

Manuel de Validation**Fascicule V2.01 : Dynamique linéaire des systèmes discrets****Document : V2.01.102**

SDLD102 - Sous structuration transitoire : Système 3 masses-4 ressorts

Résumé :

Le domaine d'application de ce test concerne la dynamique des structures. Il permet de valider la schéma d'intégration à pas de temps adaptatif de l'opérateur `DYNA_TRAN_MODAL` [U4.54.03] ainsi que le calcul de réponse transitoire linéaire sur une base modale calculée par sous-structuration (pour les 4 schémas d'intégration de `DYNA_TRAN_MODAL` : 'EULER', 'DEVOGE', 'NEWMARK' et 'ADAPT'). En particulier, le cas de l'application d'un amortissement réduit aux modes dynamiques des bases de projection des sous-structures est traité.

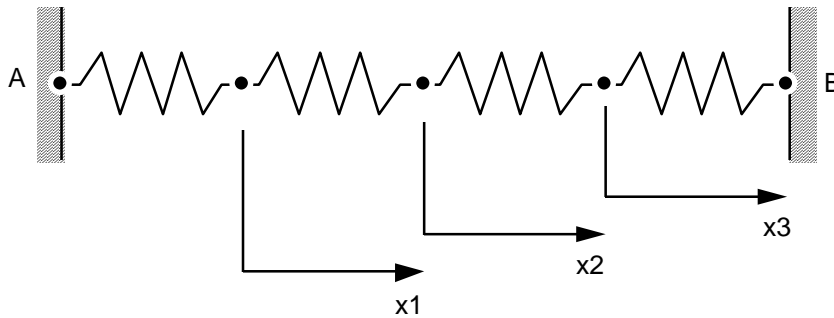
Il s'agit de déterminer la réponse transitoire d'un système composé de 3 masses et 4 ressorts, encastré à ses extrémités et soumis à une force constante à partir de l'instant initial. Les ressorts sont modélisés par des éléments de type '`DIS_TR`' et les masses par des éléments de type '`DIS_T`'.

Trois modélisations sont proposées. Dans les 2 premières, la structure est non amortie. Les méthodes de calcul transitoire par sous-structuration avec interfaces de type Craig-Bampton ('CRAIGB') et Mac Neal ('MNEAL') sont testées. Les résultats de référence qui leur sont associés sont issus d'un calcul analytique. Dans la troisième, on impose un amortissement réduit de 1% aux modes dynamiques des bases de projection des sous-structures. L'équation transitoire vérifiée par la structure complète a été obtenue analytiquement. Sa résolution, qui fait office de référence, a été réalisée par le logiciel Maple.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le système étudié est composé de 3 masses (m) et 4 ressorts (k). L'ensemble est encastré à ses extrémités.

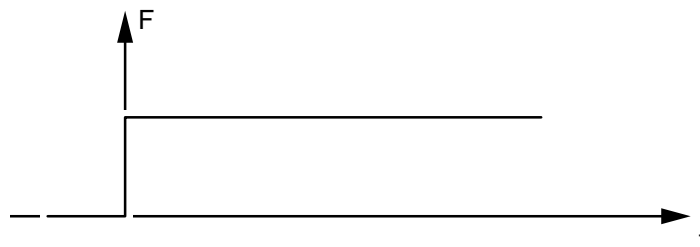


1.2 Propriétés de matériaux

Raideur des ressorts : $k = 1 \text{ N/m}$.

Masses ponctuelles : $m = 1 \text{ kg}$.

1.3 Conditions aux limites et chargements



Points A et B encastrés.

Application au point x_1 d'une force constante $F = 1 \text{ N}$, à partir de l'instant $t = 0 \text{ s}$.

