

Manuel de Validation**Fascicule V6.03 : Statique non linéaire des systèmes plans****Document V6.03.114**

FORMA03 - Travaux Pratiques de la formation statique non linéaire : charge limite d'une plaque trouée

Résumé :

Ce test 2D en contraintes planes quasi-statique permet d'illustrer sur un cas simple les questions relatives à la modélisation élastoplastique ; il met en évidence les effets de structure, de concentration de contraintes, de charge limite.

Il s'agit d'une plaque rectangulaire homogène, trouée en son centre, constituée d'un matériau élastoplastique avec écrouissage isotrope, dont l'état initial est non contraint, qui est soumise à une traction à ses extrémités. On s'intéresse à la solution élastoplastique en charge. Plus précisément, les méthodes analytiques permettent de connaître une borne inférieure de la charge limite. Par un calcul élastoplastique, on aimerait trouver une borne supérieure.

L'objectif du test est de montrer les possibilités de modélisation et le post-traitement avec `STAT_NON_LINE`.

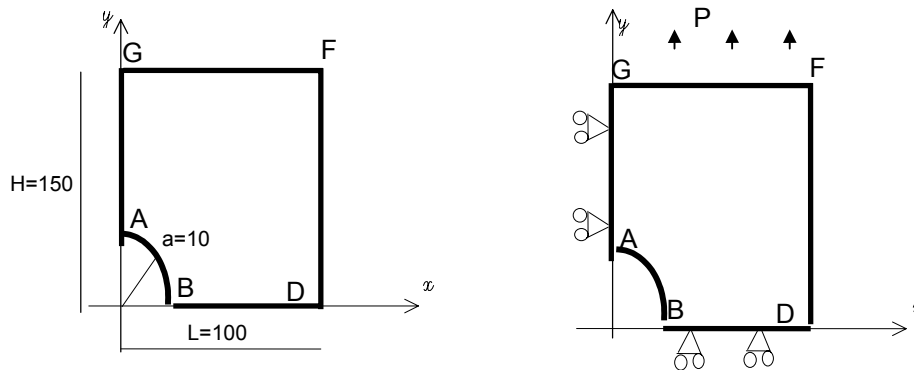
La modélisation A correspond à la première mise en charge, et comporte les commandes de dépouillement utiles pour le TP

La modélisation B explicite le mode opératoire pour effectuer le calcul jusqu'à la charge limite, et pour modéliser la décharge.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On modélise seulement un quart de la plaque à cause des symétries.



1.2 Propriétés de matériaux

Comportement élastoplastique à écrouissage isotrope donné par la courbe de traction.

Module d'Young $E = 1000 \text{ Mpa}$

Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

Courbe de traction (prolongement droit constant)

Epsilon	0.004	0.006	0.009	0.02
Sigma	4.	5.	5.5	6.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions de symétrie

La plaque est bloquée suivant Ox le long du côté AG et suivant Oy le long du côté BD.

Chargement en contrainte imposée

Elle est soumise à une traction P suivant Oy répartie sur le côté FG.

Trajet de chargement

On considère un trajet de chargement monotone, tel que la traction P croisse depuis 1 MPa (la solution est alors élastique) et jusqu'à plastification complète de la structure.

2 Solution de référence

2.1 Solution élastique

En élasticité, pour une plaque **infinie**, comportant un trou de diamètre a , soumise à un chargement P selon y à l'infini, la solution analytique en contraintes planes et coordonnées polaires (r, θ) est [bib1] :

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2} \left[\left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2} \left[\left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{P}{2} \left[\left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta \right]$$

En particulier, au bord du trou ($r = a$) : $\sigma_{\theta\theta} = P[(1 + 2 \cos 2\theta)]$

Et le long de l'axe x : $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} = \frac{P}{2} \left[\left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \right]$

Numériquement, pour $P = 1$ Mpa, et pour une plaque infinie

Point	CMP	MPa
A	SIGXX	-1
B	SIGYY	3

Pour une plaque de dimension **finie**, les abaques [bib3] permettent d'obtenir les coefficients de concentration de contraintes, et on trouve que SIGYY vaut environ 3.03 MPa.

