

Manuel de Validation**Fascicule V2.02 : Dynamique linéaire des poutres****Document V2.02.002**

SDLL02 - Poutre élancée, encastrée-libre, repliée sur elle même

Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à rechercher les fréquences et les modes de vibration d'une structure mécanique, composée d'une poutre élancée, encastrée libre et repliée sur elle-même.

Le problème posé n'a pas de signification physique. Il permet par contre de valider la recherche des fréquences propres de flexion multiples et la recherche des modes doubles dans un sous-espace d'ordre 2.

Dans ce test, on effectue trois modélisations différentes :

- dans la première modélisation, les conditions aux limites sont imposées à l'aide de paramètres de Lagrange (commande `AFFE_CHAR_MECA`) et les valeurs et vecteurs propres sont calculés par la méthode de Lanczos (commande `MODE_ITER_SIMULT`, méthode : 'TRI_DIAG'),
- dans la deuxième modélisation, les conditions aux limites sont imposées en supprimant des degrés de liberté dans les matrices de masse et de raideur (commande `AFFE_CHAR_CINE`) et les valeurs et vecteurs propres sont calculés par la méthode de Bathe et Wilson (commande `MODE_ITER_SIMULT`, méthode : 'JACOBI'),
- dans la troisième modélisation, on vérifie le comportement de la modélisation `COQUE_C_PLAN` en dynamique. Les valeurs propres et les modes propres sont calculés avec la commande `MODE_ITER_SIMULT` et avec la méthode de SORESENSEN.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les caractéristiques géométriques de la poutre constituant le modèle mécanique sont les suivantes :

Longueur : $L = 0.5 \text{ m}$

Section droite rectangulaire :

Hauteur : $h = 0.005 \text{ m}$
 Largeur : $b = 0.050 \text{ m}$
 Aire : $A = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
 Moment d'inertie : $I_z = 5.208 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$

Les coordonnées (en mètres) des points caractéristiques de l'ensemble des poutres sont :

	A	B	C
x	0.	0.5	0.
y	0.	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 7\,800. \text{ kg/m}^3$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La condition aux limites qui caractérise ce problème est l'encastrement du point A et s'écrit :

$$u = v = 0., \theta = 0.$$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLL02/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

Par la méthode de raideur dynamique, on montre que la poutre repliée admet des fréquences doubles, solution de :

$$\cos(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2}$$

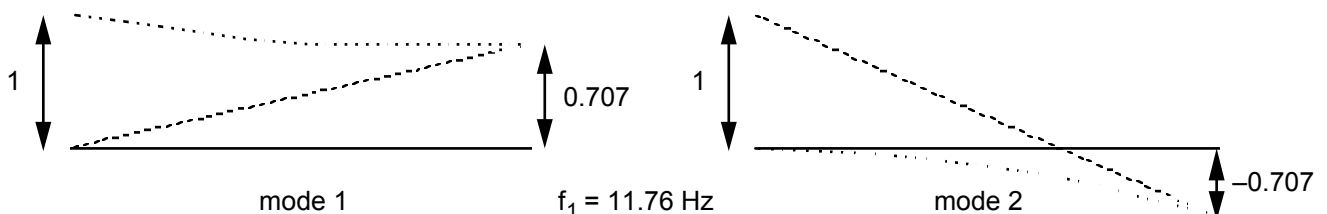
$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}} \quad i = 1, 2, \dots$$

Pour une section rectangulaire, on obtient :

$$f_i = (2i - 1)^2 \pi \frac{R}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad i = 1, 2, \dots$$

Cette formulation néglige les déformations d'effort tranchant et d'inertie de rotation (poutre d'Euler-Bernoulli).

Pour les modes propres, les formes sont données dans le guide VPCS. Ils sont normés à 1 ou -1 au point de plus grande amplitude. On a des résultats seulement pour les modes 1, 2, 3, 4, 7 et 8. Par exemple, les formes des deux premiers modes propres sont les suivantes :



2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence sont les huit premières fréquences propres et les déplacements des points B, C pour les modes propres 1, 2, 3, 4, 7 et 8. Dans le Code_Aster, les modes sont normés à 1 au point de plus grande amplitude (commande `NORM_MODE`). Pour pouvoir faire des comparaisons avec les résultats de référence, ces derniers ont été corrigés (multiplication par -1 si nécessaire).

2.3 Incertitude sur la solution

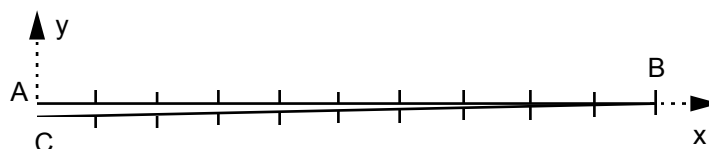
Il n'y a pas d'incertitude sur la solution car elle est analytique.

