

Manuel de Validation**Fascicule V7.22 : Thermo-mécanique statique non linéaires des structures volumiques**
Document : V7.22.120

HSNV120 - Traction hyperélastique d'un barreau sous chargement thermique

Résumé :

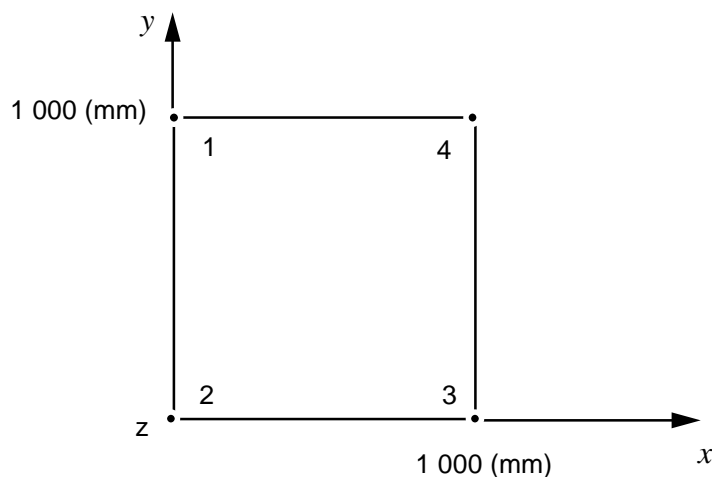
Ce test thermomécanique quasi-statique consiste à chauffer uniformément un barreau parallélépipédique, le soumettre à une traction importante pour finalement le laisser revenir dans un état déchargé. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyperélastiques (commande STAT_NON_LINE, mot-clé COMP_ELAS) pour une relation de comportement élastique non-linéaire (ELAS_VMIS_LINE et ELAS_VMIS_TRAC) avec chargement thermique.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA20, modélisation A) ou bien quadrangulaire (QUAD8, hypothèse des contraintes planes, modélisation B).

Les résultats obtenus par Aster ne diffèrent pas de la solution théorique.

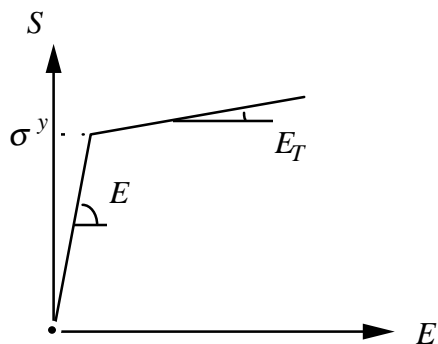
1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

Le matériau obéit à une loi de comportement hyperélastique non linéaire isotrope à écrouissage linéaire isotrope.



$$E = 2.10^5 \text{ MPa}$$

$$E_T = 2.10^3 \text{ MPa}$$

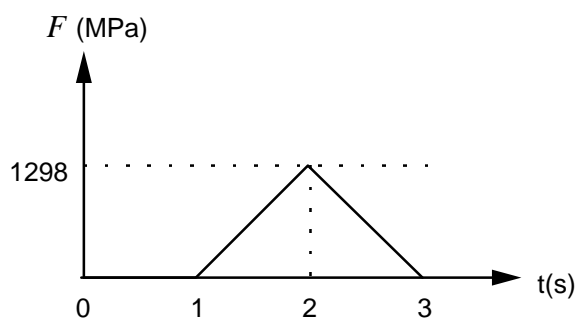
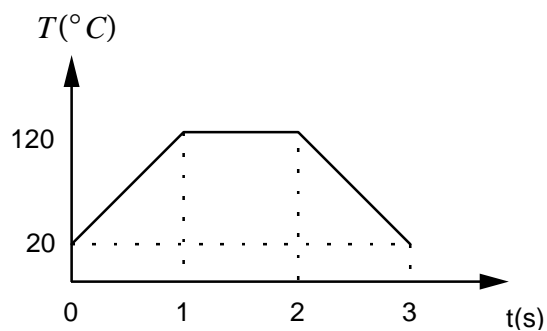
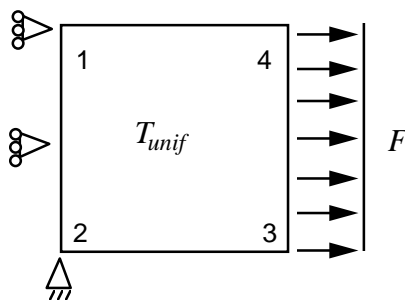
$$\sigma_y = 10^3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha = 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le barreau bloqué dans la direction Ox sur la face [1,2] est soumis à une température uniforme T et un effort de traction F réparti sur la face [3,4]. Les séquences de chargement sont les suivantes :



