

Manuel de Validation
Fascicule V6.04 : Statique linéaire des structures volumiques
Document : V6.04.173

SSNV173 – Barreau fissuré avec X-FEM

Résumé

Ce test a pour but de valider deux aspects du calcul élémentaire dans le cadre de X-FEM [R7.02.12] :

- l'intégration d'une grandeur discontinue grâce à un sous-découpage de l'élément,
- l'enrichissement des fonctions de forme par la fonction Heaviside.

Ce test met en jeu un barreau parallélépipédique fissuré sur toute sa section, soumis à un déplacement imposé, ce qui a pour conséquence l'ouverture totale de la fissure et la séparation des deux parties de la structure.

L'influence du maillage et des conditions aux limites est aussi étudiée.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est un parallélépipède droit à base carrée et sain. Les dimensions du barreau (voir [Figure 1.1-a]) sont : $LX = 5$, $LY = 5$ et $LZ = 25$. Il ne comporte aucune fissure.

La fissure sera introduite par des fonctions de niveaux (level sets) directement dans le fichier commande à l'aide de l'opérateur `DEFI_FISS_XFEM` [U4.82.08]. La fissure est présente au milieu de la structure par le biais de sa représentation par 2 level sets LSN et LST (voir [Figure 1.1-b]) dont les équations sont les suivantes :

$$\text{LSN (pour le plan de fissure)} : Z - LZ / 2 \quad \text{éq 1.1-1}$$

$$\text{LST (pour le fond de fissure)} : X - 10 \quad \text{éq 1.1-2}$$

Ainsi, le fond de fissure est situé à $z = LZ/2$ et à $x = 10$. Il est donc situé en dehors de la structure, ce qui permet d'avoir la structure totalement coupée en deux.

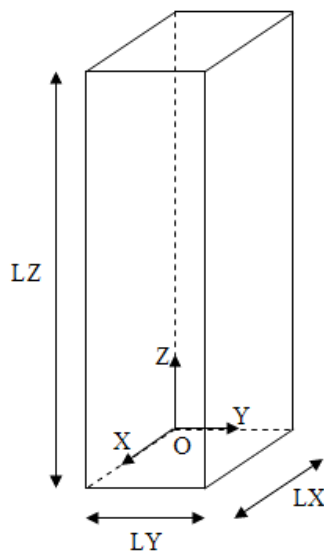


Figure 1.1-a

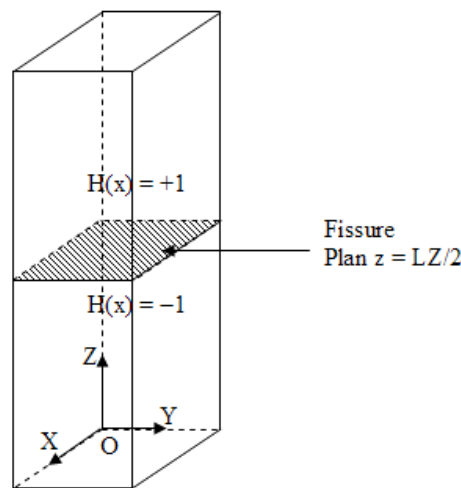


Figure 1.1-b

Géométrie du barreau et positionnement de la fissure

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young : $E = 205000$ MPa

Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Les nœuds de la face inférieure du barreau sont encastres et un déplacement est imposé sur ceux de la face supérieure. On souhaite montrer ici la possibilité de séparer un élément fini en deux avec X-FEM.

2 Modélisation A : un seul élément fini

2.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un seul élément fini de type HEXA8. La fissure est donc présente au sein de cet élément par le biais des level sets.

2.2 Conditions aux limites

Vu que les nœuds près de la fissure, c'est-à-dire ici les 8 nœuds du maillage sont enrichis par des ddl supplémentaires, les conditions aux limites s'écrivent un peu différemment. Cela est relatif à l'enrichissement des fonctions de formes classiques [R7.02.12] par la fonction Heaviside $H(x)$.

Imposer un déplacement nul sur les nœuds de la face inférieure revient à écrire une relation linéaire entre les ddl. Pour chaque nœud, on impose $DCX - H1X = 0$ (idem suivant y et z) où DCX est le ddl classique et $H1X$ le ddl enrichi.

Pour les nœuds de la face supérieure, on impose un déplacement suivant z valant 10^{-6} et nul suivant les deux autres directions, c'est-à-dire $DCX + H1X = 0$, $DCY + H1Y = 0$ et $DCZ + H1Z = 10^{-6}$.

2.3 Résolution analytique

La solution d'un tel problème est bien sûr évidente. On voit bien que mécaniquement parlant, les deux parties de la structure vont se détacher : la partie inférieure aura un déplacement nul et la partie supérieure aura un mouvement d'ensemble égal au déplacement imposé (voir [Figure 2.3-b]).