2.2 Solution élastoplastique (charge limite)

En élastoplasticité, par une approche statique en contraintes planes, on peut obtenir une borne inférieure de la charge limite [bib2] pour une bande de largeur $2L$ finie et de longueur infinie, comportant un trou de largeur $2a$ et soumise à une contrainte imposée à l'infini P :

$$P_{\text{lim}}^- = \sigma_y [L - a] / L$$

Ici on obtient comme borne inférieure de la charge limite : $P_{\text{lim}}^- = 5.4$ MPa.

(On prend $\sigma_y = 6$ MPa, car la charge limite est identique entre un matériau élastoplastique parfait et un matériau, dont la courbe de traction présente une asymptote horizontale à 6 MPa).

2.3 Références bibliographiques

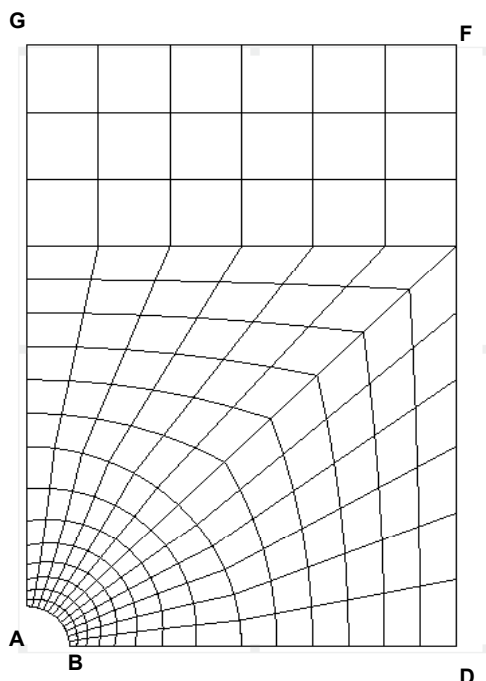
- [1] Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures SFM. Afnor technique.
- [2] Analyse limite des structures fissurées et critères de résistance.
- [3] F. VOLDOIRE : Note EDF/DER/HI/74/95/26 1995
- [4] Stress concentration factors. R.E. PETERSON Ed. J. WILEY p150

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation C_PLAN. Un quart de la plaque est modélisé.

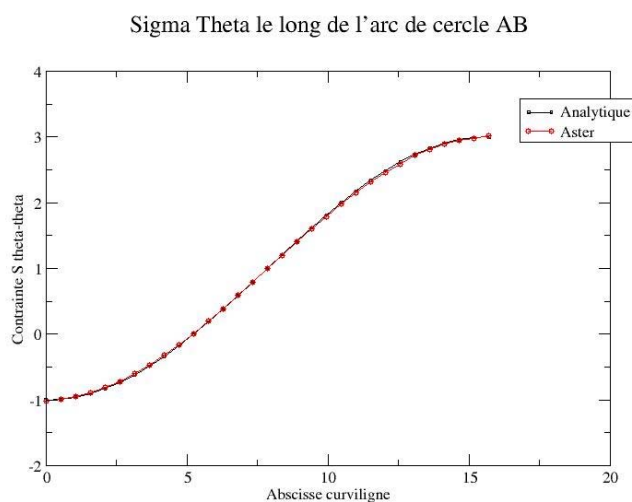
3.2 Caractéristiques du maillage



On utilise un maillage en QUAD8 (maillage GIBI : forma03a.mgib). Il comporte 186 QUAD8 et 617 nœuds. Le fichier forma03a.datg contient les données GIBI pour construire ce maillage et aussi (en fin de fichier) les commandes GIBI pour le dépouillement des résultats.

