

Manuel de Validation**Fascicule V2.01 : Dynamique linéaire des systèmes discrets****Document V2.01.321**

SDLD321 - Réponse dynamique transitoire d'un oscillateur harmonique avec amortissement variable

Résumé :

Le système considéré est un oscillateur harmonique à 1 d.d.l. sous excitation harmonique à la résonance. Différents amortissements seront considérés :

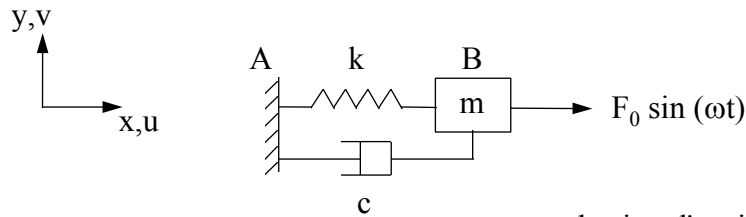
- amortissement critique,
- amortissement moyen,
- amortissement très faible.

Par l'intermédiaire de ce problème, on teste les différents algorithmes de la commande DYNA_TRAN_MODAL [U4.54.03] et leurs capacités à traiter des problèmes à amortissement extrême. Les résultats sont comparés aux solutions analytiques exactes.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le système est composé d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur. Il admet un unique degré de liberté en translation.



ω : pulsation d'excitation correspondant
à la résonance du système non amorti

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k = 25 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$

Masse ponctuelle : $m = 10 \text{ kg}$

Amortissement visqueux :

$c = c_{\text{critique}} ; c = 0,01 c_{\text{critique}} ; c = 10^{-5} c_{\text{critique}}$
avec $c_{\text{critique}} = 1\,000 \text{ kg.s}^{-1}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Extrémité A encastrée.

Force harmonique suivant x à la fréquence de résonance au point B :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \text{ pour } t \geq 0 \text{ avec } F_0 = 5 \text{ N et } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50 \text{ rad.s}^{-1}.$$

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos à $t = 0$: $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

L'oscillateur simple vérifie l'équation suivante :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\text{avec } u(0) = 0 \text{ et } \dot{u}(0) = 0$$

$$\omega : \text{pulsation propre de l'oscillateur } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'amortissement critique est $c_{\text{critique}} = 2m\omega$.

La solution pour $c = c_{\text{critique}}$ est :

$$u(t) = \frac{F_0}{2k} \left[e^{-\omega t} (1 + \omega t) - \cos(\omega t) \right]$$

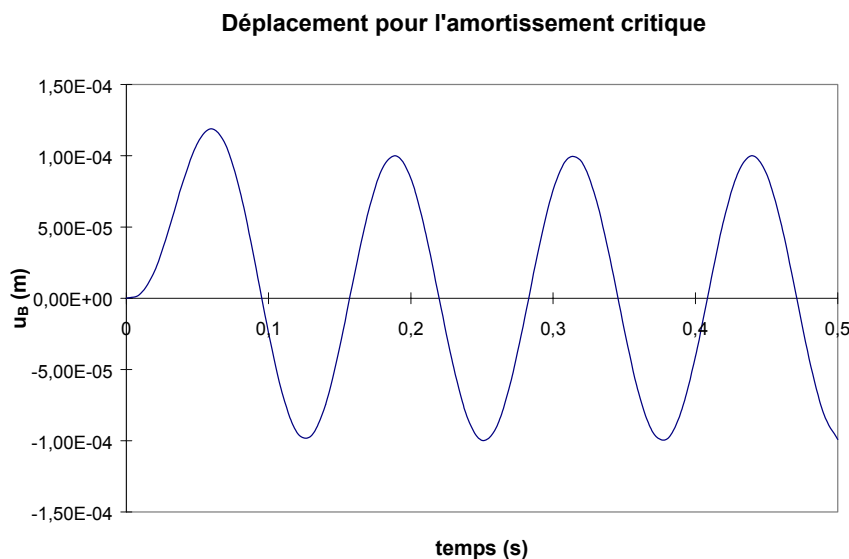
La solution pour un amortissement sous-critique tel que $\frac{c}{c_{\text{critique}}} = \xi$ est :

