

Manuel de Validation

Fascicule V2.03 : Dynamique linéaire des coques et des plaques

Document V2.03.001

SDLS01 - Plaque carrée mince, libre ou encastrée au bord

Résumé :

Le domaine d'application de ce cas test concerne la dynamique des structures, et plus particulièrement le calcul modal et le calcul de réponse harmonique.

Pour le calcul modal, il s'agit de calculer les modes propres de flexion d'une plaque carrée mince dans deux configurations :

- Plaque encastrée sur un bord,
- Plaque libre.

La plaque est maillée en éléments triangulaires auxquels sont affectés des éléments DKT.

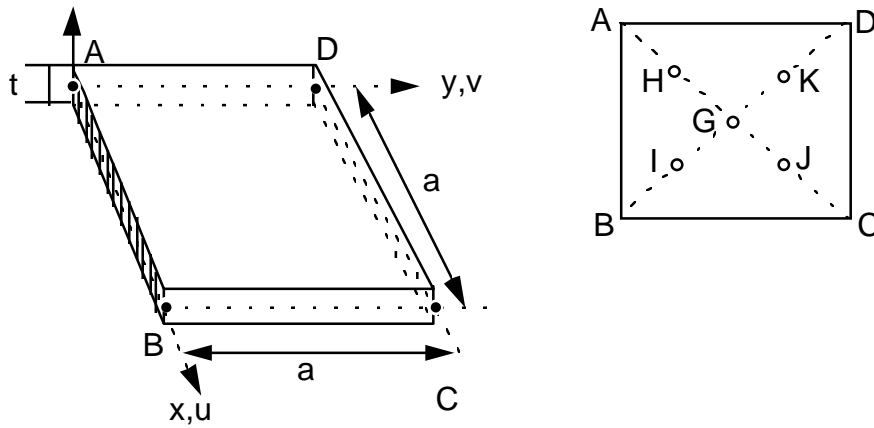
Quatre modélisations différentes sont testées :

- Calcul modal – Arêtes de la plaque orientées selon les axes du repère,
- Calcul modal – Orientation quelconque de la plaque et réponse harmonique pour la plaque encastrée,
- Calcul modal par sous-structuration dynamique classique et cyclique,
- Calcul modal suite à une condensation de Guyan.

Les résultats de référence des calculs modaux sont issus de calculs analytiques. Ils valident d'une part les outils de création des matrices de masse et de rigidité, ainsi que les opérateurs de sous-structuration dynamique classique et cyclique implémentés dans le *Code_Aster*. D'autre part, ce cas test valide le calcul modal suite à une condensation de Guyan (condensation de la matrice de masse).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Coté $a = 1.m$

épaisseur $t = 0.01 m$

Coordonnées des points (en m) :

	A	B	C	D	G	H	I	J	K
x	0.	1.	1.	0.	0.5	0.25	0.75	0.75	0.25
y	0.	0.	1.	1.	0.5	0.25	0.25	0.75	0.75
z	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} Pa \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 7800 kg/m^3$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Cas 1 : coté AB encasté
pour tout point P tel que $y_P = 0$:

$$u = v = w = 0.$$

$$\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0.$$

Cas 2 : plaque libre

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse modale

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLS01/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

La formulation de M.V. BARTON, pour une plaque de coté a , conduit à :

$$f_i = \frac{1}{2\pi a^2} \lambda_i^2 \sqrt{\frac{Et^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad i = 1, 2, \dots$$

avec, pour un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$:

1° : Plaque encastree sur un coté

i	λ_i^2
1	3.492
2	8.525
3	21.43
4	27.33
5	31.11
6	54.44

2° : Plaque libre

i	λ_i^2
1 à 6	0.
7	13.49
8	19.79
9	24.43
10	35.02
11	35.02

(6 modes de corps solide à fréquence nulle).

Cette solution de référence s'applique aux plaques minces telles que : $t/a < 0.1$.

Les coefficients λ_i sont établis par développement limité sur les déformées modales d'un réseau de poutres croisées (poutre encastree-libre et poutre libre-libre).

2.2 Résultats de référence

Cas 1 : 6 premiers modes propres

Cas 2 : 11 premiers modes propres

2.3 Incertitude sur la solution

Solution semi-analytique.

