

Manuel de Validation**Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des structures volumiques****Document : V6.04.166**

SSNV166 – Cylindre fissuré sous chargements multiples

Résumé

Ce test a pour but le calcul des facteurs d'intensité de contraintes le long du fond de fissure pour un cylindre comportant une fissure axisymétrique.

L'influence du degré des éléments et du type de la méthode est étudiée à travers diverses modélisations.

- La modélisation A teste K1 et K3 avec un maillage linéaire 3D et une méthode aux éléments finis classique (FEM).
- La modélisation B teste K1 et K3 avec un maillage quadratique 3D (éléments de Barsoum) autour du fond de fissure et une FEM.
- La modélisation C teste K1 et K3 avec un maillage linéaire 3D avec une résolution classique mais une extraction des facteurs d'intensité basée sur un calcul énergétique.

De plus, pour chaque modélisation, divers cas de chargements sont étudiés :

- traction (solicitation en mode I) ;
- torsion (solicitation en mode III) ;
- flexion (ouverture d'un coté, fermeture de l'autre) avec et sans prise en compte du contact.

Les cas de traction et torsion ne mettent pas en jeu le contact.

Bien que des symétries existent dans certains cas (axisymétrie pour le cas 1, symétrie plane pour le 2^{ème}) la représentation est faite en 3D pour rendre le test généralisable sous chargement multiple.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La fissure est une couronne circulaire dans un plan orthogonal à l'axe du cylindre [Figure 1.1-a]. Les paramètres a et b déterminent le rayon du cylindre et la profondeur de la fissure. La [Figure 1.1-b] est une coupe du cylindre dans le plan de fissure (plan Oyz). Pour que le milieu soit considéré comme infini, la hauteur du cylindre est $h = 10 b$.

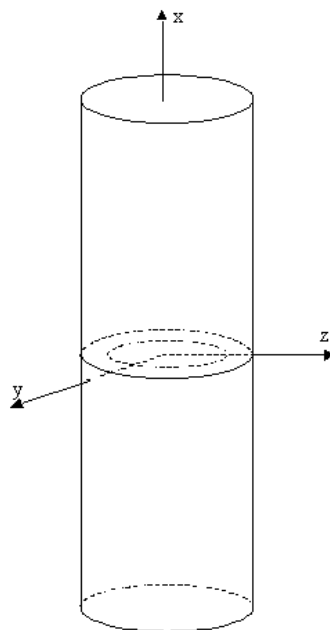


Figure 1.1-a : Géométrie du cylindre fissuré

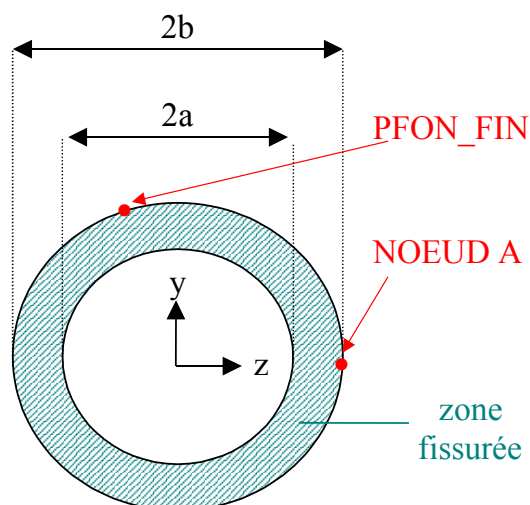


Figure 1.1-b : Plan de fissuration

1.2 Propriétés de matériaux

Module d'Young : $E = 205000$ MPa

Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Trois chargements seront appliqués afin de calculer les facteurs d'intensité de contraintes $K1$ et $K3$ en 3D en utilisant l'opérateur POST_K1_K2_K3.

Le chargement 1 teste $K1$, et $K3$.

Le chargement 2 teste $K2$ sans prise en compte du contact.

Le chargement 3 teste $K2$ avec prise en compte du contact.

On s'attend à ce que $K1$ et $K3$ soient constants le long du fond de fissure et à ce que $K2$ varie.

Remarque : les cas de traction et de torsion peuvent être traités indifféremment avec ou sans contact (ici, sans contact) car il n'y a jamais de fermeture de la fissure.

	Cas 1 : traction et torsion	Cas 2 : flexion sans contact	Cas 3 : flexion avec contact
Face supérieure	$N_x = 6$ MN $T_x = 3$ MN	$M_y = 1.5$ MN	$M_y = 1.5$ MN

Tableau 1.3-1 : Cas de chargements

Les efforts précédents sont appliqués à la structure par l'intermédiaire d'éléments 3D discrets situés au centre de la face supérieure. On note que le point d'ouverture maximale due à la flexion imposée (moment suivant Oy) sera le nœud A (voir [Figure 1.1-b]).

Les mouvements de corps rigides sont bloqués par le même procédé avec encastrement du centre de la face inférieure.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour une fissure axisymétrique dans un cylindre de longueur infinie, la méthode des Équations Intégrales Singulières et des Développement Asymptotiques [bib1] permet de calculer les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes.

- Cas 1 : Traction et Torsion

La traction induit une ouverture en mode 1. K_I est donné par la formule suivante :

$$K_I = \frac{P}{\pi a^2} \sqrt{\pi a} F_1(a/b)$$

où P est l'effort appliquée sur les face supérieure et inférieure et F_1 une fonction donnée [Figure 2.1-a].

La torsion induit une ouverture en mode 3. K_{III} est donné par la formule suivante :

$$K_{III} = \frac{2T}{\pi a^3} \sqrt{\pi a} F_3(a/b)$$

où T est le moment appliqué sur les face supérieure et inférieure et F_3 une fonction donnée [Figure 2.1-a].

- Cas 2 : Flexion sans contact

La flexion induit une ouverture en mode 1. La valeur de K_I au point d'ouverture maximale A est donné par la formule suivante :

$$K_{I_A} = \frac{4M}{\pi a^3} \sqrt{\pi a} F_2(a/b)$$

où M est le moment appliqué sur les face supérieure et inférieure et F_2 une fonction donnée [Figure 2.1-a].

