

**Manuel de Validation****Fascicule V6.03 : Statique non linéaire des systèmes plans****Document V6.03.116**

# SSNP116 - Couplage fluage/fissuration - Traction uniaxiale

---

**Résumé :**

Ce cas de validation est destiné à vérifier le modèle de couplage des lois de fluage de Granger avec les lois de plasticité/fissuration. Le couplage, restreint dans un premier temps à quelques lois de l'environnement non linéaire du *Code\_Aster*, pourra être étendu par la suite à davantage de lois. Les paramètres des modèles de plasticité/fissuration sont choisis de façon particulière pour modéliser un comportement élasto-plastique quasi parfait, et se ramener à un problème présentant une solution analytique relativement simple.

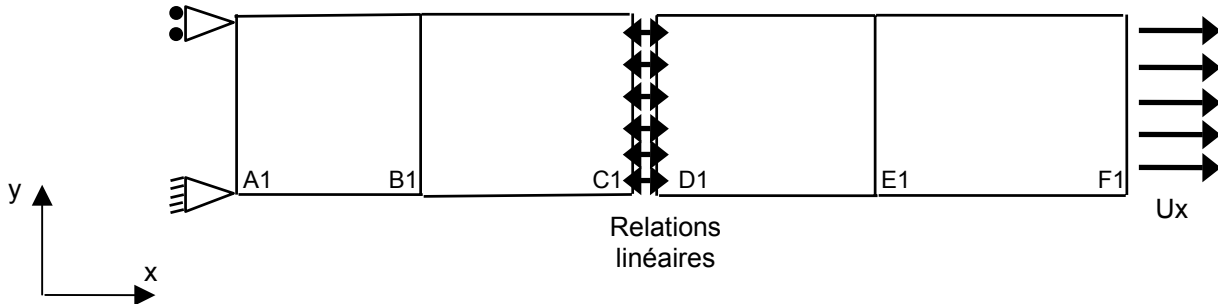
La géométrie est constituée de trois éléments linéaires (cubes et prismes en 3D, carrés et triangles en 2D), et trois éléments quadratiques, reliés aux précédents par des relations linéaires. Les modélisations testées ici sont les modélisations 3D, C\_PLAN, et D\_PLAN.

Le chargement est une traction uniaxiale en déplacement imposé.

On teste le couplage du modèle de fluage de Granger avec BETON\_DOUBLE\_DP (ou NADAI\_B en C\_PLAN), VMIS\_ISOT\_LINE et CHABOCHE. On dispose de la solution analytique en 3D et C\_PLAN, lorsqu'il n'y a pas variation de la température et du séchage. Dans les cas 3D et D\_PLAN, on teste également les solutions obtenues lorsqu'il y a variation de la température et du séchage et activation des retraits correspondants (avec effet opposé). Il s'agit alors de tests de non-régression.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés de matériaux

Les paramètres des lois de comportement sont les suivants :

**Pour les caractéristiques mécaniques en élasticité linéaire (ELAS) :**

Module d'Young :  $E = 31\,000\text{ MPa}$   
Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.2$   
Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha = 10^{-5}$   
Coefficient de retrait de dessiccation :  $\kappa = 10^{-5}$

**Pour les caractéristiques mécaniques non linéaires du modèle BETON\_DOUBLE\_DP :**

Résistance en compression uniaxiale :  $f_c = 40\text{ N/mm}^2$   
Résistance en traction uniaxiale :  $f_t = 4\text{ N/mm}^2$   
Rapport des résistances en compression biaxiale/compression uniaxiale :  $\beta = 1.16$   
Énergie de rupture en compression :  $G_c = 10\text{ Nmm/mm}^2$   
Énergie de rupture en traction :  $G_t = 10000\text{ Nmm/mm}^2$  pour simuler un écoulement quasi nul  
Rapport de la limite d'élasticité à la résistance en compression uniaxiale : 33.33%

**Pour les caractéristiques mécaniques non linéaires du modèle NADAI\_B :**

Résistance en compression uniaxiale :  $f_c = 40\text{ N/mm}^2$   
Résistance en traction uniaxiale :  $f_t = 4\text{ N/mm}^2$   
Seuil initial d'élasticité :  $\theta = 1$   
Déformation plastique au pic en compression :  $E_{psp\_p\_c} = 9.64705$   
Déformation plastique à rupture en compression :  $E_{psp\_r\_c} = 5$   
Déformation à rupture en traction :  $E_{psi\_r\_t} = 5000$  pour simuler un écoulement quasi nul

**Pour les caractéristiques mécaniques du modèle à écoulement linéaire VMIS\_ISOT\_LINE :**

Limite élastique :  $S_y = 4\text{ N/mm}^2$   
Pente d'écoulement :  $D\_sigm\_epsi = 0.1\text{ N/mm}^2$

**Pour les caractéristiques mécaniques du modèle de CHABOCHE :**

Rayon de plasticité initial :  $R_0 = 4.0 \text{ N/mm}^2$

Rayon de plasticité à l'infini :  $R_\infty = 4.1 \text{ N/mm}^2$

Coefficient d'évolution du rayon de plasticité :  $G_c = 0.1 \text{ N/mm}^2$

Les paramètres caractérisant l'écrouissage cinématique sont nuls pour simuler un écrouissage quasi nul :  $A1 = A2 = C1 = C2 = W = 0$  et  $K = 1$ .