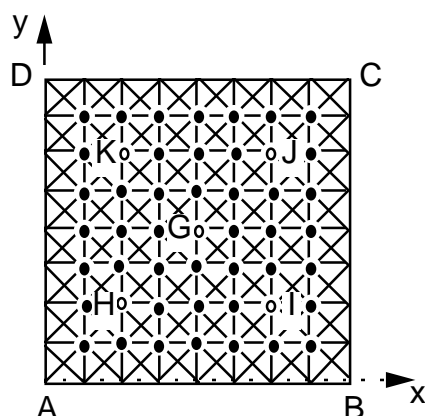
2.4 Références bibliographiques

- [1] M. V. BARTON Vibrations of rectangular and skew cantilever plates. – Journal of Applied Mechanics, vol 18, p. 129–134 (1951)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation DKT



Noms des nœuds : Points A = N1 B = N78 C = N145 D = N80
 G = N65 H = N17 I = N73 J = N121 K = N71

Conditions limites :

Cas 1 en tous les nœuds du côté AB :

DDL_IMPO: (GROUP_NO: AB DX :0., DY :0., DZ :0., DRX :0.,DRY :0.,DRZ :0.)

Cas 2 aucune

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes			Clés
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	TOUT	[U4.24.01]
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	GROUP_NO	[U4.25.01]
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'DKT'	TOUT [U4.22.01]
DEFI_MATERIAU	ELAS		[U4.23.01]
MODE_ITER_SIMULT	'BANDE'		[U4.52.01]
CALC_ELEM	OPTION	'EPOT_ELEM_DEPL'	[U4.61.02]
		'ECIN_ELEM_DEPL'	

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Fréquence (Hz)				
Mode propre	Référence	Aster	% différence	Tolérance
1° : Plaque encastrée sur un côté				
1	8.7266	8.6718	-0.63	1. 10 ⁻²
2	21.3042	21.2904	-0.06	
3	53.5542	53.0992	-0.85	
4	68.2984	67.9269	-0.54	
5	77.7448	77.4294	-0.40	
6	136.0471	135.7635	-0.21	
Aster _{epot} = e _{cin}				
1	1.4796 10 ⁴			
2	1.7331 10 ⁴			
3	4.3802 10 ⁴			
4	3.7367 10 ⁴			
5	5.4956 10 ⁴			
6	1.3483 10 ⁵			
2° : Plaque libre				
7	33.7119	33.6839	-0.08	1.1 10 ⁻²
8	49.4558	48.9362	-1.05	
9	61.0513	60.5849	-0.76	
10	87.5160	87.0993	-0.48	
11	87.5160	87.0993	-0.48	
Aster _{epot} = e _{cin}				
7	2.2396 10 ⁴			
8	4.7270 10 ⁴			
9	7.2453 10 ⁴			
10	1.4974 10 ⁵			
11	1.4974 10 ⁵			

4.2 Remarques

MODE_ITER_SIMULT OPTIONS: 'BANDE' FREQ : (8., 140.) CAS 1
FREQ : (32., 90.) CAS 2

Contenu du fichier résultats :

- 1° : 6 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux
énergie de déformation et énergie cinétique des 6 modes.
2° : 5 fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux (f > 0)
énergie de déformation et cinétique des 5 modes.

4.3 Paramètres d'exécution

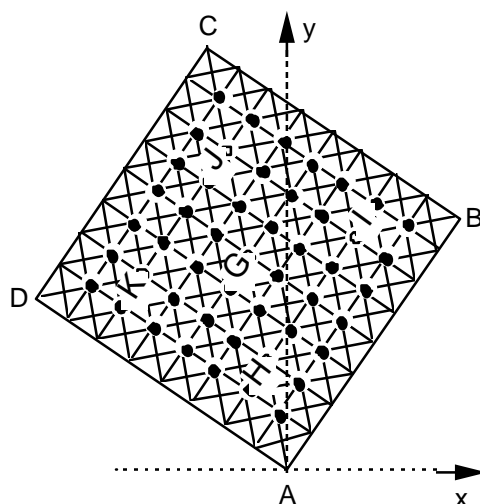
Version : 3.04.05
Machine : CRAY C98 Système : UNICOS 8.0
Encombrement mémoire : 8 mégamots Temps CPU User : 18.91 secondes

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation DKT avec maillage identique à la modélisation A.

Rotation de la plaque telle que le côté AB est sur la droite $3y = 4x$



Noms des nœuds : Points A = N1 B = N78 C = N145 D = N80
 G = N65 H = N17 I = N73 J = N121 K = N71

Conditions limites :

Cas 1 en tous les nœuds du côté AB :

```
DDL_IMPO: (GROUP_NO: AB DX :0., DY :0., DZ :0., DRX :0.,DRY :0.,DRZ :0.)
```

Cas 2 : aucune

Réponse harmonique :

Force nodale point C (N145) : $F_z = -98100$

Matériau : AMOR_ALPHA : 0.1 AMOR_BETA : 0.1

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes			Clés
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	TOUT	[U4.24.01]
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	GROUP_NO	[U4.25.01]
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'DKT'	TOUT [U4.22.01]
DEFI_MATERIAU	ELAS	AMOR_ALPHA	AMOR-BETA [U4.23.01]
MODE_ITER_SIMULT	'BANDE'		[U4.52.01]
DYNA_LINE_HARM			[U4.54.02]
CALC_ELEM	OPTION	EFGE_ELNO_DEPL	[U4.61.02]
		SIGM_ELNO_DEPL	

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Les valeurs des fréquences propres sont identiques à celles de la modélisation A.