- Cas 3 : Flexion avec contact

Il n'existe pas de solution analytique à ce problème. On s'attend d'une part à ce que K_I soit proche du cas sans contact sur la partie de la fissure en ouverture, et d'autre part que K_I soit nul sur la partie de la fissure en fermeture.

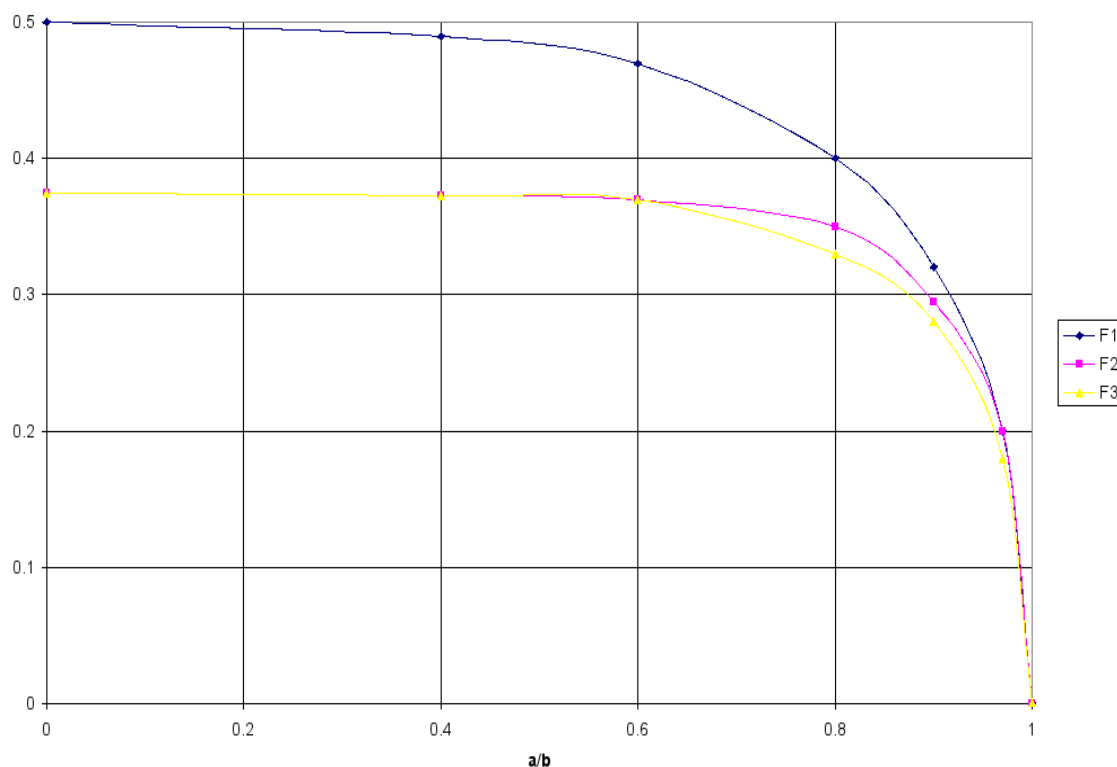


Figure 2.1-a : Fonctions F1, F2 et F3

Ces trois fonctions proviennent de [bib1].

2.2 Résultats de référence

Application Numérique :

Sauf mention contraire, dans la suite de ce document, les paramètres retenus pour a et b sont :

$$\begin{aligned} a &= 0.4 \text{ m} \\ b &= 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

Cas 1 : Traction et torsion	Cas 2 : Flexion
$K1 = 5.35 \text{ MPa.m}^{1/2}$ $K3 = 11.22 \text{ MPa.m}^{1/2}$	$K1_A = 11.71 \text{ MPa.m}^{1/2}$

Tableau 2.2-1 : Valeurs de référence

3 Modélisation A : Maillage linéaire, formulation classique

3.1 Caractéristiques de la modélisation

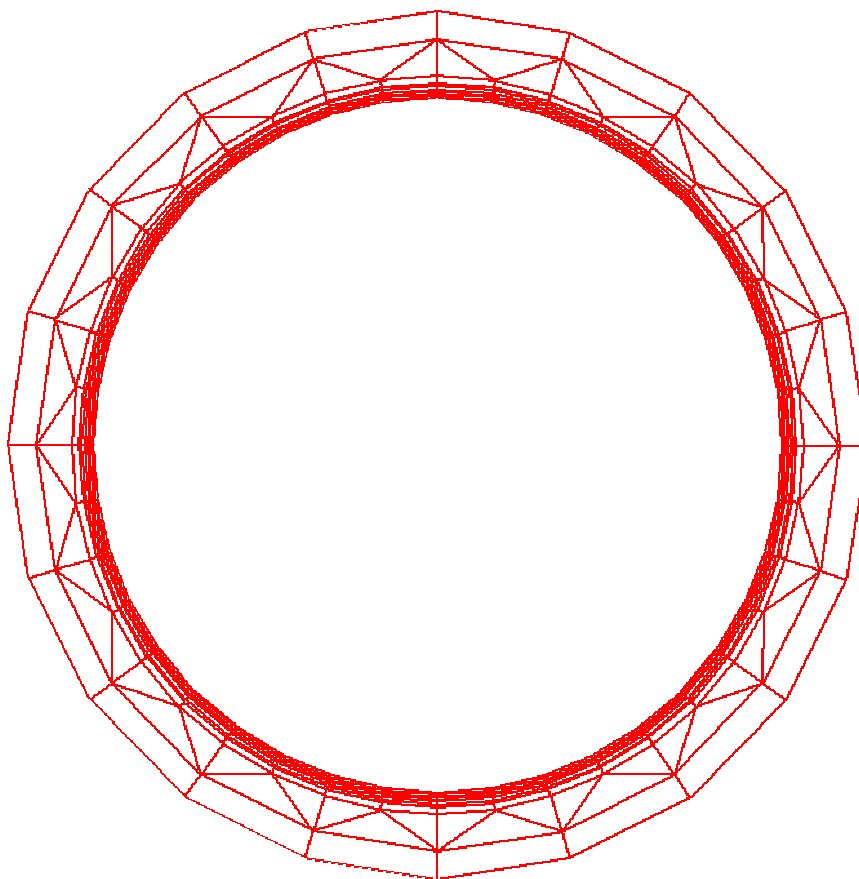


Figure 3.1-a : Coupe du maillage dans le plan de la fissure

Les éléments sont tous d'ordre 1.