2.4 Références bibliographiques

- [1] PIRANDA J. : Cours et Travaux Dirigés de Vibrations des Structures - Option Mécanique - Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et Micromécanique - Laboratoire de Mécanique Appliquée - Besançon (France (1983).)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles SEG2 (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée pour les poutres est celle d'Euler Bernoulli (POU_D_E).

On recherche des solutions bidimensionnelles. On peut donc bloquer pour tous les nœuds le déplacement DZ et les rotations DRX et DRY.

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$DX = DY = 0$. $DRZ = 0$.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 21 nœuds et 20 mailles de type SEG2.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point A = A Point B = B Point C = C

3.3 Fonctionnalités testées

Les fonctionnalités testées sont résumées dans ce tableau :

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	POUTRE	'RECTANGLE'	TOUT
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	TOUT NOEUD	
AFFE_MATERIAU	TOUT		
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'POU_D_E'	TOUT
RECU_CHAMP	'NUMERO_ORDRE'	'DEPL'	
DEFI_MATERIAU	ELAS		
MODE_ITER_SIMULT	METHODE	'TRI_DIAG'	
	CALC_FREQ	OPTION	'PLUS_PETITE'
NORM_MODE	'TRAN'		

On insiste sur les commandes MODE_ITER_SIMULT (méthode de Lanczos) pour le calcul des modes propres et AFFE_CHAR_MECA pour l'imposition des conditions aux limites.

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence 1	11.76	11.7642	0.04
Fréquence 2	11.76	11.7642	0.04
Fréquence 3	105.88	105.8811	0.00
Fréquence 4	105.88	105.8812	0.00
Fréquence 5	294.10	294.1780	0.03
Fréquence 6	294.10	294.1806	0.03
Fréquence 7	576.44	576.9802	0.09
Fréquence 8	576.44	577.0079	0.10

Pour les modes de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Points	Grandeur	Référence	Aster	% différence
Fréquence 1	B	DY	-0.707	-0.69845	-1.2
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 2	B	DY	0.707	0.72615	2.7
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 3	B	DY	0.707	0.70711	0.01
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 4	B	DY	-0.370	-0.37015	0.04
	C	DY	0.523	0.52347	
Fréquence 7	B	DY	0.707	0.70711	0.02
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 8	B	DY	-0.388	-0.38847	0.12
	C	DY	0.549	0.54937	

4.2 Remarques

Pour les fréquences propres, les résultats obtenus sont corrects. Il en est de même pour les résultats obtenus concernant les modes propres. La tolérance est inférieure à 2% pour l'ensemble des modes sauf pour le mode 2 où la tolérance est comprise entre 2 et 3%.

4.3 Paramètres d'exécution

Version : NEW 3.03.09

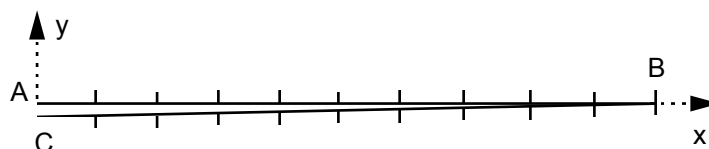
Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 MW

Temps CPU User : 5 secondes

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles SEG2 (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée pour les poutres est celle d'Euler Bernouilli (POU_D_E).

On recherche des solutions bidimensionnelles. On peut donc bloquer pour tous les nœuds le déplacement DZ et les rotations DRX et DRY.

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$DX = DY = 0$. $DRZ = 0$.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 21 nœuds et 20 mailles de type SEG2.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point A = A Point B = B Point C = C

5.3 Fonctionnalités testées

Les fonctionnalités testées sont résumées dans ce tableau :

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	POUTRE	'RECTANGLE'	TOUT
AFFE_CHAR_CINE	MECA_IMPO	TOUT	
		NOEUD	
AFFE_MATERIAU	TOUT		
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'POU_D_E'	TOUT
RECU_CHAMP	'NUMERO_ORDRE'	'DEPL'	
DEFI_MATERIAU	ELAS		
MODE_ITER_SIMULT	METHODE	'JACOBI'	
	CALC_FREQ	OPTION	'PLUS_PETITE'
NORM_MODE	'TRAN'		

On insiste sur les commandes MODE_ITER_SIMULT (méthode de Bathe et Wilson) pour le calcul des modes propres et AFFE_CHAR_CINE pour l'imposition des conditions aux limites.

