

Manuel de Validation**Fascicule V7.90 : Références théoriques de tests en thermo-mécanique****Document V7.90.03**

HPLA100 - Une solution analytique pour le cylindre creux thermoélastique pesant en rotation uniforme

Résumé :

On donne ici la solution analytique 2D axisymétrique et en coque du problème du cylindre creux mince thermoélastique pesant et en rotation uniforme, soumis à un champ de température linéaire dans l'épaisseur. Le matériau est supposé de caractéristiques indépendantes de la température.

Cette solution correspond au test HPLA100 [V7.01.100].

Table des matières

Erreur! Aucune entrée de table des matières n'a été trouvée.

1 Chargement de rotation uniforme autour de OZ

1.1 Modèle 2D axisymétrique

La densité de force centrifuge est : $\rho \Omega^2 r \cdot \mathbf{e}_r$.

On envisage les conditions aux limites suivantes :

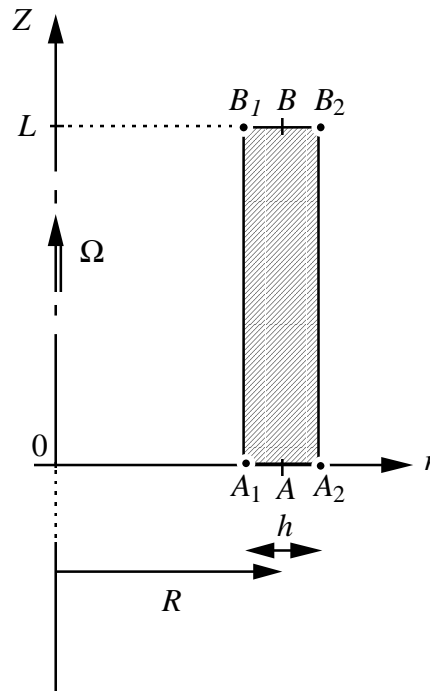
$$u_z(r, z) = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et } z = L$$

On postule le déplacement sous la forme :

$$u_r = u(r) ; \quad u_z = u_\theta = 0$$

Ainsi :

$$\varepsilon_{rr} = u' ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{r\theta} = 0$$



Les contraintes élastiques s'expriment :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)u' + \nu \frac{u}{r} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{u}{r} + \nu u' \right] \\ \sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{u}{r} + u' \right] \end{cases}$$

L'équation d'équilibre radial s'écrit :

$$(r \sigma_{rr})_{,r} - \sigma_{\theta\theta} = -\rho \Omega^2 r^2$$

Ainsi :

$$\left(\frac{(ru)'}{r} \right)' = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \rho \Omega^2 r \quad \text{éq 1.1-1}$$

Note :

$$\frac{u}{r} + u' = \frac{(ru)'}{r}$$

D'où la solution générale :

$$u(r) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \rho \Omega^2 \frac{r^3}{8} + Ar + \frac{B}{r} \quad \text{éq 1.1-2}$$

Les contraintes sont alors :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = -\frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{8} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{1+2\nu}{1-\nu} \rho \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{8} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(A + (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{zz}(r) = -\frac{\nu}{1-\nu} \rho \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot A \end{cases} \quad \text{éq 1.1-3}$$

Les conditions aux limites en contraintes sont :

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{en} \quad r = R \pm \frac{h}{2}$$

On note :

$$x = \frac{h}{2R}$$

On obtient grâce à [éq 1.1-3] :

$$B = \frac{(3-2\nu)(1+\nu)}{8(1-\nu)E} \rho \Omega^2 R^4 (1-x^2)^2$$

puis :

$$A = \frac{(3-2\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{4(1-\nu)E} \rho \Omega^2 R^2 (1+x^2)$$

Application numérique :

$$R = 20 \text{ mm} ; h = 1 \text{ mm} ; \rho = 8.10^{-6} \text{ kg/mm}^3 ; \Omega = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2 ; \nu = 0.3.$$

$$\text{D'où : } A = 7.13588.10^{-9} ; B = 3.561258.10^{-6} \text{ mm}^2$$

Note :

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \cdot \rho \frac{\Omega^2}{8} = 3.714286.10^{-12} \text{ mm}^{-2}$$

$$\frac{\nu}{1-\nu} \cdot \rho \frac{\Omega^2}{2} = 1.714286.10^{-6} \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{-2}$$

Ainsi :

- en peau interne : $u_r = 2.9424.10^{-7} \text{ mm} ; \sigma_{zz} = 0.99488.10^{-3} \text{ MPa}$
- en peau externe : $u_r = 2.8801.10^{-7} \text{ mm} ; \sigma_{zz} = 0.92631.10^{-3} \text{ MPa}$

