

**Manuel de Validation****Fascicule V3.03 : Statique linéaire des plaques et coques****Document : V3.03.503**

# **SSLS503 - Plaque stratifiée en flexion empilement antisymétrique simplement appuyée**

---

**Résumé :**

Ce test représente un calcul quasi-statique d'une plaque stratifiée, en flexion empilement antisymétrique, simplement appuyée, soumise à une pression uniformément répartie.

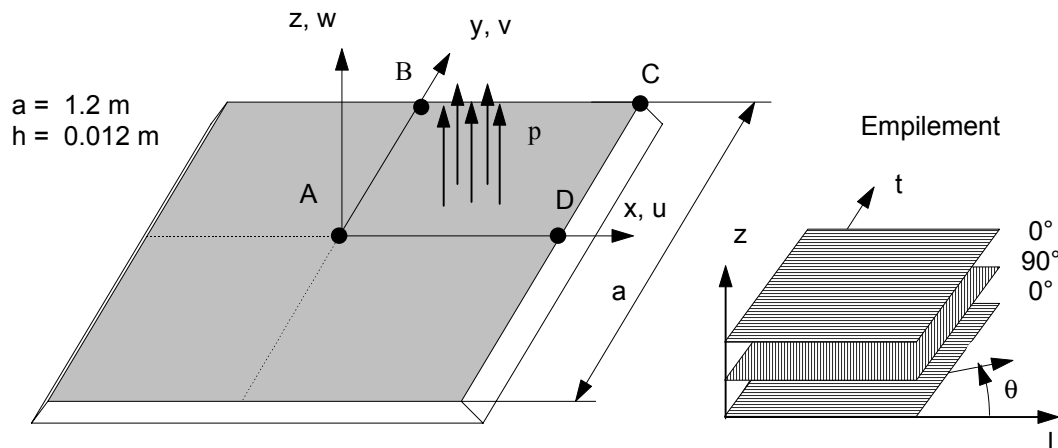
Les 4 modélisations permettent de valider :

- les modélisations éléments finis DKT (QUAD4, TRIA3) et DST (QUAD4, TRIA3) dans le cas d'un matériau composite (3 couches d'orientation différentes),
- les contraintes de cisaillement transverse.

Les déplacements et les contraintes obtenues sont comparés à une solution de référence analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant la plaque sont les suivantes:

Unidirectionnel (U) :

$$E_l = 4.10^{10} \text{ Pa}$$

$$E_t = 0.16 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

$$(l \Leftrightarrow x ; t \Leftrightarrow y)$$

$$G_{lt} = G_{tz} = 8.10^8 \text{ Pa}$$

$$G_{tz} = 3.2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$\nu_{lt} = 0.25$$

Empilement :

- orientation : [ 0 / 90 / 0 ]
- nature : [ U / U / U ]
- épaisseur : [ h/3 / h/3 / h/3 ]

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

- CL : la plaque est simplement appuyée sur son contour
- Pression uniformément répartie :  $p = 3000 \text{ Pa}$

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet

## 2 Solution de référence

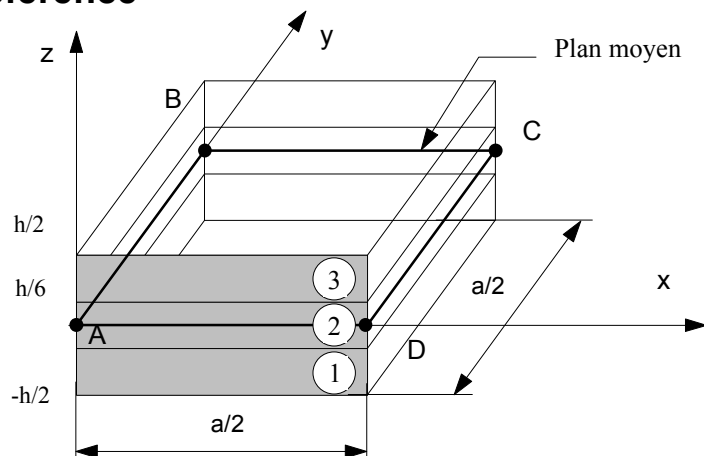
### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Déplacement : solution analytique obtenue par décomposition en série de la forme :

$$w = \sum_i \sum_j w_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

Contraintes : solution numérique [bib1], [bib2]