Remarque :

Ce maillage est suffisamment fin pour avoir une bonne approximation de la solution en élasticité : par exemple si on compare $\sigma_{\theta\theta}$ sur le bord du trou par rapport à la solution analytique, on obtient :



3.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CHAR_MECA	FACE_IMPO		
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_CONTOUR		
DEFI_MATERIAU	TRACTION		
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	RELATION	'VMIS_ISOT_TRAC'
STAT_NON_LINE	NEWTON	REAC_ITER	1
STAT_NON_LINE	INCREMENT	SUBD_PAS	4
CALC_ELEM		OPTION	SIEF_ELNO_ELGA VARI_ELNO_ELGA EQUI_ELGA_SIGM
RECU_FONCTION		NOM_CHAM	DEPL, SIEF_ELNO_ELGA
IMPR_COURBE	COURBE	FONCTION	
IMPR_RESU	RESU	FORMAT	CASTEM, GMSH
IMPR_RESU	RESU	VALE_MAX	OUI
POST_RELEVE_T	ACTION	REPERE	POLAIRE
INTE_MAIL_2D			
FORMULE			
CALC_FONC_INTERP			

3.4 Déroulement du TP

Cette modélisation (fichiers de commandes forma03a.comm) correspond à un calcul en élasto-plasticité pour P allant jusqu'à 5.4 MPa. Elle contient également (dans le fichier de commandes forma03a.com1, à utiliser en poursuite) les commandes nécessaires au dépouillement (tracés de courbes et post-traitement graphiques).

3.4.1 Résultats du calcul

Avant le lancer le calcul proprement dit, il est nécessaire de définir une base, sur la machine d'exécution, qui contiendra tous les résultats. On peut lancer le calcul fourni, jusqu'à P = 5.4 MPa dans le but de le post-traiter. Dans le fichier résultat, on peut observer comment évolue le maximum (sur tous les éléments) de la composante VMIS du champ EQUI_ELGA_SIGM, ainsi que le maximum des variables internes.

On pourra constater à ce niveau sur les variables internes que :

- aux instants 1 et 1.2, il n'y a pas de plastification,
- jusqu'à l'instant 5.4, on est constamment en charge.

et sur les contraintes :

- la valeur maximum du critère de Von Mises aux points de Gauss est toujours limitée à 6 Mpa, ce qui montre que la solution vérifie bien la loi de comportement.

3.4.2 Utilisation des outils de dépouillement

On pourra utiliser en poursuite le fichier de commandes forma03a.com1, sur la base précédemment créée.

Il faut définir les fichiers résultats suivants :

- un fichier de type « cast » si on veut effectuer un dépouillement graphique avec GIBI,
- un fichier de type « pos » si on veut effectuer un dépouillement graphique à l'aide de GMSH,
- d'autres fichiers spécifiques au tracés de courbes, (extension .dat pour tracé avec xmgrace).

Les commandes nécessaires au tracé de courbes sont définies dans le fichier forma03a.com1.

On y trouve :

- l'évolution de la composante Sigma-Theta à l'instant 1 au bord du trou, et la courbe définies par la solution analytique $\sigma_{\theta\theta} = P[(1 + 2 \cos 2\theta)]$,
- l'évolution de la composante Syy au point G en fonction du déplacement au même point, pour tous les instants calculés,
- l'évolution de la résultante des forces nodales sur le bord FG, en fonction du déplacement au point G.

Ces trois appels à IMPR_COURBE permettent de générer trois fichiers, qui peuvent être tracés via un tableur, ou un logiciel de tracé de courbe comme xmgrace.

Pour tracer une courbe à l'aide de xmgrace, il faut lancer « grace », puis « data/import/ascii » et sélectionner le fichier à tracer. Pour le moment, le fichier produit par Aster n'est pas directement lisible : il faut commenter les lignes de texte (caractère #) avant la lecture par xmgrace.

On peut visualiser avec GIBI, ou GMSH la déformée, les isovaleurs de contraintes SYY et de la déformation plastique équivalente cumulée p. On pourra constater à l'instant 1. (elasticité) la concentration de contraintes au point B. A l'instant 5.4, on peut remarquer sur les isovaleurs de déformation plastique cumulée, la localisation des déformations au voisinage de B.

On pourra enfin utiliser le post-traitement interactif Stanley pour visualiser des champs ou des courbes. Il suffit pour cela d'oter le caractère commentaire (# devant la commande de lancement de Stanley.

3.4.3 Suite du TP

Ensuite, pour poursuivre le calcul, il faut modifier la façon d'appliquer le chargement. Ceci fait l'objet de la modélisation B.