**Pour les caractéristiques mécaniques du modèle de fluage de GRANGER :**

Coefficient  $J1$  :  $J1 = 0.2 \text{ MPa}^{-1}$

Coefficient  $\tau1$  :  $\tau1 = 4\,320\,000 \text{ s}$

Coefficient  $Q/R$  :  $QsR_K = 0. \text{ K}$

La courbe de désorption vaut 1 pour toutes valeurs de l'hygrométrie, pour simplifier la solution analytique.

## 1.3 Conditions aux limites et chargements mécaniques

Pour les calculs en 3D :

- Face en  $x = 0$  du premier cube (sa) : bloquée suivant  $ox$ ,
- Nœuds des faces en  $y = 0$  : bloquée suivant  $oy$ ,
- Nœuds des faces en  $z = 0$  : bloquée suivant  $oz$ ,
- Relation linéaire (LIAISON\_DDL) entre les nœuds extrémité des faces confondues des éléments linéaires et quadratiques adjacents (nœuds  $c1, c2, c3, c4$  liés avec les nœuds  $d1, d2, d3, d4$ ),
- Relation linéaire (LIAISON\_UNIF) sur la face  $sd$  pour lier les déplacements suivant  $x$  des nœuds quadratiques de cette face à ceux des nœuds sommet,
- Face en  $x = x_{\max}$  du dernier cube (sf) : Traction exercée suivant  $ox$ .

Pour les calculs en 2D :

- Ligne en  $x = 0$  du premier carré (la) : bloquée suivant  $ox$ ,
- Nœuds des lignes en  $y = 0$  : bloquée suivant  $oy$ ,
- Relation linéaire (LIAISON\_DDL) entre les nœuds extrémité des lignes confondues des éléments linéaires et quadratiques adjacents (nœuds  $c1, c2$  liés avec les nœuds  $d1, d2$ ),
- Relation linéaire (LIAISON\_UNIF) sur la ligne  $ld$  pour lier les déplacements suivant  $x$  des nœuds quadratiques de cette ligne à ceux des nœuds sommet,
- Ligne en  $x = x_{\max}$  du dernier carré (lf) : Traction exercée suivant  $ox$ .

Le champ de température est soit constant (premier calcul), soit croissant de  $0^\circ\text{C}$  à  $20^\circ\text{C}$  pour tous les autres calculs. Dans le cas où la température varie, on suppose que le champ de séchage varie de 1 à 0. Les caractéristiques matériau sont constantes. De plus, on applique un coefficient de retrait de dessiccation non nul, de telle façon que le retrait de dessiccation compense la dilatation thermique, pour vérifier que ces 2 phénomènes sont bien pris en compte.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour pouvoir calculer une solution analytique simple, les choix suivants ont été réalisés, l'objectif étant de valider le couplage et non les lois de plasticité/fissuration ou de fluage :

- une loi de fluage de Granger avec un seul modèle de Kelvin en série,
- une loi de plasticité/fissuration modélisant une loi élastoplastique parfaite,
- un chargement de traction uniaxiale.

La solution de référence est calculée de façon analytique, sachant qu'en traction, seul le critère de traction est activé. Les équations du modèle se ramènent à des équations scalaires permettant de calculer la solution analytique. La seule difficulté vient de la détermination du début de la plasticité (instant et déformation de fluage) qui nécessite de résoudre par une méthode numérique une équation non linéaire à une inconnue.

Dans le cas où la température n'est pas constante, le fluage est plus complexe à résoudre, la solution analytique n'a pas été calculée. Il s'agit donc de tests de non-régression. Toutefois, dans les cas 3D et D\_PLAN, on peut vérifier que l'on obtient les mêmes résultats avec les 3 modèles.

La déformation imposée (déplacement d'une extrémité de la structure) est une fonction linéaire du temps permettant de mettre en jeu fluage et plasticité.

