

Manuel de Validation**Fascicule V2.01 : Dynamique linéaire des systèmes discrets****Document V2.01.103**

SDLD103 - Réponse sismique d'un système 3 masses et 4 ressorts multi-supporté

Résumé

Le problème consiste à analyser la réponse d'une structure mécanique de type poutre encastree-encastree et non amortie, modelisée par un système 3 masses et 4 ressorts et soumise à un chargement sismique quelconque.

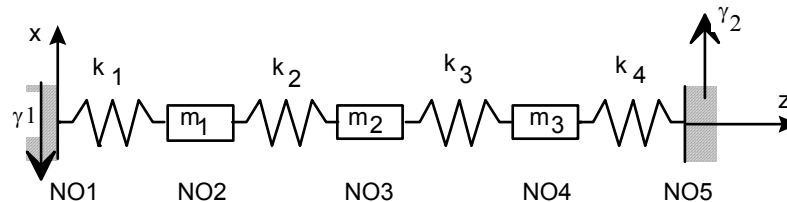
On teste l'élément discret en traction et rotation, le calcul des modes propres et des modes statiques et le calcul de la réponse transitoire par superposition modale d'une structure soumise à un accélérogramme de translation (modélisation A) ou de rotation (modélisation B).

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats de référence (résultats analytiques).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La poutre est modélisée par un ensemble de 4 ressorts et de 3 masses ponctuelles.



1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 104 \text{ N/m}$;
masse ponctuelle : $m = m_1 = m_2 = m_3 = 10 \text{ kg}$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .

Les points NO1 et NO5 sont encastres : $dx = dy = dz = drx = dry = drz = 0$.

Les autres points sont libres en translation selon la direction x : $dy = dz = drx = dry = drz = 0$.

Chargement :

Les points d'ancrage NO1 et NO5 sont chacun soumis à une accélération transversale $\gamma_1(t) = at^2$ avec $a = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}^4$ en NO1 et $\gamma_2(t) = 0 \text{ m/s}^2$ en NO5.

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos : à $t = 0$, $dx(0) = 0$, $dx / dt(0) = 0$ en tout point.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème consiste à calculer la réponse d'un système à cinq degrés de liberté soumis à deux accélérations $\gamma 1(t)$ et $\gamma 2(t)$ distinctes de forme quelconque. Il est exposé en détail dans la référence [bib2].

On calcule dans un premier temps les fréquences propres f_i , les vecteurs propres associés normalisés par rapport à la masse modale Φ_{Ni} et les modes statiques Ψ du système (valeurs analytiques). On calcule ensuite la réponse généralisée du système multi-supporté en résolvant analytiquement l'intégrale de Duhamel [bib1]. Enfin, on restitue sur la base physique le vecteur des déplacements relatifs (sur les degrés de liberté actifs) \mathbf{X}_r , ce qui nous permet, après avoir calculé le vecteur des déplacements d'entraînement \mathbf{X}_e , de calculer le vecteur des déplacements absolus $\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_r + \mathbf{X}_e$.

2.2 Résultats de référence

- Calcul des trois fréquences propres f_i , des vecteurs propres associés normalisés par rapport à la masse modale Φ_{Ni} et des modes statiques Ψ du système

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})m/2k}} = 3,85 \text{ Hz} \\ f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{m/2k}} = 7,12 \text{ Hz} \\ f_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})m/2k}} = 9,3 \text{ Hz} \end{cases}, \Phi_N = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Psi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Calcul de la réponse généralisée du système multi-supporté

L'équation fondamentale de la dynamique, dans le repère relatif sur les degrés de liberté actifs s'écrit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_r + \mathbf{K} \mathbf{X}_r = (\mathbf{M}\Psi + \mathbf{M}_{xs}) \ddot{\mathbf{X}}_s \text{ avec } \ddot{\mathbf{X}}_s = \begin{bmatrix} at^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ le vecteur des accélérations imposées au}$$

niveau des différents points d'ancrage.