### 2.2 Résultats de référence



Les résultats de référence sont les suivants :

$w(0, 0, 0)$	0.01507 m	Déplacement $w$ au centre de la plaque (point A),
$S_{XX}(0, 0, h/2)$	$2.4216 \cdot 10^7$ Pa	Contrainte $\sigma_{xx}$ sur la peau supérieure de la couche 3 ( $z=h/2$ ) au centre de la plaque (point A),
$S_{YY}(0, 0, h/6)$ couche à $90^\circ$	$5.7810 \cdot 10^6$ Pa	Contrainte $\sigma_{yy}$ sur la peau supérieure de la couche 2 ( $z=h/6$ ) au centre de la plaque (point A),
$S_{XY}(a/2, a/2, h/2)$	$1.2825 \cdot 10^6$ Pa	Contrainte $\tau_{xy}$ au point C sur la peau supérieure de la couche 3,
$S_{XZ}(a/2, 0, 0)$	$2.3526 \cdot 10^5$ Pa	Contrainte $\tau_{xz}$ au point D sur la peau moyenne de la couche 2 ( $z=0$ ),
$S_{YZ}(0, a/2, 0)$	$8.8950 \cdot 10^4$ Pa	Contrainte $\tau_{yz}$ au point B sur la peau moyenne de la couche 2 ( $z=0$ ),

### 2.3 Incertitudes sur la solution

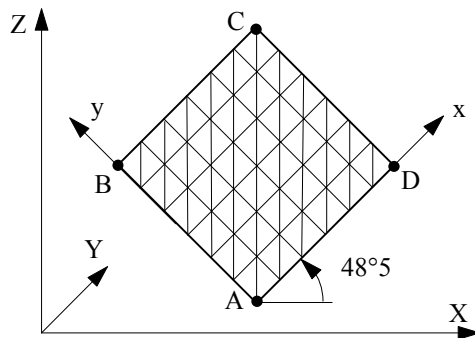
- La solution de référence est donnée pour un nombre de termes dans la série égal à 25.
- Le facteur de correction du cisaillement transverse utilisé est de 5/6.
- Avec un élanement important ( $a/h=100$ ), le niveau de cisaillement transverse est faible et donc difficile à obtenir avec précision. Il existe alors une incertitude sur les valeurs de contrainte  $\sigma_{ij}$  calculées lors de la validation du test VPCS, les différences obtenues par les logiciels sur les composantes du cisaillement sont de l'ordre de 10%.

### 2.4 Références bibliographiques

- [1] VPCS : Progiciel de calcul de structures composites ; Exemples de validation. Revue des composites et des matériaux avancés, Volume 5 - numéro hors série/ 1995. Edition Hermes.
- [2] PUTCHA, N.S. and REDDY, J.N. : A mixed shear flexible finite element for the analysis of laminated plates, computer meth. in applied mech. Eng. 44 (1984).

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (TRIA3)

- La plaque est située dans le plan  $Y = 0.5$
- Point A (0.4 ; 0.5 ; 0.25)
- Conditions aux limites:
  - . Coté BC :  $v = 0$
  - . Coté CD :  $v = 0$
- Conditions de symétrie : (repère local)
  - . Coté AB :  $u = \theta_y = 0$
  - . Coté AD :  $v = \theta_x = 0$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 49

Nombre de mailles et types : 72 TRIA3

### 3.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Mot-clé facteur	Mot-clé
AFFE_MODELE	AFFE	'DKT'
DEFI_MATERIAU	ELAS_ORTH	
DEFI_COQU_MULT	COUCHE	EPAIS MATER ORIENTATION
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	EPAIS ANGL_REP
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_COQUE	PRES
CALC_CHAM_ELEM	NUME_COUCHE NIVE_COUCHE OPTION	'SUP' 'MOY' 'SIGM_ELNO_DEPL'

