

**Manuel de Validation****Fascicule V6.02 : Statique non linéaire des structures linéiques****Document V6.02.112**

# **SSNL112 - Barre soumise a un chargement thermique cyclique**

---

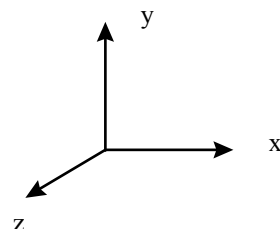
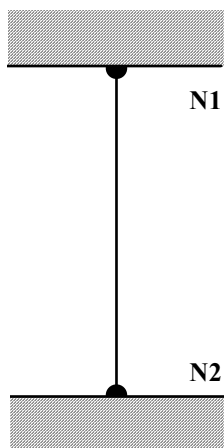
**Résumé :**

Ce cas test entre dans le cadre de la validation des relations de comportement en élastoplasticité des éléments barre pour la mécanique quasi-statique des structures.  
Une barre encastree a ces deux extrémités subit un chargement thermique cyclique induisant des efforts de traction-compression.

Chaque modélisation permet de valider une des relations de comportement non-linéaire introduite : Ecrouissage isotrope linéaire avec critère de Von Mises (modélisation A), écrouissage cinématique linéaire avec critère de Von Mises (modélisation B), ainsi qu'un modèle dit de Pinto-Menegotto, représentant le comportement cyclique des armatures en acier dans le béton armé (modélisations C et D).

## 1 Problème de référence

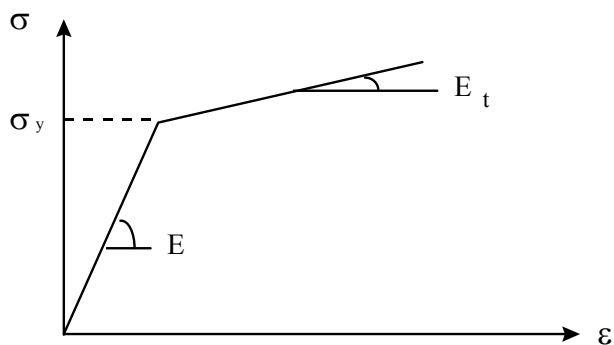
### 1.1 Géométrie



Longueur de la barre : 1 m  
Section de la barre : 5 cm<sup>2</sup>

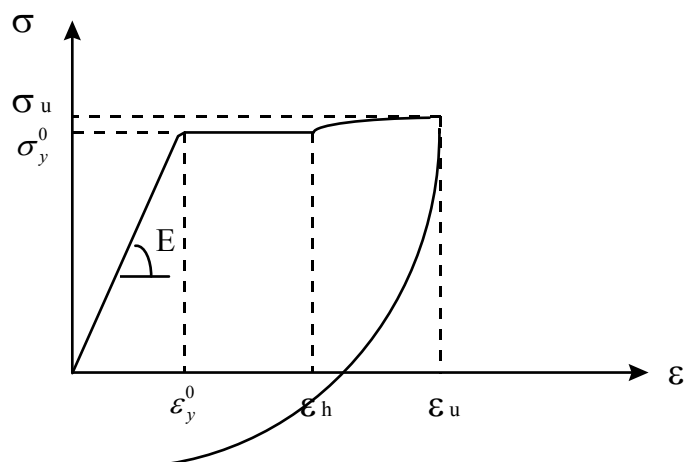
### 1.2 Propriétés des matériaux

#### 1.2.1 Ecouissements isotrope et cinématique linéaires



Module d'Young :	$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Pente d'écrouissage :	$E_t = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Limite d'élasticité :	$\sigma = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson :	$\nu = 0,3$
Coefficient de dilatation thermique :	$\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

## 1.2.2 Modèle de Pinto-Menegotto



Module d'Young :	$E$	=	$2.10^{11} \text{ Pa}$
Limite d'élasticité :	$\sigma_y^0$	=	$2.10^8 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson :	$\nu$	=	0,3
Coefficient de dilatation thermique :	$\alpha$	=	$1.10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Déformation d'écroutissage :	$\varepsilon_h$	=	$2.3 \cdot 10^{-3}$
Contrainte ultime :	$\sigma_u$	=	$2.58 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
Déformation ultime :	$\varepsilon_u$	=	$3.10^{-2}$
Coefficient définissant la courbe $\zeta$ :	$R_0$	=	20
Coefficient définissant la courbe $\zeta$ :	$A_1$	=	18.5
Coefficient définissant la courbe $\zeta$ :	$A_2$	=	0.15
Coefficient de flambage :	$C$	=	0.5
Coefficient de flambage :	$A$	=	0.008