L'équation du mouvement projetée sur la base des modes dynamiques normalisés par rapport à la masse modale Φ_N s'écrit, en ne considérant que les degrés de liberté actifs :

$$\ddot{q}(t) + K_G q(t) = -\Phi_N^T \mathbf{M} \Psi \ddot{\mathbf{X}}_s = -\frac{a\sqrt{m} t^2}{4} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

La réponse de ce système linéaire, à un instant t , consiste alors à calculer l'intégrale de Duhamel :

$$q(t) = -\frac{a\sqrt{m^3}}{4k} \begin{bmatrix} (3+2\sqrt{2})(t^2 + (2+\sqrt{2})(\cos\omega_1 t - 1)m/k) \\ (t^2 + (\cos\omega_2 t - 1)m/k)/\sqrt{2} \\ (3-2\sqrt{2})(t^2 + (2-\sqrt{2})(\cos\omega_3 t - 1)m/k) \end{bmatrix}.$$

- Calcul du déplacement relatif aux degrés de liberté actifs : $\mathbf{X}_r = \sum_i \Phi_{Ni} q_i$, soit :

$$\mathbf{X}_r = -\frac{a m}{8k} \begin{bmatrix} 7t^2 + \left[(10+7\sqrt{2})\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t - 1) + (\cos\omega_2 t - 1) + (10-7\sqrt{2})(\cos\omega_3 t - 1) \right] m/k \\ 8t^2 + \left[(10\sqrt{2}+14)\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t - 1) + (-10\sqrt{2}+14)(\cos\omega_3 t - 1) \right] m/k \\ 5t^2 + \left[(10+7\sqrt{2})\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t - 1) - (\cos\omega_2 t - 1) + (10-7\sqrt{2})(\cos\omega_3 t - 1) \right] m/k \end{bmatrix}.$$

- Calcul des déplacements d'entraînement aux degrés de liberté actifs : $\mathbf{X}_e = \Psi \mathbf{X}_s = a \frac{t^4}{48} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- Calcul des déplacements absolus aux degrés de liberté actifs : $\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_r + \mathbf{X}_e.$

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune si l'on calcule l'intégrale de Duhamel analytiquement [bib1].

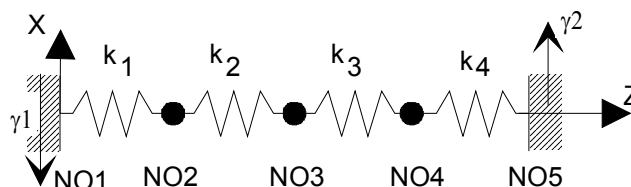
2.4 Références bibliographiques

- [1] J.S. PRZEMIENIECKI : Theorie of matrix structural analysis. New York, Mac Graw-Hill, 1968, pages 351-357.
- [2] Fe WAECKEL : Documentations utilisation et validation des développements réalisés pour calculer la réponse sismique de structures multi-supportées. HP-52/96/002

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T.



Le nœud NO1 est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud NO5 à $\gamma_2(t)$. On calcule le déplacement relatif des nœuds NO2, NO3 et NO4 par rapport à leur déformée statique, leur déplacement d'entraînement et leur déplacement absolu.

L'intégration temporelle est réalisée avec les algorithmes d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde), de Devogelaere (pas de temps : 10^{-3} seconde) et avec un algorithme à pas de temps adaptatif.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 nœuds et de 4 éléments discrets (DIS_T).

3.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés doc V5
AFFE_MODELE	GROUP_MA	'MECANIQUE'	'DIS_T'	[U4.41.01]
AFFE_CARA_ELEM	DISCRET	NOEUD MAILLE	M_T_D_N K_T_D_L	[U4.42.01]
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO			[U4.44.01]
MACRO_MATR_ASSE				[U4.61.21]
MODE_ITER_INV	CALC_FREQ	AJUSTE		[U4.52.04]
CALC_FONC_INTERP				[U4.32.01]
MODE_STATIQUE	DDL_IMPO			[U4.52.14]
CALC_CHAR_SEISME	NOEUD			[U4.63.01]
MACRO_PROJ_BASE				[U4.63.11]
DYNA_TRAN_MODAL	EXCIT METHODE	MULT_APPUI EULER DEVOGE ADAPT	'OUI'	[U4.53.21]
REST_BASE_PHYS	MULT_APPUI MULT_APPUI	'OUI' 'NON'		[U4.63.21]
RECU_FONCTION	RESU_GENE			[U4.32.03]