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
$v(0, 0, 0)$	0.01507	0.01500	-0.492
SIXX (0, 0, h/2)	$2.4216 \cdot 10^7$	$2.4307 \cdot 10^7$	0.376
SIYY (0, 0, h/6) couche à 90°	$5.7810 \cdot 10^7$	$5.7438 \cdot 10^7$	-0.644
SIXY (a/2, a/2, h/2)	$1.2825 \cdot 10^5$	$1.2838 \cdot 10^5$	0.102
SIXZ(a/2, 0, 0)	$-2.3526 \cdot 10^5$	$-3.1855 \cdot 10^5$	35
SIYZ(0, a/2, 0)	$8.8950 \cdot 10^4$	$8.6968 \cdot 10^4$	2.2

### 4.2 Remarques

Les contraintes sont exprimées dans le repère d'orthotropie défini par ANGL\_REP (AFFE\_CARA\_ELEM), et par la normale de l'élément.

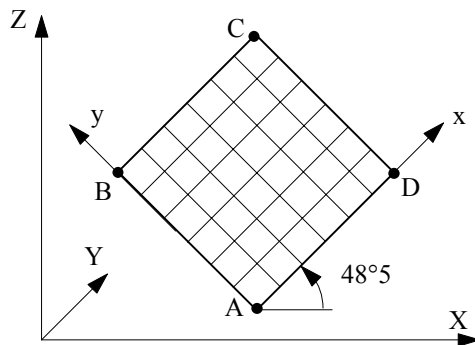
Les composantes SIXX, SIYY et SIYZ sont les valeurs moyennes des deux mailles concourantes aux points A et C.

L'écart obtenu sur SIXZ est dû à la différence de modélisation du cisaillement transverse : dans la référence, on utilise un coefficient de correction de cisaillement transverse de 5/6. Dans le *Code\_Aster*, on calcule la répartition des cisaillements dans l'épaisseur, supposée parabolique dans chaque couche.

Le signe de SIXZ est opposé à celui de la solution de référence.

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (QUAD4)

- La plaque est située dans le plan  $Y = 0.5$
- Point A (0.4 ; 0.5 ; 0.25)
- Conditions aux limites:
  - . Coté BC :  $v = 0$
  - . Coté CD :  $v = 0$
- Conditions de symétrie : (repère local)
  - . Coté AB :  $u = \theta_y = 0$
  - . Coté AD :  $v = \theta_x = 0$

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 49  
 Nombre de mailles et types : 36 QUAD4

### 5.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Mot-clé facteur	Mot-clé
AFFE_MODELE	AFFE	'DKT'
DEFI_MATERIAU	ELAS_ORTH	
DEFI_COQU_MULT	COUCHE	EPAIS MATER ORIENTATION
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	EPAIS ANGL_REP
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_COQUE	PRES
CALC_CHAM_ELEM	NUME_COUCHE NIVE_COUCHE OPTION	'SUP' 'MOY' 'SIGM_ELNO_DEPL'

## 6 Résultats de la modélisation B

### 6.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
$v(0, 0, 0)$	0.01507	0.01500	-0.431
SIXX (0, 0, h/2)	$2.4216 \cdot 10^7$	$2.4397 \cdot 10^7$	0.745
SIYY (0, 0, h/6) couche à 90°	$5.7810 \cdot 10^6$	$5.7321 \cdot 10^6$	-0.845
SIXY (a/2, a/2, h/2)	$1.2825 \cdot 10^6$	$1.2184 \cdot 10^6$	-4.995
SIXZ(a/2, 0, 0)	$-2.3526 \cdot 10^5$	$-2.0112 \cdot 10^5$	14.5
SIYZ(0, a/2, 0)	$8.8950 \cdot 10^4$	$8.6060 \cdot 10^4$	3.2