Réponse harmonique :

FREQ : 50 Hz

NOEUD : N145

MAILLE : M255

Référence	Aster 3.03.15	Aster 3.05.16	% différence
DEPL 'DZ'	2.90290E-02 5.20606E-02	2.90290E-02 5.20606E-02	0.0
DEPL 'DRX'	2.52920E-02 9.44717E-02	2.52920E-02 9.44717E-02	0.0
VITE 'DZ'	-1.63553E+01 9.11973E+00	-1.63553E+01 9.11973E+00	0.0
VITE 'DRX'	-2.96792E+01 7.94573E+00	-2.96792E+01 7.94573E+00	0.0
ACCE 'DZ'	-2.86505E+03 -5.13817E+03	-2.86505E+03 -5.13817E+03	0.0
ACCE 'DRX'	-2.49622E+03 -9.32398E+03	-2.49622E+03 -9.32398E+03	0.0
'EFGE_ELNO_DEPL' 'MXX'	1.14053E+01 1.45539E+03	1.14053E+01 1.45539E+03	0.0
'EFGE_ELNO_DEPL' 'MYX'	1.10224E+01 -1.31441E+03	1.10224E+01 -1.31441E+03	0.0
'EFGE_ELNO_DEPL' 'MXY'	1.03148E+01 3.55382E+02	1.03148E+01 3.55382E+02	0.0
'EFGE_ELNO_DEPL' 'QX'	3.66163E+02 -3.77331E+03	3.66163E+02 -3.77331E+03	0.0
'EFGE_ELNO_DEPL' 'QY'	-3.14676E+02 2.06813E+03	-3.14676E+02 2.06813E+03	0.0
'SIGM_ELNO_DEPL' 'SIXZ'	5.49245E+04 -5.65997E+05	5.49245E+04 -5.65997E+05	0.0
'SIGM_ELNO_DEPL' 'SIYZ'	-4.72014E+04 3.10219E+05	-4.72014E+04 3.10219E+05	0.0

6.2 Remarques

MODE_ITER_SIMULT

OPTIONS: 'BANDE'

FREQ : (8., 140.) CAS 1

FREQ : (32., 90.) CAS 2

Contenu du fichier résultats :

- 1° : 6 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.
- 2° : 11 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.
- 3° : déplacement DZ DRX au nœud N145
efforts généralisés et contraintes maille M255

6.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.03.10

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 mégamots

Système :

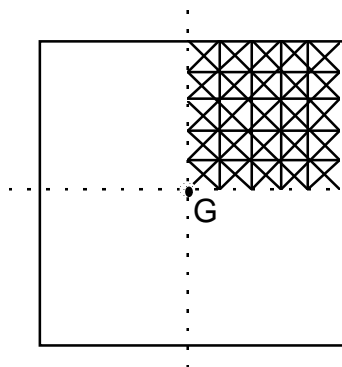
Temps CPU User :

UNICOS 8.0

15.35 secondes

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation C



Dans les 2 cas, la plaque est découpée en 4 parties de dimensions égales. Chaque sous-structure considérée est maillée en triangles auxquels sont affectés des éléments de plaque DKT.

Cas 1 : Plaque encadrée sur un bord

La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous-structuration classique avec interfaces de type CRAIG_BAMPTON. La base modale utilisée pour chaque sous-structure est composée de 25 modes propres et des modes contraints associés aux interfaces.

Cas 2 : Plaque libre

La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous-structuration cyclique avec interfaces de type CRAIG_BAMPTON HARMONIQUE et prise en compte de la spécificité du noeud de l'axe (point G). La base modale utilisée pour le secteur de base est composée de 25 modes propres et des modes harmoniques associés aux interfaces.

