

## Manuel de Validation

### Fascicule V3.04 : Statique linéaire des structures volumiques

#### Document : V3.04.131

# SSLV131 - Orthotropie dans un repère quelconque

## Résumé

Ce cas test valide les modélisations relatives à l'élasticité linéaire qui mettent en œuvre des matériaux orthotropes dont les propriétés sont connues dans un repère défini par l'utilisateur différent du repère global.

## Table des matières

|     |   |   |
|-----|---|---|
| 1   | Problème de référence .....                 | 3 |
| 1.1 | Géométrie .....                             | 3 |
| 1.2 | Propriétés du matériau .....                | 3 |
| 1.3 | Conditions aux limites et chargements ..... | 4 |
| 2   | Solution de référence .....                 | 4 |
| 2.1 | Méthode de calcul .....                     | 4 |
| 2.2 | Résultats de référence .....                | 5 |
| 2.3 | Incertitudes sur la solution .....          | 5 |
| 2.4 | Références bibliographiques .....           | 5 |
| 3   | Modélisation A .....                        | 6 |
| 3.1 | Caractéristiques de la modélisation .....   | 6 |
| 3.2 | Caractéristiques du maillage .....          | 6 |
| 3.3 | Fonctionnalités testées .....               | 6 |
| 4   | Résultat de la modélisation A .....         | 7 |
| 4.1 | Valeurs testées .....                       | 7 |
| 5   | Synthèse des résultats .....                | 9 |

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

Le repère global est le repère (A,X,Y,Z). Dans ce repère les coordonnées des nœuds sont :

A (0., 0., 0.)

B (3., 1., 0.)

C (2., 3., 0.)

D (3.1, - 1)

Pour le 2D, on étudiera le comportement du triangle ABC dont les propriétés matérielles sont définies dans le repère global (A, x, y) représenté sur la figure ; ce repère est tourné d'un angle  $\alpha$  de  $30^\circ$  autour de Z par rapport au repère global.

Pour le 3D, on étudiera le comportement du tétraèdre ABCD dont les propriétés matérielles sont définies dans un repère local (A, x, y, z) obtenu par rotation du repère global selon les angles nautiques ( $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$ ,  $\gamma = 10^\circ$ ).

Ce repère n'est pas représenté sur la figure.

## 1.2 Propriétés du matériau

Les matériaux utilisés sont orthotrope et isotrope transverse.

On adopte la convention de terminologie utilisée dans ASTER, i.e. les suffixes L, T et N signifient Longitudinal, Transversal et Normal.

Les unités ne seront pas précisées.

$$EL = 11000, ET = 5000, EN = 8000,$$

$$\nu_{LT} = 0.18, \nu_{LN} = 0.15, \nu_{TN} = 0.11$$

$$EL = 11000 ; ET = 5000 ; EN = 8000$$

$$\nu_{LT} = 0.18, \nu_{LT} = 0.15, \nu_{TN} = 0.11,$$

$$G_{LT} = 10500, G_{LT} = 7000, G_{TN} = 13000$$

$$(\text{On sait que } \nu_{TL} = \frac{EL}{ET} \nu_{LT}, \nu_{NL} = \frac{EL}{EN} \nu_{LN}, \nu_{NT} = \frac{ET}{EN} \nu_{TN},$$

$$\text{soit } \nu_{TL} = 0.396, \nu_{NL} = 0.2062, \nu_{NT} = 0.06875$$

Pour l'isotropie transverse, on garde les mêmes valeurs en sachant que :

$$ET = EL, \nu_{TL} = \nu_{LN} \text{ et } G_{LT} = \frac{EL}{2(1+\nu_{LT})}$$

On rappelle que ces coefficients sont définis dans un repère local (A, L, T, N) tourné de  $30^\circ$  dans le plan (L, T) par rapport au repère global pour le 2D et tourné avec les angles nautiques ( $30^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $10^\circ$ ) par rapport au repère global pour le 3D.