1.2 Modèle coque axisymétrique

La force centrifuge équivaut à une **pression répartie** :

$$p = \rho \Omega^2 h R \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right)$$

La solution est membranaire, l'équilibre normal s'écrit :

$$N_{\theta\theta} = p \cdot R$$

La déformation membranaire est : $E_{\theta\theta} = \frac{w}{R}$, alors que $E_{zz} = 0 = K_{\theta\theta} = K_{zz}$. En élasticité :

$$N_{\theta\theta} = \frac{E h}{1 - \nu^2} E_{\theta\theta} ; N_{zz} = \nu N_{\theta\theta} ; M_{\alpha\beta} = 0$$

D'où la solution (flèche et effort normal circonférentiel) :

$$w = \frac{(1 - \nu^2) \rho \Omega^2}{E} R^3 \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) ; N_{\theta\theta} = \rho \Omega^2 R^2 h \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right)$$

La contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz} = \nu \rho \Omega^2 R^2 \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) \quad (\text{constant dans l'épaisseur})$$

Si on ne tient pas compte de la correction de métrique, il faut ôter le terme $\left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right)$ dans les expressions précédentes.

Application numérique (sans correction de métrique) :

$$p = 1,600000 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}$$

$$w = 2,912000 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$$

$$N_{zz} = 0,96000 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{zz} = 0,96000 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$$

2 Chargement de pesanteur

2.1 Modèle 2D axisymétrique

La densité de force est : $-\rho g \mathbf{e}_z$ (pesanteur verticale).

On envisage les conditions aux limites suivantes :

$$u_z(r, z) = 0 \quad \text{en } r = R \quad \text{et } z = 0 \quad (\text{cercle d'appui})$$

avec la traction uniforme : $\sigma_{zz}(r, z) = \rho g L$ en $z = L$, équilibrant le poids.

On postule la solution élastique du type :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

de sorte que :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\nu u_{z,z} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} ; \quad \varepsilon_{rz} = 0 = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z}$$

On observe ainsi :

$$u_{r,r} = \frac{u_r}{r} \Leftrightarrow u_r(r, z) = -\nu A'(z) \cdot r$$

Puis :

$$\begin{aligned} -\nu A'(z) &= \varepsilon_{rr} = -\nu \varepsilon_{zz} \Leftrightarrow u_{z,z}(r, z) = A'(z) \\ &\Leftrightarrow u_z(r, z) = A(z) + B(r) \end{aligned}$$

De $\varepsilon_{rz} = 0$, on tire :

$$B'(r) - \nu r A''(z) = 0$$

soit :

$$A''(z) = \text{cste} = \alpha ; \quad B'(r) = \alpha \nu r$$

Des conditions aux limites en effort, on obtient :

$$A(z) = \frac{\rho g z^2}{2E} + \beta ; \quad B(r) = \nu \frac{\rho g r^2}{2E}$$

Enfin, β vérifie : $\beta = -\nu \rho g \frac{R^2}{2E}$

Ainsi :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = \frac{-\nu \rho g z r}{E} ; & u_z(r, z) = \frac{\rho g}{2E} (z^2 + \nu(r^2 - R^2)) \\ \sigma_{zz}(r, z) = \rho g z \end{cases} \quad \text{éq 2.1-1}$$

Application numérique

$g = 10 \text{ N/kg}$; $\rho = 8.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$; $R = 20 \text{ mm}$; $L = 10 \text{ mm}$

$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2$; $\nu = 0.3$; $h = 1 \text{ mm}$

- en peau interne : $u_r(L) = -2.34000.10^{-8} \text{ mm}$;
 $\sigma_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ MPa}$;
 $u_z(O) = -1.185000.10^{-9} \text{ mm}$
- en peau externe : $u_r(L) = -2.46000.10^{-8} \text{ mm}$;
 $\sigma_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ MPa}$;
 $u_z(O) = 1.215000.10^{-9} \text{ mm}$

2.2 Modèle coque axisymétrique

Une traction verticale est exercée en $z = L$:

$$F = \rho g h L$$

La pesanteur conduit à une force verticale :

$$\mathbf{f} = -\rho g h \mathbf{e}_z$$

La condition aux limites sur le cercle d'appui est : $u_z(z) = 0$ en $z = 0$

La solution est membranaire, l'équilibre vertical s'écrit :

$$N_{zz,z} = \rho g h$$

De plus : $N_{\theta\theta} = 0$. En élasticité, on déduit alors :

$$E_{\theta\theta} = \frac{w}{R} = \frac{-\nu N_{zz}}{E h} = -\frac{\nu \rho g z}{E} ; \quad E_{zz} = u_{z,z} = \frac{N_{zz}}{E h} \Rightarrow u_z(z) = \frac{\rho g}{2E} z^2$$