### 6.2 Remarques

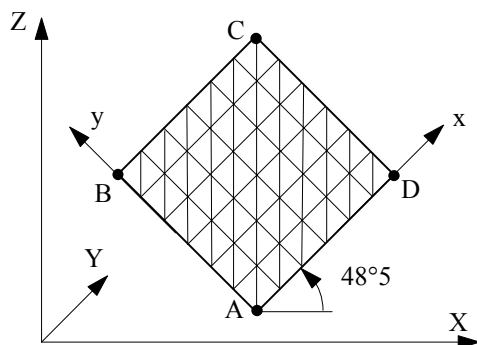
Les composantes SIXX, SIYY et SIYZ sont les valeurs moyennes des deux mailles concourantes aux points A et C.

L'écart obtenu sur SIXZ est dû à la différence de modélisation du cisaillement transverse : dans la référence, on utilise un coefficient de correction de cisaillement transverse de 5/6. Dans le *Code\_Aster*, on calcule la répartition des cisaillements dans l'épaisseur, supposée parabolique dans chaque couche.

Le signe de SIXZ est opposé à celui de la solution de référence.

## 7 Modélisation C

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DST (TRIA3)

- La plaque est située dans le plan  $Y = 0.5$
- Point A (0.4 ; 0.5 ; 0.25)
- Conditions aux limites:
  - . Coté BC :  $v = 0$
  - . Coté CD :  $v = 0$
- Conditions de symétrie : (repère local)
  - . Coté AB :  $u = \theta_y = 0$
  - . Coté AD :  $v = \theta_x = 0$

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 49

Nombre de mailles et types : 72 TRIA3

### 7.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Mot-clé facteur	Mot-clé
AFFE_MODELE	AFFE	'DST'
DEFI_MATERIAU	ELAS_ORTH	
DEFI_COQU_MULT	COUCHE	EPAIS MATER ORIENTATION
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	EPAIS ANGL_REP
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_COQUE	PRES
CALC_CHAM_ELEM	NUME_COUCHE NIVE_COUCHE OPTION	'SUP' 'MOY' 'SIGM_ELNO_DEPL'



## 8 Résultats de la modélisation C

### 8.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
$v(0, 0, 0)$	0.01507	0.01517	0.655
SIXX (0, 0, h/2)	$2.4216 \cdot 10^7$	$2.132 \cdot 10^7$	12
SIYY (0, 0, h/6) couche à 90°	$5.7810 \cdot 10^6$	$6.96 \cdot 10^6$	20.
SIXY (a/2, a/2, h/2)	$1.2825 \cdot 10^6$	$1.284 \cdot 10^6$	0.1
SIXZ(a/2, 0, 0)	$-2.3526 \cdot 10^5$	$-1.5474 \cdot 10^5$	34
SIYZ(0, a/2, 0)	$8.8950 \cdot 10^4$	$11.099 \cdot 10^4$	24

### 8.2 Remarques

Les composantes SIXX, SIYY et SIYZ sont les valeurs moyennes des deux mailles concourantes aux points A et C.

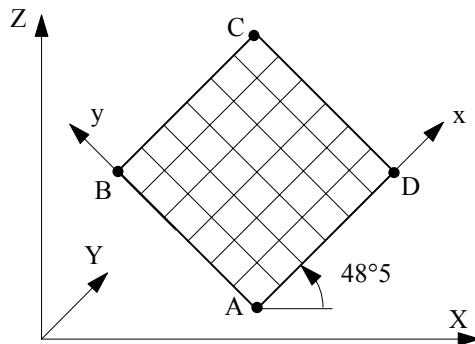
L'écart obtenu sur SIXZ est dû à la différence de modélisation du cisaillement transverse : dans la référence, on utilise un coefficient de correction de cisaillement transverse de 5/6. Dans le *Code\_Aster*, on calcule la répartition des cisaillements dans l'épaisseur, supposée parabolique dans chaque couche.

Le signe de SIXZ est opposé à celui de la solution de référence.