L'intérêt de cette modélisation est de servir de base pour les formulations plus évoluées, et ainsi, de pouvoir constater l'apport et les améliorations des autres méthodes.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11310

Nombre de mailles : 14453

Type de mailles	Nombre de mailles
POI1	4
SEG2	39
TRIA3	360
QUAD4	930
PENTA6	5440
HEXA8	7680

Tableau 3.2-1 : Caractéristiques des mailles

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_FOND_FISS

POST_K1_K2_K3

CALC_G_LOCAL_T

3.4 Remarque

Le calcul des facteurs d'intensité de contraintes se fait à l'aide de POST_K1_K2_K3 (méthode d'extrapolation des déplacements sur les lèvres de la fissure) [bib2].

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

La procédure `POST_K1_K2_K3` permet d'identifier les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes à un coefficient près, par deux méthodes. Nous limiterons le test aux résultats issus de la méthode 1, qui semble plus stable. On rappelle que cette méthode calcule, pour chaque couple de nœuds en vis-à-vis autour du point du fond de fissure considéré, le saut du champ de déplacement au carré et le divise par r [bib2]. On se limite à 3 ou 4 couples de nœuds, et on prendra la valeur maximale comme valeur du résultat (valeur la plus contraignante).

4.1.1 Résultats dans le cas d'un chargement en traction (K1) et torsion (K3)

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud PFON_FIN	$5.35 \cdot 10^6$	$4.98 \cdot 10^6$	6.92
K3 au nœud PFON_FIN	$-11.22 \cdot 10^6$	$-10.12 \cdot 10^6$	9.80

Les valeurs de K1 et K3 doivent être identiques [Figure 4.2-a] pour tous les nœuds du fond de fissure car on a une configuration axisymétrique. Ici, nous testons seulement les valeurs au nœud PFON_FIN.

4.1.2 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) sans contact

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud A	$11.71 \cdot 10^6$	$10.17 \cdot 10^6$	13.15

On compare la valeur de K1 à la solution de référence seulement au point d'ouverture maximale (nœud A) car c'est la seule valeur analytique disponible dans la littérature.

4.1.3 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) avec contact

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud A	$10.17 \cdot 10^6$	$9.29 \cdot 10^6$	8.66

On compare le résultat obtenu à celui obtenu par le *Code_Aster* sans prise en compte du contact (non-régression). Cette prise en compte s'effectue par la méthode des contraintes actives.

4.2 Évolutions de K1, K2, K3 le long du fond de fissure

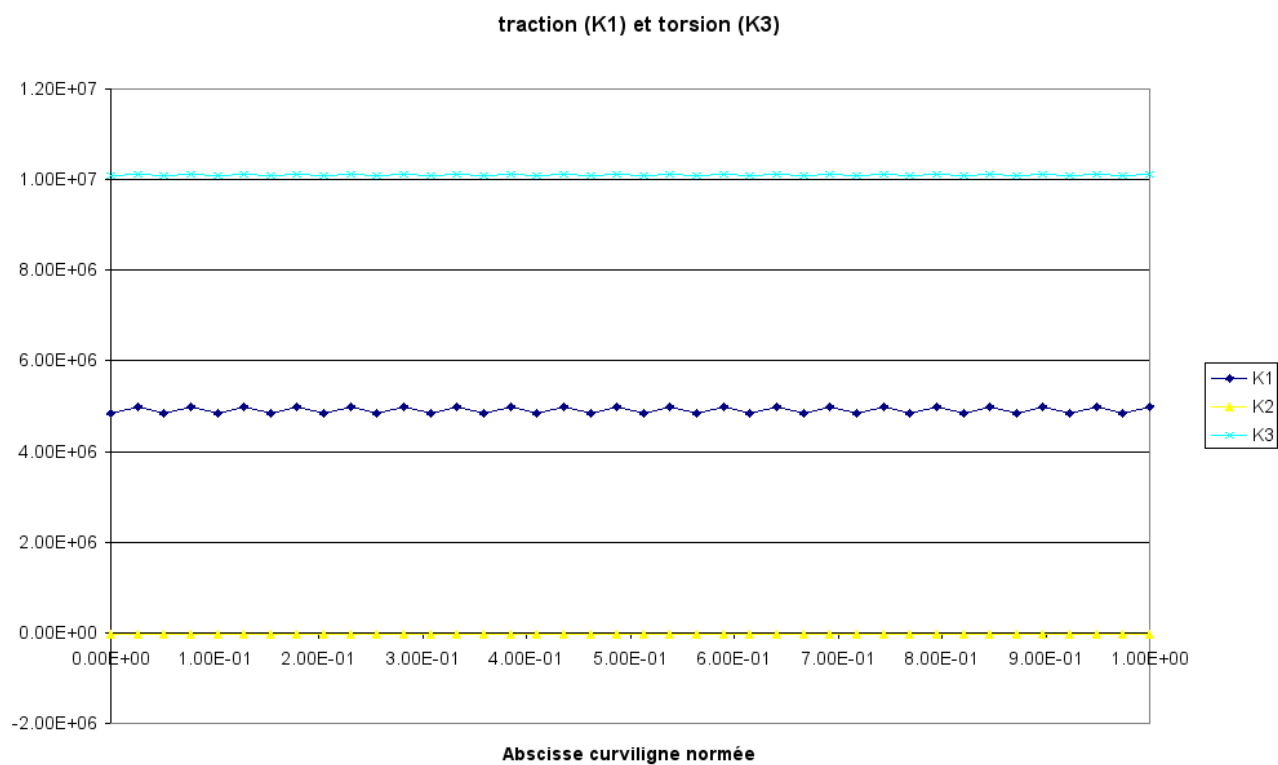


Figure 4.2-a : K1, K2 et K3 le long du fond de fissure (en MPa.m^{1/2})