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence 1	11.76	11.7642	0.04
Fréquence 2	11.76	11.7642	0.04
Fréquence 3	105.88	105.8811	0.00
Fréquence 4	105.88	105.8812	0.00
Fréquence 5	294.10	294.1780	0.03
Fréquence 6	294.10	294.1806	0.03
Fréquence 7	576.44	576.9802	0.09
Fréquence 8	576.44	577.0079	0.1

Pour les modes de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Points	Grandeur	Référence	Aster	% différence
Fréquence 1	B	DY	-0.707	-0.69658	-1.47
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 2	B	DY	0.707	0.73038	3.31
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 3	B	DY	0.707	0.70711	0.02
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 4	B	DY	-0.370	-0.37014	0.04
	C	DY	0.523	0.52347	0.09
Fréquence 7	B	DY	0.707	0.70711	0.02
	C	DY	1.	1.	
Fréquence 8	B	DY	-0.388	-0.38846	0.12
	C	DY	0.549	0.54937	0.07

6.2 Remarques

Pour les fréquences propres, les résultats obtenus sont corrects. Il en est de même pour les résultats obtenus concernant les modes propres. La tolérance est inférieure à 2% pour l'ensemble des modes sauf pour le mode 2 où la tolérance est comprise entre 3 et 4%.

6.3 Paramètres d'exécution

Version : NEW 3.03.09

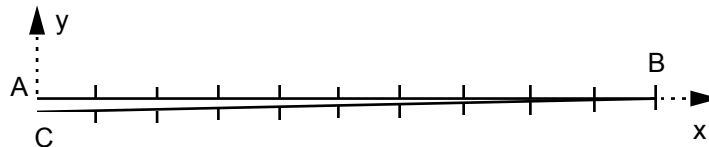
Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 MW

Temps CPU User : 5 secondes

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles SEG3 (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée est COQUE_C_PLAN.

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$DX = DY = DRZ = 0$.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 41 nœuds et 20 mailles de type SEG3.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point A = A

Point B = B

Point C = C

7.3 Fonctionnalités testées

Les fonctionnalités testées sont résumées dans ce tableau :

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	COQUE	EPAIS
AFFE_MODELE	'MODELISATION'	'COQUE_C_PLAN'
MODE_ITER_SIMULT	METHODE	'SORENSEN'
	CALC_FREQ	OPTION
		'PLUS_PETITE'

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence 1	11.76	11.767	0.063
Fréquence 2	11.76	11.804	0.377
Fréquence 3	105.88	106.533	0.616
Fréquence 4	105.88	107.556	1.583
Fréquence 5	294.10	299.685	1.899
Fréquence 6	294.10	304.643	3.585
Fréquence 7	576.44	599.025	3.918
Fréquence 8	576.44	613.506	6.430

Pour les modes de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Points	Grandeur	Référence	Aster	% différence
Fréquence 1	B	DY	-0.707	-0.707	0.015
	C	DY	1.	1.	0.
Fréquence 2	B	DY	0.707	0.707	0.015
	C	DY	1.	1.	0.
Fréquence 3	B	DY	0.707	0.707	0.015
	C	DY	1.	1.	0.
Fréquence 4	B	DY	-0.370	-0.373	0.713
	C	DY	0.523	0.527	0.763
Fréquence 7	B	DY	0.707	0.707	0.015
	C	DY	1.	1.	0.
Fréquence 8	B	DY	-0.388	-0.403	3.990
	C	DY	0.549	0.571	3.936

8.2 Remarques

Dans ce cas-test, où les résultats sont indépendants du module d'Young, il n'est pas nécessaire de modifier le module d'Young retenu pour la modélisation, comme dans le cas de l'analyse statique linéaire, pour tenir compte de la largeur réelle de la poutre.

8.3 Paramètres d'exécution

Version : NEW 5.04.17

Machine : SGI-Origin2000 R12000

Encombrement mémoire : 16 mégaoctets

Temps CPU User : 2.49 secondes

9 Synthèse des résultats

- Modélisations A et B de type Poutre :

Le problème est traité avec une très bonne précision sur les huit premières fréquences (tolérance < 0.1%) pour les deux modélisations testées. Les composantes des modes 3, 4, 7 et 8 sont obtenues aussi avec une bonne précision de l'ordre de 0.1%. La précision sur le mode 1 est de l'ordre de 1% pour la méthode de Lanczos et de 0.5% pour la méthode de Bathe et Wilson. En ce qui concerne le mode 2, la précision se dégrade : elle est de l'ordre de 2.7% pour la méthode de Lanczos et de l'ordre de 3.3% pour la méthode de Bathe et Wilson. Des tests complémentaires (utilisation de la méthode de Lanczos en imposant des conditions aux limites par la commande `AFFE_CHAR_CINE`) permettent de penser que ces différences proviennent de la méthode de recherche des valeurs propres utilisée.

- Modélisation `COQUE_C_PLAN`

La précision sur les résultats est bonne pour les trois premières fréquences, l'erreur est de l'ordre de 0.6%. Elle se dégrade au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'erreur passe de la 4^{ème} fréquence à la 8^{ème} de 1.5% à 6.4%. Plus la fréquence est élevée plus l'écart entre les fréquences doubles est important. L'erreur sur les modes est satisfaisante pour les 7 premiers modes (<0.7%), elle est plus élevée pour le 8^{ème} (<4%). Un maillage plus fin devrait permettre de mieux représenter les déformées modales associées aux fréquences élevées.