Les autres écarts sont probablement dus à l'anisotropie du maillage triangulaire.

## 9 Modélisation D

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DST (QUAD4)

- La plaque est située dans le plan  $Y = 0.5$
- Point A (0.4 ; 0.5 ; 0.25)
- Conditions aux limites:
  - . Coté BC :  $v = 0$
  - . Coté CD :  $v = 0$
- Conditions de symétrie : (repère local)
  - . Coté AB :  $u = \theta_y = 0$
  - . Coté AD :  $v = \theta_x = 0$

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 49  
 Nombre de mailles et types : 36 QUAD4

### 9.3 Fonctionnalités testées

Commandes	Mot-clé facteur	Mot-clé
AFFE_MODELE	AFFE	'DST'
DEFI_MATERIAU	ELAS_ORTH	
DEFI_COQU_MULT	COUCHE	EPAIS MATER ORIENTATION
AFFE_CARA_ELEM	COQUE	EPAIS ANGL_REP
AFFE_CHAR_MECA	FORCE_COQUE	PRES
CALC_CHAM_ELEM	NUME_COUCHE NIVE_COUCHE OPTION	'SUP' 'MOY' 'SIGM_ELNO_DEPL'

## 10 Résultats de la modélisation D

### 10.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
$v(0, 0, 0)$	0.01507	0.01513	0.4
SIXX (0, 0, h/2)	$2.4216 \cdot 10^7$	$2.439 \cdot 10^7$	0.7
SIYY (0, 0, h/6) couche à 90°	$5.7810 \cdot 10^6$	$5.79 \cdot 10^6$	0.2
SIXY (a/2, a/2, h/2)	$1.2825 \cdot 10^6$	$1.1953 \cdot 10^6$	-6.8
SIXZ(a/2, 0, 0)	$-2.3526 \cdot 10^5$	$-2.0264 \cdot 10^5$	14
SIYZ(0, a/2, 0)	$8.8950 \cdot 10^4$	$8.7485 \cdot 10^4$	2

### 10.2 Remarques

Les composantes SIXX, SIYY et SIYZ sont les valeurs moyennes des deux mailles concourantes aux points A et C.

L'écart obtenu sur SIXZ est dû à la différence de modélisation du cisaillement transverse : dans la référence, on utilise un coefficient de correction de cisaillement transverse de 5/6. Dans le *Code\_Aster*, on calcule la répartition des cisaillements dans l'épaisseur, supposée parabolique dans chaque couche.

Le signe de SIXZ est opposé à celui de la solution de référence.

---

## 11 Synthèse des résultats

---

- **Déplacements** : quelque soit la modélisation utilisée (DKT ou DST) les résultats sont satisfaisants, l'erreur maximum est inférieure à 0.7%.
- **Contraintes planes** : les résultats sont plus précis avec la modélisation DKT, l'erreur est inférieure à 1% sauf pour SIXY (QUAD4) où l'erreur est de 5%. Pour la modélisation DST l'erreur est plus élevée (<8%) avec un écart important sur SIXX (28%) pour la maille TRIA3.
- **Cisaillement transverse** : quelque soit la modélisation utilisée (DKT ou DST) les résultats obtenus avec les maillages quadrangulaires sont plus proches de la solution de référence que ceux obtenus avec des maillages triangulaires. Dans le premier cas l'erreur sur la composante SIXZ est inférieure à 15%, et l'erreur sur SIYZ est inférieure à 3%, tandis que dans le deuxième cas, l'erreur sur SIXZ est de 35% et celle sur SIYZ est comprise entre 2% et 24%. Hormis la moins bonne précision des maillages triangulaires à cause de leur anisotropie, l'écart qui subsiste avec des maillages quadrangulaires est dû à la différence de modélisation du cisaillement transverse : dans la référence, on utilise un coefficient de correction de cisaillement transverse de 5/6. Dans le Code\_Aster, on calcule la répartition des cisaillements dans l'épaisseur, supposée parabolique dans chaque couche.