

**Manuel de Validation**  
**Fascicule V2.02 : Dynamique linéaire des poutres**  
**Document V2.02.015**

## **SDLL15 - Poutre élancée, encastrée-libre, avec masse ou inertie excentrée**

---

### **Résumé :**

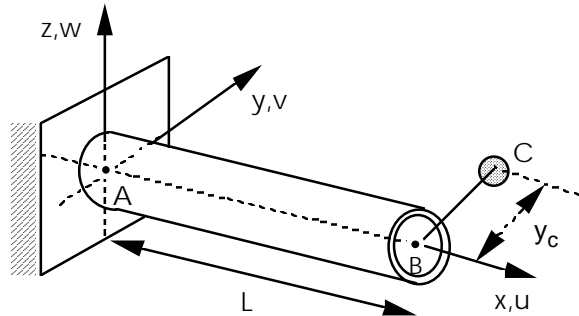
Ce problème tridimensionnel consiste à calculer les fréquences et les modes de vibration d'une structure mécanique composée d'une poutre droite élancée, encastrée-libre, à section tubulaire et d'une masse excentrée attachée à l'extrémité libre de la poutre. Ce test de Mécanique des Structures correspond à une analyse dynamique d'un modèle linéique ayant un comportement linéaire. Il comporte une seule modélisation.

Ce problème permet de tester l'élément de poutre d'Euler Bernouilli, le modèle de masse ponctuelle et le calcul modal par la méthode de Lanczos.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux du guide VPCS. Les deux calculs effectués (excentricité de la masse ponctuelle nulle ou différente de zéro) permettent de mettre en évidence le couplage des différents modes quand la masse ponctuelle est excentrée.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Coordonnées des points (en m) :

	A	B	C
x	0.	10.	10.
y	0.	0.	y <sub>c</sub>
z	0.	0.	0.

longueur de la poutre :  $AB = L = 10 \text{ m}$

masse ponctuelle en C :  $m_c = 1000 \text{ Kg}$

Section tubulaire :

diamètre extérieur	$d_e = 0.350 \text{ m}$
diamètre intérieur	$d_i = 0.320 \text{ m}$
aire	$A = 1.57865 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$
inertie	$I_y = I_z = 2.21899 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
inertie polaire	$I_p = 4.43798 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

2 cas étudiés :  
1)  $y_c = 0.$   
2)  $y_c = 1. \text{ m}$

### 1.2 Propriétés de matériaux

$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Point A encastré :  $(u = v = w = 0, \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0).$

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse modale.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLL15/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

Le problème avec masse non excentrée conduit à des modes découplés :

- traction-compression (effet de la masse seule),
- torsion (effet de l'inertie autour de la fibre neutre),
- flexion dans les plans x, y et x, z (effet de la masse).

Les différentes fréquences propres sont déterminées avec un modèle par éléments finis de poutre d'Euler (poutre élancée).

Pour le premier mode avec une masse excentrée, une méthode de Rayleigh donne la formule approchée :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI_z}{L^3(m_c + 0.24M)}}$$

avec M = masse totale de la poutre.

Lorsque la masse est excentrée, les modes de flexion (x, z) et de torsion sont couplés, ainsi que les modes de flexion (x, y) et de traction-compression.

Pour le mode propre, les composantes au point B permettent de calculer les composantes au centre de gravité de la masse (point C) par :

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & +x_c \\ +y_c & -x_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_B} \\ \theta_{y_B} \\ \theta_{z_B} \end{bmatrix}$$

$$u_c = u_B - \theta_{z_B}$$

pour ce test  $v_c = v_B$

$$w_c = w_B + \theta_{x_B}$$

### 2.2 Résultats de référence

Cas 1 : 10 premiers modes propres.

Cas 2 : 8 premiers modes propres.