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet. On fait l'hypothèse d'un champ de déplacement linéaire en x et y de telle sorte que le champ de déformation est constant.

Pour le 2D on prend  $dX = 2x + 4y$   
 $dY = 4x + 3y$

Pour le 3D on prend  $dX = 2x + 3y + 4z$   
 $dY = 3x + 5y + 6z$   
 $dZ = 4x + 6y + 7z$

Pour le 2D, on va donc imposer :

- pour le nœud A  $dX = 0, dY = 0$
- pour le nœud B  $dX = 10, dY = 15$
- pour le nœud C  $dX = 16, dY = 17$

et pour le 3D :

- pour le nœud A  $dX = 0, dY = 0, dZ = 0$
- pour le nœud B  $dX = 9, dY = 14, dZ = 18$
- pour le nœud C  $dX = 13, dY = 21, dZ = 26$
- pour le nœud D  $dX = 5, dY = 8, dZ = 11$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

Le calcul est analytique.

On a utilisé le programme de calcul formel Mathematica pour le réaliser.

On en expose le principe seulement pour le 3D.

On sait que le champ de déplacement est :

$$dX = 2x + 3y + 4z$$

$$dY = 3x + 5y + 6z$$

$$dZ = 4x + 6y + 7z$$

Le champ de déformations  $\varepsilon_G$  dans le repère global est donc constant et égal à :

$$\varepsilon_G = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Soit  $P$  la matrice de passage permettant de faire passer un vecteur du repère global (A, X, Y, Z) au repère local (A, L, N, T).

Soit  $\varepsilon_L$  le tenseur de déformation dans le repère local. On a :  $\varepsilon_L = P \cdot \varepsilon_G \cdot P^T$

Le tenseur de Hooke  $H_L$  est connu dans le repère local, soit  $\sigma_L$  le tenseur des contraintes dans ce repère. On a :

$$\sigma_L = H_L \cdot \varepsilon_L$$

On obtient le tenseur  $\sigma_G$  des contraintes dans le repère global par :  $\sigma_G = P^T \cdot \sigma_L \cdot P$

## 2.2 Résultats de référence

Ils sont obtenus en effectuant les opérations décrites ci-dessus avec Mathematica.

## 2.3 Incertitudes sur la solution

L'incertitude est nulle car la solution est analytique.

## 2.4 Références bibliographiques

Pour la description des matrices de Hooke pour des matériaux isotrope transverse et orthotrope pour les modélisations 3D, contraintes planes et déformations planes, la référence choisie a été : 'Matrice de Hooke pour les matériaux orthotropes'. Rapport interne applications en Mécanique n° 79-018 de Jean-Claude Masson CISI.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les modélisations suivantes sont mises en œuvre :

- 2D :
  - axisymétrique
  - contraintes planes
  - déformations planes
- 3D.

Pour chacune de ces modélisations, on teste les matériaux isotrope transverse et orthotrope.

Remarques :

- a) L'isotropie transverse n'est pas testée pour les contraintes planes car ce cas correspond à l'isotropie.
- b) Pour le cas axisymétrique le champ de contraintes dépend du point de calcul.  
Ce point est choisi au point d'intégration du triangle (i.e. c'est le centre de gravité du triangle).
- c) On rappelle que l'orthotropie dans un repère quelconque n'est pas disponible pour la modélisation en Fourier car il y a alors couplage de toutes les composantes du tenseur de contraintes :  
La mise en œuvre actuelle permet de n'utiliser que les composantes symétriques à partir desquelles on peut retrouver les composantes antisymétriques mais pour que ce soit possible, il ne faut pas que les glissements induisent des contraintes de traction.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Pour le 2D, on a un élément triangle à 3 nœuds ABC.  
Pour le 3D, on a un élément tétraèdre à 4 nœuds ABCD.

