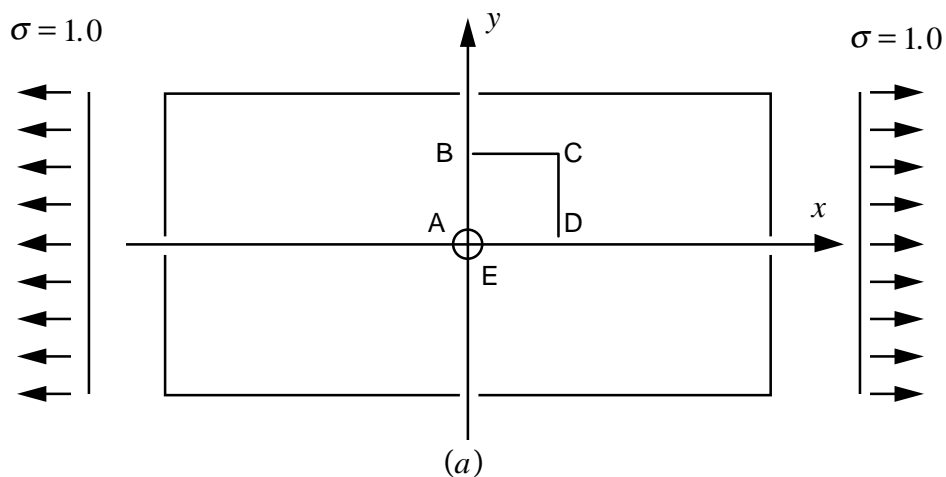
L'intérêt du test réside :

- dans la comparaison entre les contraintes lissées avec ZZ1 (lissage global continu) et ZZ2 (lissage local à des patches d'éléments),
- dans la comparaison des estimateurs entre eux,
- dans l'analyse qualitative et quantitative des résultats (erreurs relatives globale et locale).

Le test met en évidence le bon comportement de ZZ2 sur tous les types d'éléments et les mauvais résultats de ZZ1 sur des éléments quadratiques lorsque la solution ne présente pas de forte singularité, ce qui est le cas.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

$E = 1\,000\text{ MPa}$

$\nu = 0.3.$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur AB, $u_X = 0$

Sur ED, $u_y = 0$

$$\text{Sur CD tractions} \begin{cases} F_x &= \sigma_{xx}(x=4.) \\ F_y &= \sigma_{xy}(x=4.) \end{cases}$$

$$\text{Sur BC tractions} \begin{cases} F_x &= \sigma_{xy}(y=4.) \\ F_y &= \sigma_{yy}(y=4.) \end{cases}$$

Selon la solution analytique [2].

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On considère une portion d'une plaque infinie avec un trou central circulaire, soumise à un chargement unitaire unidirectionnel dans la direction Ox $\sigma = 1 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x$.

La solution analytique de ce problème est [bib1] :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos \theta + \cos(4\theta) \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\theta) \\ \sigma_{yy} &= -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\theta) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin(4\theta)\end{aligned}$$

où :

- a est le rayon du trou,
- (r, θ) les coordonnées polaires.