### 2.3 Incertitude sur la solution

Problème 1 : f1 solution analytique  
autres fréquences  $\pm 1\%$   
Problème 2 :  $\pm 1\%$

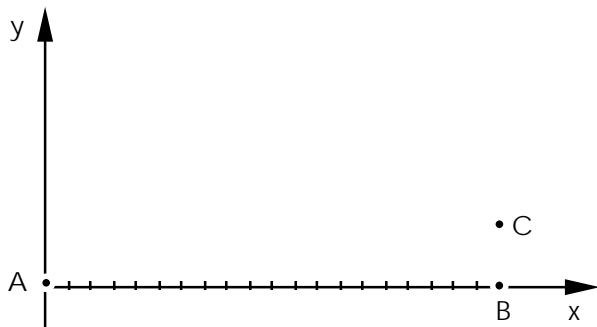
### 2.4 Références bibliographiques

- [1] Groupe de travail Analyse Dynamique. Commission de Validation des Progiciels de Calcul de Structures. Société Française des Mécaniciens. (1988)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Elément de poutre POU\_D\_E et élément discret DIS\_TR



Découpage : poutre AB : 20 mailles SEG2.

Conditions limites :

au nœud extrémité A  
DDL\_IMPO: (NOEUD: A DX: 0., DY: 0., DZ: 0., DRX: 0., DRY: 0., DRZ: 0.)

Masse nodale en B avec une excentricité ey= 0. Cas 1  
ey= 1. Cas 2

Noms des noeuds : Points A = N100 B = N200

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 21  
Nombre de mailles et types : 20 SEG2

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
AFFE_CARA_ELEM	POUTRE	'CERCLE'	TOUT	[U4.24.01]
	DISCRET	'M_TR_D_N'		
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	NOEUD		[U4.25.01]
AFFE_MATERIAU	TOUT			[U4.23.02]
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'POU_D_E'	TOUT	[U4.22.01]
		'DIS_TR'		
DEFI_MATERIAU	ELAS			[U4.23.01]
MODE_ITER_SIMULT	METHODE	'TRIA_DIAG'		[U4.52.01]
	CALC_FREQ	OPTION	'PLUS_PETITE'	
		NMAX_FREQ	: 10 cas 1 : 8 cas 2	

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

Cas	Nature du mode propre	Fréquence Hz Référence	Aster	% différence
CAS 1 yc = 0.	flexion 1,2	1.65	1.6554	0.33
	flexion 3,4	16.07	16.0712	0.
	flexion 5,6	50.02	50.0240	0.
	traction 1	76.47	76.4727	0.
	torsion 1	80.47	80.4688	0.
	flexion 7,8	103.20	103.20444	0.
CAS 2 yc = 1.	fz + to 1	1.636	1.6363	0.
	fy + tr 2	1.642	1.6416	0.
	fy + tr 3	13.46	13.4551	0.
	fz + to 4	13.59	13.5919	0.
	fz + to 5	28.90	28.8972	0.
	fy + tr 6	31.96	31.9594	0.
	fz + to 7	61.61	61.6091	0.
	fy + tr 8	63.93	63.9289	0.
Mode	$\theta_{x_B}$	0.03	$3.039 \cdot 10^{-2}$	1.321
1	$w_C/w_B$	1.030	1.030	0.
2	$u_C/v_B$	-0.148	-0.148	0.
3	$u_C/v_B$	-2.882	-2.880	0.07
4	$w_C/w_B$	-0.922	-0.923	0.108
5	$\theta_{x_B}$	-1.922	-1.92268	0.036

avec : fz + to = flexion x,z + torsion

fy + tr = flexion x,y + traction

### 4.2 Remarques

Calculs effectués par :

MODE\_ITER\_SIMULT      METHODE : 'TRI\_DIAG'  
OPTION : 'PLUS\_PETITE' NMAX\_FREQ : 10 Cas 1  
8 Cas 2

Dans le test, on ne peut vérifier les valeurs des rapports  $\frac{u_C}{v_B}$  pour les modes 2 et 3 (sauf

manuellement). En ce qui concerne les valeurs de  $\frac{w_C}{w_B}$ , la technique est la suivante : si on impose

$w_B = 1$  (commande NORM\_MODE), on a alors  $\frac{w_C}{w_B} = 1 + \theta_{x_B}$  et on peut faire des vérifications sur les valeurs de  $\theta_{x_B}$ .

#### Contenu du fichier résultats :

Cas 1 : 11 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.

Cas 2 : 9 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.

### 4.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.02.21

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 mégamots

Système :

Temps CPU User :

UNICOS 8.0

7.2 secondes

## 5 Synthèse des résultats

---

La modélisation de la masse excentrée donne des résultats exacts pour les 8 fréquences de référence.

La précision des modes propres est de l'ordre de 0.1% jusqu'au mode 4.