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées de la modélisation A

4.1.1 Déplacements relatifs des nœuds NO2, NO3 et NO4

- Déplacements relatifs du nœud NO2 avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-8,47734E-01	-8,47725E-01	-0,001
0,3	-1,55202E+01	-1,55201E+01	0
0,5	-4,36449E+01	-4,36450E+01	0
0,7	-8,50830E+01	-8,50832E+01	0
1,0	-1,74790E+02	-1,74790E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO2 avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-8,47734E-01	-8,47734E-01	0
0,3	-1,55202E+01	-1,55202E+01	0
0,5	-4,36449E+01	-4,36449E+01	0
0,7	-8,50830E+01	-8,50830E+01	0
1,0	-1,74790E+02	-1,74790E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO2 avec l'algorithme d'intégration numérique à pas de temps adaptatifs :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-8,47734E-01	-8,47761E-01	0,003
0,3	-1,55202E+01	-1,55201E+01	0
0,5	-4,36449E+01	-4,36450E+01	0
0,7	-8,50830E+01	-8,50832E+01	0
1,0	-1,74790E+02	-1,74790E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO3 avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,01	9,87666E-10	7,32629E-05	0 *
0,02	2,49501E-07	1,46526E-04	0 *
0,03	6,25468E-06	2,19789E-04	0 *
0,04	6,05829E-05	2,93052E-04	0 *
0,05	3,47191E-04	3,66314E-04	0 *
0,06	1,42349E-03	1,32757E-02	0,012 *
0,07	4,62144E-03	2,61852E-02	0,022 *
0,08	1,26245E-02	3,90946E-02	0,026 *
0,09	3,01825E-02	5,20040E-02	0,022 *
0,1	-7,68449E-01	-7,68420E-01	-0,004
0,3	-1,76923E+01	-1,76922E+01	0
0,5	-4,99310E+01	-4,99311E+01	0
0,7	-9,70711E+01	-9,70714E+01	0
1,0	-1,99722E+02	-1,99722E+02	0

* erreur absolue

- Déplacements relatifs du nœud NO3 avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-7,68449E-01	-7,68449E-01	0
0,3	-1,76923E+01	-1,76923E+01	0
0,5	-4,99310E+01	-4,99310E+01	0
0,7	-9,70711E+01	-9,70711E+01	0
1,0	-1,99722E+02	-1,99722E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO3 avec l'algorithme d'intégration numérique à pas de temps adaptatifs :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-7,68449E-01	-7,68462E-01	0,002
0,3	-1,76923E+01	-1,76922E+01	0
0,5	-4,99310E+01	-4,99311E+01	0
0,7	-9,70711E+01	-9,70715E+01	0
1,0	-1,99722E+02	-1,99722E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO4 avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-4,09632E-01	-4,09604E-01	-0,007
0,3	-1,10372E+01	-1,10371E+01	0
0,5	-3,12415E+01	-3,12416E+01	0
0,7	-6,05833E+01	-6,05835E+01	0
1,0	-1,24803E+02	-1,24804E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO4 avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-4,09632E-01	-4,09632E-01	0
0,3	-1,10372E+01	-1,10372E+01	0
0,5	-3,12415E+01	-3,12415E+01	0
0,7	-6,05833E+01	-6,05833E+01	0
1,0	-1,24803E+02	-1,24803E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO4 avec l'algorithme d'intégration numérique à pas de temps adaptatifs :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-4,09632E-01	-4,09630E-01	0
0,3	-1,10372E+01	-1,10371E+01	0
0,5	-3,12415E+01	-3,12416E+01	0
0,7	-6,05833E+01	-6,05835E+01	0
1,0	-1,24803E+02	-1,24804E+02	0

4.1.2 Déplacements absolus des nœuds NO2, NO3 et NO4

- Déplacements absolus du nœud NO2 avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	4,02266E-01	4,02275E-01	0,002
0,3	8,57298E+01	8,57299E+01	0
0,5	7,37605E+02	7,37605E+02	0
0,7	2,91617E+03	2,91617E+03	0
1,0	1,23252E+04	1,23252E+04	0