2.2 Incertitude sur la solution

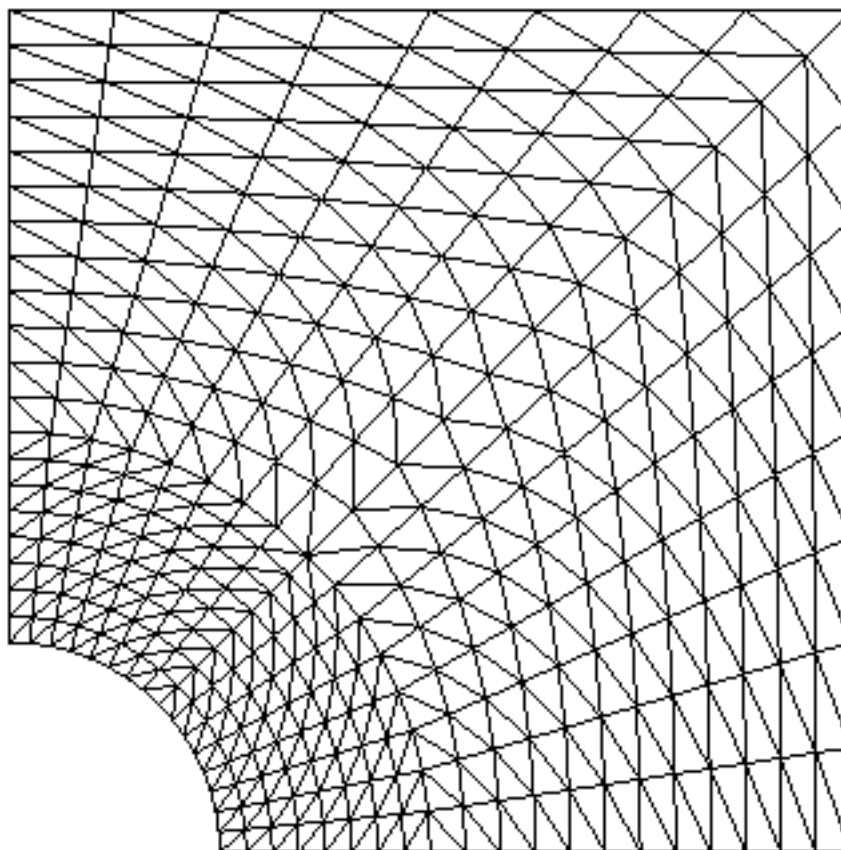
Solution analytique.

2.3 Références bibliographiques

- [1] Zhu-Zienkiewicz : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates - Part 1 : the recovery technique (Int. J. for Num. Methods in Engineering vol. 33, p. 1355 (mai 1992)).

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 640 TRIA3.

3.3 Fonctionnalités testées

| Commandes | | | Clés |
|---------------|--------|------------------|------------|
| MECA_STATIQUE | OPTION | 'SIEF_ELGA_DEPL' | [U4.31.01] |
| CALC_ELEM | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ1' | [U4.61.02] |
| | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ2' | |

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

| | Identification | Référence | Aster | % différence | tolérance |
|-----------|-------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|-------------|
| A | σ_{xx} ZZ1 | 3. | 2.823 | -5.91 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 3. | 2.884 | -3.85 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | 0. | 0.261 | - | 0.3 |
| | σ_{yy} ZZ2 | 0. | 0.207 | - | 0.3 |
| | σ_{xy} ZZ1 | 0. | $-7.4 \cdot 10^{-3}$ | - | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ2 | 0. | $-6.1 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.1 |
| P | σ_{xx} ZZ1 | 1.15625 | 1.152 | -0.37 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 1.15625 | 1.145 | -0.98 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | -0.15625 | -0.150 | -3.81 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ2 | -0.15625 | -0.145 | -7.00 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ1 | -0.125 | -0.117 | -6.11 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ2 | -0.125 | -0.124 | -0.68 | 0.1 |
| Maille M1 | e_{abs} ZZ1 | | $1.33 \cdot 10^{-4}$ | | 1.10^{-3} |
| | e_{abs} ZZ2 | | $8.13 \cdot 10^{-5}$ | | 1.10^{-3} |
| | e_{rel} ZZ1 | | 6.63% | | 0.1 |
| | e_{rel} ZZ2 | | 4.05% | | 0.1 |
| Ω | e_{abs} ZZ1 | $0.445 \cdot 10^{-2}$ | $0.424 \cdot 10^{-2}$ | -4.76 | |
| | e_{abs} ZZ2 | $0.445 \cdot 10^{-2}$ | $0.451 \cdot 10^{-2}$ | +1.31 | |
| | e_{rel} ZZ1 | 3.44% | 3.28% | | |
| | e_{rel} ZZ2 | 3.44% | 3.49% | | |
| | θ ZZ1 | | 0.952 | | |
| | θ ZZ2 | | 1.013 | | |

4.2 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur.