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Valeur du chargement limite. La valeur de référence correspond à la borne inférieure. Des difficultés de convergence surviennent dès que l'on cherche à augmenter le chargement au delà de 5.4Mpa.

Instant	GROUP_NO	Identification	Référence	Aster	Différence (%)
1.	B	Contrainte SIYY	3.	3.023	0.8
1.	A	Contrainte SIXX	-1.	-1.02	2.1
5.4	G	Contrainte SIYY	5.4	5.4026	0.5

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation permet, dans le cadre des Travaux Pratiques, de mener à bien le calcul jusqu'à la charge limite de la structure, grâce au pilotage du chargement et la décharge. Le comportement est élastoplastique avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction telle que la contrainte uniaxiale tend vers une valeur constante (6 MPa). Il existe donc une charge limite pour cette structure dont une borne inférieure est connue : $P_{lim} > 5.4 \text{ MPa}$ [bib2].

La plaque est soumise à une traction P suivant Oy sur le côté FG. Donc, si P dépasse largement 5.4 MPa, il n'y a plus de solution. Numériquement, on a donc des soucis ! C'est ce qui est observé : pour $P=5.4 \text{ MPa}$, la convergence est très lente. Si on poursuivait le calcul, il n'y aurait plus convergence au delà de 5.41 MPa.

La meilleure solution si on souhaite calculer la charge limite (par la résolution d'un problème élastoplastique incrémental - d'autres méthodes existent comme l'utilisation de matériau incompressible avec des méthodes directes d'analyse limite) est d'utiliser le pilotage de la contrainte imposée par le déplacement d'un point.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation A.

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CHAR_MECA	FACE_IMPO		
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_CONTOUR		
DEFI_MATERIAU	TRACTION		
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	RELATION	'VMIS_ISOT_TRAC'
STAT_NON_LINE	NEWTON	REAC_ITER	1
STAT_NON_LINE	INCREMENT	SUBD_PAS	4
STAT_NON_LINE	PILOTAGE	TYPE	DDL_IMPO
CALC_ELEM		OPTION	SIEF_ELNO_ELGA VARI_ELNO_ELGA EQUI_ELGA_SIGM EPSI_ELNO_DEPL
CALC_NO		OPTION	SIEF_NOEU_ELGA
RECU_FONCTION		NOM_CHAM	DEPL
IMPR_COURBE	COURBE	FONCTION	
IMPR_RESU	RESU	FORMAT	CASTEM
IMPR_RESU	RESU	VALE_MAX	OUI
STAT_NON_LINE	NEWTON	PREDICTION	ELASTIQUE
CREA_MAILLAGE	ECLA_PG		
CREA_RESU	ECLA_PG		
RECU_FONCTION		NOM_PARA_RESU	ETA_PILOTAGE
CALC_NO		OPTION	FORC_NODA
POST_RELEVE_T	ACTION	RESULTANTE	DY

5.4 Calcul jusqu'à la charge limite

5.4.1 Essai d'augmentation du chargement jusqu'à $P = 5.4$ MPa

On souhaite poursuivre le calcul dans le but d'estimer une borne supérieure de la charge limite, en tentant d'aller au-delà de 5.4 MPa (borne inférieure analytique), sans modification du chargement. On constate alors que :

- le calcul est possible jusqu'à 5.41 Mpa, au delà, il ne converge plus, même en subdivisant le pas de temps,
- la convergence est de plus en plus lente.

La cause de la convergence difficile est bien la proximité de la charge limite. C'est pourquoi il faut subdiviser le pas de temps. On peut s'en rendre compte par la valeur du chargement (5.4 Mpa = valeur théorique de la borne inférieure) et par la courbe contrainte-déplacement en haut de la structure : on peut constater que pour $P=5.4$ MPa la charge limite n'est pas complètement atteinte (pas d'asymptote horizontale) mais que l'on s'en rapproche.

Les isovalues de p montrent une zone de concentration de déformation plastique (assimilable à une ligne de glissement) inclinée de 53° environ par rapport à la verticale, allant du point B au bord droit. Ceci correspond assez bien à la théorie qui dit que les lignes de glissement sont inclinées de $54,44^\circ$ [bib2]. On a ici bien sûr une approximation de la ligne de glissement qui est en théorie d'épaisseur nulle.