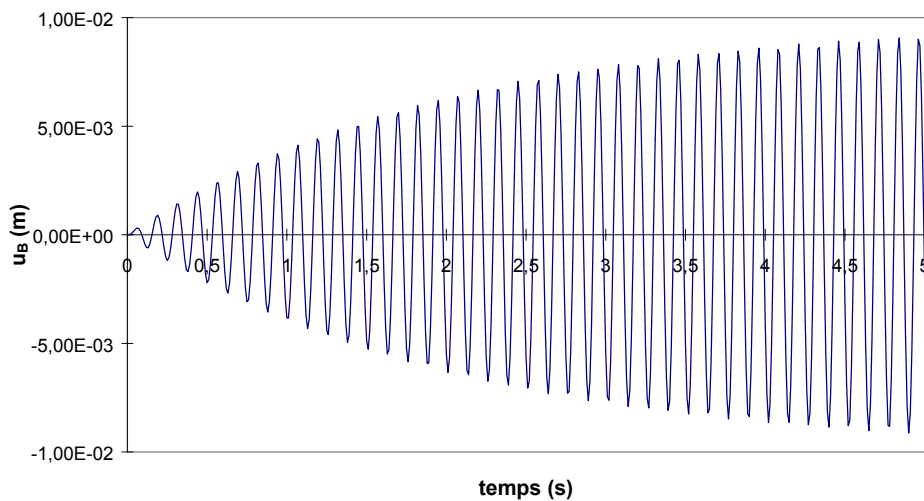
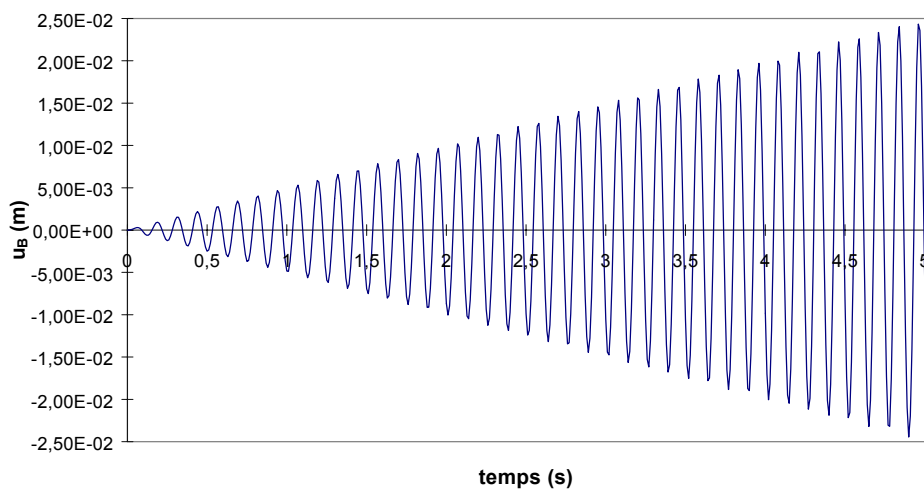
$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \left(\frac{F_0}{2\xi k} \cos(\omega_D t) + \frac{F_0 \omega}{2k \omega_D} \sin(\omega_D t) \right) - \frac{F_0}{2\xi k} \cos(\omega t)$$

$$\text{avec } \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

2.2 Résultats de référence

Déplacement et vitesse du point B.



Déplacement pour l'amortissement de 1%**Déplacement pour l'amortissement de 0,001%**

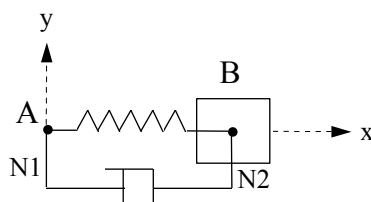
2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique exacte.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET : masse nodale	M_T_D_N
rigidité linéaire	K_T_D_L
amortissement linéaire	A_T_D_L (C=C _{critique})

Conditions aux limites : au nœud N1 DDL_IMPO DX = DY = DZ = 0.