## 1.3 Conditions aux limites et chargement

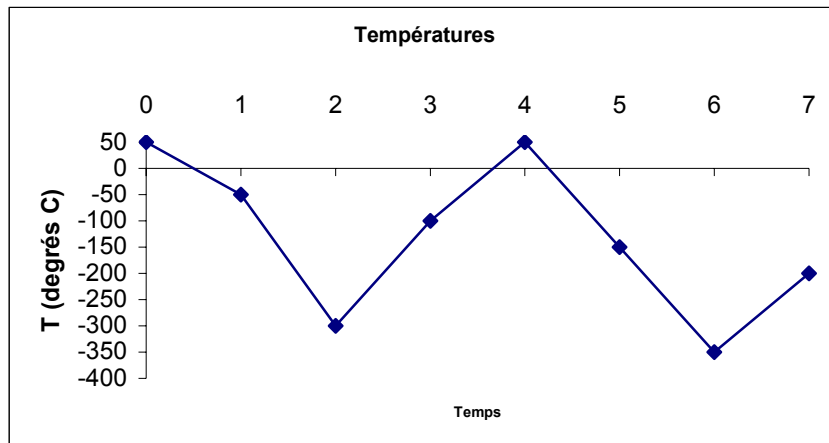
### Conditions aux limites :

La barre est encastée. Les déplacements sont donc bloqués dans les trois directions.  
En N1 et N2 :  $DX = DY = DZ = 0$

## Chargement :

Le trajet de chargement est décrit par l'évolution de la température, uniforme dans la barre :

t	0	1	2	3	4	5	6	7
T(°C)	50	-50	-300	-100	50	-150	-350	-200



La température de référence est prise à 0°C

## 2 Solutions de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

#### 2.1.1 Ecrouissages linéaires

##### Ecrouissage isotrope

Pour une traction uniaxiale, le critère de plasticité s'écrit :

$$|\sigma_L| - R(p) \leq 0$$

où  $p$  est la déformation plastique cumulée

$$R(p) = R'p + \sigma^y \text{ et } R' = \frac{E E_t}{E - E_t}$$

Le critère s'écrit alors :

$$|\sigma_L| - R'p - \sigma^y \leq 0$$

Le tenseur des contraintes s'obtient par :

$$\sigma = \mathbf{A} \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^p) - 3K\alpha(T - T^{ref})\mathbf{Id}$$

On en déduit donc l'expression de  $\sigma_L$  :

$$\sigma_L = E(\varepsilon - \alpha T) - E \varepsilon^p \quad (T^{ref} = 0)$$

Dans notre cas,  $\varepsilon = 0$  donc :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p \quad \text{avec } \varepsilon_L = -\alpha T$$

Donc :

- Si  $|\sigma_L| - R(p) < 0$  :

$$p=0 \text{ et } \sigma_L = E \varepsilon_L$$

- Si  $|\sigma_L| - R(p) = 0$  :

$$p = \left( \frac{|\sigma| - \sigma^y}{R'} \right)$$

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p$$

**Application au trajet de chargement****Instant 1 :**

$\sigma_{el} = E \varepsilon = 200 MPa$  et  $R(p) = R' p + \sigma^y = 100 MPa$  car  $p=0$ .

On a bien  $\sigma_L - R(p) \leq 0$ .

Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique :  $\sigma_L = 100 MPa$  et  $N = 100 kN$

**Instant 2 :**

Le critère est atteint :

$$\sigma_L = \frac{E}{E + R'} (R' \varepsilon_L + \sigma^y) = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^{11} + 2.02 \cdot 10^9} (2.02 \cdot 10^9 \times 3.5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^8) = 205 MPa$$

$$N = 102.5 kN$$

$$\text{et } p = 2.475 \cdot 10^{-3}$$

**Instant 3 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (1.5 \cdot 10^{-3} - 2.475 \cdot 10^{-3}) = -195 MPa$$

$$N = -97.5 kN$$

**Instant 4 :**

On plastifie à nouveau :

Le critère s'écrit :  $|\sigma| - R'p - \sigma^y = 0$  avec  $p = p_1 + p_2$  où  $p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$