### 2.2 Calcul de la solution de référence

On note  $\varepsilon$ , la composante xx de la déformation totale,  $\varepsilon_e$  la composante xx de la déformation élastique,  $\varepsilon_f$  la composante xx de la déformation de fluage de Granger, et  $\varepsilon_{pl}$  la composante xx de la déformation plastique,  $\sigma$  la composante xx de la contrainte, et  $E$  le module d'Young.

Le modèle de fluage retenu ne comporte qu'un seul modèle de Kelvin en série et le modèle de plasticité/fissuration est une loi élastoplastique quasi parfaite (pente d'écrouissage quasi nulle), ce qui permet de calculer aisément la solution analytique du couplage fluage/plasticité, dans le cas d'une traction simple uniaxiale. La loi élastoplastique quasi parfaite peut être obtenue à partir des lois du *Code\_Aster* BETON\_DOUBLE\_DP ou NADAI\_B, VMIS\_ISOT\_LINE ou CHABOCHE, en choisissant le jeu de paramètres qui convient (écrouissage quasi nul).

Le chargement est une traction uniaxiale en déplacement imposé. On impose donc une déformation totale proportionnelle au temps écoulé, de la forme  $\varepsilon_{xx} = \lambda_0 \cdot t$ . Comme il n'y a pas d'effort exercé dans les autres directions, le champ de contraintes est uniaxiale. On peut donc se ramener à un problème 1D pour la résolution, ce qui permet de calculer dans un deuxième temps des déformations dans les directions transverses au chargement (yy et zz).

$$\sigma = (\sigma_{xx}, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ et } \varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 0, 0, 0)$$

Les équations du modèle de fluage et du modèle de plasticité se confondent avec les équations scalaires suivantes, en omettant l'indice xx correspondant à la première composante des tenseurs :

$$\varepsilon = \lambda_0 \cdot t \text{ (traction imposée)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{fl} + \varepsilon_{pl}$$

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon}_{fl} + K \varepsilon_{fl} \text{ avec } \mu = \frac{\tau_s}{J_s} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{J_s}$$

$$\sigma = E \varepsilon_e$$

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \varepsilon_{pl} - \varepsilon_{fl} \right]$$

### Résolution en élasticité linéaire

Avant d'atteindre le seuil de plasticité, la déformation plastique est nulle, ce qui conduit à :

$$\varepsilon = \lambda_0 \cdot t \text{ (traction imposée)}$$

$$\varepsilon_{pl} = 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{fl}$$

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon}_{fl} + K \varepsilon_{fl} \text{ avec } \mu = \frac{\tau_s}{J_s} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{J_s}$$

$$\sigma = E \varepsilon_e$$

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \varepsilon_{fl} \right]$$

On obtient l'équation différentielle permettant de calculer la déformation de fluage :

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \varepsilon_{fl} \right] = \mu \dot{\varepsilon}_{fl} + K \varepsilon_{fl} \text{ avec } \varepsilon = \lambda_0 \cdot t$$

La déformation de fluage s'exprime donc comme la somme d'une fonction linéaire du temps et d'une fonction exponentielle, du type :

$$\varepsilon_{fl}(t) = a \cdot t + b + \alpha e^{-\beta \cdot t}$$

qui donne dans l'équation différentielle :

$$0 = \mu \cdot \dot{\varepsilon}_{fl}(t) + K \cdot \varepsilon_{fl}(t) + E \cdot \varepsilon_{fl}(t) - E \cdot \lambda_0 \cdot t$$

Soit :

$$0 = \left[ (K + E)b + \mu \cdot a \right] + \left[ (K + E)a - E \cdot \lambda_0 \right] t + \left[ (K + E)\alpha - \mu \cdot \beta \cdot \alpha \right] e^{-\beta \cdot t}$$

d'où :

$$a = \frac{E \cdot \lambda_0}{K + E} \quad b = -\frac{\mu}{K + E} \frac{E \cdot \lambda_0}{K + E} \quad \beta = \frac{K + E}{\mu}$$

A l'instant initial, on part d'une déformation de fluage nulle, ce qui conduit à :

$$\alpha = \frac{\mu}{K + E} \frac{E \cdot \lambda_0}{K + E}$$

On obtient finalement l'expression de la déformation de fluage en fonction du temps :

$$\varepsilon_{fl}^{xx}(t) = \varepsilon_{fl}(t) = \frac{\lambda_0 \cdot E}{K + E} \left[ t - \frac{\mu}{K + E} \left( 1 - e^{-\frac{K+E}{\mu} t} \right) \right]$$

La composante xx de la déformation élastique vaut :  $\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_{fl}$

Soit :

$$\varepsilon_e^{xx}(t) = \varepsilon_e(t) = \frac{\lambda_0 \cdot K}{K + E} t + \frac{\lambda_0 \cdot E \cdot \mu}{(K + E)^2} \left( 1 - e^{-\frac{K+E}{\mu} t} \right)$$

Les composantes yy et zz des déformations élastique et de fluage sont obtenues par multiplication de la composante xx par le coefficient de Poisson.