Contenu du fichiers résultats :

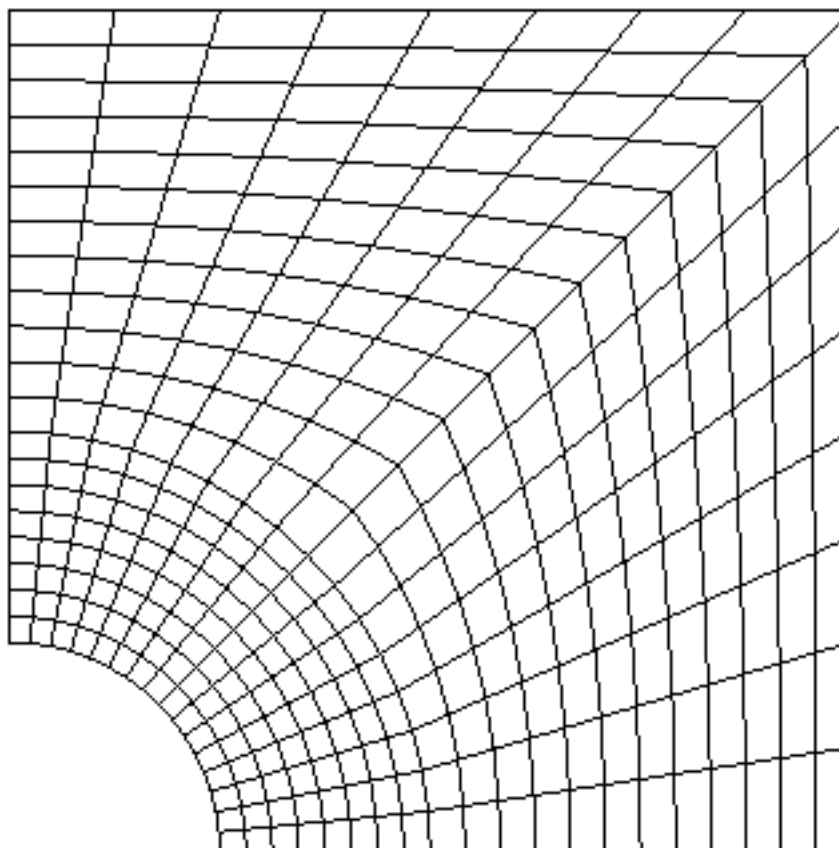
- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

4.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.11
Machine : CRAY C90
Encombrement mémoire : 8 mégamots
Système : UNICOS 8.0
Temps CPU User : 19.0 secondes

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation



5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 320 QUAD4.

5.3 Fonctionnalités testées

| Commandes | | | Clés |
|---------------|--------|------------------|------------|
| MECA_STATIQUE | OPTION | 'SIEF_ELGA_DEPL' | [U4.31.01] |
| CALC_ELEM | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ1' | [U4.61.02] |
| | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ2' | |

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

| Identification | Référence | Aster | % différence | tolérance |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|-------------|
| A σ_{xx} ZZ1 | 3. | 3.017 | 0.57 | 0.1 |
| σ_{xx} ZZ2 | 3. | 2.971 | - 0.95 | 0.1 |
| σ_{yy} ZZ1 | 0. | 0.17 | - | 0.3 |
| σ_{yy} ZZ2 | 0. | 0.136 | - | 0.3 |
| σ_{xy} ZZ1 | 0. | $2.8 \cdot 10^{-3}$ | - | 0.1 |
| σ_{xy} ZZ2 | 0. | $-1.04 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.1 |
| P σ_{xx} ZZ1 | 1.15625 | 1.168 | 0.98 | 0.1 |
| σ_{xx} ZZ2 | 1.15625 | 1.153 | -0.26 | 0.1 |
| σ_{yy} ZZ1 | -0.15625 | -0.158 | 1.28 | 0.1 |
| σ_{yy} ZZ2 | -0.15625 | -0.152 | -2.83 | 0.1 |
| σ_{xy} ZZ1 | -0.125 | -0.121 | -2.99 | 0.1 |
| σ_{xy} ZZ2 | -0.125 | -0.124 | -0.94 | 0.1 |
| Maille M1 e_{abs} ZZ1 | | $1.57 \cdot 10^{-4}$ | | 1.10^{-3} |
| e_{abs} ZZ2 | | $2.40 \cdot 10^{-4}$ | | 1.10^{-3} |
| e_{rel} ZZ1 | | 5.79% | | 0.1 |
| e_{rel} ZZ2 | | 8.83% | | 0.1 |
| Ω e_{abs} ZZ1 | $0.320 \cdot 10^{-2}$ | $0.294 \cdot 10^{-2}$ | -8.1 | |
| e_{abs} ZZ2 | $0.320 \cdot 10^{-2}$ | $0.307 \cdot 10^{-2}$ | -4.2 | |
| e_{rel} ZZ1 | 2.48% | 2.28% | | |
| e_{rel} ZZ2 | 2.48% | 2.37% | | |
| θ ZZ1 | | 0.919 | | |
| θ ZZ2 | | 0.958 | | |

6.2 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur.

Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

6.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.11

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 mégamots

Système :

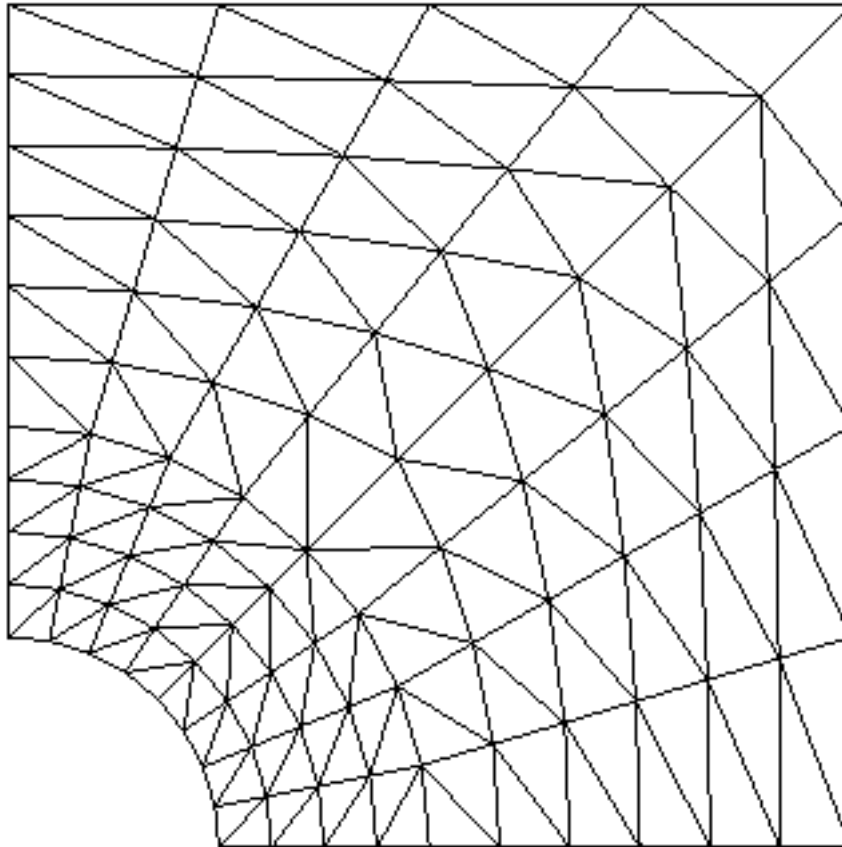
Temps CPU User :

UNICOS 8.0

13.4 secondes

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation



7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 160 TRIA6.

7.3 Fonctionnalités testées

| Commandes | | | Clés |
|---------------|--------|------------------|------------|
| MECA_STATIQUE | OPTION | 'SIEF_ELGA_DEPL' | [U4.31.01] |
| CALC_ELEM | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ1' | [U4.61.02] |
| | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ2' | |

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

| | Identification | Référence | Aster | % différence | tolérance |
|-----------|-------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|-------------|
| A | σ_{xx} ZZ1 | 3. | 2.975 | -0.83 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 3. | 2.957 | -1.43 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | 0. | $6.86 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.3 |
| | σ_{yy} ZZ2 | 0. | $7.52 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.3 |
| | σ_{xy} ZZ1 | 0. | $-3.12 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.3 |
| | σ_{xy} ZZ2 | 0. | -0.155 | - | 0.3 |
| P | σ_{xx} ZZ1 | 1.15625 | 1.166 | 0.85 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 1.15625 | 1.153 | -0.25 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | -0.15625 | -0.167 | 6.92 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ2 | -0.15625 | -0.153 | -1.87 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ1 | -0.125 | -0.127 | 1.52 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ2 | -0.125 | -0.124 | -0.58 | 0.1 |
| Maille M1 | e_{abs} ZZ1 | | $1.81 \cdot 10^{-4}$ | | 1.10^{-3} |
| | e_{abs} ZZ2 | | $2.92 \cdot 10^{-4}$ | | 1.10^{-3} |
| | e_{rel} ZZ1 | | 4.69% | | 0.1 |
| | e_{rel} ZZ2 | | 7.56% | | 0.1 |
| Ω | e_{abs} ZZ1 | $0.152 \cdot 10^{-2}$ | $0.123 \cdot 10^{-2}$ | -19 | |
| | e_{abs} ZZ2 | $0.152 \cdot 10^{-2}$ | $0.167 \cdot 10^{-2}$ | +9.9 | |
| | e_{rel} ZZ1 | 1.17% | 0.95% | | |
| | e_{rel} ZZ2 | 1.17% | 1.29% | | |
| | θ ZZ1 | | 0.810 | | |
| | θ ZZ2 | | 1.099 | | |