Dans notre cas, il ne se passe rien suivant x et y, et d'après les symétries du problème, on peut l'étudier seulement sur une arête verticale (par exemple celle joignant les nœuds notés N1 et N2). Il y a quatre conditions à satisfaire :

- déplacement du nœud N1 nul
- déplacement du point milieu inférieur A^- nul
- déplacement du nœud N2 égal au déplacement imposé, noté \underline{uz}
- déplacement du point milieu supérieur A^+ égal à \underline{uz}

D'après la formulation, ces quatre conditions s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} dcz^1 - h1z^1 = 0 \\ \frac{1}{2}(dcz^1 - h1z^1 + dcz^2 - h1z^2) = 0 \\ dcz^2 + h1z^2 = \underline{uz} \\ \frac{1}{2}(dcz^1 + h1z^1 + dcz^2 + h1z^2) = \underline{uz} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dcz^1 \\ h1z^1 \\ dcz^2 \\ h1z^2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{uz} \\ \underline{uz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{uz}/2 \\ \underline{uz}/2 \\ \underline{uz}/2 \\ \underline{uz}/2 \end{bmatrix}$$

La solution analytique est alors la suivante : tous les ddl suivant x et y sont nuls et tous les ddl suivant z valent $\underline{uz}/2$.

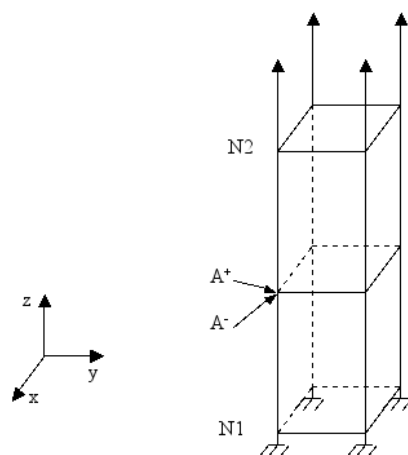


Figure 2.3-a

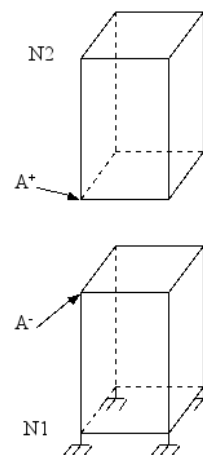


Figure 2.3-b

États initial et final de la structure

2.4 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_FISS_XFEM

MODI_MODELE_XFEM

3 Résultats de la modélisation A

3.1 Valeurs testées

On teste les valeurs du déplacement après convergence des itérations de l'opérateur STAT_NON_LINE. On vérifie que l'on retrouve bien les valeurs déterminés au [§2.3].

Identification	Référence	Aster	% différence
DCX pour tous les nœuds	0.00	0.00	0.00
DCY pour tous les nœuds	0.00	0.00	0.00
DCZ pour tous les nœuds	0.5E-6	0.5E-6	0.00
H1X pour tous les nœuds	0.00	0.00	0.00
H1Y pour tous les nœuds	0.00	0.00	0.00
H1Z pour tous les nœuds	0.5E-6	0.5E-6	0.00

Pour tester tous les nœuds en une seule fois, on test le MIN et le MAX de la colonne.

3.2 Commentaires

On remarque que les valeurs des ddl's Heaviside en z ne sont pas nulles car il y a discontinuité du champ de déplacement suivant cette direction à l'interface.

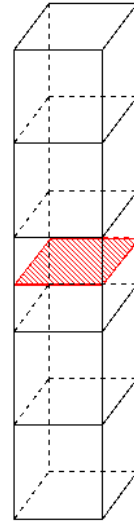
4 Modélisation B : Plusieurs éléments finis

4.1 Caractéristiques du maillage

On discrétise la structure en 5 éléments finis HEXA8

Les nœuds de part et d'autre de la fissure sont des nœuds enrichis, donc les trois mailles centrales possédant de tels nœuds sont elles aussi enrichies. Seules les deux mailles extrêmes sont des mailles classiques n'ayant que des nœuds classiques.

On pourra donc imposer des conditions aux limites sur les mailles extrêmes de la manière habituelle.



4.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appliquées représente le même phénomène physique que pour la modélisation A. On encastre les nœuds de la face inférieure et on impose un déplacement des nœuds de la face supérieure :

Figure 4.1-a : Maillage

Face inférieure (Nœuds N1, N6, N11, N16) : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = 0$

Face supérieure (Nœuds N21, N22, N23, N24) : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = \underline{uz}$.

Ceci constitue le 1er cas de chargement.