La composante xx de la contrainte vaut :  $\sigma = E \cdot \varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_{fl})$

Soit :

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma(t) = \frac{\lambda_0 \cdot K \cdot E}{K + E} t + \frac{\lambda_0 \cdot E^2 \cdot \mu}{(K + E)^2} \left( 1 - e^{-\frac{K+E}{\mu} t} \right)$$

### Seuil d'élasticité

Le comportement reste élastique jusqu'à ce qu'on atteigne la limite d'élasticité. Dans le cas d'une traction uniaxiale, la contrainte équivalente est égale à la composante non nulle de la contrainte. La plasticité intervient donc quand  $\sigma_{xx}(t) = \sigma_{eq} = f_t$  (résistance en traction), soit :

$$\frac{\lambda_0 \cdot K \cdot E}{K + E} t + \frac{\lambda_0 \cdot E^2 \cdot \mu}{(K + E)^2} \left( 1 - e^{-\frac{K+E}{\mu} t} \right) = f_t$$

Cette équation, résolue par une méthode numérique, permet d'obtenir l'instant du début de plastification  $t_{plas}$  et la déformation de fluage à cet instant :

$$\varepsilon_{fl}^{plas} = \varepsilon_{fl}(t_{plas}) = \frac{\lambda_0 \cdot E}{K + E} \left[ t_{plas} - \frac{\mu}{K + E} \left( 1 - e^{-\frac{K+E}{\mu} t_{plas}} \right) \right]$$

### Résolution en plasticité

Le modèle de plasticité a été choisi afin d'obtenir une résolution analytique simple. Il s'agit d'une loi de plasticité quasi parfaite, obtenue en prenant un jeu particulier de paramètres pour le modèle de comportement conduisant à une pente d'écrouissage quasi nulle. Donc, en phase plastique, la contrainte (composante xx), égale à la contrainte équivalente vaut la résistance en traction. Les équations du modèle sont alors :

$$\varepsilon = \lambda_0 \cdot t \text{ (traction imposée)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{fl} + \varepsilon_{pl}$$

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon}_{fl} + K \varepsilon_{fl} = \mu \dot{\varepsilon}_{fl} + K \left[ \varepsilon - \varepsilon_e - \varepsilon_{pl} \right] \text{ avec } \mu = \frac{\tau_s}{J_s} \text{ et } K = \frac{1}{J_s}$$

$$\sigma = E \varepsilon_e$$

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \varepsilon_{pl} - \varepsilon_{fl} \right] = f_t$$

avec comme conditions initiales :

$$t = t_{plas} \quad \varepsilon_{fl}(t_{plas}) = \varepsilon_{fl}^{plas}$$

ce qui conduit à l'équation différentielle permettant de calculer la déformation de fluage :

$$\sigma = f_t = \mu \dot{\varepsilon}_{fl} + K \varepsilon_{fl}$$

La déformation de fluage s'exprime donc sous la forme :

$$\varepsilon_{fl}(t) = a + \alpha e^{-\beta.t}$$

qui donne dans l'équation différentielle :

$$0 = \mu. \dot{\varepsilon}_{fl}(t) + K. \varepsilon_{fl}(t) - f_t = [K.a - f_t] + [K.\alpha - \mu.\beta.\alpha]e^{-\beta.t} \text{ d'où :}$$

$$a = \frac{f_t}{K} \quad \beta = \frac{K}{\mu}$$

A l'instant  $t_{plas}$ , la déformation de fluage vaut  $\varepsilon_{fl}^{plas}$ , ce qui conduit à :

$$\alpha = \left( \varepsilon_{fl}^{plas} - \frac{f_t}{K} \right) e^{\beta.t}$$

On obtient finalement l'expression de la déformation de fluage en fonction du temps :

$$\varepsilon_{fl}^{xx}(t) = \frac{f_t}{K} + \left( \varepsilon_{fl}^{plas} - \frac{f_t}{K} \right) e^{-\frac{K}{\mu}(t-t_{plas})}$$

avec  $\varepsilon = \lambda_0.t$

La composante xx de la déformation élastique vaut :  $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} = \frac{f_t}{E}$

La composante xx de la déformation plastique vaut :  $\varepsilon_{pl} = \varepsilon - \varepsilon_e - \varepsilon_{fl} = \lambda_0.t - \varepsilon_e - \varepsilon_{fl}$

Soit :

$$\varepsilon_{plas}^{xx}(t) = \lambda_0.t - \frac{f_t}{E} - \frac{f_t}{K} - \left( \varepsilon_{fl}^{plas} - \frac{f_t}{K} \right) e^{-\frac{K}{\mu}(t-t_{plas})}$$

Les composantes yy et zz des déformations élastique et de fluage sont obtenues par multiplication de la composante xx par le coefficient de Poisson.