Température de référence : $T_{réf} = 20^{\circ}\text{C}$.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On cherche le champ de déplacement U sous la forme :

$$U(x, y, z) = \begin{bmatrix} ux \\ vy \\ vz \end{bmatrix}$$

Le gradient de la transformation, la déformation et sa part mécanique sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 1+v & 0 \\ 0 & 0 & 1+v \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \frac{u(u+2)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v(v+2)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v(v+2)}{2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E} - \alpha \Delta T \mathbf{1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} a = \frac{u(u+2)}{2} - \alpha \Delta T \\ b = \frac{v(v+2)}{2} - \alpha \Delta T \end{cases}$$

Remarque :

$$\left| (\mathbf{E}^m)_{eq} \right| = |a - b| = a - b \quad (\text{on suppose que } a > b)$$

La relation de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} S_{xx} = K(a+2b) + \frac{2}{3} G(a-b) \\ S_{yy} = S_{zz} = K(a+2b) - \frac{1}{3} G(a-b) \end{cases}$$

avec :

$$3K = \frac{E}{1-2\nu} \quad \text{module de compressibilité}$$

Pour déterminer G en tenant compte de l'écouissage linéaire, on introduit :

- le module de cisaillement : $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$
- le module d'écouissage : $R' = \frac{E E_T}{E - E_T}$,

La "pseudo variable interne" p vaut alors :

$$p = \frac{2\mu (\mathbf{E}^m)_{eq} - \sigma^y}{R' + 3\mu} = \frac{2\mu (a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu}$$

Finalement, G s'écrit :

$$G = \frac{\sigma^y + R' p}{a-b}$$

En tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} S_{xx} = \frac{F}{1+u} & \text{(charge morte)} \\ S_{yy} = 0 & \text{(bord libre)} \end{cases}$$

Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} K(a+2b) + \frac{2}{3} \left[\sigma^y + R' \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu} \right] = \frac{F}{1+u} \\ K(a+2b) - \frac{1}{3} \left[\sigma^y + R' \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu} \right] = 0 \end{cases}$$

Il s'écrit aussi :

$$\begin{cases} 3K(a+2b) = \frac{F}{1+u} \\ 2\mu(a-b) = \frac{F}{1+u} \left(1 + \frac{3\mu}{R'}\right) - \sigma^y \frac{3\mu}{R'} \end{cases}$$

A F fixé, il s'agit donc d'un système non linéaire en u et v , puisque a est quadratique en u et b quadratique en v .

Néanmoins, on peut choisir de fixer u (donc a) et résoudre un système linéaire en F et b (duquel on déduit p et v) :

- $a = \frac{u(u+2)}{2} - \alpha \Delta T$
- $\begin{cases} \frac{1}{1+u} F - 6Kb = 3Ka \\ \left(1 + \frac{3\mu}{R'}\right) \frac{1}{1+u} F + 2\mu b = 2\mu a + \sigma^y \frac{3\mu}{R'} \end{cases}$
- $p = \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu}$
- $v = \sqrt{1 + 2(b + a \Delta T)} - 1$

Il reste alors à exprimer la contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{F})} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$$

Soit ici :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{1+u}{(1+v)^2} S_{xx} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

Quant à la force exercée sur la face [3,4], du fait de l'hypothèse de charges mortes, elle s'écrit simplement :

$$\begin{cases} F_x = F S_o \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \quad \text{où } S_o : \text{ surface initiale de la face [3,4]}$$

2.2 Résultats de référence

On adoptera comme résultats de référence les déplacements, la contrainte de Cauchy et la force exercée sur la face [3,4] (en 3D seulement) :

Au temps $t = 2 \text{ s}$ ($\Delta T = 100^\circ\text{C}$, traction F)