1.4 Conditions initiales

Structure initialement au repos.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

2.1.1 Structure non amortie

Dans ce cas, la solution de référence peut être obtenue analytiquement :

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les pulsations propres du système masse-ressort valent :

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 2 \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{k}{m}$$

de déformées modales respectives :

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Projetée sur la base des modes propres, l'équation transitoire devient η_i avec comme coordonnées généralisées :

$$m \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{pmatrix} + 4k \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Le système peut être résolu analytiquement. On obtient :

$$\{\eta(t)\} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4 \omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t) \\ \frac{1}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t) \\ \frac{\sqrt{2}}{4 \omega_3^2} (\cos \omega_3 t - 1) \end{pmatrix}$$

La solution sur base physique est obtenue en utilisant la transformation de Ritz :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \phi \eta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Structure amortie

L'amortissement est appliqué aux modes propres des bases de projection des sous-structures encastrees (amortissement réduit). Dans ce cas, on aboutit à l'équation transitoire en coordonnées généralisées suivante (bib [1]) :

$$m \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{pmatrix} + 4\varepsilon\sqrt{2km} \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{pmatrix} + 4k \begin{pmatrix} 4-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ce système n'étant pas découplé, il a été résolu à l'aide du logiciel Maple. On a obtenu ($\varepsilon = 0.01$) :

$$\{\eta(t)\} \cong \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4\omega_1^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cos \omega_1 t \right) \\ \frac{1}{\omega_2^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \cos \omega_2 t \right) \\ \frac{\sqrt{2}}{4\omega_3^2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_3}} \cos \omega_3 t - 1 \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec : } \tau_1 = 1.65 \cdot 10^3 \text{ s} \quad \tau_2 = \frac{1}{\varepsilon\omega_2} = \frac{100}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \tau_3 = 4.85 \cdot 10^1 \text{ s}$$

On obtient donc une formulation proche du cas non amorti, mais dans laquelle interviennent des termes exponentiels qui caractérisent l'amortissement.

La solution sur base physique est obtenue en utilisant la transformation de Ritz :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \phi \eta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

2.2 Résultats de référence

Structure non amortie :

Déplacement, vitesse et accélération du noeud x_2 à l'instant $t = 80$ s :

$$x_2(80) = 4.1700 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$\dot{x}_2(80) = -4.3011 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\ddot{x}_2(80) = 3.3749 \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-2}$$

Structure amortie :

Déplacement du noeud x_2 à l'instant $t = 80$ s :

$$x_2(80) = 4.9867 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

2.3 Incertitude sur la solution

Cas non amorti : solution analytique.

Cas amorti : solution semi-analytique.

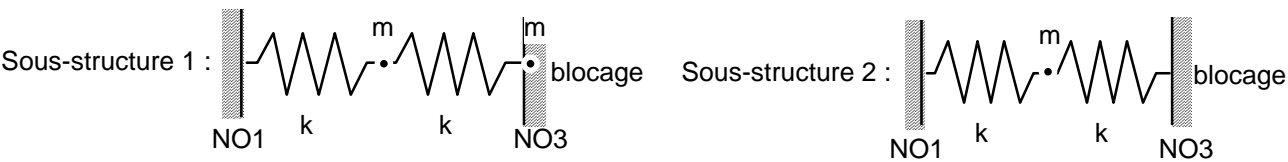
2.4 Référence bibliographique

- [1] C. VARE - Rapport HP 61/95/025/A - "Mise en œuvre du calcul transitoire non linéaire par sous-structuration dans le *Code_Aster*".

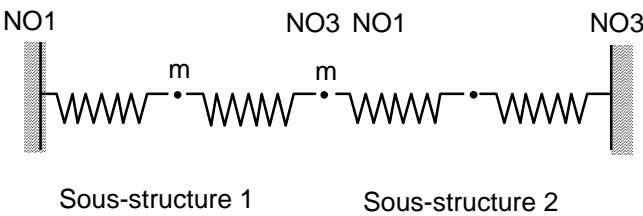
3Modélisation A

3.1Caractéristiques de la modélisation

Le système est divisé en 2 sous-structures :



En situation, les deux sous-structures sont reliées au niveau de la 2ème masse. L'interface dynamique de la 1ère sous-structure est constituée d'une masse m au niveau du nœud NO3 du maillage et coïncide avec l'interface dynamique de la 2ème sous-structure qui ne comporte aucune masse et est simplement bloquée au niveau du nœud NO1.