- Déplacements absolus du nœud NO2 avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	4,02266E-01	4,02266E-01	0
0,3	8,57298E+01	8,57298E+01	0
0,5	7,37605E+02	7,37605E+02	0
0,7	2,91617E+03	2,91617E+03	0
1,0	1,23252E+04	1,23252E+04	0

- Déplacements absolus du nœud NO2 avec l'algorithme d'intégration numérique à pas de temps adaptatifs :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	4,02266E-01	4,02239E-01	-0,007
0,3	8,57298E+01	8,57299E+01	0
0,5	7,37605E+02	7,37605E+02	0
0,7	2,91617E+03	2,91617E+03	0
1,0	1,23252E+04	1,23252E+04	0

- Déplacements absolus du nœud NO3 avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	6,48847E-02	6,49134E-02	0,044
0,3	4,98077E+01	4,98078E+01	0
0,5	4,70902E+02	4,70902E+02	0
0,7	1,90376E+03	1,90376E+03	0
1,0	8,13361E+03	8,13361E+03	0

- Déplacements absolus du nœud NO3 avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	6,48847E-02	6,48847E-02	0
0,3	4,98077E+01	4,98077E+01	0
0,5	4,70902E+02	4,70902E+02	0
0,7	1,90376E+03	1,90376E+03	0
1,0	8,13361E+03	8,13361E+03	0

- Déplacements absolus du nœud NO3 avec l'algorithme d'intégration numérique à pas de temps adaptatifs :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	6,48847E-02	6,48714E-02	-0,021
0,3	4,98077E+01	4,98078E+01	0
0,5	4,70902E+02	4,70902E+02	0
0,7	1,90376E+03	1,90376E+03	0
1,0	8,13361E+03	8,13361E+03	0

- Déplacements absolus du nœud NO4 avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	7,03506E-03	7,06261E-03	0
0,3	2,27128E+01	2,27129E+01	0
0,5	2,29175E+02	2,29175E+02	0
0,7	9,39833E+02	9,39833E+02	0
1,0	4,04186E+03	4,04186E+03	0

- Déplacements absolus du nœud NO4 avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	7,03506E-03	7,03504E-03	0
0,3	2,27128E+01	2,27128E+01	0
0,5	2,29175E+02	2,29175E+02	0
0,7	9,39833E+02	9,39833E+02	0
1,0	4,04186E+03	4,04186E+03	0

- Déplacements absolus du nœud NO4 avec l'algorithme d'intégration numérique à pas de temps adaptatifs :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	7,03506E-03	7,03655E-03	0
0,3	2,27128E+01	2,27129E+01	0
0,5	2,29175E+02	2,29175E+02	0
0,7	9,39833E+02	9,39833E+02	0
1,0	4,04186E+03	4,04186E+03	0

4.2 Paramètres d'exécution

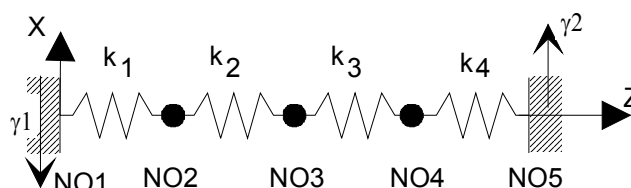
Version : STA 5.02
Machine : SGI Origin 2000
Temps CPU user : 16,4 secondes

5 Modélisation B

C'est la même modélisation que la précédente à l'exception du chargement qui est un accélérogramme de rotation.

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté `DIS_T`.



Le nœud NO1 est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud NO5 à $\gamma_2(t)$. On calcule le déplacement relatif des nœuds NO2, NO3 et NO4 par rapport à leur déformée statique, leur déplacement d'entraînement et leur déplacement absolu.

L'intégration temporelle est réalisée avec l'algorithme d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde).

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 noeuds et de 4 éléments discrets (`DIST_TR`).