5.4.2 Calcul à chargement piloté par un déplacement

Une bonne façon de mener ce type de calcul est d'utiliser le pilotage du chargement imposé par la valeur d'un déplacement. Il est donc proposé de modifier le fichier de commandes pour utiliser le pilotage. On pourra utiliser par exemple le déplacement U_Y du point A pour piloter la contrainte σ_{YY} imposée sur FG.

On l'augmentera jusqu'à 2 mm par exemple. On prendra un coefficient égal à 1. On utilisera donc un temps fictif t tel que $\Delta t = \Delta U_Y(A) \cdot 1$. Donc le temps varie ici entre 0 et 2s (pour représenter un déplacement entre 0 et 2mm).

On traite toute la montée en charge dans un nouveau `STAT_NON_LINE`. On peut découper l'intervalle (0. 2.) en 10 ou 20 incrément par exemple.

La syntaxe du mot-clé facteur `PILOTAGE` est :

```
PILOTAGE : _F(GROUP_NO = A, TYPE = 'DDL_IMPO', NOM_CMP = 'DY',  
              COEF_MULT = 1.)
```

Attention au type du chargement CH2 (force répartie) : utiliser « `FIXE_PIL0` ».

Remarque :

On aurait pu piloter par le déplacement d'autres points, par ex. U_Y du point G ou U_X du point D.

Observer dans le fichier « message » la valeur du paramètre : `'ETA_PILOTAGE'`.

On obtient en principe une bonne approximation de la charge limite (par valeur supérieure) que l'on pourra comparer à la borne inférieure analytique (5.4).

On pourra tracer, en poursuite, la courbe force résultante-déplacement en G en fonction du temps. (les commandes nécessaires sont dans le fichier `forma03a.com1`). On devrait retrouver sur cette courbe la valeur de la charge limite donnée par `'ETA_PILOTAGE'`.

On peut visualiser avec GIBI, ou GMSH la déformée, les isovaleurs de contraintes S_{YY} et de la déformation plastique équivalente cumulée p . A l'instant 2, on peut remarquer sur les isovaleurs de déformation plastique cumulée, la localisation des déformations au voisinage de B.

On pourra enfin utiliser le post-traitement interactif Stanley pour visualiser des champs ou des courbes. Il suffit pour cela d'ôter le caractère commentaire (# devant la commande de lancement de Stanley.

5.4.3 Décharge : utilisation de la prédiction élastique et de la matrice élastique

On utilisera le calcul initial sans pilotage, en poursuite depuis $P = 5.4$ MPa. Plusieurs solutions sont possibles :

- Essayer de décharger avec matrice tangente. Conclusion ?
- Essayer la prédiction élastique pour la phase de décharge.
- Essayer `MATRICE = 'ELASTIQUE'` (en augmentant le nombre d'itérations globales de Newton permises).

Analyser l'état résiduel : déformée, isovaleurs de contraintes et variables internes.

5.4.4 Utilisation de la recherche linéaire

Si on veut calculer tout le trajet de chargement (P croissant jusqu'à 5.4 MPa, puis décroissant jusqu'à 0) dans la même commande `STAT_NON_LINE`, (sans pilotage), c'est possible, avec recherche linéaire et subdivision du pas de temps (et matrice tangente réactualisée).

On pourra mettre 10 itérations de recherche linéaire, et pour faciliter la phase de décharge, on pourra mettre `PREDICTION = 'ELASTIQUE'`.

On pourra comparer la solution obtenue à celle obtenue précédemment (elles doivent être identiques !) et comparer le temps CPU et le nombre d'itérations de chaque solution.

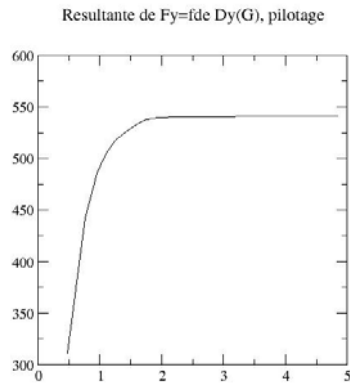
6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Valeur du chargement limite. La valeur de référence correspond à la borne inférieure. On obtient grâce au pilotage une valeur supérieure à cette valeur de référence.

