

Manuel de Validation**Fascicule V3.04 : Statique linéaire des structures volumiques****Document : V3.04.109**

SSLV109 - Cylindre plein en pression non uniforme mode 1

Résumé :

Ce test valide tous les éléments de Fourier (triangles et quadrangles de degrés 1 et 2) en élasticité. Les fonctionnalités sont les suivantes :

- pression variable en espace,
- déplacements imposés,
- matrices de rigidité Fourier mode 1,
- contraintes aux nœuds Fourier mode 1,
- recombinaison de Fourier sur les déplacements et contraintes (modélisation A),
- matériau isotrope transverse (modélisation F).

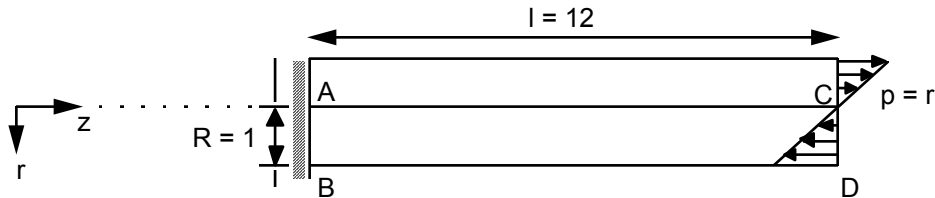
Le test a une solution analytique quadratique en déplacements.

L'intérêt du test réside dans :

- la comparaison entre solution calculée et solution analytique sur les différents éléments finis,
- la comparaison des résultats avec le Code PERMAS sur les éléments TRIA6 (modélisation A).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Le domaine modélisé est ACDB (plan $\theta = 0$).

1.2 Propriétés de matériaux

$$E = 72 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

$$u_r(A) = u_z(A) = u_\theta(A) = 0$$

$$u_z(AB) = 0$$

$$p = \bar{p} \frac{r}{R} \cos \theta$$

avec $\bar{p} = 1$. et $R = 1$ appliqué en $z = 12$

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse statique.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

$$\begin{aligned} u_r(r, z, \theta) &= u(r, z) \cos \theta & \text{avec } u(r, z) &= \frac{M}{2EI} z^2 + \frac{\bar{v}\bar{p}}{2ER} r^2 \\ u_z(r, z, \theta) &= v(r, z) \cos \theta & \text{avec } v(r, z) &= -\frac{\bar{p}}{2EI} rz \\ u_\theta(r, z, \theta) &= w(r, z)(-\sin \theta) & \text{avec } w(r, z) &= \frac{M}{2EI} z^2 - \frac{\bar{v}\bar{p}}{2ER} r^2 \end{aligned}$$

Toutes les contraintes sont nulles sauf $\sigma_{zz}(r, z) = -\frac{\bar{p}}{R} r$.

Les données ont été choisies de telle façon que $u(c) = u(0, l) = 1$.

Les déplacements s'écrivent donc ici :

$$u(r, z) = \frac{z^2}{144} + \frac{r^2}{480} \quad v(r, z) = -\frac{rz}{72} \quad w(r, z) = \frac{z^2}{144} - \frac{r^2}{480}$$

et :

$$\sigma_{zz}(r, z) = -r$$

2.2 Résultats de référence

u, v, w, σ_{zz} en $r = 0., 0.5, 1.$
 $z = 0., 6., 12.$

u_r, u_z, u_θ en $r = 0., z = 6., 12., \theta = 45^\circ$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

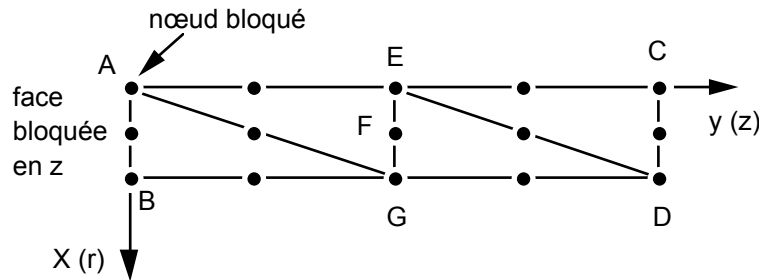
2.4 Références bibliographiques

- [1] PERMAS-HS. Axisymmetric Continua with arbitrary loads. Stuttgart 1985. INTES publication n°224 pp 42 - 49.