La contrainte axiale est :

$$\sigma_{zz} = \rho g z \quad (\text{constant dans l'épaisseur})$$

Application numérique :

$$F = 8.10^{-4} \text{ N/mm}$$

$$w(L) = -2.4000.10^{-8} \text{ mm}$$

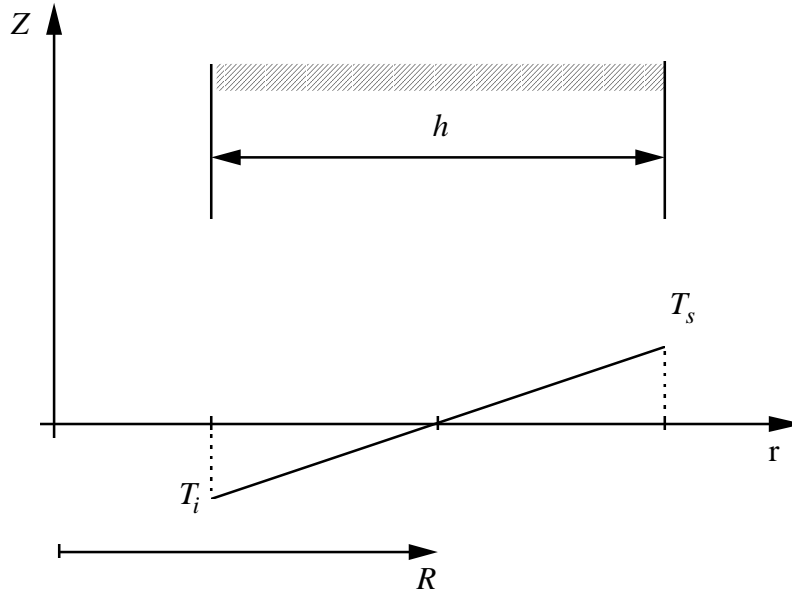
$$N_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{zz}(L) = 8.0000.10^{-4} \text{ N/mm}$$

3 Chargement thermomécanique

3.1 Modèle 2D axisymétrique

$$T(r) - T_{réf}(r) = \frac{T_s + T_i}{2} + \frac{(T_s - T_i)}{h} \cdot (r - R) \quad \text{éq 3.1.-1}$$



On postule le déplacement sous la forme :

$$u_r = u(r) ; u_z = u_\theta = 0$$

avec les conditions aux limites idoines. Ainsi, les contraintes élastiques s'expriment :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)u' + \nu \frac{u}{r} \right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{u}{r} + \nu u' \right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \\ \sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{u}{r} + u' \right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \end{cases}$$

L'équation d'équilibre radial $(r \sigma_{rr})_{,r} - \sigma_{\theta\theta} = 0$ donne :

$$\left(\frac{(ru)'}{r} \right)' = \frac{\alpha(1+\nu')}{(1-\nu)} \cdot (T - T_{réf})' \quad \text{éq 3.1.-2}$$

D'où la solution générale :

$$u(r) = \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \cdot \frac{(T_s - T_i)}{h} \cdot \frac{r^2}{3} + Ar + \frac{B}{r} \quad \text{éq 3.1-3}$$

Les contraintes sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(r) = \frac{\alpha E(T_s - T_i)}{h} \left(\frac{R}{1-2\nu} - \frac{r}{3(1-\nu)} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \cdot \frac{T_s + T_i}{2} \\ \quad + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(A - (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\alpha E(T_s - T_i)}{h} \left(\frac{R}{1-2\nu} - \frac{2r}{3(1-\nu)} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \cdot \frac{T_s + T_i}{2} \\ \quad + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(A + (1-2\nu) \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_{zz}(r) = \frac{\alpha E(T_s - T_i)}{h} \left(\frac{R}{1-2\nu} - \frac{r}{1-\nu} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \cdot \frac{T_s + T_i}{2} \\ \quad + \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot A \end{array} \right. \quad \text{éq 3.1-4}$$

Les conditions aux limites en efforts sont : en $r = R \pm \frac{h}{2}$ $\sigma_{rr} = 0$. On note : $x = \frac{h}{2R}$. On obtient grâce à [éq 3.1-4] :

$$B = \frac{\alpha(T_s - T_i)}{6 h(1-\nu)} (1+\nu) \cdot R^3 (1-x^2)^2$$

puis :

$$A = \alpha(1+\nu) \left[-\frac{(T_s - T_i) R}{6 h(1-\nu)} (3 - (1-2\nu)x^2) + \frac{T_s + T_i}{2} \right]$$

Application numérique :

$$R = 20 \text{ mm} ; h = 1 \text{ mm} ; \alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; T_s = -T_i = 0.5^\circ\text{C} ; \nu = 0.3 ;$$

$$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2.$$

$$\text{D'où : } A = -0.18569881 \cdot 10^{-3} ; B = 0.02473096 \text{ mm}^2$$

Note :

$$\frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{T_s - T_i}{3 h} = 0.61904762 \cdot 10^{-5}$$

- en peau interne : $u_r = 1.056145.10^{-6}$ mm ;
 $\sigma_{zz} = 1.4321427$ MPa.
- en peau externe : $u_r = 1.110317.10^{-6}$ mm ;
 $\sigma_{zz} = -1.4250001$ MPa.