En fait, on cherche F tel que l'allongement :

$$u = 0,1$$

- $K = 166\,666 \text{ MPa}$ $\mu = 76\,923 \text{ MPa}$ $R' = 2\,020 \text{ MPa}$
- $a = 0.095$
- $$\begin{cases} 0.90909 F - 10^6 b = 47\,500 \\ 104.76 F + 153.85 \cdot 10^3 b = 128.85 \cdot 10^3 \end{cases}$$
- $$\Rightarrow \begin{cases} F = 1\,298 \text{ MPa} \\ b = -0.046 \end{cases}$$
- $p = 8.91 \cdot 10^{-2}$
- $v = -3.70 \cdot 10^{-2}$
- $$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = 1\,399.66 \text{ MPa} & \sigma_{xy} = 0 & F_x = 1\,298 \cdot 10^9 \text{ N} \\ \sigma_{yy} = 0 & \sigma_{xz} = 0 & F_y = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \sigma_{yz} = 0 & F_z = 0 \end{array}$$

Au temps $t = 3 \text{ s}$ ($\Delta T = 0$, $F = 0$)

Le barreau est revenu dans son état initial :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

2.3 Incertitude sur la solution

La solution est analytique. Aux erreurs d'arrondis près, on peut la considérer exacte.

2.4 Références bibliographiques

On pourra se référer à :

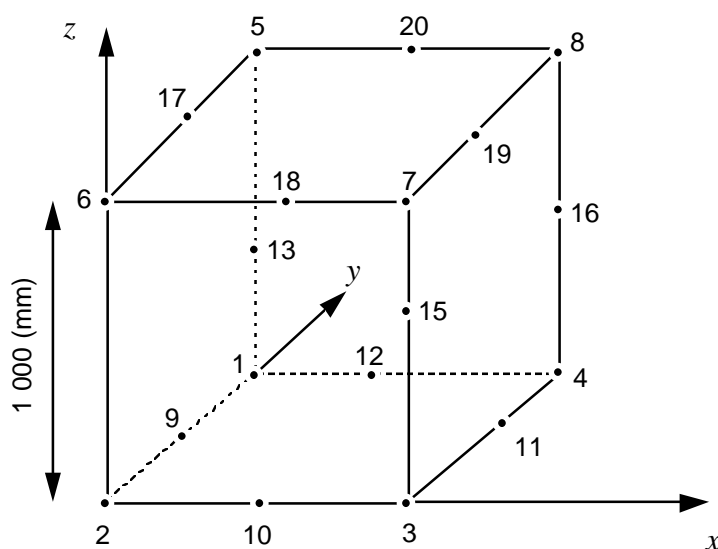
- [1] E. LORENTZ : Une relation de comportement hyperélastique non linéaire - Note interne EDF DER HI-74/95/011/0

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique :

1 maille HEXA20
1 maille QUAD8



Conditions aux limites :

N2 : $U_x = U_y = U_z = 0$ N9, N13, N14, N5, N17 : $U_x = 0$
N1 : $U_x = U_z = 0$
N6 : $U_x = U_y = 0$

Charge : Traction sur la face [3 4 8 7 11 16 19 15]

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 20

Nombre de mailles : 2

1 HEXA20
1 QUAD8

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
STAT_NON_LINE	COMP_ELAS :	DEFORMATION :	'GREEN'	[U4.32.01]
		RELATION :	'ELAS_VMIS_LINE' 'ELAS_VMIS_TRAC'	
CALC_NO	EXCIT :	CHARGE :	THERMIQUE	[U4.61.03]
	OPTION :	'FORC_NODA'		
	GEOMETRIE :	'DEFORMEE'		