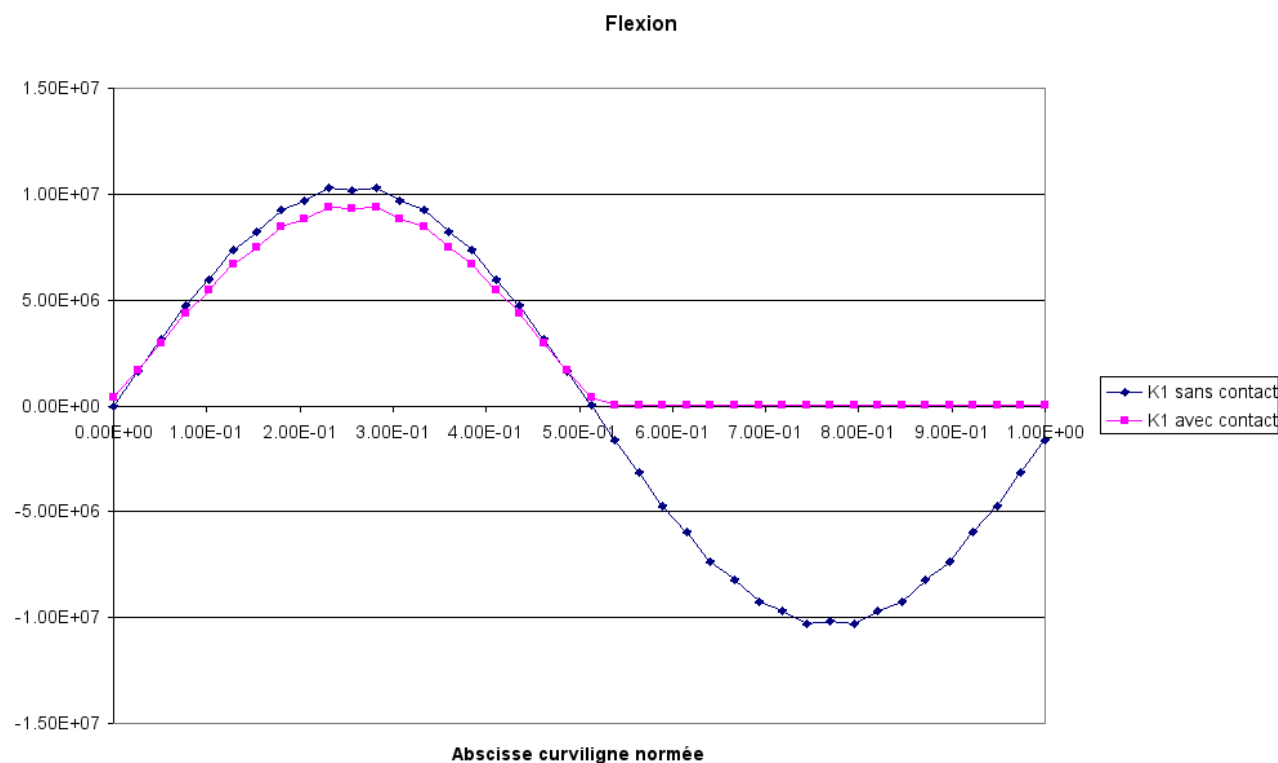


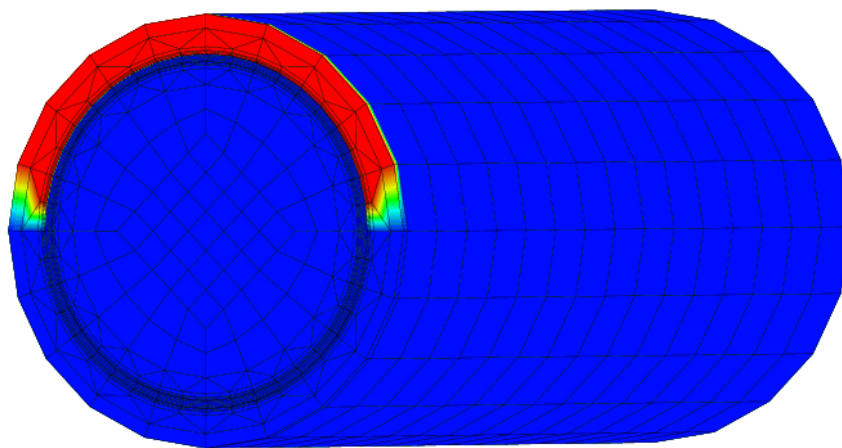
Figure 4.2-b : K1 le long du fond de fissure (en MPa.m^{1/2})

Commentaires sur les résultats :

La [Figure 4.2-a] montre l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes le long du fond de fissure de la fissure axisymétrique de profondeur 100 mm soumise à de la traction et de la torsion. On observe bien des résultats axisymétriques (aux erreurs de calculs près). De plus, on note que la fissure n'est pas sollicitée en mode II.

Sur la [Figure 4.2-b], on met en évidence la prise en compte du contact. Sur la moitié de fissure en ouverture, K1 a des valeurs plus faibles avec prise en compte du contact, car le contact rigidifie la structure. Sur la moitié en fermeture, K1 est nul.

En fait, le contact n'a pas lieu sur toute la moitié supérieure de la fissure [Figure 4.2-c] mais sur une surface un peu plus petite. Sur la [Figure 4.2-c] la zone en rouge représente la zone de contact et la zone en bleu celle de non contact.