Dans le cas où l'on prend $T_s = +T_i = 0.1^\circ\text{C}$:

$$A = 0,00130000.10^{-3} ; B = 0,0 \text{ mm}^2$$

Ainsi :

- en peau interne : $u_r = 25.350000.10^{-6}$ mm ;
 $\sigma_{zz} = -0.200000$ MPa.
- en peau externe : $u_r = 26.650000.10^{-6}$ mm ;
 $\sigma_{zz} = -0.200000$ MPa.

3.2 Modèle coque axisymétrique

Pour le champ de température dans l'épaisseur donné par [éq 3.1-1], on obtient l'expression suivante de la loi de comportement :

$$\begin{cases} N_{\theta\theta} = \frac{E h}{1-\nu^2} (E_{\theta\theta} + \nu E_{zz}) - \frac{\alpha E h}{1-\nu} \left[\frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s - T_i}{12} \cdot \frac{h}{R} \right] \\ N_{zz} = \frac{E h}{1-\nu^2} (\nu E_{\theta\theta} + E_{zz}) - \frac{\alpha E h}{1-\nu} \left[\frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s - T_i}{12} \cdot \frac{h}{R} \right] \end{cases} \quad \text{éq 3.2-1}$$

et :

$$\begin{cases} M_{\theta\theta} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (K_{\theta\theta} + \nu K_{zz}) - \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} \left[\frac{T_s + T_i}{2} \cdot \frac{h}{R} + T_s - T_i \right] \\ M_{zz} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\nu K_{\theta\theta} + K_{zz}) - \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} \left[\frac{T_s + T_i}{2} \cdot \frac{h}{R} + T_s - T_i \right] \end{cases} \quad \text{éq 3.2-2}$$

D'après ces expressions, les termes thermiques en $\frac{h}{R}$ sont à négliger si l'on ne considère pas la correction de métrique dans l'épaisseur, c'est-à-dire dans le cas des modèles habituels.

Dans notre situation :

$$E_{\theta\theta} = \frac{w}{R} ; E_{zz} = 0 ; K_{\theta\theta} = K_{zz} = 0$$

L'équilibre normal à la coque s'écrit :

$$N_{\theta\theta} = 0$$

d'où la flèche :

$$w = \alpha(1 + \nu) \left[\frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s - T_i}{12} \cdot \frac{h}{R} \right] \cdot R$$

et :

$$N_{zz} = \alpha E h \left[\frac{T_s + T_i}{2} + \frac{T_s - T_i}{12} \cdot \frac{h}{R} \right]$$

$$M_{zz} = -\frac{\alpha E h^2}{12(1 - \nu)} \left[(T_s - T_i) + \frac{T_s + T_i}{2} \cdot \frac{h}{R} \right]$$

Comme le second membre de dilatation ne tient pas compte de la correction de métrique, les termes en h / R ci-dessus sont négligés.

Application numérique

$$R = 20 \text{ mm} ; h = 1 \text{ mm} ; \alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; T_s = -T_i = 0.5^\circ\text{C} ; \nu = 0.3 ;$$

$$E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2.$$

D'où :

$$M_{zz} = -0.2380952 \text{ N}$$

$$\text{en peau interne : } \sigma_{zz} = 1.449319 \text{ MPa}^* ;$$

ou

$$\sigma_{zz} = 1.428571 \text{ MPa (sans correction de métrique)}$$

Dans le cas où l'on prend $T_s = +T_i = 0,1^\circ\text{C}$:

$$w = 26.00000 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$$

$$N_{zz} = -0.2 \text{ N/mm}$$

$$M_{zz} = -0.001190476 \text{ N}$$

$$\text{en peau interne : } \sigma_{zz} = -0.2122466 \text{ MPa}^* ;$$

ou

$$\sigma_{zz} = -0.200000 \text{ MPa (sans correction de métrique)}$$

* Les contraintes dans l'épaisseur avec correction de métrique sont données par :

$$\sigma_{zz}(x_3) = \frac{N_{zz} - M_{zz} / R}{h(1 - h^2 / 12 R^2)} + \left(M_{zz} - N_{zz} \frac{h^2}{12 R} \right) \frac{12 x_3}{h^3(1 - h^2 / 12 R^2)}$$