3Modélisation A

3.1Caractéristiques de la modélisation

Numéro des noeuds : A = N1 B = N3 C = N13
 D = N15 E = N7 F = N8 G = N9



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)
p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X) = -X$

3.2Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 15
Nombre de mailles et types : 4 TRIA6, 1SEG3 sur segment CD

3.3Fonctionnalités testées

Commandes			
AFFE_MODELE	MECANIQUE	'AXIS_FOURIER'	TOUT
DEFI_FONCTION	NOM_PARA	'X'	
AFFE_CHAR_MECA_F	DDL_IMPO	NOEUD	
	PRES_REP	GROUP_MA	
CALC_MATR_ELEM	'RIGI_MECA'	MODE_FOURIER	
CALC_CHAM_ELEM	'SIGM_ELNO_DEPL'	MODE_FOURIER	
COMB_CHAM_NO	COMB_FOURIER		
COMB_CHAM_ELEM	COMB_FOURIER		

3.4Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé MODE_FOURIER n'est pas nécessaire dans la commande CALC_VECT_ELEM (par défaut, il est considéré comme valant 0).

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence	Aster	% différence
B	u	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	$2.0835 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$
	v	0.	DDL_IMPO	
	w	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	$-2.0834 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-1.	-1.000001	$6 \cdot 10^{-4}$
E	u	0.25	0.250001	$5 \cdot 10^{-4}$
	v	0.	$-4 \cdot 10^{-6}$	
	w	0.25	0.250000	$2 \cdot 10^{-4}$
	σ_{zz}	0.	$-1 \cdot 10^{-4}$	
F	u	0.250521	0.250522	$4 \cdot 10^{-4}$
	v	-0.04166	-0.041668	$3 \cdot 10^{-3}$
	w	0.0249479	0.0249479	$-6 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	-0.5	-0.50005	$1 \cdot 10^{-2}$
G	u	0.252083	0.252084	$3 \cdot 10^{-4}$
	v	-0.083333	-0.083333	$-7 \cdot 10^{-3}$
	w	0.247917	0.247916	$1 \cdot 10^{-4}$
	σ_{zz}	-1.	-1.	$9 \cdot 10^{-3}$
C	u	1.	1.0006	$6 \cdot 10^{-3}$
	v	0.	$-5 \cdot 10^{-5}$	
	w	1.	1.00006	$6 \cdot 10^{-3}$
	σ_{zz}	0.	$-1.1 \cdot 10^{-3}$	
D	u	1.00208	1.00215	$7 \cdot 10^{-3}$
	v	-0.16666	-0.166691	$1.5 \cdot 10^{-2}$
	w	0.99791	0.997981	$1.9 \cdot 10^{-2}$
	σ_{zz}	-1.	-0.999	0.1

4.2 Remarques

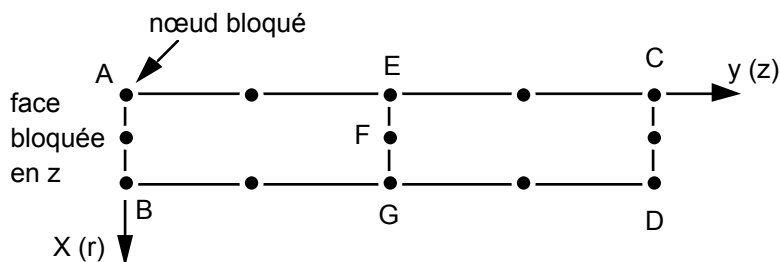
La solution analytique est trouvée avec une précision $< 0.02 \%$ pour les déplacements et $< 0.1 \%$ pour les contraintes.

Avec une formule d'intégration numérique à 6 points de GAUSS (au lieu de 3) pour calculer la raideur, on trouverait la relation à 10^{-10} près (comme PERMAS).

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : A = N1 B = N3 C = N13
 D = N15 E = N7 F = N8 G = N9



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
 face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X) = -X$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1 SEG3 sur segment CD

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_MODELE	MECANIQUE	'AXIS_FOURIER'	TOUT
DEFI_FONCTION	NOM_PARA	'X'	
AFFE_CHAR_MECA_F	DDL_IMPO	NOEUD	
	PRES_REP	GROUP_MA	
CALC_MATR_ELEM	'RIGI_MECA'	MODE_FOURIER	
CALC_CHAM_ELEM	'SIGM_ELNO_DEPL'	MODE_FOURIER	

5.4 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé MODE_FOURIER n'est pas nécessaire dans la commande CALC_VECT_ELEM (par défaut, il est considéré comme valant 0).