**Figure 4.2-c : Contact**

5 Modélisation B : Maillage quadratique, formulation classique

5.1 Caractéristiques de la modélisation

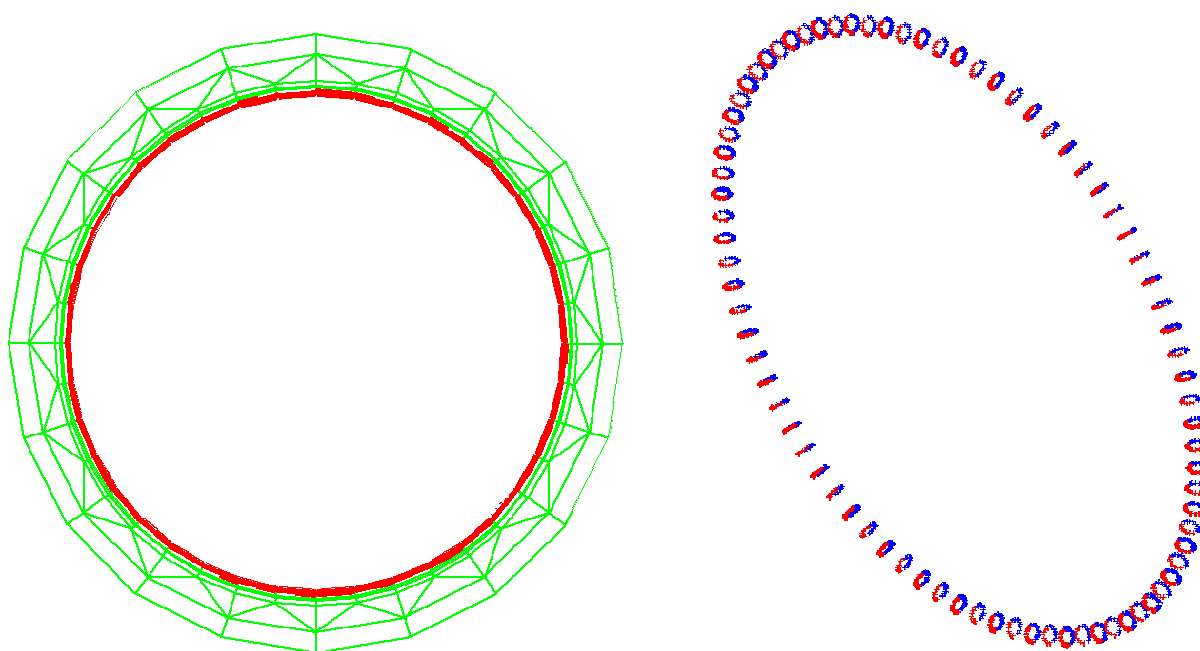


Figure 5.1-a : Maillage et tore

Un tore est créé autour de la fissure. Les éléments du tore sont des éléments quadratiques. Les éléments en dehors du tore sont linéaires. De plus, on utilise des éléments de BARSOU (nœuds milieux déplacés au quart) pour les mailles ayant un bord appartenant au fond de fissure [bib3].

L'intérêt de l'utilisation d'un maillage de type BARSOU est l'obtention de résultats plus précis.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20030
Nombre de mailles : 16449

Type de mailles	Nombre de mailles
POI1	2000
SEG3	39
TRIA3	360
QUAD4	610
QUAD8	320
PENTA6	4800
PENTA15	640
HEXA8	5760
HEXA20	1920

Tableau 5.2-1 : Caractéristiques des mailles

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision.

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_FOND_FISS

CALC_G_LOCAL_T

POST_K1_K2_K3

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

6.1.1 Résultats dans le cas d'un chargement en traction (K1) et torsion (K3)

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud PFON_FIN	$5.35 \cdot 10^6$	$5.19 \cdot 10^6$	2.93
K3 au nœud PFON_FIN	$-11.22 \cdot 10^6$	$-11.08 \cdot 10^6$	1.25

Les valeurs de K1 et K3 doivent être identiques [Figure 6.2-a] pour tous les nœuds du fond de fissure car on a une configuration axisymétrique. Ici, nous testons seulement les valeurs au dernier nœud de la fissure (PFON_FIN).

6.1.2 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) sans contact

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud A	$11.71 \cdot 10^6$	$10.59 \cdot 10^6$	9.54

On compare la valeur de K1 à la solution de référence seulement au point d'ouverture maximale (Nœud A) car c'est la seule valeur analytique disponible dans la littérature.

6.1.3 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) avec contact

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud A	$10.59 \cdot 10^6$	$9.82 \cdot 10^6$	7.30

On compare le résultat obtenu à celui obtenu par le calcul *Aster* sans prise en compte du contact (non-régression). La méthode de résolution du contact est celle des contraintes actives.