On obtient donc :

$$p_2 = \frac{|\sigma| - \sigma^y}{R'} - p_1$$

$$\sigma = -E \varepsilon^p = -E (p_1 - p_2)$$

$$\sigma = \left( \frac{R'}{R' + E} \right) \left( -2 E p_1 - \frac{E \sigma^y}{R'} \right) = -207.9 MPa$$

$$\text{Et donc } N = -103.95 kN$$

**Instant 5 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-3} - 1.0395 \cdot 10^{-3}) = 192.1 MPa$$

$$N = 96.05 kN$$

**Instants 6 et 7 :**

Le raisonnement est identique

On trouve :

$$N_{(inst.6)} = 105.87 kN$$

$$N_{(inst.7)} = -44.13 kN$$

**Ecrouissage cinématique**

La méthode de calcul est identique, mais dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :

$$(\sigma - X)_{eq} - \sigma^y \leq 0$$

$$\text{avec } X_{eq} = C(\varepsilon^p)_{eq} = \frac{3}{2} C \varepsilon^p = \frac{E E_t}{E - E_t} \varepsilon^p$$

Avec les notations précédentes, le critère s'écrit :

$$|\sigma_L - R' \varepsilon^p| - \sigma^y \leq 0$$

Et  $\sigma_L = R' \varepsilon^p \pm \sigma^y$  (suivant le sens de l'écoulement).

**Application au trajet de chargement****Instant 1 :**

Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique :  $\sigma_L = 100 MPa$  et  $N = 100 kN$

**Instant 2 :**

Le critère est atteint :  $|\sigma_L - R' \varepsilon^p| - \sigma^y = 0$

$$\sigma_L = R' \varepsilon^p + \sigma^y = 2.02 \cdot 10^9 \times 2.475 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^8 = 205 MPa$$

**Instant 3 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (1.5 \cdot 10^{-3} - 2.475 \cdot 10^{-3}) = -195 MPa$$

$$N = -97.5 kN$$

**Instant 4 :**

On a :

$$|\sigma - R' \varepsilon^p| - \sigma^y = 0$$

$$\text{avec } p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon^p = p_1 - p_2$$

$$p_2 = p_1 - \frac{|\sigma + \sigma^y|}{R'}$$

$$\sigma = -E \varepsilon^p = -E (p_1 - p_2)$$

$$\sigma = -E \left( \frac{|\sigma + \sigma^y|}{R'} \right) = -198 MPa$$

$$N = -99 kN$$

**Instant 5 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-3} - 9.9 \cdot 10^{-4}) = 202 MPa$$

$$N = 101 kN$$

**Instants 6 et 7 :**

Le raisonnement est identique

On trouve :

$$N_{(inst.6)} = 103 kN$$

$$N_{(inst.7)} = -47 kN$$

## 2.1.2 Modèle de Pinto-Menegotto

Ce modèle est décrit dans le Manuel de Référence du *Code\_Aster* [R5.03.09] [bib1]. La loi constitutive des aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique où le trajet entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

Comme précédemment les déformations imposées sont des déformations thermiques :  $\varepsilon = -\alpha T$

### 2.1.2.1 Cas sans flambage

#### Premier chargement

- Elasticité linéaire :  $\sigma = E \varepsilon$

#### Instant 1 :

$$N = E \varepsilon S = 2 \cdot 10^{11} \times 1 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-4} = 100 \text{ kN}$$

- Palier plastique :  $\sigma = \sigma_y$
- Polynôme de degré 4 :  $\sigma = \sigma_u - (\sigma_{su} - \sigma_y^0) \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_h} \right)^4$

#### Instant 2 :

$$\varepsilon = 3.5 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_h = 2.3 \cdot 10^{-3}, \text{ on utilise le polynôme de degré 4 :}$$

$$\sigma = 209.416 \text{ MPa}$$

$$\text{et } N = 104.708 \text{ kN}$$

#### Cycles

#### Demi-cycle 1 :

On détermine  $\zeta_p^0$  :

$$\zeta_p^0 = \varepsilon_r^0 - \varepsilon_y^0 = 3.5 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ car } \varepsilon_r^0 = \varepsilon_{(inst.2)}.$$

Puis  $\Delta\sigma^0$  :

$$\Delta\sigma^0 = E_h \zeta_p^0 = 2 \cdot 10^9 \times 2.5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ MPa}$$

$$\text{D'où } \sigma_y^1 = \sigma_y^0 \cdot \text{sign}(-\zeta_p^0) + \Delta\sigma^0 = -200 + 5 = -195 \text{ MPa}$$