8.2 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur.

Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

8.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.11

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 mégamots

Système :

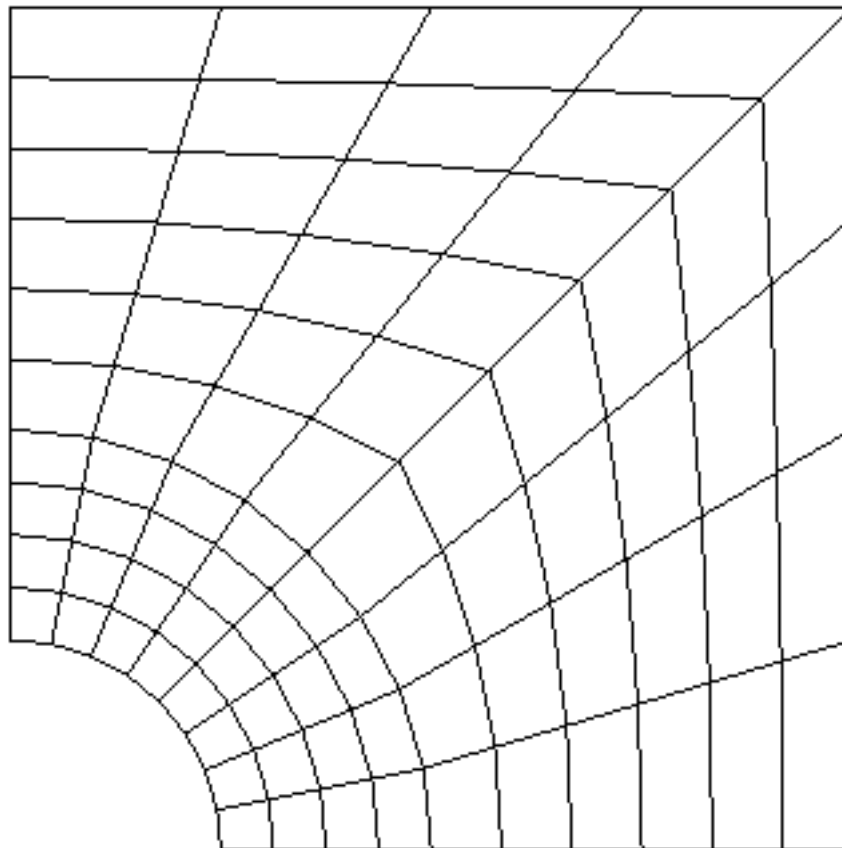
Temps CPU User :

UNICOS 8.0

10.4 secondes

9 Modélisation D

9.1 Caractéristiques de la modélisation



9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 277.

Nombre de mailles et types : 80 QUAD8.

9.3 Fonctionnalités testées

| Commandes | | | Clés |
|---------------|--------|------------------|------------|
| MECA_STATIQUE | OPTION | 'SIEF_ELGA_DEPL' | [U4.31.01] |
| CALC_ELEM | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ1' | [U4.61.02] |
| | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ2' | |