6.2 Évolutions de K1, K2, K3 le long du fond de fissure

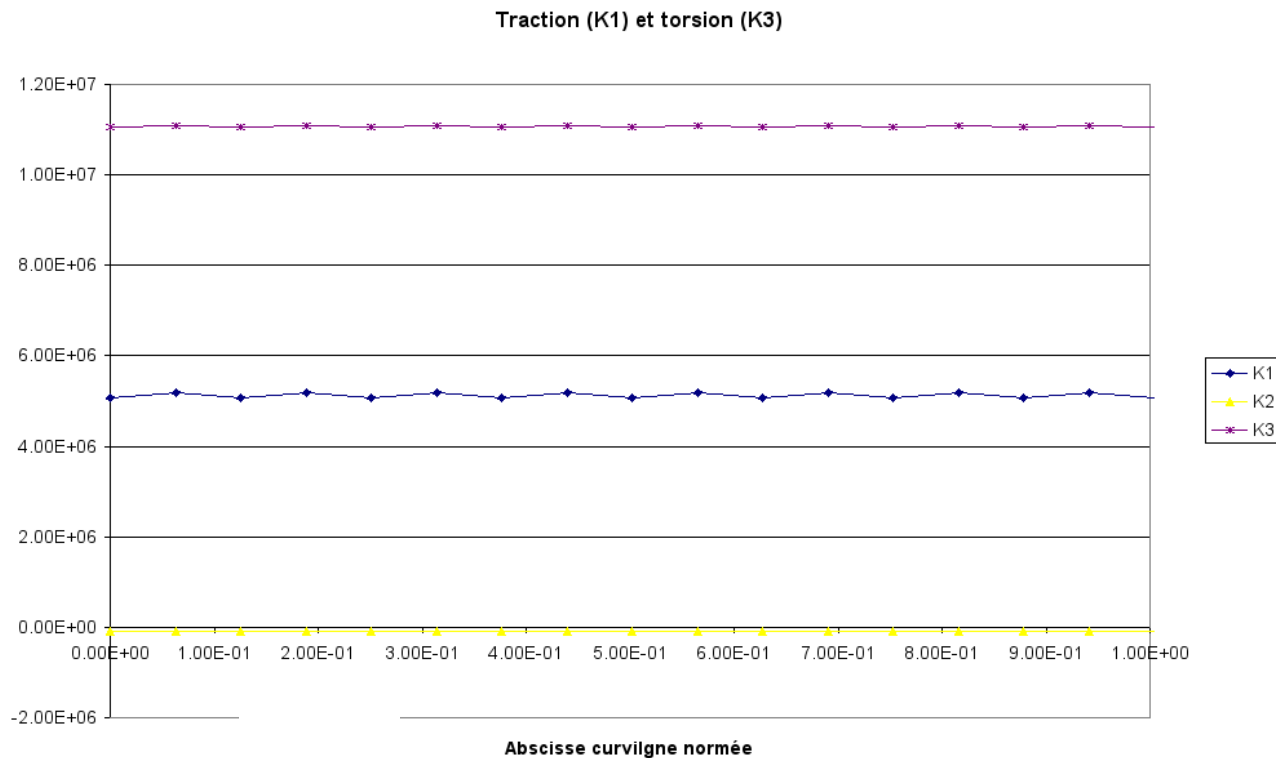


Figure 6.2-a : K1, K2 et K3 le long du fond de fissure (en $\text{MPa.m}^{1/2}$)

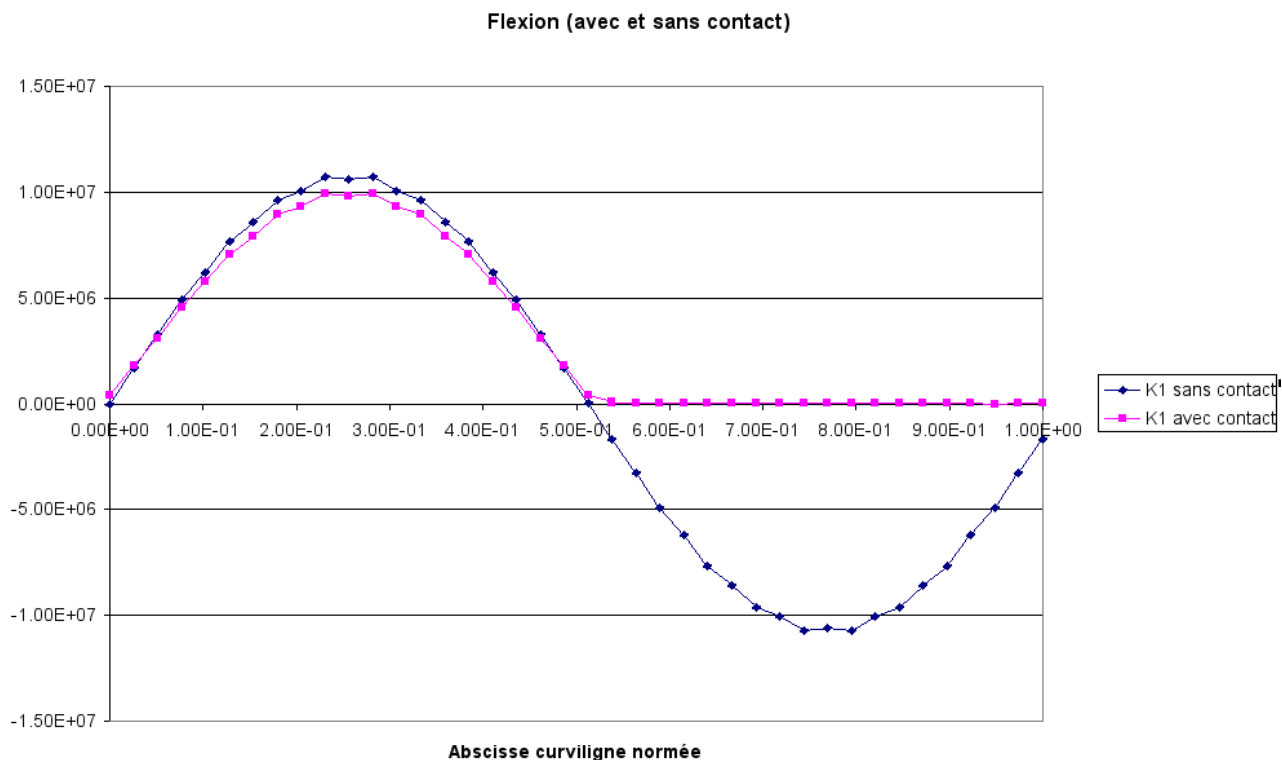


Figure 6.2-b : K1 le long du fond de fissure (en $\text{MPa.m}^{1/2}$)

Remarque :

Lorsque l'on calcule les sauts de déplacements le long du fond de fissure ($POST_K1_K2_K3$), le premier point rencontré en partant du nœud sur le fond est le nœud déplacé au quart de l'élément de Barsoum adjacent. Or pour ce nœud au quart, la gestion du contact classique n'est pas valide. En effet, la méthode des contraintes actives avec linéarisation aux nœuds milieux implique que le déplacement des nœuds milieux vaut la moyenne de déplacements des nœuds adjacents. Or ici, le nœud milieu étant déplacé au quart, cette approximation n'est pas licite. Comme le contact n'est pas pris en compte correctement pour ces nœuds au quart, il paraît judicieux de ne pas y estimer K1, surtout lorsqu'il y a contact. Sur les nœuds suivants, le saut de déplacement est bien correct et K1 vaut zéro (voir [Figure 6.2-b]).

