

Manuel de Validation
Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des éléments volumiques
Document : V6.04.152

SSNV152- Traction élastique. Calcul des contraintes de Cauchy

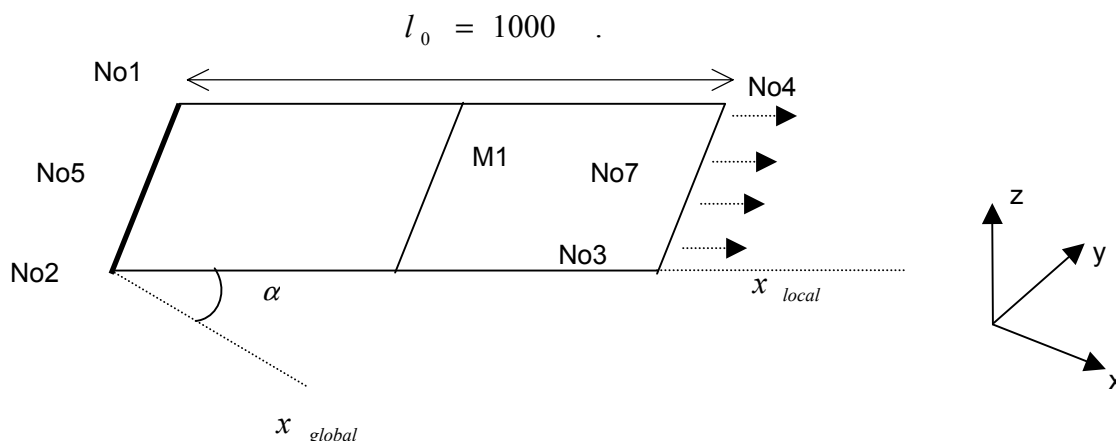
Résumé

Le but de ce test est de valider le calcul des contraintes de Cauchy dans la commande `CALC_ELEM` par l'option `SIGM_ELNO_COQUE`.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La géométrie de ce test est une plaque carrée dans le plan (x,y) tournée de 30° par rapport à x autour de z.



On appelle l la longueur de la plaque déformée, on notera x, y, z , les coordonnées de la configuration déformée et X, Y, Z , les coordonnées de la configuration initiale

1.2 Propriétés des matériaux

On prend $E = 200\,000.MPa$ et $\nu = 0$

1.3 Conditions aux limites et chargements mécaniques

On bloque les nœuds No1, No5 et No2 de sorte que $DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$, et on impose un déplacement local $Dx=100$. sur les nœuds No3, No4 et No7.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est analytique.

Passage de l'état initial à l'état déformé :

$$x = \frac{1}{l_0} X, \quad y = \frac{a}{a_0} Y, \quad z = \frac{b}{b_0} Z$$

où

a est la longueur de la déformée de la plaque suivant Y ,
 a_0 est la longueur initiale de la plaque,
 b est l'épaisseur de la plaque déformée,
 b_0 est l'épaisseur initiale de la plaque.

Du fait que $\nu = 0$ et des hypothèses de coque, on a $a = a_0$, $b = b_0$

Tenseur Green-Lagrange :

Par définition du tenseur de Green-Lagrange, on a $E_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right\}$

Avec $u = x - X = \frac{l-l_0}{l_0} X$, on a donc $E_{11} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{l-l_0}{l} + \frac{l-l_0}{l} + \frac{(l-l_0)^2}{l_0^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \right)$

En remplaçant, on a $E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1100^2 - 1000^2}{1000^2} \right) = 0.105$

Gradient de déformation :

Par définition :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dX} & \frac{dx}{dY} & \frac{dx}{dZ} \\ \frac{dy}{dX} & \frac{dy}{dY} & \frac{dy}{dZ} \\ \frac{dz}{dX} & \frac{dz}{dY} & \frac{dz}{dZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit $J = \det F = \frac{l}{l_0}$

Contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce :

Soit S la contrainte de PK2, dans notre cas, $S_{11} = E.E_{11} = 200000 \times 0.105 = 21000$

Contrainte de Cauchy

Soit s le tenseur de contraintes de Cauchy, on a la relation $s = \left(\frac{1}{\det F} \right) (F.S.F^T)$, on en déduit alors

$$\text{que } s_{xx} = \left(\frac{1}{\frac{l}{l_0}} \right) \frac{l}{l_0} . S_{11} . \frac{l}{l_0} = \frac{l}{l_0} . S_{11} = \frac{1100}{1000} . 21000 = 23100$$

2.2 Résultats de référence

On calcule des déplacements DX et DY au nœud NO3, les contraintes de PK2 et les contraintes de Cauchy sur la maille M1.

2.3 Incertitude sur la solution

Résultat analytique.

2.4 Références bibliographiques

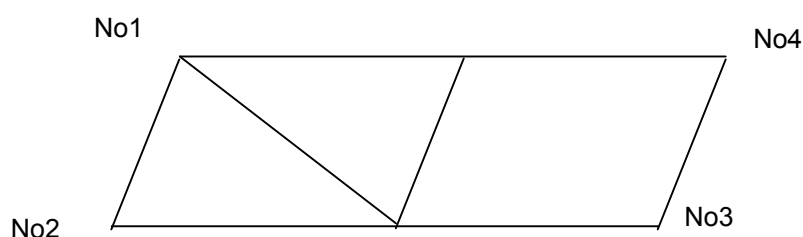
Néant.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise des éléments COQUE_3D

3.2 Caractéristiques du maillage



Les coordonnées des principaux nœuds :

Nœud	Coor_x	Coor_y	Coor_z
N01	-500	866.025	0.
N02	0	0	0.
N03	866.025	500	0.
N04	366.025	1366.025	0.

Les mailles utilisées sont :

- 1 maille QUAD9
- 2 mailles TRIA7

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Option
CALC_ELEM	SIGM_ELNO_COQUE

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	Différence
DX(No4)	8.66025 E+01	8.66025 E+01	4.66 E-05%
DY(No4)	50.0	50.0	0%
PK2-SIXX(M1)	21000.	21000.	2.04 E-08%
Cauchy-SIXX(M1)	23100.	23100.	2.14 E-08%

5 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés sont en accord avec la solution analytique.