### 3.3 Fonctionnalités testées

| Commandes      | Mot-clé   |
|----------------|-----------|
| DEFI_MATERIAU  | ELAS_ORTH |
| DEFI_MATERIAU  | ELAS_ISTR |
| AFFE_CARA_ELEM | MASSIF    |

## 4 Résultat de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

| Identification  | Référence      | Aster          | % différence |
|---|----------------|----------------|--------------|
| <b>Cas de l'isotropie transverse 3D</b>               |                |                |              |
| nom du résultat : Mest1                               |                |                |              |
| champ depl  |                |                |              |
| dy (c)  | 21             | 21             | 0            |
| champ epsi-elga-depl                                  |                |                |              |
| Epxy  | 3              | 3              | 0            |
| Epxz  | 4              | 4              | 0            |
| Epyz  | 6              | 6              | 0            |
| champ sief.elga.depl                                  |                |                |              |
| Si xx   | 50461,97       | 50461,97       | 0            |
| Si yy   | 80136,037      | 80136,037      | 0            |
| Si zz   | 68682,137      | 68682,137      | 0            |
| Si xy   | 39559,096      | 39559,096      | 0            |
| Si xz   | 30622,542      | 30622,542      | 0            |
| Si yz   | 84027,579      | 84027,579      | 0            |
| champ sigm-elno-depl                                  |                |                |              |
| Si xx   | 50461,971      | 50461,971      | 0            |
| champ emel-elga Ep                                    | $1.23652.10^6$ | $1.23652.10^6$ | 0            |
| Champ emel-elno-elga Ep                               | $1.23652.10^6$ | $1.23652.10^6$ | 0            |
| <b>Cas de l'orthotropie 3D</b>                        |                |                |              |
| nom du résultat : Mest2                               |                |                |              |
| champ depl  |                |                |              |
| dy (c)  | 21             | 21             | 0            |
| champ epsi-elga-depl                                  |                |                |              |
| Epxy  | 3              | 3              | 0            |
| Epxz  | 4              | 4              | 0            |
| Epyz  | 6              | 6              | 0            |
| champ sief-elga-depl                                  |                |                |              |
| Si xx   | 23170,539      | 23170,539      | 0            |
| Si yy   | 78600,676      | 78600,676      | 0            |
| Si zz   | 78692,318      | 78692,318      | 0            |
| Si xy   | 86435,100      | 86435,100      | 0            |
| Si xz   | 16449,622      | 16449,622      | 0            |
| Si yz   | 125577,226     | 125577,226     | 0            |
| champ sigm-elno-depl                                  |                |                |              |
| si xx   | 2370,539       | 2370,539       | 0            |
| champ enel-elga Ep                                    | $1.55286.10^6$ | $1.55286.10^6$ | 0            |
| champ enel-elno-elga Ep                               | $1.55286.10^6$ | $1.55286.10^6$ | 0            |
| <b>Cas de l'isotropie transverse en axisymétrique</b> |                |                |              |
| nom du résultat : Mest3                               |                |                |              |
| champ depl  |                |                |              |
| dy (c)  | 17             | 17             | 0            |
| champ epsi-elga-depl                                  |                |                |              |
| Exxy  | 4              | 4              | 0            |
| champ sief-olga-depl                                  |                |                |              |
| Si xx   | 42930,079      | 42930,079      | 0            |
| Si yy   | 52252,113      | 52252,113      | 0            |
| Si xy   | 37288,135      | 37288,135      | 0            |
| champ enel-elga Ep                                    | $4.15741.10^5$ | $4.15741.10^5$ | 0            |