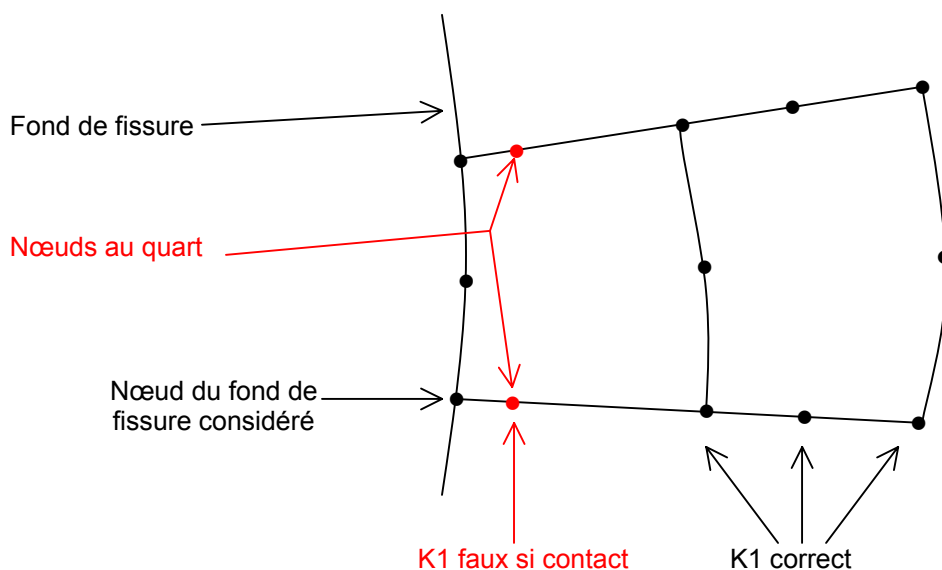


Figure 6.2-c : Configuration de calcul près du fond de fissure

Ceci n'est pas bien grave en pratique car lorsqu'il y a contact, on sait que K1 doit être nul.

En outre, une solution consiste à tracer K1_MAX lorsque la fissure s'ouvre, et K1_MIN lorsqu'elle se ferme (c'est ce qui est fait sur la [Figure 6.2-b]). Dans le cas de fermeture, K1_MIN est bien nul puisqu'il est basé sur les valeurs de K1 données par les sauts de déplacements des nœuds classiques suivants les nœuds au quart, qui sont correctement traités en ce qui concerne le contact.

7 Modélisation C : Maillage linéaire, formulation classique et méthode énergétique

7.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation du problème est la même que celle utilisée en A. Tous les éléments sont d'ordre 1.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est similaire à celui utilisé en A.

Nombre de nœuds : 13630

Nombre de mailles : 17013

Type de mailles	Nombre de mailles
POI1	4
SEG2	39
TRIA3	360
QUAD4	1090
PENTA6	5760
HEXA8	9760

Tableau 7.2-1 : Caractéristiques des mailles

7.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_FISS_XFEM

CALC_G_LOCAL_T OPTION CALC_K_G

L'option CALC_K_G a été introduite dans la commande CALC_G_LOCAL_T. Cette option permet de calculer les facteurs d'intensités de contraintes par une méthode énergétique. Cette méthode est plus générale que la méthode d'extrapolation des déplacements (POST_K1_K2_K3) car elle peut s'utiliser dans le cas d'une fissure quelconque (fissure non-plane, à fond non-droit). Cette méthode s'affranchit donc des commandes DEFI_FOND_FISS [U4.82.01] et POST_K1_K2_K3 [U4.82.05] mais nécessite la commande DEFI_FISS_XFEM [U4.82.08] qui définit deux fonctions de niveaux (level sets) pour caractériser la fissure.

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

L'option `CALC_K_G` de la commande `CALC_G_LOCAL_T` permet d'extraire les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes par la méthode G-théta en utilisant la forme bilinéaire de G (généralisation au 3D du cas 2D déjà existant dans le *Code_Aster*). Comme pour la méthode G-théta classique, il faut donner une valeur pour `Rinf` et `Rsup` (rayons inférieur et supérieur du tore servant de support au champ théta).

8.1.1 Résultats dans le cas d'un chargement en traction (K1) et torsion (K3)

Identification	Référence	Aster	% différence
Max (K1)	$5.35 \cdot 10^6$	$5.11 \cdot 10^6$	4.47
Max (K3)	$11.22 \cdot 10^6$	$10.52 \cdot 10^6$	6.24

Les valeurs de K1 et K3 doivent être identiques [Figure 8.2-a] pour tous les nœuds du fond de fissure car on a une configuration axisymétrique. Ici, nous testons le maximum de K1 et K3 pour tous les points du fond de fissure.

8.1.2 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) sans contact

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud A	$11.71 \cdot 10^6$	$10.32 \cdot 10^6$	11.88

On compare la valeur de K1 à la solution de référence seulement au point d'ouverture maximale car c'est la seule valeur analytique disponible dans la littérature. Ce point n'est plus un « nœud » mais un « point » du fond de fissure, il faut alors le repérer par son numéro dans la liste des points du fond de fissure. C'est le point repéré par `NUM_PT=11`.

8.1.3 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) avec contact

Identification	Référence	Aster	% différence
K1 au nœud A	$10.32 \cdot 10^6$	$9.43 \cdot 10^6$	8.57

On compare le résultat obtenu à celui obtenu par le *Code_Aster* sans prise en compte du contact (non-régression). Cette prise en compte s'effectue par la méthode des contraintes actives. La [Figure 8.2-b] compare les valeurs de K1 le long du fond de fissure pour les cas de flexion avec et sans contact.

8.2 Évolutions de K1 et K3 le long du fond de fissure

traction(K1) et torsion (K3)