Instant	Identification	Référence	Aster	Différence (%)
0.1	ETA_PILOTAGE	3.11	3.11	0
0.4	ETA_PILOTAGE	5.05	5.05	0
1.	ETA_PILOTAGE	5.39	5.39	0
1.5	ETA_PILOTAGE	5.401	5.401	0
2.	ETA_PILOTAGE	5.405	5.405	0
5.4	SIYY	5.4	5.4026	0.5

Dépouillement : on constate dans le fichier `RESULTAT` que la charge limite est presque atteinte : le paramètre `ETA_PILOTAGE` tend vers une valeur constante : 5.405, ce qui est très proche de la borne inférieure théorique (5.4) : Ce mode de chargement permet donc de traiter correctement ce cas qui ne pouvait être traité par un chargement en force classique.

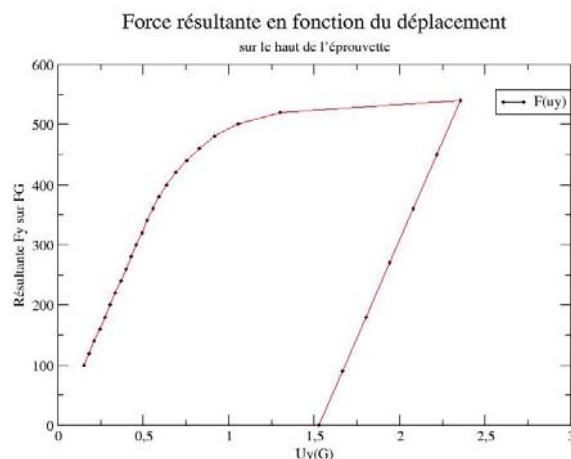


Decharge :

Le trajet de chargement va jusqu'à 5.4 MPa puis revient à 0. On discrétise en 27 pas pour aller jusqu'à $P = 5.4$ MPa, et 6 pas pour revenir à 0. La matrice tangente consistante (`FULL_MECA`) ne permet pas de converger au moment de la décharge. Pour traiter la décharge, deux méthodes peuvent être utilisées :

- 1) calculer la décharge avec prédiction élastique (mais réactualisation de la matrice tangente au cours des itérations). On peut constater que cela permet de franchir la phase de début de décharge. Mais cela ne permet pas de calculer toute la décharge (jusqu'à un chargement nul).
- 2) utiliser la matrice élastique. Cette méthode fonctionne mais la convergence est lente. Il faut simplement penser à augmenter le nombre d'itérations maximum (`ITER_GLOB_MAXI`).

Courbe force résultante - déplacement : on a un état de contraintes résiduel nul partout sauf en quelques régions (autour du point B en particulier), mais des déformations résiduelles non nulles.



6.1.1 Utilisation de la recherche linéaire

Avec 10 itérations de recherche linéaire, et `PREDICTION = 'ELASTIQUE'`, on traite effectivement tout le calcul en 100s environ (au lieu de 85s sans recherche linéaire, en cumulant toutes les étapes précédentes, hors pilotage). On peut en particulier noter que durant la phase de décharge, le nombre d'itérations est nettement plus faible avec pilotage.

7 Synthèse des résultats

Ce test permet de montrer comment mener le calcul d'une structure élasto-plastique et son dépouillement, et en particulier de mettre en évidence le bénéfice à utiliser le pilotage pour un problème de charge limite.

On peut retenir de ce test quelques idées :

- même en dehors d'un comportement élasto-plastique parfait, il peut exister une charge limite : c'est le cas avec toutes les courbes de traction réelles. Il faut alors adapter la méthode de résolution à la solution mécanique et par exemple utiliser le pilotage,
- le découpage en petits incréments de charge est souvent nécessaire pour intégrer correctement la relation de comportement. Cela peut aider aussi à la convergence, il est donc conseillé d'utiliser le redécoupage automatique du pas de temps,
- la recherche linéaire peut être utilisée pour aider à la convergence, ainsi que la subdivision automatique des pas de temps.

Page laissée intentionnellement blanche.