Les modes propres du système complet sont calculés en utilisant la méthode de calcul modal par sous-structuration avec interfaces de type 'Craig-Bampton' (interfaces bloquées). Les bases de chaque sous-structure sont composées d'un mode dynamique et d'un mode contraint.

La réponse transitoire du système est calculée sur la base modale calculée par sous-structuration.

Les pas de temps utilisés sont égaux à : 10^{-2} s en 'EULER', 10^{-2} s en 'NEWMARK', 10^{-2} s en 'DEVOGE', 10^{-1} s en 'ADAPT' (pour ce dernier, il s'agit du pas de temps initial de l'algorithme et du pas de temps maximal d'intégration).

3.2Caractéristiques du maillage de la sous-structure

Nombre de noeuds : 3
Nombre de mailles et types : 2 SEG2

3.3Fonctionnalités testées

Commandes			Clés
NUME_DDL_GENE	BASE		[U4.55.07]
	STOCKAGE	'DIAG'	
PROJ_MATR_BASE	BASE		[U4.55.01]
	NUME_DDL_GENE		
	MATR_ASSE_GENE		
PROJ_VECT_BASE	BASE		[U4.55.02]
	NUME_DDL_GENE		
	VECT_ASSE_GENE		
DYNA_TRAN_MODAL	METHODE	'ADAPT'	[U4.54.03]
		'EULER'	
		'NEWMARK'	
		'DEVOGE'	
REST_BASE_PHYS	MODE_MECA		[U4.64.01]

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

Calcul par recombinaison modale sans sous-structuration : Méthode 'ADAPT'

Identification	Référence	Aster	% différence
Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1695 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.2972 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3741 \cdot 10^{-1}$	

Calcul par sous-structuration

Méthode : 'EULER'

Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1480 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.2972 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3823 \cdot 10^{-1}$	

Méthode : 'DEVOGE'

Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$4.3749 \cdot 10^{-1}$	

Méthode : 'NEWMARK'

Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1711 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.3090 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3763 \cdot 10^{-1}$	

Méthode : 'ADAPT'

Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1695 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.2972 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3741 \cdot 10^{-1}$	

4.2 Paramètres d'exécution

Version : 3.4.6
Machine : CRAY C90
Encombrement mémoire : 8 mégamots Temps CPU User : 39.1 secondes

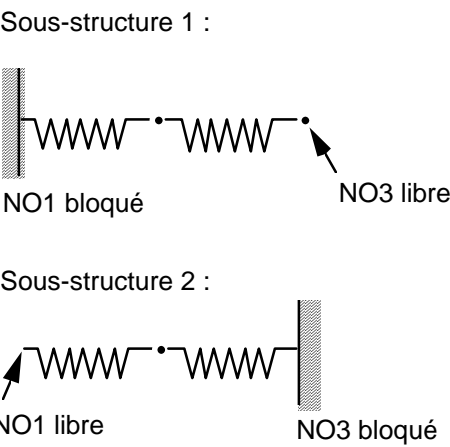
5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est identique à la précédent si ce n'est que les modes propres du système complet sont calculés en utilisant la méthode de calcul modal par sous-structuration avec interfaces de type 'Mac Neal' (interfaces libres). Les bases de chaque sous-structure sont composées d'un mode dynamique et d'un mode d'attache.

La réponse transitoire du système est calculée sur la base modale calculée par sous-structuration.

Plus précisément, les sous-structures étudiées ont leurs interfaces libres :



Les pas de temps utilisés valent : 10^{-2} s en 'EULER', 10^{-2} s en 'NEWMARK', 10^{-2} s en 'DEVOGE', 10^{-2} s en 'ADAPT'.