Noms des nœuds : P₁ = N1 , P₂ = N2.

Méthodes de calcul :

- Intégration sur la base modale avec Newmark ($\alpha = 0,25$, $\delta = 0,5$)
Pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ s
- Intégration sur la base modale avec Euler
Pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ s

Durée d'observation : 0,5 s.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 2

Nombre de mailles et type : 1 maille SEG2

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	DISCRET	MAILLE	'K_T_D_L'
		MAILLE	'A_T_D_L'
		NOEUD	'M_T_D_N'
MODE_ITER_SIMULT	OPTION : 'CENTRE'		
!FORMULE	REEL		
CALC_FONC_INTERP	FONCTION		
DYNA_TRAN_MODAL	NEWMARK	AMOR_GENE	
	EULER		

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

- Déplacement du point B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement NEWMARK Aster (m)	Différence (%)	Déplacement EULER Aster (m)	Différence (%)
0,06	1,18914 E-4	1,18886 E-4	-0,023	1,18886 E-4	-0,024
0,12	-9,42819 E-5	-9,42574 E-5	-0,026	-9,47822 E-5	0,531
0,19	9,97958 E-5	9,97765 E-5	-0,019	9,96206 E-5	-0,176
0,25	-9,97748 E-5	-9,97526 E-5	-0,022	-9,99152 E-5	-0,141
0,31	9,78457 E-5	9,78210 E-5	-0,025	9,83436 E-5	0,509
0,38	-9,88705 E-5	-9,88530 E-5	-0,018	-9,84730 E-5	-0,402
0,44	9,99961 E-5	9,99754 E-5	-0,021	9,99525 E-5	-0,044

- Vitesse du point B

Temps (s)	Vitesse Référence (m.s ⁻¹)	Vitesse NEWMARK Aster (m.s ⁻¹)	Différence (%)	Vitesse EULER Aster (m.s ⁻¹)	Différence (%)
0,03	3,31400 E-3	3,31363 E-3	-0,011	3,32568 E-3	0,353
0,09	-5,13760 E-3	-5,13729 E-3	-0,006	-5,13627 E-3	-0,026
0,16	4,93337 E-3	4,93354 E-3	0,003	4,93088 E-3	-0,050
0,22	-5,00087 E-3	-5,00087 E-3	0,000	-5,00133 E-3	0,009
0,28	4,95298 E-3	4,95284 E-3	-0,003	4,95297 E-3	0,000
0,35	-4,87813 E-3	-4,87836 E-3	0,005	-4,87801 E-3	-0,002
0,41	4,98415 E-3	4,98423 E-3	0,002	4,98409 E-3	-0,001
0,47	-4,99041 E-3	-4,99035 E-3	-0,001	-4,99043 E-3	0,000

4.2 Remarques

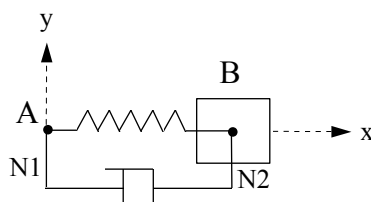
Les résultats sont testés au niveau des pics pour le grain d'observation retenu (10^{-2} s) où les valeurs sont les plus significatives.

Le régime devient quasi-permanent après la première période, c'est ce que l'on doit observer en menant une analyse transitoire.

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET : masse nodale $M_T_D_N$
rigidité linéaire $K_T_D_L$
amortissement linéaire $A_T_D_L$ ($c = 0,01 c_{critique}$)

Conditions aux limites : au nœud N1 DDL_IMPO $DX = DY = DZ = 0$.

