

Manuel de Validation**Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des structures volumiques****Document : V6.04.156**

SSNV156 - Colonne sous chargement volumique. Loi élastoplastique a gradient

Résumé :

Outre la loi élastoplastique à gradient qu'il ne teste que dans sa version à écrouissage linéaire, ce test a surtout pour objet de valider l'algorithme d'intégration des lois de comportement à gradient de variables internes. En effet, le problème proposé, la mise en traction d'une colonne sous forces volumiques, conduit à une solution non homogène qui active les différentes composantes de l'algorithme (Newton, recherche linéaire, BFGS) et pour laquelle on peut obtenir une expression analytique. Les résultats obtenus sont en accord avec celle-ci, et ce avec une grande précision.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est un cylindre, au sens le plus général, de hauteur $L = 2$ mm et dont la forme de la section n'influe pas sur la solution. De ce fait, on adoptera une section carrée pour les modélisations en déformations planes et en 3D (côté $a = 0,1$ mm) ainsi qu'une section circulaire pour la modélisation axisymétrique (rayon $R = 0,1$ mm).

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau suit une loi de comportement élastoplastique à gradient dont l'écrouissage est isotrope et linéaire. Les caractéristiques du matériau, respectivement le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , la limite d'élasticité σ^y , la pente d'écrouissage E^T et la longueur caractéristique L_b , sont égales à :

$$\begin{aligned} E &= 100\,000 \text{ MPa} & \nu &= 0,3 \\ \sigma^y &= 100 \text{ MPa} & E^T &= 10\,000 \text{ MPa} \\ L_b &= 0,982\,707 \text{ mm} \end{aligned}$$

1.3 Conditions aux limites et chargement

Les déplacements verticaux sont bloqués sur sa face supérieure, les déplacements horizontaux sont bloqués sur les faces latérales et la face inférieure est libre de toute condition cinématique. Par ailleurs, la structure est soumise à une force volumique verticale et dirigée vers le bas d'intensité croissante $f(t) = f_0 t$ où $f_0 = 1 \text{ N/mm}^3$ et t est un paramètre de chargement (sans unité).

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul de la solution de référence

Ce problème admet une solution analytique. Les grandeurs recherchées, à savoir les contraintes σ , les déformations ε , les déformations plastiques ε^p et la déformation plastique cumulée p , ne dépendent que du niveau de chargement t et de la cote z de la section considérée, où $z = 0$ désigne la face inférieure (libre) du cylindre et $z = L$ sa face supérieure (bloquée). Du fait du blocage des faces latérales, les sections ne se déforment pas horizontalement, si bien que les champs de déplacements et de déformations s'écrivent :

$$\mathbf{u}(z, t) = u(z, t) \mathbf{e}_z \quad \varepsilon(z, t) = \varepsilon(z, t) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad u(L, t) = 0 \quad \text{éq 2.1-1}$$

Quant au tenseur de contraintes, il est diagonal. Sa composante verticale σ est fixée par l'équation d'équilibre tandis que ses composantes horizontales, identiques dans les deux directions, dépendent de la loi de comportement (effet de bridage) :

$$\sigma(z, t) = s(z, t) (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \sigma(z, t) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad \sigma(z, t) = z f(t) \quad \text{éq 2.1-2}$$

On peut remarquer que l'évolution du déviateur des contraintes est radiale :

$$\sigma^D = \sigma_{eq} \left[-\frac{1}{3} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \frac{2}{3} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \right] \quad \text{et} \quad \sigma_{eq} = \sigma - s \quad \text{éq 2.1-3}$$

Ayant proposé un champ de déplacements cinématiquement admissible et un champ de contraintes statiquement admissible, il ne reste plus qu'à montrer qu'ils sont liés par la loi de comportement. Bien qu'il s'agisse d'un modèle non local, la loi d'écoulement conserve sa forme usuelle :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^D}{\sigma_{eq}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^p = p \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \right] \quad \text{éq 2.1-4}$$