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence	Aster	% différence
B	u	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	10.10^{-11}
	v	0.	DDL_IMPO	
	w	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	10.10^{-11}
	σ_{zz}	-1.	-1	10.10^{-11}
E	u	0.25	0.25	10.10^{-11}
	v	0.	$-3.9 \cdot 10^{-14}$	
	w	0.25	0.25	10.10^{-11}
	σ_{zz}	0.	-4.10^{-12}	
F	u	0.250521	0.250521	10.10^{-11}
	v	-0.04166	-0.04166	10.10^{-11}
	w	0.0249479	0.0249479	10.10^{-11}
	σ_{zz}	-0.5	-0.5	10.10^{-11}
G	u	0.252083	0.252083	10.10^{-11}
	v	-0.08333	-0.08333	10.10^{-11}
	w	0.247917	0.247917	10.10^{-11}
	σ_{zz}	-1.	-1.	10.10^{-10}
C	u	1.	1.	10.10^{-11}
	v	0.	$-4.3 \cdot 10^{-14}$	
	w	1.	1	10.10^{-11}
	σ_{zz}	0.	6.10^{-12}	
D	u	1.00208	1.00208	10.10^{-11}
	v	-0.16666	-0.16666	10.10^{-11}
	w	0.99791	0.99791	10.10^{-11}
	σ_{zz}	-1.	-1.	10.10^{-11}

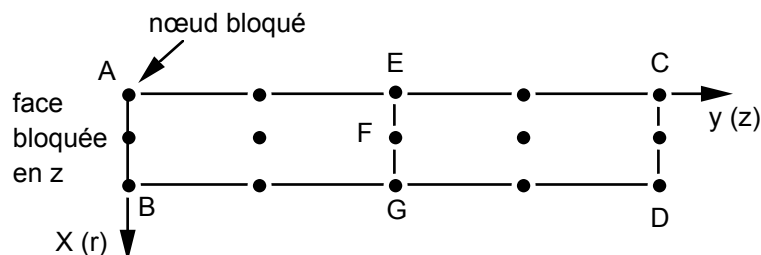
6.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : A = N1 B = N3 C = N13
D = N15 E = N7 F = N8 G = N9



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x) = -x$

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD9, 1 SEG3 sur segment CD

7.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_MODELE	MECANIQUE	'AXIS_FOURIER'	TOUT
DEFI_FONCTION	NOM_PARA	'X'	
AFFE_CHAR_MECA_F	DDL_IMPO	NOEUD	
	PRES_REP	GROUP_MA	
CALC_MATR_ELEM	'RIGI_MECA'	MODE_FOURIER	
CALC_CHAM_ELEM	'SIGM_ELNO_DEPL'	MODE_FOURIER	

7.4 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé MODE_FOURIER n'est pas nécessaire dans la commande CALC_VECT_ELEM (par défaut, il est considéré comme valant 0).

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence	Aster	% différence
B	u	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-11}$
	v	0.	DDL_IMPO	
	w	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-11}$
	σ_{zz}	-1.	-1	$10 \cdot 10^{-10}$
E	u	0.25	0.25	$10 \cdot 10^{-11}$
	v	0.	$-3.9 \cdot 10^{-14}$	
	w	0.25	0.25	$10 \cdot 10^{-11}$
	σ_{zz}	0.	$-4 \cdot 10^{-12}$	
F	u	0.250521	0.250521	$10 \cdot 10^{-11}$
	v	-0.04166	-0.04166	$10 \cdot 10^{-11}$
	w	0.0249479	0.0249479	$10 \cdot 10^{-11}$
	σ_{zz}	-0.5	-0.5	$10 \cdot 10^{-11}$
G	u	0.252083	0.252083	$10 \cdot 10^{-11}$
	v	-0.08333	-0.08333	$10 \cdot 10^{-11}$
	w	0.247917	0.247917	$10 \cdot 10^{-11}$
	σ_{zz}	-1.	-1.	$10 \cdot 10^{-11}$
C	u	1.	1.	$10 \cdot 10^{-11}$
	v	0.	$-4.3 \cdot 10^{-14}$	
	w	1.	1.	$10 \cdot 10^{-11}$
	σ_{zz}	0.	$6 \cdot 10^{-12}$	
D	u	1.00208	1.00208	$10 \cdot 10^{-11}$
	v	-0.16666	-0.16666	$10 \cdot 10^{-11}$
	w	0.99791	0.99791	$10 \cdot 10^{-11}$
	σ_{zz}	-1.	-1.	$10 \cdot 10^{-11}$