En fait, on prend la liberté de déplacer la partie supérieure de la structure suivant les trois directions, on choisira donc comme 2^{ème} cas de chargement :

Face inférieure (Nœuds N1, N6, N11, N16) : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = 0$

Face supérieure : $DX = \underline{ux}$, $DY = \underline{uy}$ et $DZ = \underline{uz}$

$$\underline{ux} = 10^{-6}$$

$$\underline{uy} = 2. 10^{-6}$$

$$\underline{uz} = 3. 10^{-6}$$

4.3 Résolution analytique

La solution d'un tel problème est bien sûr encore évidente. De manière analogue au [§2.3], on peut montrer que la solution est la suivante :

Nœuds de la face inférieure (étage n°0) : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = 0$.

Nœuds de l'étage n°1 : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = 0$.

Nœuds des étages n°2 et 3 : $DCX = \underline{ux}/2$, $DCY = \underline{uy}/2$, $DCZ = \underline{uz}/2$,
 $H1X = \underline{ux}/2$, $H1Y = \underline{uy}/2$ et $H1Z = \underline{uz}/2$.

Nœuds de l'étage n°4 : $DX = \underline{ux}$, $DY = \underline{uy}$ et $DZ = \underline{uz}$.

Nœuds de la face supérieure (étage n°5) : $DX = \underline{ux}$, $DY = \underline{uy}$ et $DZ = \underline{uz}$.

4.4 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_FISS_XFEM

MODI_MODELE_XFEM

AFFE_CHAR_MECA

LIAISON_XFEM

5 Résultats de la modélisation B

5.1 Valeurs testées

On teste les valeurs du déplacement après convergence des itérations de l'opérateur `STAT_NON_LINE`. On vérifie que l'on retrouve bien les valeurs déterminés au [§4.3] pour les 2 cas de chargements. On obtient le tableau suivant pour le 2^{ème} cas de chargement.

Identification	Référence	Aster	% différence
DX en N1 (étage n°0)	0.00	0.00	0.00
DY en N1 (étage n°0)	0.00	0.00	0.00
DZ en N1 (étage n°0)	0.00	0.00	0.00
DX en N2 (étage n°1)	0.00	0.00	0.00
DY en N2 (étage n°1)	0.00	0.00	0.00
DZ en N2 (étage n°1)	0.00	0.00	0.00
DCX en N3 (étage n°2)	0.5E-6	0.5E-6	0.00
DCY en N3 (étage n°2)	1.0E-6	1.0E-6	0.00
DCZ en N3 (étage n°2)	1.5E-6	1.5E-6	0.00
H1X en N3 (étage n°2)	0.5E-6	0.5E-6	0.00
H1Y en N3 (étage n°2)	1.0E-6	1.0E-6	0.00
H1Z en N3 (étage n°2)	1.5E-6	1.5E-6	0.00
DCX en N4 (étage n°3)	0.5E-6	0.5E-6	0.00
DCY en N4 (étage n°3)	1.0E-6	1.0E-6	0.00
DCZ en N4 (étage n°3)	1.5E-6	1.5E-6	0.00
H1X en N4 (étage n°3)	0.5E-6	0.5E-6	0.00
H1Y en N4 (étage n°3)	1.0E-6	1.0E-6	0.00
H1Z en N4 (étage n°3)	1.5E-6	1.5E-6	0.00
DX en N5 (étage n°4)	1.0E-6	1.0E-6	0.00
DY en N5 (étage n°4)	2.0E-6	2.0E-6	0.00
DZ en N5 (étage n°4)	3.0E-6	3.0E-6	0.00
DX en N21 (étage n°5)	1.0E-6	1.0E-6	0.00
DY en N21 (étage n°5)	2.0E-6	2.0E-6	0.00
DZ en N21 (étage n°5)	3.0E-6	3.0E-6	0.00

On ne teste à chaque fois qu'un seul nœud de chaque étage.

5.2 Commentaires

On remarque que les valeurs des ddls Heaviside en x, y et z ne sont pas nulles car il y a discontinuité du champ de déplacement suivant ces trois directions à l'interface.

6 Modélisation C : Plusieurs éléments et interface penchée

6.1 Caractéristiques du maillage et de l'interface

On considère une structure de dimensions $LX = 5$ m, $LY = 5$ m et $LZ = 25$ m. Cette structure est discrétisée avec 5 éléments finis HEXA8. On s'intéresse à une interface plane de normale

$$n = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

passant par le point A de coordonnées $(5, 5\delta, 5)$. La [Figure 6.1-a] montre un zoom du 2^{ème} élément où la trace de l'interface est représentée en rouge.