Il en va de même de la relation contrainte - déformation, où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui se déduisent du module de Young et du coefficient de Poisson :

$$\sigma = \lambda (\text{tr } \varepsilon) \mathbf{Id} + 2\mu (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad \text{éq 2.1-5}$$

En reportant [éq 2.1-1], [éq 2.1-2] et [éq 2.1-4] dans [éq 2.1-5], on en déduit l'expression des contraintes et des déformations en fonction de la déformation plastique cumulée uniquement :

$$s = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{E}{2} p + \nu z f \right) \quad \varepsilon = \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \frac{z f}{E} + \left(1 - \frac{\nu}{1-\nu} \right) p \quad \text{éq 2.1-6}$$

La condition de cohérence permet alors de déterminer p . Dans la mesure où l'évolution du déviateur des contraintes est radiale et monotone, on peut directement déterminer l'état actuel sans avoir à intégrer le taux de déformation plastique. En effet, on peut distinguer deux zones dans la structure : l'une, $0 \leq z \leq b$, dans laquelle la déformation plastique est nulle et où le seuil de plasticité n'est pas atteint, et l'autre, $b \leq z \leq L$, où la déformation plastique est non nulle et le seuil atteint. La frontière b entre ces deux zones est une nouvelle inconnue du problème. Ainsi :

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq b & p = 0 \\ b \leq z \leq L & F = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.1-7}$$

D'après [bib1], le seuil de plasticité a pour expression :

$$F(\sigma, p) = \sigma_{eq} - h p - \sigma^y + c \Delta p \quad \text{où} \quad h = \frac{E E^T}{E - E^T} \quad \text{et} \quad c = \frac{4 h L_b^2}{13} \quad \text{éq 2.1-8}$$

En outre, toujours d'après [bib1], le champ de déformation plastique cumulée p est C^1 et de dérivée nulle au bord de la structure. Cela implique en particulier :

$$p(b) = 0 \quad p'(b) = 0 \quad p'(L) = 0 \quad \text{éq 2.1-9}$$

Compte-tenu de [éq 2.1-7] et de [éq 2.1-8], p vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre sur le domaine $b \leq z \leq L$:

$$c p''(z) + \left[\frac{E}{2(1-\nu)} + h \right] p(z) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} z f - \sigma^y \quad \text{éq 2.1-10}$$

La donnée des 3 conditions aux limites [éq 2.1-9] permet alors de déterminer totalement p ainsi que la position b de la frontière libre.

Pour alléger les expressions, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} H &= \frac{E}{2(1-\nu)} + h & L_c &= \sqrt{\frac{c}{H}} = L_b \sqrt{\frac{4h}{13H}} & \Sigma' &= \frac{1-2\nu}{H(1-\nu)} f \\ \Sigma(z) &= z \Sigma' - \frac{\sigma^y}{H} & C(z) &= \cosh\left(\frac{z-L}{L_c}\right) & S(z) &= \sinh\left(\frac{z-L}{L_c}\right) \end{aligned} \quad \text{éq 2.1-11}$$

Alors, après quelques calculs, on obtient l'expression suivante pour p :

$$p(z) = \Sigma(z) + A C(z) + B S(z) \quad \text{où} \quad \begin{cases} A = \frac{L_c \Sigma' S(b) - \Sigma(b)}{C(b)} \\ B = -L_c \Sigma' \end{cases} \quad \text{éq 2.1-12}$$

Quant à la frontière libre, elle est déterminée en fonction du niveau de chargement par l'équation suivante (ou inversement, le niveau de chargement correspondant à une certaine position de la frontière libre) :

$$\Sigma' = \frac{\sigma^y}{H} \frac{S(b)}{b S(b) + L_c (1 - C(b))} \quad \text{éq 2.1-13}$$