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

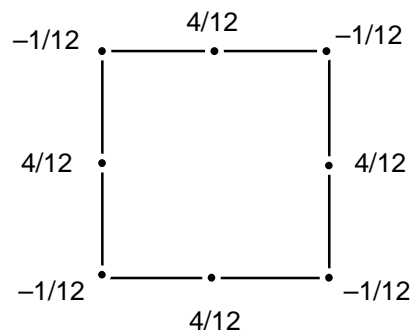
Identification	Référence	Aster	% différence
t = 2 Déplacement DX (N8)	100	100.	0.
t = 2 Déplacement DY (N8)	-37	-37.005	0.013
t = 2 Déplacement DZ (N8)	-37	-37.005	0.013
t = 2 Contraintes SIGXX (PG1)	1399.66	1399.67	0.001
t = 2 Contraintes SIGYY (PG1)	11013.986	$\approx 10^{-10}$	/
t = 2 Contraintes SIGZZ (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 2 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 2 Contraintes SIGXZ (PG1)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 2 Contraintes SIGYZ (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 2 Variable p VARI (PG1)	8.9110^{-2}	$8.91 \cdot 10^{-2}$	0.
t = 3 Déplacement DX (N8)	0	$\approx 10^{-13}$	/
t = 3 Déplacement DY (N8)	0	$\approx 10^{-13}$	/
t = 3 Déplacement DZ (N8)	0	$\approx 10^{-14}$	/
t = 3 Contraintes SIGXX (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGYY (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Contraintes SIGZZ (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Contraintes SIGXZ (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Contraintes SIGYZ (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Variable p VARI (PG1)	0	0	/
t = 2 Force nodale DX (N8)	-1.081710^8	$-1.0817 \cdot 10^8$	-0.003
t = 2 Force nodale DY (N8)	0	$\approx 10^{-5}$	/
t = 2 Force nodale DZ (N8)	0	$\approx 10^{-6}$	/

4.2 Remarques

Calcul de la force nodale :

La force appliquée sur la face [3,4], F_x , se répartit entre les différents noeuds suivant la pondération suivante :

- noeuds sommets : $-1/12 F_x$
- noeuds milieux : $4/12 F_x$



4.3 Paramètres d'exécution

Version : NEW 3.03.15

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 MW

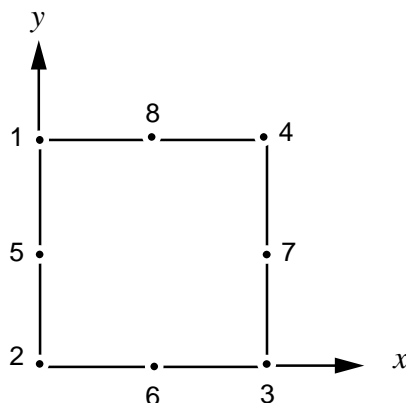
Temps CPU User : 47.2 secondes

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D contraintes planes :

1 maille QUAD8
1 maille SEG3



Conditions aux limites :

N2 : $U_x = 0$ $U_y = 0$
N1 : $U_x = 0$
N5 : $U_x = 0$

Chargement :

Traction sur la face [3 4 7] (maille SEG3)

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 8

Nombre de mailles : 2

1 QUAD8
1 SEG3

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
STAT_NON_LINE	COMP_ELAS :	DEFORMATION :	'GREEN'	[U4.32.01]
		RELATION :	'ELAS_VMIS_LINE'	
			'ELAS_VMIS_TRAC'	
	EXCIT :	CHARGE :	THERMIQUE	

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
t = 2 Déplacement DX (N4)	100	100	0
t = 2 Déplacement DY (N4)	-37	-37.004	0.013
t = 2 Contraintes SIGXX (PG1)	1399.66	1399.67	0.001
t = 2 Contraintes SIGYY (PG1)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 2 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 2 Variable p VARI (PG1)	8.9110^{-2}	$8.91 \cdot 10^{-2}$	0
t = 3 Déplacement DX (N4)	0	$\approx 10^{-14}$	/
t = 3 Déplacement DY (N4)	0	$\approx 10^{-13}$	/
t = 3 Contraintes SIGXX (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGYY (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Variable p VARI (PG1)	0	0	/

6.2 Paramètres d'exécution

Version : 3.03.13

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 MW

Temps CPU User : 123,8 secondes

7 Synthèse des résultats

Les résultats numériques et analytiques coïncident remarquablement. On peut toutefois s'étonner du temps d'exécution notoirement plus long pour la modélisation en contraintes planes (123,8 s) que pour le 3D (47,2 s). La différence s'explique par une discrétisation en temps beaucoup plus fine pour les contraintes planes, liée à des problèmes de convergence (l'algorithme de résolution de l'équation scalaire non linéaire en p est encore rudimentaire).