10 Résultats de la modélisation D

10.1 Valeurs testées

| | Identification | Référence | Aster | % différence | tolérance |
|-----------|-------------------|----------------------|-----------------------|--------------|-------------|
| A | σ_{xx} ZZ1 | 3. | 3.063 | 2.11 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 3. | 3.037 | 1.24 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | 0. | 0.101 | - | 0.3 |
| | σ_{yy} ZZ2 | 0. | $2.47 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.3 |
| | σ_{xy} ZZ1 | 0. | $-5.8 \cdot 10^{-3}$ | - | 0.3 |
| | σ_{xy} ZZ2 | 0. | $-2.41 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.3 |
| P | σ_{xx} ZZ1 | 1.15625 | 1.170 | 1.19 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 1.15625 | 1.153 | -0.29 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | -0.15625 | -0.162 | 3.54 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ2 | -0.15625 | -0.153 | -1.87 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ1 | -0.125 | -0.124 | -1.09 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ2 | -0.125 | -0.124 | -0.84 | 0.1 |
| Maille M1 | e_{abs} ZZ1 | | $6.1 \cdot 10^{-5}$ | | 1.10^{-3} |
| | e_{abs} ZZ2 | | $2.1 \cdot 10^{-4}$ | | 1.10^{-3} |
| | e_{rel} ZZ1 | | 1.45% | | 0.1 |
| | e_{rel} ZZ2 | | 5.01% | | 0.1 |
| Ω | e_{abs} ZZ1 | $9.01 \cdot 10^{-4}$ | $2.90 \cdot 10^{-4}$ | +67.9 (!) | |
| | e_{abs} ZZ2 | $9.01 \cdot 10^{-4}$ | $8.88 \cdot 10^{-4}$ | -1.5 | |
| | e_{rel} ZZ1 | 0.697% | 0.22% | | |
| | e_{rel} ZZ2 | 0.697% | 0.687% | | |
| | θ ZZ1 | | 0.321 | | |
| | θ ZZ2 | | 0.985 | | |

10.2 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur

Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

10.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.11

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 mégamots

Système :

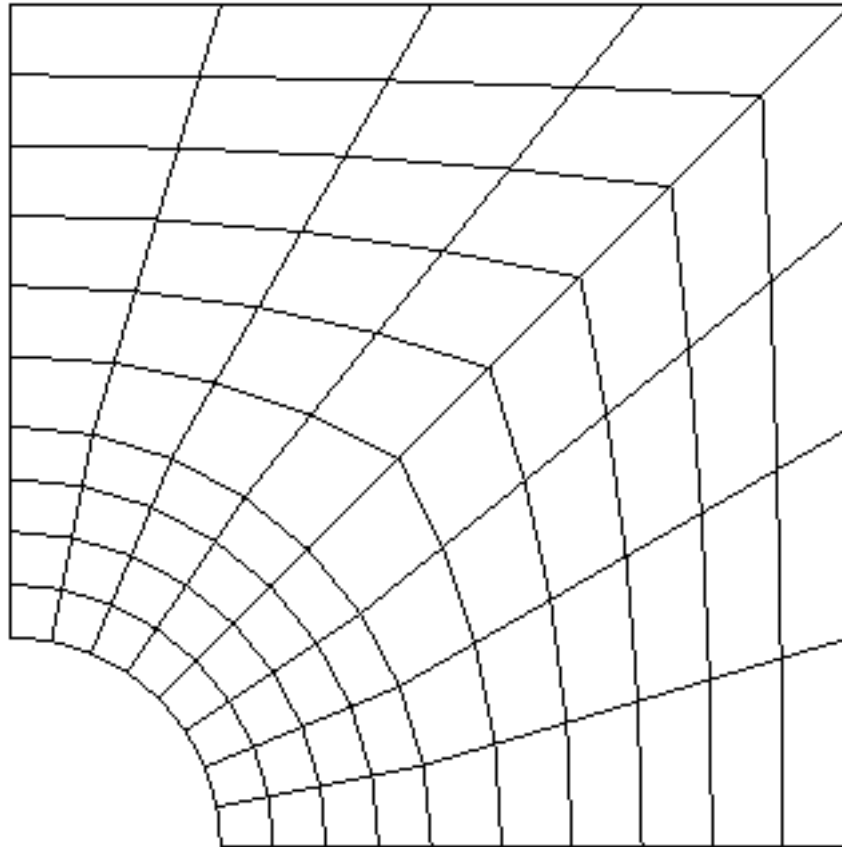
Temps CPU User :

UNICOS 8.0

8.6 secondes

11 Modélisation E

11.1 Caractéristiques de la modélisation



11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 80 QUAD9.