2.2 Résultats de référence

On examine la déformation plastique cumulée p , la déformation totale ε , la contrainte équivalente σ_{eq} et la contrainte horizontale s au point $z = L$ pour différents niveaux de chargement qui correspondent à différentes positions de la frontière libre.

b/L	$f \text{ (N/mm}^3\text{)}$	p	ε	$\sigma_{eq} \text{ (MPa)}$	$s \text{ (MPa)}$
0,75	104,811 963	1,165 975 E-4	1,623 833 E-3	111,456 702	98,167 224
0,50	146,159 407	6,125 415 E-4	2,521 534 E-3	123,286 355	169,032 459
0,25	250,078 993	1,905 213 E-3	4,804 152 E-3	149,717 896	350,440 090
0,00	875,079 453	9,693 407 E-3	1,854 027 E-2	307,704 531	1 442,454 356

2.3 Incertitudes sur la solution

Il s'agit d'une solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

- [1] Lorentz E., Andrieux S. : A variational formulation for nonlocal damage models. Int. J. Plas., 15, pp. 119-138 (1999)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation 3D. La section du cylindre est carrée. L'écouissage linéaire est caractérisé dans un premier temps par une courbe d'écouissage (VMIS_ISOT_TRAC) puis par sa limite d'élasticité et son module (VMIS_ISOT_LINE), ce qui permet de tester les deux implantations.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est réalisé par GMSH. Les mailles sont de plus petite taille dans la zone où l'on examine les résultats (face supérieure). Au total, on dénombre 1749 TETRA10.

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_MATERIAU	NON_LOCAL	LONG_CARA
AFFE_MODELE	AFFE	MODELISATION = '3D_GRADIENT'
STAT_NON_LINE	LAGR_NON_LOCAL	

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Les différentes valeurs sont testées à la cote $z = L$, comme présenté au [§2.2]. Il s'agit de la déformation plastique cumulée (composante 'V1' du CHAM_NO 'VARI_NOEU_ELGA' et composante 'VANL' du CHAM_NO 'DEPL'), de la déformation verticale (composante 'EPZZ' du CHAM_NO 'EPSI_NOEU_DEPL'), de la contrainte de von Mises (composante 'VMIS' du CHAM_NO 'EQUI_NOEU_SIGM') et enfin de la contrainte horizontale (composante 'SIXX' du CHAM_NO 'SIEF_NOEU_DEPL'). Pour rappel, les valeurs analytiques sont les suivantes.

f (N/mm ³)	p	ε	σ_{eq} (MPa)	s (MPa)
104,811 963	1,165 975 E-4	1,623 833 E-3	111,456 702	98,167 224
146,159 407	6,125 415 E-4	2,521 534 E-3	123,286 355	169,032 459
250,078 993	1,905 213 E-3	4,804 152 E-3	149,717 896	350,440 090
875,079 453	9,693 407 E-3	1,854 027 E-2	307,704 531	1 442,454 356

Les résultats obtenus diffèrent extrêmement peu de la solution analytique (différence relative inférieure à la précision par défaut de 0,1 %).

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation 3D. La section du cylindre est carrée. L'écouissage linéaire est caractérisé dans un premier temps par une courbe d'écouissage (VMIS_ISOT_TRAC) puis par sa limite d'élasticité et son module (VMIS_ISOT_LINE), ce qui permet de tester les deux implantations.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est réalisé par GMSH. Les mailles sont de plus petite taille dans la zone où l'on examine les résultats (face supérieure). Au total, on dénombre 169 TRIA6.