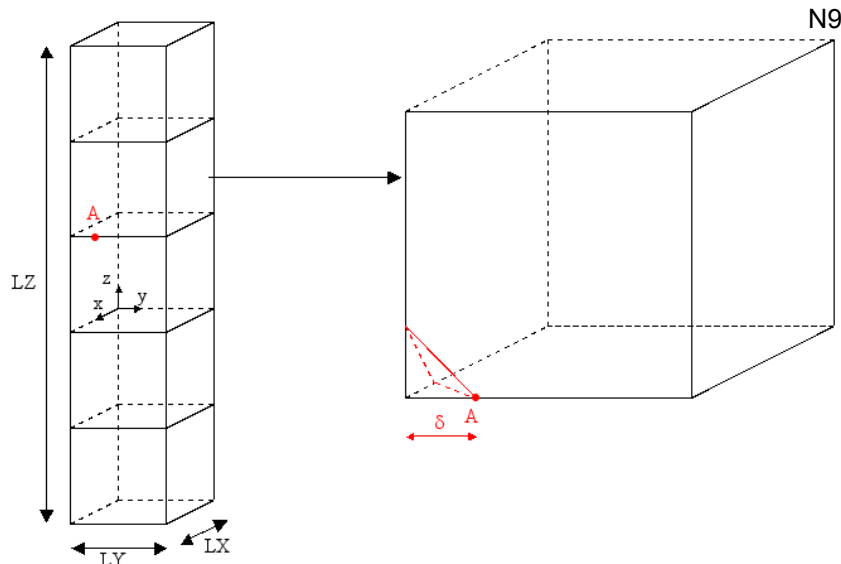


Figure 6.1-a : Maillage c et zoom

L'interface est caractérisée par la level set normale ayant pour équation cartésienne :

$$lsn = -x + y + z - 5\delta$$

Remarque :

Le paramètre δ a une influence forte sur le problème. Si δ vaut 0 ou 1, alors le point A coïncide avec un nœud, et l'interface passe par ce nœud. Si δ est non nul, mais petit devant 1, l'interface va séparer l'élément en 2 partie, de volumes très différents. Dans cette situation, l'enrichissement du nœud N9 par la fonction Heaviside devient presque inutile, et conduit à des pivots très petits lors de la factorisation de la matrice de rigidité. Cela se traduit par une perte significative du nombre de décimales et à un résultat faux. Pour $\delta = 0.1$ (soit un point A se situant à 10% de l'arête), on perd déjà 8 décimales (valeur par défaut provoquant une erreur fatale) et pour $\delta = 0.05$, on perd 10 décimales. L'idée consiste donc à ne pas enrichir le nœud N9 par la fonction Heaviside lorsque de tels cas se présentent. Un algorithme de détection a été mis en place, basé sur le rapport de volumes pour un élément coupés en deux. Ce problème permet de tester le bon fonctionnement de l'algorithme, lorsque le paramètre δ devient petit. Dans la suite, on prendra $\delta = 0.02$. Cette valeur conduit à la perte de 13 décimales lors de la factorisation (avant la mise en place d'un traitement spécial).

L'algorithme sera validé si le calcul se déroule normalement, sans perte de décimales dans la factorisation. On vérifiera aussi le déplacement solution en un nœud choisi.

6.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont les même que celles de la modélisation B. On encastre les nœuds de la face inférieure et on impose un déplacement de traction aux nœuds de la face supérieure :

Face inférieure (Nœuds N21, N22, N23, N24) : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = 0$

Face supérieure (Nœuds N13, N14, N15, N16) : $DX = 0$, $DY = 0$ et $DZ = 10^{-6}$.

6.3 Fonctionnalités testées

La détermination des nœuds où l'enrichissement Heaviside est surabondant est effectuée dans la commande `MODI_MODELE_XFEM` [U4.44.11] et l'annulation de ces ddls est réalisée par la commande `AFFE_CHAR_MECA` [U4.44.01] avec le mot-clé `LIAISON_XFEM='OUI'`.

Commandes

`MODI_MODELE_XFEM`

`AFFE_CHAR_MECA` `LIAISON_XFEM`

7 Résultats de la modélisation C

7.1 Valeurs testées

Le bon déroulement du calcul permet *a priori* de valider le cas. De plus, on teste les valeurs du déplacement au nœud N1 de coordonnées (0, 5, 0) ainsi que les pressions de contact (LAGS_C). On s'assure que le déplacement du nœud N1 est correct et que les pressions de contact sont toutes nulles (chargement de traction).

Identification	Référence	Aster	% différence
MIN(LAGS_C)	0.00	0.00	0.00
MAX(LAGS_C)	0.00	0.00	0.00
DCZ en N1	5.E-7	5.E-7	0.00
H1Z en N1	5.E-7	5.E-7	0.00

Rappel : DCZ est la composante suivant z du ddl classique
H1Z est la composante suivant z du ddl enrichi

8 Synthèses des résultats

Les objectifs de ce test sont atteints :

- Il s'agit de valider la prise en compte de l'enrichissement par la fonction Heaviside des fonctions de forme classiques.
- De plus, la modélisation B a permis la validation de l'opérande `LIAISON_XFEM` qui permet de supprimer les dds enrichis en trop.