Titre : SSLV131 - Orthotropie dans un repère quelconque  
Auteur(s) : C. DURAND

Date : 16/11/01  
Clé : V3.04.131-A Page : 8/10

|   |                          |                          |   |
|---|--------------------------|--------------------------|---|
| champ enel-cluo-elga Ep                                     | 4.15741.10 <sup>5</sup>  | 4.15741.10 <sup>5</sup>  | 0 |
| <b>Cas de l'orthotropie en axisymétrie</b>                  |                          |                          |   |
| nom du résultat : Mest4                                     |                          |                          |   |
| champ depl dy (c)   | 17                       | 17                       | 0 |
| champ epsi-elga-depl  |                          |                          |   |
| Epxy  | 4                        | 4                        | 0 |
| champ sief-elga-depl  |                          |                          |   |
| Si xx   | 19438,248                | 19438,248                | 0 |
| Si yy   | 75231,714                | 75231,714                | 0 |
| Si xy   | 53867 ?974               | 53867 ?974               | 0 |
| champ sief-elga-elga Ep                                     | 4,91317-10 <sup>5</sup>  | 4,91317-10 <sup>5</sup>  | 0 |
| champ enel-chro-elga Ep                                     | 4.91317-10 <sup>5</sup>  | 4.91317-10 <sup>5</sup>  | 0 |
| <b>Cas de l'isotropie transverse en déformations planes</b> |                          |                          |   |
| nom du résultat : Mest5                                     |                          |                          |   |
| champ depl dy(c)  | 17                       | 17                       | 0 |
| champ epsi-elga-depl Epxy                                   | 4                        | 4                        | 0 |
| champ sief-elga-depl  |                          |                          |   |
| Si xx   | 31612,684                | 31612,684                | 0 |
| Si yz   | 40934,718                | 8                        | 0 |
| Si xy   | 37288,135                | 37288,135                | 0 |
| champ sigm-elno-depl  |                          |                          |   |
| si xx   | 31612,684                | 31612,684                | 0 |
| champ enel-elga Ep  | 2.42167.10 <sup>5</sup>  | 2.42167.10 <sup>5</sup>  | 0 |
| champ enel-elno-elga Ep                                     | 2.42167.10 <sup>5</sup>  | 2.42167.10 <sup>5</sup>  | 0 |
| <b>Cas de l'orthotropie en déformations planes</b>          |                          |                          |   |
| nom du résultat : Mest6                                     |                          |                          |   |
| champ depl dy(c)  | 17                       | 17                       | 0 |
| champ epsi-elga-depl Epxy                                   | 4                        | 4                        | 0 |
| champ sief-elga-depl  |                          |                          |   |
| Si xx   | 9931,422                 | 9931,422                 | 0 |
| Si yy   | 68733,870                | 68733,870                | 0 |
| Si xy   | 51262,119                | 51262,119                | 0 |
| champ sigm-elno-depl  |                          |                          |   |
| si xx   | 9931,422                 | 9931,422                 | 0 |
| champ Ep-enel-elga Ep                                       | 3.180807.10 <sup>5</sup> | 3.180807.10 <sup>5</sup> | 0 |
| champ enel-elno-elga  | 3.180807.10 <sup>5</sup> | 3.180807.10 <sup>5</sup> | 0 |
| <b>Cas de l'orthotropie en contraintes planes</b>           |                          |                          |   |
| nom du résultat : Mest7                                     |                          |                          |   |
| champ depl dy(c)  | 17                       | 17                       | 0 |
| champ epsi-elga-depl Epxy                                   | 4                        | 4                        | 0 |
| champ sief-elga-depl  |                          |                          |   |
| Si xx   | 7454,007                 | 7454,007                 | 0 |
| champ emel-elga Eo  | 3.10347.10 <sup>5</sup>  | 3.10347.10 <sup>5</sup>  | 0 |
| champ emel-elno-elga Ep                                     | 3.10347.10 <sup>5</sup>  | 3.10347.10 <sup>5</sup>  | 0 |

Dans le cas asymétrique, les valeurs du champ des déformations et du champ des contraintes sont données au point d'intégration du triangle (i.e. son centre de gravité) dont les coordonnées sont :

X = 1.666667  
Y = 1.333334  
Z = 0



## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats fournis par Mathématica et Aster sont identiques pour toutes les modélisations utilisables avec des matériaux isotrope transverse et orthotrope.

Page laissée intentionnellement blanche.