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121

Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

7.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
MACR_ELEM_DYNA	BASE_MODAL			[U4.55.05]
MACR_ELEM_DYNA	OPTION	'RITZ'		
DEFI_MODELE_GENE	SOUS_STRUC	NOM		
DEFI_MODELE_GENE	SOUS_STRUC	MACR_ELEM_DYNA		
DEFI_MODELE_GENE	SOUS_STRUC	ANGL_NAUT		
DEFI_MODELE_GENE	LIAISON	SOUS_STRUC_1	SOUS_STRUC_2	[U4.55.06]
DDEFI_MODELE_GENE	LIAISON	INTERFACE_1	INTERFACE_2	
NUME_DDL_GENE	MODELE_GENE			[U4.55.07]
ASSE_MATR_GENE	NUME_DDL_GENE			[U4.55.08]
ASSE_MATR_GENE	OPTION	'MASS_GENE'	'RIGI_GENE'	
DEFI_SQUELETTE	MODELE_GENE			[U4.75.01]
DEFI_SQUELETTE	SOUS_STRUC	NOM		
REST_BASE_PHYS	SQUELETTE			[U4.64.01]
REST_BASE_PHYS	TOUT_ORDRE			
MODE_ITER_CYCL	LIAISON	AXE	'OUI'	
MODE_ITER_CYCL	CALCUL	TOUT_DIAM	'CENTRE'	[U4.52.03]
MODE_ITER_CYCL	CALCUL	OPTION		
DEFI_SQUELETTE	MODE_CYCL			[U4.75.01]
DEFI_SQUELETTE	SECTEUR			

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Ordre du mode propre i	Fréquence (Hz)		% différence	Tolérance
	Référence	Aster		
1° : Plaque encastree sur un côté				
1	8.7266	8.6419	−0.97	1.25 10 ^{−2}
2	21.3042	21.2253	−0.37	
3	53.5542	52.9693	−1.09	
4	68.2984	67.5444	−1.10	
5	77.7448	77.3966	−0.45	
6	136.0471	134.5785	−1.08	
2° : Plaque libre				
7	33.7119	33.6808	−0.09	1. 10 ^{−2}
8	49.4558	48.9785	−0.96	
9	61.0513	60.6739	−0.62	
10	87.5160	87.0662	−0.51	
11	87.5160	87.0662	−0.51	

8.2 Paramètres d'exécution

Version : 3.05.13

Machine : CRAY C98

Encombrement mémoire : 16 mégamots

Système :

Temps CPU User :

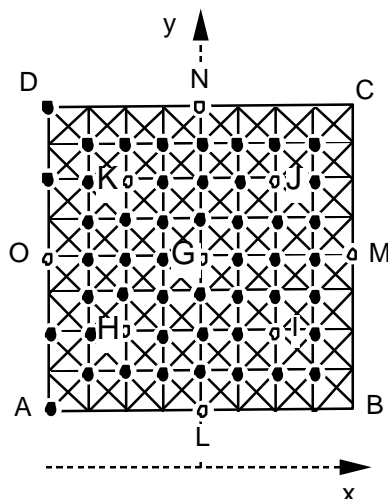
UNICOS 8.0

112.81 secondes

9 Modélisation D

9.1 Caractéristiques de la modélisation D

DKT + sous-structuration de GUYAN



Conditions limites : Plaque libre

Condensation des matrices de masse et rigidité sur les noeuds :

(A, B, C, D, G, H, I, J, K, L, M, N, O).

9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

9.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	TOUT		[U4.24.01]
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	GROUP_NO		[U4.25.01]
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'DKT'	TOUT	[U4.22.01]
DEFI_MATERIAU	ELAS			[U4.23.01]
MODE_ITER_SIMULT	'BANDE'			[U4.52.01]
MACR_ELEM_STAT	RIGI_MECA			[U4.44.01]
MACR_ELEM_STAT	MACR_MECA			[U4.44.01]

10 Résultats de la modélisation D

10.1 Valeurs testées

Ordre du mode propre i	Fréquence (Hz)		% différence	Tolérance
	Référence	<i>Aster</i>		
2° : Plaque libre				
7	33.7119	33.8758	−0.48	1.1 10 ^{−2}
8	49.4558	49.5240	−0.14	
9	61.0513	61.6240	−0.94	

10.2 Remarques

On cherche à calculer les 3 premières fréquences propres non nulles du problème de la plaque libre sur ses bords.

Si on condense les matrices sur les seuls nœuds :

(A, B, C, D, G, H, I, J, K)

La précision des fréquences n'est alors que de 2%.

Pour obtenir les résultats voulus avec la précision attendue (1%), il faut ajouter les points (L, M, N, O).

11 Synthèse des résultats

- Modélisations A et B :
Précision sur les fréquences propres ² 1% jusqu'au sixième mode de flexion.
- Modélisation C :
En sous-structuration, la qualité des résultats pourrait être améliorée par l'utilisation d'un maillage de sous-structure plus fin.
- Modélisation D :
Pour obtenir une précision de 1% sur les fréquences propres, il est nécessaire de condenser aussi sur les 4 nœuds milieux des bords L, M, N et O.