- On calcule ensuite  $\varepsilon_y^1$  :

$$\varepsilon_y^1 = \varepsilon_r^0 + \frac{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}{E} = 3.5 \cdot 10^{-3} + \frac{(-195 - 209.416) 10^6}{2.0 \cdot 10^{11}} = 1.477 \cdot 10^{-3}$$

On détermine ainsi  $\sigma^* = f(\varepsilon^*)$ , définie par :

$$\sigma^* = b \varepsilon^* + \left( \frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{1/R}} \right) \varepsilon^*, \text{ avec } b = \frac{E_h}{E}$$



$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r^0}{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}$$

$$\xi_p^0 = \frac{\xi_p^0}{|\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0|} \text{ et } R^1 = R_0 - \frac{A_1 \cdot \xi_p^0}{A_2 + \xi_p^0}$$

On obtient  $\xi_p^0 = -1.23$  et  $R^1 = 3.51$

On peut alors calculer la valeur de  $\sigma$  aux instants 3 et 4 :

**Instant 3 :**

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_{(inst.3)} - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0} = \frac{1.5 \cdot 10^{-3} - 3.5 \cdot 10^{-3}}{1.477 \cdot 10^{-3} - 3.5 \cdot 10^{-3}} = 0.988$$

$$\sigma^* = b \varepsilon^* + \left( \frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{1/R}} \right) \varepsilon^* = 0.01 \times 0.988 + \left( \frac{1-0.01}{(1+(0.988)^{3.51})^{1/3.51}} \right) = 0.82$$

$$\text{et } \sigma = \sigma^* (\sigma_y^1 - \sigma_r^0) + \sigma_r^0 = 0.82 \times (-195 - 209.416) + 209.416 = -122 \text{ MPa}$$

d'où  $N = -61 \text{ kN}$

**Instant 4 :**

On utilise la même méthode, avec  $\varepsilon = 0$ .

$$\varepsilon^* = 1.73$$

$$\sigma^* = 0.56$$

$$\sigma = -20 \text{ MPa}$$

$$N = -10 \text{ kN}$$

**Demi-cycle 2 :**

**Instant 5 et 6 :**

La méthode de calcul est identique, on détermine :

$$\xi_p^1, \sigma_y^2, \varepsilon_y^2, \xi_p^1, R^2, \text{ puis } \sigma_{(inst.5)}^* = f(\varepsilon_{(inst.5)}^*) \text{ et } \sigma_{(inst.6)}^* = f(\varepsilon_{(inst.6)}^*)$$

et finalement  $\sigma_{(inst.5)}$  et  $\sigma_{(inst.6)}$ .

**Demi-cycle 3 :**

**Instant 7 :** Idem

**2.1.2.2 Cas avec flambage****Premier chargement**

Identique au cas précédent.

**Cycles****Demi-cycle 1 (compression) :**

La méthode de calcul est identique, mais la valeur de la pente de l'asymptote est modifiée :  
On calcule un nouveau coefficient  $b_c$  :

$$b_c = a(5.0 - L/D) e^{\left(b \xi^r \frac{E}{\sigma^y - \sigma^\infty}\right)} = 0.006 \times (5.0 - 5.9) e^{\left(0.01 \times 1.477 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8 - 1.36 \cdot 10^8}\right)} = -0.0057$$

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer  $\sigma_y^n$ . La raisonnement est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire  $\sigma_s^*$  afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote.

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} = 0.028 \times 0.01 \times 2 \cdot 10^{11} \times \frac{0.01 + 0.0057}{1 + 0.0057} = 0.87 \text{ MPa}$$

$$\text{où } \gamma_s \text{ est donné par : } \gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10(e^{c(L/D)} - 1.0)} = 0.028$$

**Demi-cycle 2 (traction) :**

- En traction, on adopte un module d'Young réduit :

$$E_r = E \left( a_5 + (1.0 - a_5) e^{(-a_6 \xi^{n^2})} \right) = 2 \cdot 10^{11} \times (0.88 + (1 - 0.88) e^{(-620 \times 1.473 \cdot 10^{-6})}) = 1.99 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$$

$$\text{avec } a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D) / 7.5 = 0.88$$

Le reste de la méthode est identique.