Noms des nœuds : $P_1 = N1$, $P_2 = N2$.

Méthodes de calcul :

- Intégration sur la base modale avec Fu-Devogelaere
Pas de temps $\Delta t = 10^{-3}s$
- Intégration sur la base modale avec Δt adaptatif
Pas de temps initial $\Delta t = 10^{-3}s$

Durée d'observation : 5 s.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 2

Nombre de mailles et type : 1 maille SEG2

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	DISCRET	MAILLE	'K_T_D_L'
		MAILLE	'A_T_D_L'
		NOEUD	'M_T_D_N'
MODE_ITER_SIMULT	OPTION : 'CENTRE'		
!FORMULE	REEL		
CALC_FONC_INTERP	FONCTION		
DYNA_TRAN_MODAL	DEVOGE	AMOR_REDUIT	
	ADAPT	AMOR_GENE	

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

- Déplacement du point B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement DEVOG Aster (m)	Différence (%)	Déplacement ADAPT Aster (m)	Différence (%)
0,06	3,06503 E-4	3,06503 E-4	0,000	3,06481 E-4	-0,007
0,13	-5,93807 E-4	-5,93807 E-4	0,000	-5,93696 E-4	-0,019
0,25	-1,17872 E-3	-1,17872 E-3	0,000	-1,17862 E-3	-0,009
0,69	2,91788 E-3	2,91788 E-3	0,000	2,91748 E-3	-0,014
1,01	-3,83901 E-3	-3,83901 E-3	0,000	-3,83548 E-3	-0,092
2,32	6,68206 E-3	6,68206 E-3	0,000	6,68614 E-3	0,061
3,64	-8,19821 E-3	-8,19821 E-3	0,000	-8,20355 E-3	0,065
4,96	9,00847 E-3	9,00847 E-3	0,000	9,01348 E-3	0,056

- Vitesse du point B

Temps (s)	Vitesse Référence (m.s ⁻¹)	Vitesse DEVOG Aster (m.s ⁻¹)	Différence (%)	Vitesse ADAPT Aster (m.s ⁻¹)	Différence (%)
0,04	8,95997 E-3	8,95997 E-3	0,000	8,97145 E-3	0,128
0,10	-2,33271 E-2	-2,33271 E-2	0,000	-2,33492 E-2	0,095
0,22	-5,20590 E-2	-5,20590 E-2	0,000	-5,21002 E-2	0,079
0,66	1,40500 E-1	1,40500 E-1	0,000	1,40593 E-1	0,066
1,04	1,99889 E-1	1,99889 E-1	0,000	1,99923 E-1	0,017
2,36	-3,39933 E-1	-3,39933 E-1	0,000	-3,39703 E-1	-0,068
3,68	4,10585 E-1	4,10585 E-1	0,000	4,09991 E-1	-0,145
5,00	-4,45309 E-1	-4,45309 E-1	0,000	-4,42239 E-1	-0,689

6.2 Remarques

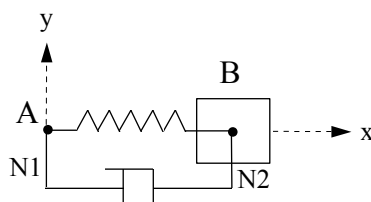
Les résultats sont testés au niveau des pics où les valeurs sont les plus significatives.

La durée d'observation choisie permet de voir l'effet de l'amortissement. Cependant, dans cet intervalle, la réponse du point B reste toujours transitoire mais on est proche du régime permanent dont l'amplitude en déplacement est 10^{-2} m.

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET :	masse nodale	M_T_D_N
	rigidité linéaire	K_T_D_L
	amortissement linéaire	A_T_D_L ($c = 10^{-5} c_{critique}$)

Conditions aux limites : au nœud N1 DDL_IMPO DX = DY = DZ = 0.

Noms des nœuds : $P_1 = N1$, $P_2 = N2$.