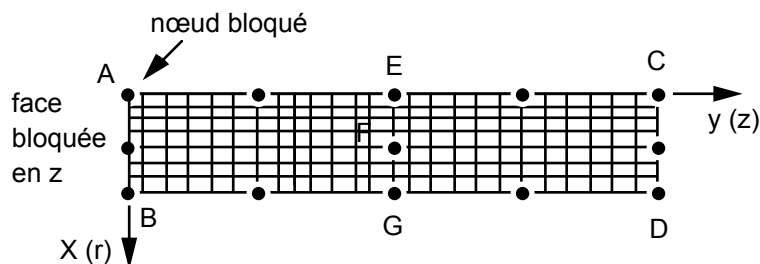
8.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

9 Modélisation D

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : A = N1 B = N1129 C = N1369
 D = N2169 E = N141 F = N705 G = N1269



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
 face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x) = -x$

9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2169

Nombre de mailles et types : 1920 QUAD4, 8 SEG2 sur segment CD

9.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_MODELE	MECANIQUE	'AXIS_FOURIER'	TOUT
DEFI_FONCTION	NOM_PARA	'X'	
AFFE_CHAR_MECA_F	DDL_IMPO	NOEUD	
	PRES_REP	GROUP_MA	
CALC_MATR_ELEM	'RIGI_MECA'	MODE_FOURIER	
CALC_CHAM_ELEM	'SIGM_ELNO_DEPL'	MODE_FOURIER	

9.4 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé `MODE_FOURIER` n'est pas nécessaire dans la commande `CALC_VECT_ELEM` (par défaut, il est considéré comme valant 0).

10 Résultats de la modélisation D

10.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence	Aster	% différence
B	u	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	$2.0919 \cdot 10^{-3}$	0.41
	v	0.	DDL_IMPO	
	w	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	$-2.0674 \cdot 10^{-3}$	0.76
	σ_{zz}	-1.	-1.00974	0.97
E	u	0.25	0.2498	0.07
	v	0.	$-2.7 \cdot 10^{-10}$	
	w	0.25	0.2498	0.07
	σ_{zz}	0.	0.0090	0.90
F	u	0.250521	0.250347	0.07
	v	-0.04166	-0.04164	0.07
	w	0.0249479	0.0249317	0.06
	σ_{zz}	-0.5	-0.51005	2.01
G	u	0.252083	0.251911	0.07
	v	-0.083333	-0.083273	0.07
	w	0.247917	0.247752	0.07
	σ_{zz}	-1.	-1.0103	1.03
C	u	1.	0.99927	0.07
	v	0.	$-2.3 \cdot 10^{-7}$	
	w	1.	0.99928	0.07
	σ_{zz}	0.	0.0088	
D	u	1.00208	1.001357	0.07
	v	-0.16666	-0.16653	0.08
	w	0.99791	0.997208	0.06
	σ_{zz}	-1.	-1.0027	0.27

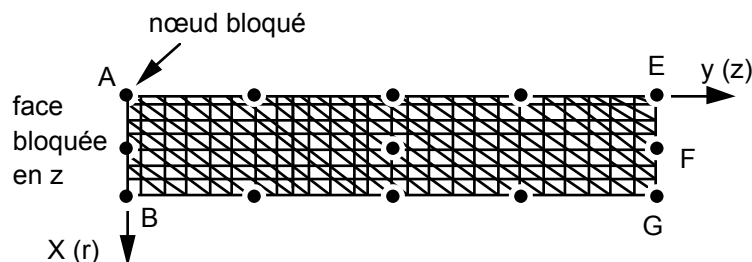
10.2 Remarques

Pour obtenir une précision de l'ordre de 1 % sur les contraintes, il est nécessaire de modéliser la structure très finement (8 éléments radialement et 240 axialement).

11 Modélisation E

11.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : A = N1 B = N2421
 E = N121 F = N1331 G = N2541



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
 face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face EG : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(x) = -x$

11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2541

Nombre de mailles et types : 4800 TRIA3, 20 SEG2 sur segment EG

11.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_MODELE	MECANIQUE	'AXIS_FOURIER'	TOUT
DEFI_FONCTION	NOM_PARA	'X'	
AFFE_CHAR_MECA_F	DDL_IMPO	NOEUD	
	PRES_REP	GROUP_MA	
CALC_MATR_ELEM	'RIGI_MECA'	MODE_FOURIER	
CALC_CHAM_ELEM	'SIGM_ELNO_DEPL'	MODE_FOURIER	

11.4 Remarques

Pour diminuer le nombre de nœuds, on a modélisé la structure pour $y \leq 6$.
 La précision sur les résultats est néanmoins moindre que pour les éléments QUAD4.