**2.2 Résultats de référence**

Effort normal N constant sur la barre

**2.3 Incertitude sur la solution**

Aucune, la solution est analytique

**2.4 Références bibliographiques**

- [1] Manuel de référence du *Code\_Aster* [R5.03.09].
- [2] S. ANDRIEUX : TD 1 Trois barres thermoélastoplastiques Von Mises parfait. In « Initiation à la thermoplasticité dans le *Code\_Aster* », HI-74/96/013 novembre 1996 (manuel de référence du cours).

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage isotrope linéaire - Critère de Von Mises

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

2 noeuds.  
1 maille SEG2

#### 3.3 Fonctionnalités testées

**Commandes**

DEFI_MATERIAU	ECRO_LINE	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	VMIS_ISOT_LINE
	OPTION	SIEF_ELNO_ELGA

### 4 Résultats de la modélisation A

#### 4.1 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence	Aster	Ecart %
effort normal N	1	1.0000 10 <sup>5</sup>	1.0000 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	2	1.0250 10 <sup>5</sup>	1.0250 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	3	-9.7500 10 <sup>4</sup>	-9.7500 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	4	-1.0395 10 <sup>5</sup>	-1.0395 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	5	9.6050 10 <sup>4</sup>	9.6050 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	6	1.0587 10 <sup>5</sup>	1.0587 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	7	-4.4129 10 <sup>4</sup>	-4.4129 10 <sup>4</sup>	0

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire - Critère de Von Mises

### 5.2 Caractéristiques du maillage

2 noeuds.  
1 maille SEG2

### 5.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_MATERIAU	ECRO_LINE	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	VMIS_CINE_LINE
	OPTION	SIEF_ELNO_ELGA

## 6 Résultats de la modélisation B

### 6.1 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence	Aster	Ecart %
effort normal N	1	1.0000 10 <sup>5</sup>	1.0000 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	2	1.0250 10 <sup>5</sup>	1.0250 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	3	-9.7500 10 <sup>4</sup>	-9.7500 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	4	-9.9000 10 <sup>4</sup>	-9.9000 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	5	1.0100 10 <sup>5</sup>	1.0100 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	6	1.0300 10 <sup>5</sup>	1.0300 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	7	-4.7000 10 <sup>4</sup>	-4.7000 10 <sup>4</sup>	0

## 7 Modélisation C

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto sans flambage (valeur de ELAN inférieure à 5).

### 7.2 Caractéristiques du maillage

2 noeuds.

1 maille SEG2

### 7.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_MATERIAU	PINTO_MENEGOTTO	ELAN : 4.9
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	PINTO_MENEGOTTO
	OPTION	SIEF_ELNO_ELGA

## 8 Résultats de la modélisation C

### 8.1 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence	Aster	Ecart %
effort normal N	1	1.0000 10 <sup>5</sup>	1.0000 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	2	1.0470 10 <sup>5</sup>	1.0470 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	3	-6.0777 10 <sup>4</sup>	-6.0777 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	4	-9.1430 10 <sup>4</sup>	-9.1430 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	5	7.6082 10 <sup>4</sup>	7.6082 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	6	1.0125 10 <sup>5</sup>	1.0125 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	7	-3.7965 10 <sup>4</sup>	-3.7965 10 <sup>4</sup>	0

## 9 Modélisation D

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'1 élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto avec flambage (valeur de ELAN supérieure à 5).

### 9.2 Caractéristiques du maillage

2 noeuds.  
1 maille SEG2

### 9.3 Fonctionnalités testées

#### Commandes

DEFI_MATERIAU	PINTO_MENEGOTTO	ELAN : 5.9
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	PINTO_MENEGOTTO
	OPTION	SIEF_ELNO_ELGA

## 10 Résultats de la modélisation D

### 10.1 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence	Aster	Ecart %
effort normal N	1	1.0000 10 <sup>5</sup>	1.0000 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	2	1.0470 10 <sup>5</sup>	1.0470 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	3	-6.0556 10 <sup>4</sup>	-6.0556 10 <sup>4</sup>	0
effort normal N	4	-8.9078 10 <sup>5</sup>	-8.9078 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	5	7.6905 10 <sup>5</sup>	7.6905 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	6	1.0125 10 <sup>5</sup>	1.0125 10 <sup>5</sup>	0
effort normal N	7	-3.8119 10 <sup>4</sup>	-3.8119 10 <sup>4</sup>	0

## 11 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par le Code\_Aster sont en excellent accord avec les solutions analytiques.