5.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés doc V5
<code>AFFE_MODELE</code>	<code>GROUP_MA</code>	'MECANIQUE'	'DIS_T'	[U4.41.01]
<code>AFFE_CARA_ELEM</code>	<code>DISCRET</code>	<code>NOEUD</code>	<code>M_TR_D_N</code>	[U4.42.01]
		<code>MAILLE</code>	<code>K_TR_D_L</code>	
<code>AFFE_CHAR_MECA</code>	<code>DDL_IMPO</code>			[U4.44.01]
<code>MACRO_MATR_ASSE</code>				[U4.61.21]
<code>MODE_ITER_INV</code>	<code>CALC_FREQ</code>	<code>AJUSTE</code>		[U4.52.04]
<code>CALC_FONC_INTERP</code>				[U4.32.01]
<code>MODE_STATIQUE</code>	<code>DDL_IMPO</code>			[U4.52.14]
<code>CALC_CHAR_SEISME</code>	<code>NOEUD</code>			[U4.63.01]
<code>MACRO_PROJ_BASE</code>				[U4.63.11]
<code>DYNA_TRAN_MODAL</code>	<code>EXCIT</code>	<code>MULT_APPUI</code>	'OUI'	[U4.53.21]
	<code>METHODE</code>	<code>EULER</code>		
<code>REST_BASE_PHYS</code>	<code>MULT_APPUI</code>	'OUI'		[U4.63.21]
	<code>MULT_APPUI</code>	'NON'		
<code>RECU_FONCTION</code>	<code>RESU_GENE</code>			[U4.32.03]

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées de la modélisation B

6.1.1 Déplacements relatifs des nœuds NO2, NO3 et NO4

- Déplacements relatifs du nœud NO2 :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-8,47734E-01	-8,47725E-01	-0,001
0,3	-1,55202E+01	-1,55201E+01	0
0,5	-4,36449E+01	-4,36450E+01	0
0,7	-8,50830E+01	-8,50832E+01	0
1,0	-1,74790E+02	-1,74790E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO3 :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-7,68449E-01	-7,68420E-01	-0,004
0,3	-1,76923E+01	-1,76922E+01	0
0,5	-4,99310E+01	-4,99311E+01	0
0,7	-9,70711E+01	-9,70714E+01	0
1,0	-1,99722E+02	-1,99722E+02	0

- Déplacements relatifs du nœud NO4 :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	-4,09632E-01	-4,09604E-01	-0,007
0,3	-1,10372E+01	-1,10371E+01	0
0,5	-3,12415E+01	-3,12416E+01	0
0,7	-6,05833E+01	-6,05835E+01	0
1,0	-1,24803E+02	-1,24804E+02	0

6.1.2 Déplacements absolus des nœuds NO2, NO3 et NO4

- Déplacements absolus du nœud NO2 :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	4,02266E-01	4,02275E-01	0,002
0,3	8,57298E+01	8,57299E+01	0
0,5	7,37605E+02	7,37605E+02	0
0,7	2,91617E+03	2,91617E+03	0
1,0	1,23252E+04	1,23252E+04	0

- Déplacements absolus du nœud NO3 :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,01	9,87666E-10	7,32627E-05	0 *
0,02	2,49501E-07	1,46525E-04	0 *
0,03	6,25468E-06	2,19788E-04	0 *
0,04	6,05829E-05	2,93051E-04	0 *
0,05	3,47191E-04	3,66313E-04	0 *
0,06	1,42349E-03	1,32757E-02	0,012 *
0,07	4,62144E-03	2,61852E-02	0,022 *
0,08	1,26245E-02	3,90946E-02	0,026 *
0,09	3,01825E-02	5,20040E-02	0,022 *
0,10	6,48847E-02	6,49134E-02	0,044
0,30	4,98077E+01	4,98078E+01	0
0,50	4,70902E+02	4,70902E+02	0
0,70	1,90376E+03	1,90376E+03	0
1,0	8,13361E+03	8,13361E+03	0

* erreur absolue

- Déplacements absolus du nœud NO4 :

Temps (s)	Référence	Code_Aster	Erreur (%)
0,1	7,03506E-03	7,06264E-03	0
0,3	2,27128E+01	2,27129E+01	0
0,5	2,29175E+02	2,29175E+02	0
0,7	9,39833E+02	9,39833E+02	0
1,0	4,04186E+03	4,04186E+03	0

6.2 Paramètres d'exécution

Version : STA 5.02
Machine : Sgi Origin 2000
Temps Cpu user : 14,3 secondes

7 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus avec le *Code_Aster* sont conformes aux résultats de référence (l'erreur est en générale inférieure à 0,03%).