11.3 Fonctionnalités testées

| Commandes | | | Clés |
|---------------|--------|------------------|------------|
| MECA_STATIQUE | OPTION | 'SIEF_ELGA_DEPL' | [U4.31.01] |
| CALC_ELEM | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ1' | [U4.61.02] |
| | OPTION | 'ERRE_ELEM_NOZ2' | |

12 Résultats de la modélisation E

12.1 Valeurs testées

| | Identification | Référence | Aster | % différence | tolérance |
|-----------|-------------------|----------------------|----------------------|--------------|-------------------|
| A | σ_{xx} ZZ1 | 3. | 3.070 | 2.33 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 3. | 3.004 | 0.14 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | 0. | 0.113 | - | 0.3 |
| | σ_{yy} ZZ2 | 0. | 0.04 | - | 0.3 |
| | σ_{xy} ZZ1 | 0. | $-1.4 \cdot 10^{-3}$ | - | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ2 | 0. | $1.89 \cdot 10^{-2}$ | - | 0.1 |
| P | σ_{xx} ZZ1 | 1.15625 | 1.170 | 1.19 | 0.1 |
| | σ_{xx} ZZ2 | 1.15625 | 1.152 | -0.33 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ1 | -0.15625 | -0.162 | 3.44 | 0.1 |
| | σ_{yy} ZZ2 | -0.15625 | -0.153 | -2.11 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ1 | -0.125 | -0.124 | -1.06 | 0.1 |
| | σ_{xy} ZZ2 | -0.125 | -0.124 | -0.94 | 0.1 |
| Maille M1 | e_{abs} ZZ1 | | $6.1 \cdot 10^{-5}$ | | $1 \cdot 10^{-3}$ |
| | e_{abs} ZZ2 | | $2.1 \cdot 10^{-4}$ | | $1 \cdot 10^{-3}$ |
| | e_{rel} ZZ1 | | 1.45% | | 0.1 |
| | e_{rel} ZZ2 | | 5.01% | | 0.1 |
| Ω | e_{abs} ZZ1 | $8.99 \cdot 10^{-4}$ | $2.75 \cdot 10^{-4}$ | +69.4 (!) | |
| | e_{abs} ZZ2 | $8.99 \cdot 10^{-4}$ | $8.55 \cdot 10^{-4}$ | -4.9 | |
| | e_{rel} ZZ1 | 0.695% | 0.21% | | |
| | e_{rel} ZZ2 | 0.695% | 0.66% | | |
| | θ ZZ1 | | 0.306 | | |
| | θ ZZ2 | | 0.951 | | |

12.2 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur

Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

12.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.11

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 mégamots

Système :

Temps CPU User :

UNICOS 8.0

8.8 secondes

13 Synthèse des résultats

| | | TRIA3 | QUAD4 | TRIA6 | QUAD8 | QUAD9 |
|-----------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| e_{rel} | exacte | 3.44% | 2.48% | 1.17% | 0.697% | 0.695% |
| | ZZ1 | 3.28% | 2.28% | 0.95% | 0.22% | 0.21% |
| | ZZ2 | 3.49% | 2.37% | 1.29% | 0.687% | 0.66% |
| θ | ZZ1 | 0.952 | 0.919 | 0.810 | 0.321 | 0.306 |
| | ZZ2 | 1.013 | 0.958 | 1.099 | 0.985 | 0.951 |

Les contraintes aux nœuds sont, dans l'ensemble, mieux approximées avec ZZ2, surtout pour les éléments d'ordre 2. Si on fait tendre h vers 0, les taux de convergence avec h de $\|\sigma^{ex} - \sigma^*\|$ sont supérieurs par la méthode ZZ2 pour tous les types d'éléments à ceux de la méthode ZZ1 (σ^* est la contrainte lissée).

L'estimateur ZZ1 n'est pas fiable pour les éléments d'ordre 2, les contraintes nodales restent correctes. On peut vérifier dans ce cas particulier que $\theta \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, ce qui montre que le lissage global continu s'avère insuffisant pour estimer l'erreur dans le cas d'une solution sans singularités (cas de ce test).

ZZ2 est par contre fiable et asymptotiquement exact ($\theta \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$).

Page laissée intentionnellement blanche.