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_MATERIAU	NON_LOCAL	LONG_CARA
AFFE_MODELE	AFFE	MODELISATION = 'D_PLAN_GRADIENT'
STAT_NON_LINE	LAGR_NON_LOCAL	

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Les différentes valeurs sont testées à la cote $z = L$, comme présenté au [§2.2]. Il s'agit de la déformation plastique cumulée (composante 'V1' du CHAM_NO 'VARI_NOEU_ELGA' et composante 'VANL' du CHAM_NO 'DEPL'), de la déformation verticale (composante 'EPYY' du CHAM_NO 'EPSI_NOEU_DEPL'), de la contrainte de von Mises (composante 'VMIS' du CHAM_NO 'EQUI_NOEU_SIGM') et enfin de la contrainte horizontale (composante 'SIXX' du CHAM_NO 'SIEF_NOEU_DEPL'). Pour rappel, les valeurs analytiques sont les suivantes.

f (N/mm ³)	P	ϵ	σ_{eq} (MPa)	s (MPa)
104, 811 963	1, 165 975 E-4	1, 623 833 E-3	111, 456 702	98, 167 224
146, 159 407	6, 125 415 E-4	2, 521 534 E-3	123, 286 355	169, 032 459
250, 078 993	1, 905 213 E-3	4, 804 152 E-3	149, 717 896	350, 440 090
875, 079 453	9, 693 407 E-3	1, 854 027 E-2	307, 704 531	1 442, 454 356

Les résultats obtenus diffèrent extrêmement peu de la solution analytique (différence relative inférieure à la précision par défaut de 0, 1 %).

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation 2D axisymétrique. La section du cylindre est nécessairement circulaire. L'écouissage linéaire est caractérisé dans un premier temps par une courbe d'écouissage (VMIS_ISOT_TRAC) puis par sa limite d'élasticité et son module (VMIS_ISOT_LINE), ce qui permet de tester les deux implantations.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est réalisé par GMSH. A la différence des deux modélisations précédentes, il s'agit d'un maillage réglé. Les mailles sont de plus petites tailles dans la zone où l'on examine les résultats (face supérieure). Au total, on dénombre 50 QUAD8.

7.3 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_MATERIAU	NON_LOCAL	LONG_CARA
AFFE_MODELE	AFFE	MODELISATION = 'AXIS_GRADIENT'
STAT_NON_LINE	LAGR_NON_LOCAL	

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Les différentes valeurs sont testées à la cote $z = L$, comme présenté au [§2.2]. Il s'agit de la déformation plastique cumulée (composante 'V1' du CHAM_NO 'VARI_NOEU_ELGA' et composante 'VANL' du CHAM_NO 'DEPL'), de la déformation verticale (composante 'EPYY' du CHAM_NO 'EPSI_NOEU_DEPL'), de la contrainte de von Mises (composante 'VMIS' du CHAM_NO 'EQUI_NOEU_SIGM') et enfin de la contrainte horizontale (composante 'SIXX' du CHAM_NO 'SIEF_NOEU_DEPL'). Pour rappel, les valeurs analytiques sont les suivantes.

f (N/mm ³)	p	ε	σ_{eq} (MPa)	s (MPa)
104, 811 963	1, 165 975 E-4	1, 623 833 E-3	111, 456 702	98, 167 224
146, 159 407	6, 125 415 E-4	2, 521 534 E-3	123, 286 355	169,032 459
250, 078 993	1, 905 213 E-3	4, 804 152 E-3	149, 717 896	350, 440 090
875, 079 453	9, 693 407 E-3	1, 854 027 E-2	307, 704 531	1 442, 454 356

Les résultats obtenus diffèrent extrêmement peu de la solution analytique (différence relative inférieure à la précision par défaut de 0, 1 %).

9 Synthèse des résultats

Du fait du caractère positif de l'écouissage, le problème n'exhibe pas d'instabilités, ce que confirme la bonne convergence des calculs. La validation porte ainsi sur la loi de comportement proprement dite et sur l'algorithme d'intégration des lois non locales, dont les différentes composantes sont activées (itérations primales et duales observées). La remarquable concordance entre les valeurs de référence et celles calculées démontre les capacités de l'algorithme lorsqu'une précision fine est requise (critères de convergence sévères) tandis que la taille des problèmes traités, particulièrement en 3D, semble prouver sa robustesse.