5.2 Caractéristiques du maillage de la sous-structure

Nombre de noeuds : 3
Nombre de mailles et types : 2 SEG2

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes			Clés
NUME_DDL_GENE	BASE		[U4.55.07]
	STOCKAGE	'DIAG'	
PROJ_MATR_BASE	BASE		[U4.55.01]
	NUME_DDL_GENE		
	MATR_ASSE_GENE		
PROJ_VECT_BASE	BASE		[U4.55.02]
	NUME_DDL_GENE		
	VECT_ASSE_		
REST_BASE_PHYS	MODE_MECA		[U4.64.01]
DYNA_TRAN_MODAL	METHODE	'ADAPT'	[U4.54.03]
		'EULER'	
		'NEWMARK'	
		'DEVOGE'	

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
Méthode : 'EULER'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1480 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.2972 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3823 \cdot 10^{-1}$	
Méthode : 'NEWMARK'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1711 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.3090 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3763 \cdot 10^{-1}$	
Méthode : 'DEVOGE'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$4.3749 \cdot 10^{-1}$	
Méthode : 'ADAPT'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	$4.1700 \cdot 10^{-1}$	$4.1695 \cdot 10^{-1}$	
Noeud x_2 , vitesse (m.s ⁻¹)	$-4.3011 \cdot 10^{-1}$	$-4.2973 \cdot 10^{-1}$	< 1%
Noeud x_2 , accélération (m.s ⁻²)	$3.3749 \cdot 10^{-1}$	$3.3742 \cdot 10^{-1}$	

6.2 Paramètres d'exécution

Version : 3.4.6
Machine : CRAY C90
Encombrement mémoire : 8 mégamots Temps CPU User : 14.8 secondes

7 Modélisation C

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Les modes propres du système complet sont calculés en utilisant la méthode de calcul modal par sous-structuration avec interfaces de type 'Craig-Bampton' (interfaces bloquées). Les bases de chaque sous-structure sont composées d'un mode dynamique et d'un mode contraint.

Au mode dynamique de chaque sous-structure est associé un amortissement réduit de 1%.

La réponse transitoire du système amorti est calculée sur la base modale calculée par sous-structuration.

Les pas de temps pris sont égaux à : 10^{-2} s en 'ADAPT', 10^{-2} s en 'EULER', 10^{-2} s en 'NEWMARK'.

7.2 Caractéristiques du maillage de la sous-structure

Nombre de noeuds : 3

Nombre de mailles et types : 2 SEG2

7.3 Fonctionnalités testées

Commandes		Clés
MACR_ELEM_DYNA	AMOR_REDUIT	[U4.55.05]
NUME_DDL_GENE	BASE	[U4.55.07]
	STOCKAGE 'PLEIN'	
PROJ_MATR_BASE	BASE	[U4.55.01]
	NUME_DDL_GENE	
	MATR_ASSE_GENE	
PROJ_VECT_BASE	BASE	[U4.55.02]
	NUME_DDL_GENE	
	VECT_ASSE_GENE	
REST_BASE_PHYS	MODE_MECA	[U4.64.01]
DYNA_TRAN_MODAL	METHODE	[U4.54.03]

8 Résultats de la modélisation C

8.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
Méthode : 'EULER'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	4.9867 10 ⁻¹	4.9637 10 ⁻¹	< 1%
Méthode : 'NEWMARK'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	4.9867 10 ⁻¹	4.9883 10 ⁻¹	< 1%
Méthode : 'ADAPT'			
Noeud x_2 , déplacement (m)	4.9867 10 ⁻¹	4.9863 10 ⁻¹	< 1%

8.2 Paramètres d'exécution

Version : 3.4.6
Machine : CRAY C90
Encombrement mémoire : 8 mégamots Temps CPU User : 11.0 secondes

9 Synthèse des résultats

La précision sur le déplacement, la vitesse et l'accélération du noeud x_2 à l'instant $t = 80$ s est excellente (erreur relative < 1%).

Ce test valide donc les opérateurs de calcul de réponse transitoire linéaire sur base modale calculée par sous-structuration dynamique (avec et sans amortissement), ainsi que le schéma d'intégration à pas de temps adaptatif de l'opérateur DYNA_TRAN_MODAL.