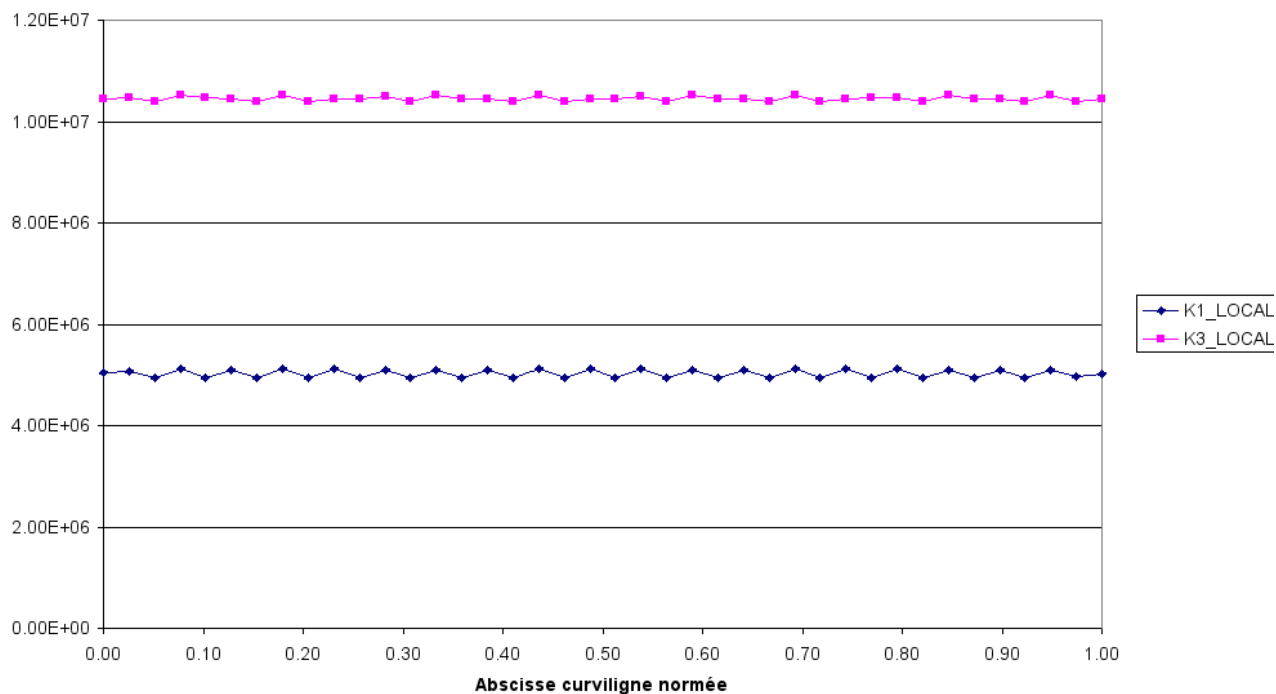


Figure 8.2-a : K1 et K3 le long du fond de fissure (en MPa.m^{1/2})

Flexion

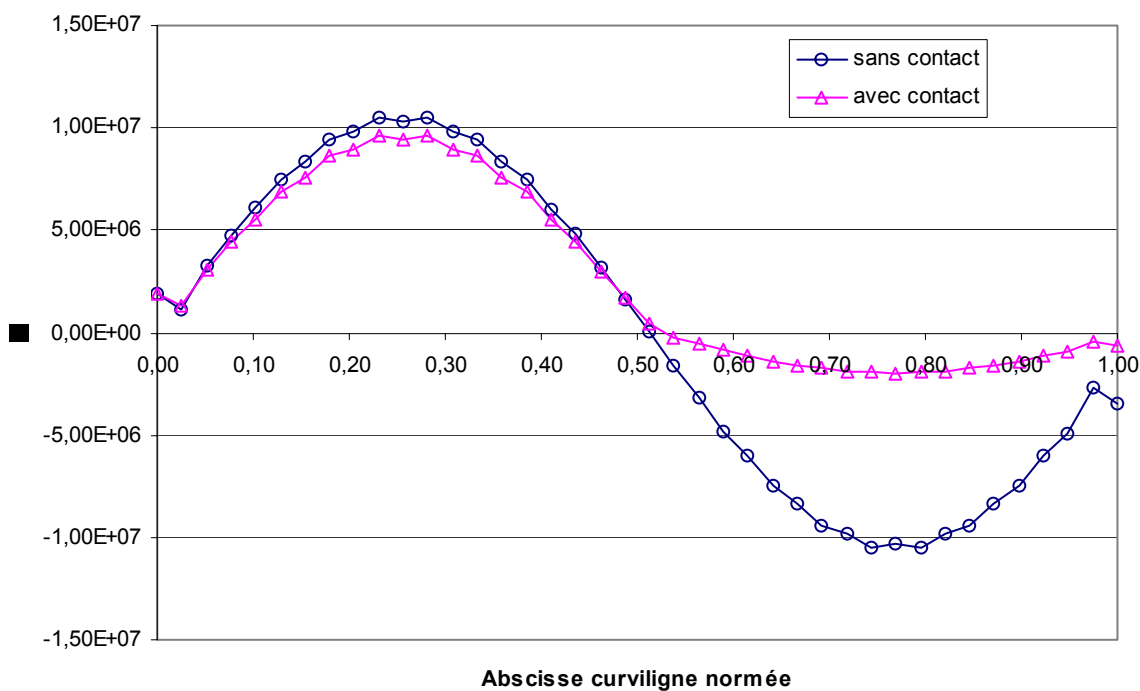


Figure 8.2-b : K1 le long de la fissure (en MPa.m^{1/2})

Remarque :

On note que dans le cas où le contact est pris en compte (voir [Figure 8.2-b]), K1 n'est pas vraiment nul sur les segments du fond de fissure où il y a fermeture. Cela provient du fait que la méthode énergétique de calcul des K projette le champ de déplacement solution sur les champs auxiliaires singuliers de déplacement d'une fissure infiniment longue en ouverture. Or ces champs auxiliaires ne sont pas compatibles avec le mode de fermeture présent.

9 Synthèses des résultats

Les objectifs de ce test sont atteints :

- Il s'agit de valider la prise en compte du contact sur les lèvres de la fissure avec des éléments quadratiques (et des éléments de Barsoum). Les résultats sont meilleurs, comparés à ceux obtenus avec un maillage linéaire.
- Ce test montre l'intérêt de la méthode « G-theta » pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte. Cette méthode énergétique présente l'avantage d'être plus générale que celle utilisant le saut de déplacements (POST_K1_K2_K3) car elle peut s'appliquer à des fissures de géométrie quelconque, alors que POST_K1_K2_K3 est restreint aux fissures planes. De plus, la méthode « G-theta » donne de meilleurs résultats (comparés à la solution analytique) que POST_K1_K2_K3 pour un même maillage linéaire.
- D'autre part, ce test constitue une référence et permettra la validation de l'introduction de la méthode X-FEM dans le Code_Aster appliquée aux calculs des facteurs d'intensité de contraintes.

10 Bibliographie

- [1] TADA, PARIS, IRWIN : The Stress Analysis Of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Hellertoxn, Pennsylvania (1973).
- [2] PROIX : Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du champ de déplacements, Manuel de référence du *Code_Aster*, R7.02.08
- [3] CORNELIU : Quarter-point elements for curved crack fronts, Computers & Structures Vol. 17, No. 2, pp. 227-231, 1983