La composante xx de la contrainte vaut :  $\sigma = f_t$

## Application numérique :

On impose une déformation de  $10^{-3}$  en 100 secondes, ce qui donne  $\lambda_0 = 10^{-5}$

La seule difficulté consiste à calculer l'instant de la plastification  $t_{plas}$ , et la déformation de fluage

$\varepsilon_{fl}^{plas}$  qui lui correspond, par dichotomie par exemple.

On obtient finalement les paramètres :

$$t_{plas} = 13.024296$$

$$\varepsilon_{fl}^{plas} = 1.20969985.10^{-6}$$

$$\varepsilon = 1.2903226.10^{-4}$$

qui permettent d'obtenir les valeurs de référence après plastification du béton.

A 10 secondes, le comportement est un couplage fluage/élasticité. A 100 secondes, le comportement est un couplage fluage/plasticité :

temps	10	100
$\sigma$	3.0778607	4.0
$\varepsilon$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-3}$
$\varepsilon_{fl}$	$7.1417140.10^{-7}$	$1.7316168.10^{-5}$
$\varepsilon_e$	$9.9285829.10^{-5}$	$1.2903226.10^{-4}$
$\varepsilon_{pl}$	0.0	$8.5365157.10^{-4}$

## 2.3 Incertitude sur la solution

Elle est négligeable, de l'ordre de la précision machine.

## 2.4 Références bibliographiques

Le modèle a été défini dans le document de spécification :

- [1] CS SI/311-1/420AL0/RAP/00.019 Version 1.1, « Développement du couplage fluage/fissuration dans le Code\_Aster - Spécifications »



## 3 Modélisation A

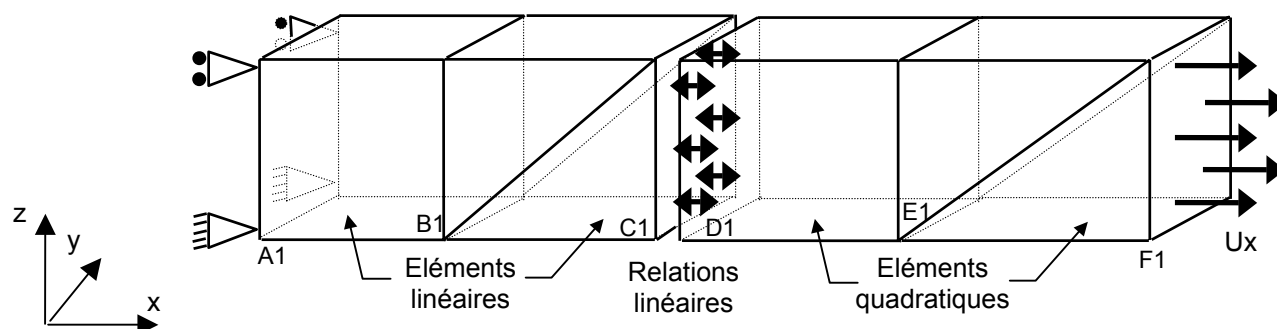
### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

#### 3D (1 HEXA8, 2 PENTA6, 1 HEXA20, 2 PENTA15)

Il s'agit d'un cube à 8 nœuds et de deux prismes à 6 nœuds liés par des relations linéaires à un cube à 20 nœuds et de deux prismes à 15 nœuds. L'ensemble est soumis à une traction uniaxiale suivant la direction x. Les dimensions suivant y et z sont unitaires. Les dimensions suivant la direction x sont choisies de telle sorte que tous les éléments aient la même longueur caractéristique (celle-ci vaut la racine cubique du volume pour les éléments quadratiques, et la racine cubique du volume multipliée par  $\sqrt{2}$  pour les éléments linéaires).

Les champs de contraintes et déformations sont uniformes.

En 3D, on valide le couplage de la loi BETON\_DOUBLE\_DP avec la loi GRANGER\_FP. On teste aussi le couplage des lois VMIS\_ISOT\_LINE et CHABOCHE avec la loi GRANGER\_FP.



### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 46

Nombre de mailles et type : 1 HEXA8, 2 PENTA6, 1 HEXA20, 2 PENTA15

### 3.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Options
AFFE_MODELE	'MECANIQUE' '3D'
DEFI_MATERIAU	'BETON_DOUBLE_DP'
DEFI_MATERIAU	'VMIS_ISOT_LINE'
DEFI_MATERIAU	'CHABOCHE'
AFFE_CHAR_MECA	'SECH_CALCULEE'
STAT_NON_LINE	'RELATION' 'KIT_DDI'
CALC_ELEM	'OPTION' 'EPSP_ELNO'
CALC_ELEM	'OPTION' 'EPGR_ELNO'

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

On teste les composantes xx du champ de contraintes SIEF\_ELNO\_ELGA, du champ de déformations de fluage EPGR\_ELNO, et du champ de déformation plastique EPSP\_ELNO.