12 Résultats de la modélisation E

12.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence	Aster	% différence
B	u	$2.0833 \cdot 10^{-3}$	$2.0228 \cdot 10^{-3}$	2.90
	v	0.	DDL_IMPO	
	w	$-2.0833 \cdot 10^{-3}$	$-2.1143 \cdot 10^{-3}$	1.49
	σ_{zz}	-1.	-1.0078	0.78
E	u	0.25	0.24949	0.20
	v	0.	$-2.4 \cdot 10^{-5}$	
	w	0.25	0.24950	0.20
	σ_{zz}	0.	$-5.3 \cdot 10^{-2}$	
F	u	0.250521	0.25003	0.19
	v	-0.04166	-0.04161	0.13
	w	0.249479	0.24900	0.19
	σ_{zz}	-0.5	-0.49738	0.52
G	u	0.252083	0.251605	0.19
	v	-0.083333	-0.083157	0.21
	w	0.247917	0.247449	0.19
	σ_{zz}	-1.	-0.9814	1.86

12.2 Remarques

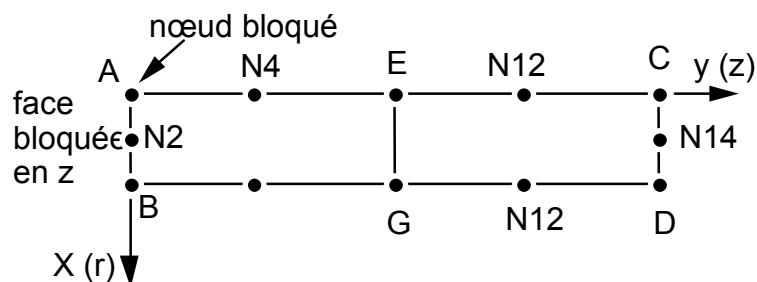
La précision sur les déplacements est inférieure à 3%, celle sur les contraintes inférieure à 2 %.

Sur cet exemple, les TRIA3 convergent nettement moins rapidement que les QUAD4 vers la solution exacte.

13 Modélisation F

13.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds : A = N1 B = N3 C = N13
 D = N15 E = N7 G = N9



Conditions limites :

DDL_IMPO : (NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)
 face AB (GROUP_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES_REP (GROUP_MA : Bout PRES : p)

p étant défini par AFFE_CHAR_MECA_F par $p(X) = -X$

13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1SEG3 sur segment CD

13.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_MODELE	MECANIQUE	'AXIS_FOURIER'	TOUT
DEFI_MATERIAU	ELAS_ORTH		
DEFI_FONCTION	NOM_PARA	'X'	
AFFE_CHAR_MECA_F	DDL_IMPO	NOEUD	
	PRES_REP	GROUP_MA	
CALC_MATR_ELEM	'RIGI_MECA'	MODE_FOURIER	
CALC_CHAM_ELEM	'SIGM_ELNO_DEPL'	MODE_FOURIER	

13.4 Remarques

Le numéro du mode de Fourier n'affectant pas le chargement, le mot clé MODE_FOURIER n'est pas nécessaire dans la commande CALC_VECT_ELEM (par défaut, il est considéré comme valant 0).

14 Résultats de la modélisation F

14.1 Valeurs testées

Nœud	Grandeur	Référence	Aster	% différence
N2	u	2.6041666	2.6041666	1.10^{-9}
	w	-2.6041666	-2.6041666	1.10^{-9}
A	σ_{zz}	0.	-1.10^{-13}	
B	σ_{zz}	-1.	-1.	3.10^{-10}
N4	u	0.0625	0.0625	4.10^{-10}
	w	0.0625	0.0625	4.10^{-10}
E	u	0.25	0.25	3.10^{-10}
	w	0.25	0.25	3.10^{-10}
	σ_{zz}	0.	-1.10^{-14}	
G	v	-0.083333	-0.083333	2.10^{-10}
	σ_{zz}	-1.	-1.	2.10^{-11}
N10	u	0.5625	0.5625	2.10^{-10}
	w	0.5625	0.5625	2.10^{-10}
N12	v	-0.125	-0.125	1.10^{-10}
C	u	1.	1.	1.10^{-10}
	w	1.	1.	1.10^{-10}
	σ_{zz}	0.	7.10^{-14}	
N14	v	-0.083333	-0.083333	9.10^{-11}
D	v	-0.166666	-0.166666	9.10^{-11}
	σ_{zz}	-1.	-1.	1.10^{-11}

15 Synthèse des résultats

Les éléments d'ordre 2 donnent la solution analytique.

Les éléments d'ordre 1 convergent lentement vers la solution et nécessitent des maillages très fins.
Les temps calculs restent toutefois raisonnables.