Méthodes de calcul :

- Intégration sur la base modale avec Newmark ($\alpha = 0,25$, $\delta = 0,5$)
Pas de temps $\Delta t = 10^{-3}s$
- Intégration sur la base modale avec Euler
Pas de temps $\Delta t = 10^{-3}s$

Durée d'observation : 5 s.

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 2

Nombre de mailles et type : 1 maille SEG2

7.3 Fonctionnalités testées

Commandes

AFFE_CARA_ELEM	DISCRET	MAILLE	'K_T_D_L'
		MAILLE	'A_T_D_L'
		NOEUD	'M_T_D_N'
MODE_ITER_SIMULT	OPTION : 'CENTRE'		
!FORMULE	REEL		
CALC_FONC_INTERP	FONCTION		
DYNA_TRAN_MODAL	NEWMARK	AMOR_GENE	
	EULER		

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

- Déplacement du point B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement NEWMARK Aster (m)	Différence (%)	Déplacement EULER Aster (m)	Différence (%)
0,06	3,11105 E-4	3,10936 E-4	-0,054	3,11181 E-4	0,024
0,13	-6,13250 E-4	-6,13016 E-4	-0,038	-6,13380 E-4	0,021
0,25	-1,25380 E-3	-1,25304 E-3	-0,060	-1,25418 E-3	0,030
0,69	3,44945 E-3	3,44691 E-3	-0,074	3,45069 E-3	0,036
1,01	-4,88729 E-3	-4,89081 E-3	0,072	-4,88547 E-3	-0,037
2,32	1,12876 E-2	1,12475 E-2	-0,355	1,13069 E-2	0,171
3,64	-1,77960 E-2	-1,77100 E-2	-0,484	-1,78360 E-2	0,225
4,96	2,43613 E-2	2,42198 E-2	-0,581	2,44242 E-2	0,258

- Vitesse du point B

Temps (s)	Vitesse Référence (m.s ⁻¹)	Vitesse NEWMARK Aster (m.s ⁻¹)	Différence (%)	Vitesse EULER Aster (m.s ⁻¹)	Différence (%)
0,04	9,09284 E-3	9,08897 E-3	-0,043	9,08230 E-3	-0,116
0,10	-2,39724 E-2	-2,39637 E-2	-0,036	-2,40269 E-2	0,227
0,22	-5,49964 E-2	-5,49680 E-2	-0,052	-5,48752 E-2	-0,220
0,66	1,64958 E-1	1,64879 E-1	-0,048	1,64882 E-1	-0,046
1,04	2,56456 E-1	2,56547 E-1	0,035	2,57280 E-1	0,321
2,36	-5,79010 E-1	-5,80019 E-1	0,174	-5,81033 E-1	0,349
3,68	8,97631 E-1	9,00729 E-1	0,345	9,00668 E-1	0,338
5,00	-1,21164	-1,21829	0,549	-1,21531	0,303

8.2 Remarques

Les résultats sont testés au niveau des pics où les valeurs sont les plus significatives.

Dans l'intervalle d'observation, on reste très en dessous du régime permanent en résonance dont l'amplitude de déplacement est 10 m.

9 Synthèse des résultats

Pour la modélisation A, les résultats obtenus aussi bien en déplacement qu'en vitesse ont une erreur absolue largement inférieure à 1 % par rapport à la solution analytique.

Le schéma d'intégration de Newmark se montre plus précis que le schéma d'Euler.

A 1 % de l'amortissement critique (modélisation B), le schéma d'intégration Fu-Devogelaere est d'une redoutable précision (pas d'erreur par rapport à la solution de référence).

Le schéma à pas de temps adaptatif donne également des résultats à très faible pourcentage d'erreur.

Pour les très faibles amortissements (modélisation C), on notera une meilleure précision pour le schéma d'intégration de type Euler que pour un schéma de type Newmark. Pour ce dernier, l'erreur augmente en fonction du temps mais reste tout de même inférieure à 1 %.

Page laissée intentionnellement blanche.