Pour le couplage avec la loi BETON\_DOUBLE\_DP, dans le cas où la température et le séchage sont constants et la solution analytiques connues, ces valeurs ont été testées au point C1 situé à l'interface entre les éléments linéaires et les éléments quadratiques, et au point F1 situé à l'extrémité de la structure, où est appliqué le déplacement imposé (en  $x_{\max}$ ).

Lorsque la température et le séchage varient, la solution analytique n'a pas été calculée : on teste donc les mêmes composantes que précédemment mais uniquement au point F1 situé à l'extrémité de la structure. La solution obtenue avec BETON\_DOUBLE\_DP est testé en tant que non-régression, mais les valeurs obtenues servent ensuite de référence pour les autres modèles (VMIS\_ISOT\_LINE et CHABOCHE).

Les tests sont effectués à l'instant 10, lorsque la plasticité n'a pas commencée, seul le fluage est présent, et à l'instant 100, après le début de la plastification du béton.

### 4.2 Calcul avec la loi BETON\_DOUBLE\_DP en isotherme (Référence)

Couplage GRANGER\_FP/BETON\_DOUBLE\_DP

- au point C1

Identification	Référence	Aster	% différence
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.07786	3.07787	$1.9 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.14171 \cdot 10^{-7}$	$7.140035 \cdot 10^{-7}$	-0.023
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.0	3.999999	$-2.0 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$1.73162 \cdot 10^{-5}$	$1.731596 \cdot 10^{-5}$	-0.001
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.53652 \cdot 10^{-4}$	$8.536546 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$

- au point F1

Identification	Référence	Aster	% différence
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.07786	3.07787	$1.9 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.14171 \cdot 10^{-7}$	$7.140035 \cdot 10^{-7}$	-0.023
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.0	3.999998	$-6.0 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$1.73162 \cdot 10^{-5}$	$1.731596 \cdot 10^{-5}$	-0.001
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.53652 \cdot 10^{-4}$	$8.536023 \cdot 10^{-4}$	-0.006

### 4.3 Calcul avec la loi BETON\_DOUBLE\_DP en non isotherme (Non régression)

- au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.077193
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	3.999998
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.140534 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.495132 \cdot 10^{-4}$

### 4.4 Calcul avec la loi VMIS\_ISOT\_LINE en non isotherme

- au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.077193
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.000009
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.140537 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.495621 \cdot 10^{-4}$

### 4.5 Calcul avec la loi CHABOCHE en non isotherme

- au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.077193
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.140535 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.495624 \cdot 10^{-4}$

## 5 Modélisation B

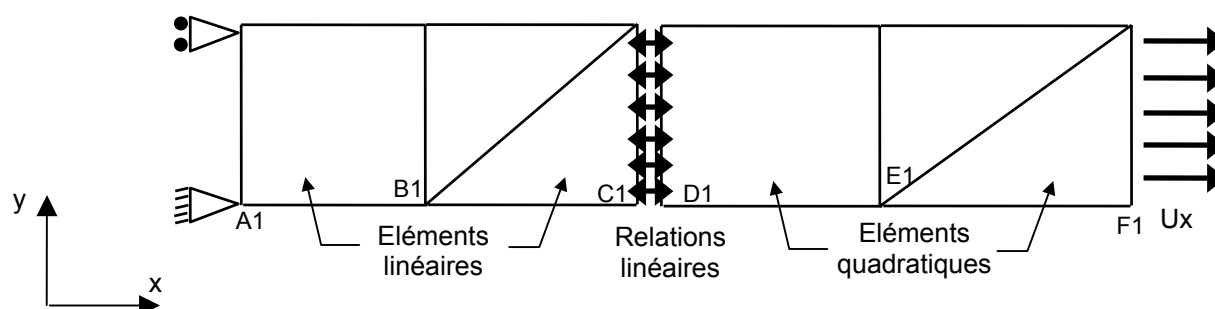
### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

#### D\_PLAN (1 QUAD4, 2 TRI3, 1 QUAD8, 2 TRI6)

Il s'agit d'un carré à 4 nœuds et de deux triangles à 3 nœuds liés par des relations linéaires à un carré à 8 nœuds et de deux triangles à 6 nœuds. L'ensemble est soumis à une traction uniaxiale suivant la direction x. Les dimensions suivant y sont unitaires. Les dimensions suivant la direction x sont choisies de telle sorte que tous les éléments aient la même longueur caractéristique (racine de la surface pour les éléments quadratiques, et racine de la surface multipliée par  $\sqrt{2}$  pour les éléments linéaires).

Les champs de contraintes et déformations sont uniformes.

En 2D déformations planes (D\_PLAN), on teste le couplage entre de la loi BETON\_DOUBLE\_DP avec la loi GRANGER\_FP. On teste aussi le couplage des lois VMIS\_ISOT\_LINE avec la loi CHABOCHE et GRANGER\_FP. La solution analytique n'a pas été calculée en D\_PLAN.



### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles et type : 1 QUAD4, 2 TRI3, 1 QUAD8, 2 TRI6

### 5.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Options	
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'D_PLAN'
DEFI_MATERIAU	'BETON_DOUBLE_DP'	
DEFI_MATERIAU	'VMIS_ISOT_LINE'	
DEFI_MATERIAU	'CHABOCHE'	
AFFE_CHAR_MECA	'SECH_CALCULEE'	
STAT_NON_LINE	'RELATION'	'KIT_DDI'
CALC_ELEM	'OPTION'	'EPSP_ELNO'
CALC_ELEM	'OPTION'	'EPGR_ELNO'

## 6 Résultats de la modélisation B

### 6.1 Valeurs testées

On teste les composantes  $xx$  du champ de contraintes  $SIEF\_ELNO\_ELGA$  et du champ de déformations de fluage  $EPGR\_ELNO$ , et du champ de déformation plastique  $EPSP\_ELNO$  au point F1 situé à l'extrémité de la structure, où est appliqué le déplacement imposé (en  $x_{max}$ ).

La solution analytique n'a pas été calculée en déformation plane. On réalise donc uniquement le même calcul avec les 3 modèles de fissuration à température et séchage variable. Les tests sont de type non-régression.

Les tests sont effectués à l'instant 10, lorsque la plasticité n'a pas commencée, seul le fluage est présent, et à l'instant 100, après le début de la plastification du béton.

### 6.2 Calcul avec la loi BETON\_DOUBLE\_DP en non isotherme (Non régression)

Au point C1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.205409
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.382555
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.307822 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.217046 \cdot 10^{-4}$

Au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.205409
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.382555
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.307822 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.217039 \cdot 10^{-4}$

### 6.3 Calcul avec la loi VMIS\_ISOT\_LINE en non isotherme (Non régression)

Au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.205409
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.614209
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.195353 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.429335 10^{-4}$

### 6.4 Calcul avec la loi CHABOCHE en non isotherme (Non régression)

Au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.205409
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.614199
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.195350 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^p$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$8.429339 10^{-4}$

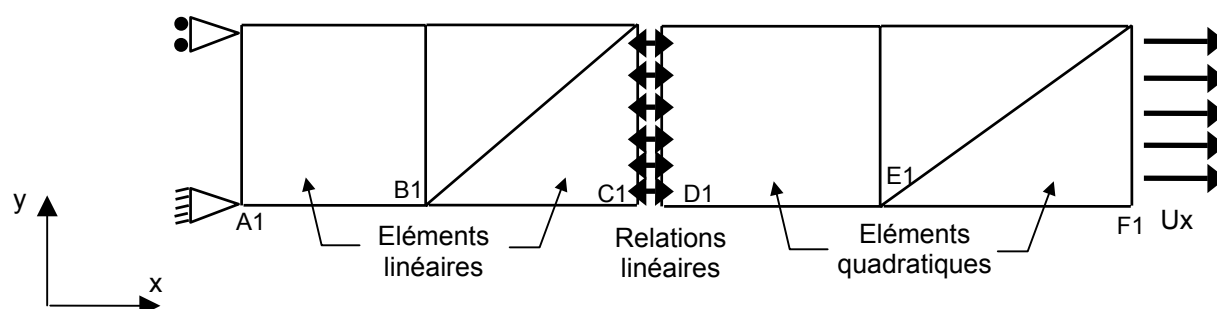
## 7 Modélisation C

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

#### C\_PLAN (1 QUAD4, 2 TRI3, 1 QUAD8, 2 TRI6)

Les champs de contraintes et déformations sont uniformes.

En 2D C\_PLAN, on valide le couplage de la loi NADAI\_B avec la loi GRANGER\_FP (car BETON\_DOUBLE\_DP n'est pas disponible en contraintes planes). On teste aussi le couplage des lois VMIS\_ISOT\_LINE et CHABOCHE avec la loi GRANGER\_FP.



### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles et type : 1 QUAD4, 2 TRI3, 1 QUAD8, 2 TRI6

### 7.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Options
AFFE_MODELE	'MECANIQUE' 'D_PLAN'
DEFI_MATERIAU	'BETON_DOUBLE_DP'
DEFI_MATERIAU	'VMIS_ISOT_LINE'
DEFI_MATERIAU	'CHABOCHE'
AFFE_CHAR_MECA	'SECH_CALCULEE'
STAT_NON_LINE	'RELATION' 'KIT_DDI'
CALC_ELEM	'OPTION' 'EPSP_ELNO'
CALC_ELEM	'OPTION' 'EPGR_ELNO'

## 8 Résultats de la modélisation C

### 8.1 Valeurs testées

Ont été testées les composantes xx du champ de contraintes `SIEF_ELNO_ELGA` et du champ de déformations de fluage `EPGR_ELNO`. Pour le couplage avec la loi `NADAI_B`, ces valeurs ont été testées au point C1 situé à l'interface entre les éléments linéaires et les éléments quadratiques, et au point F1 situé à l'extrémité de la structure, où est appliqué le déplacement imposé (en  $x_{\max}$ ).

Pour le couplage avec les autres lois, (`VMIS_ISOT_LINE` et `CHABOCHE`), les champs ont été testés uniquement au point F1 situé à l'extrémité de la structure.

Comme pour le cas 3D, on réalise un premier calcul avec température et séchage constant, qui permet de valider `NADAI_B` en contraintes planes. Tous les modèles sont ensuite testés avec température et séchage variables et activation des retraits correspondants. On vérifie qu'on retrouve bien les mêmes résultats avec `VMIS_ISOT_LINE` et `CHABOCHE` qu'avec `NADAI_B`.

Les tests sont effectués à l'instant 10, lorsque la plasticité n'a pas commencée, seul le fluage est présent, et à l'instant 100, après le début de la plastification du béton.

### 8.2 Calcul avec la loi `NADAI_B` en isotherme (Référence)

- au point C1

Identification	Référence	Aster	% différence
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.07786	3.07787	$1.9 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.14171 \cdot 10^{-7}$	$7.140035 \cdot 10^{-7}$	-0.023
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.0	3.999999	$-2.0 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$1.73162 \cdot 10^{-5}$	$1.731597 \cdot 10^{-5}$	-0.001

- au point F1

Identification	Référence	Aster	% différence
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.07786	3.07787	$1.9 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.14171 \cdot 10^{-7}$	$7.140035 \cdot 10^{-7}$	-0.023
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.0	3.999999	$-2.3 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$1.73162 \cdot 10^{-5}$	$1.731597 \cdot 10^{-5}$	-0.001



### 8.3 Calcul avec la loi NADAI\_B en non isotherme (Non régression)

Au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.077192
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	3.999942
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.140718 \cdot 10^{-5}$

### 8.4 Calcul avec la loi VMIS\_ISOT\_LINE en non isotherme

Au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.077193
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.000009
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.140745 \cdot 10^{-5}$

### 8.5 Calcul avec la loi CHABOCHE en non isotherme

Au point F1

Identification	Aster
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	3.077192
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-4}$	$7.357178 \cdot 10^{-7}$
$\sigma_{xx}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	4.000001
$\varepsilon_{xx}^{fl}$ pour $\varepsilon_{xx} 10^{-3}$	$2.140743 \cdot 10^{-5}$

## 9 Synthèse des résultats

Dans le cas où l'on connaît la solution analytique (non-variation de la température et du séchage), ce cas test offre des résultats très satisfaisants avec un écart inférieur à 0.02% pour tous les cas de calcul. Le nombre d'itérations pour la phase plastique est généralement de l'ordre d'une dizaine ; pour le modèle de CHABOCHE, la convergence est meilleure avec une matrice élastique. Ceci s'explique par le choix de la loi de plasticité quasi parfaite, obtenue avec des modèles VMIS\_ISOT\_LINE et CHABOCHE, et avec des jeux particuliers de paramètres. En fait, ces mêmes modèles utilisés **sans** le couplage fluage/fissuration, dans les mêmes conditions de chargement et avec les mêmes paramètres, présentent les mêmes difficultés de convergence.

On vérifie que sous l'effet de l'augmentation de la température les déformations de fluage sont augmentées (+3 % environ dans la phase élastique, +23% dans la phase plastique ).

Enfin, en 3D et en C\_PLAN, on vérifie que les 3 modèles qui ont été dégénérés donnent bien des résultats quasi-similaires. En revanche, en D\_PLAN, le modèle BETON\_DOUBLE\_DP n'est pas équivalent aux deux autres modèles du fait de l'écriture du critère qui dépend de la trace du tenseur des déformations et n'est donc pas équivalent au modèle parfaitement plastique.