

**Manuel de Validation**  
**Fascicule V2.02 : Dynamique linéaire des poutres**  
**Document V2.02.010**

## **SDLL10 - Poutre de section rectangulaire variable (encastrée-encastrée)**

---

### **Résumé :**

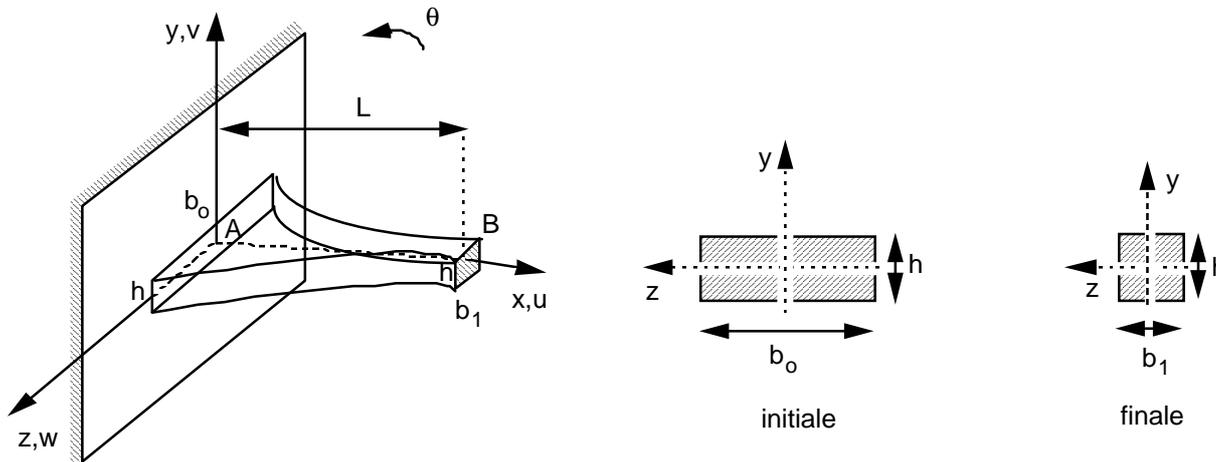
Ce problème plan consiste à chercher les fréquences et les modes de vibration d'une structure mécanique composée d'une poutre encastrée-encastrée dont l'aire de la section droite varie de façon exponentielle. Ce test de Mécanique des Structures correspond à une analyse dynamique d'un modèle linéique ayant un comportement linéaire. Il comprend une seule modélisation.

Par l'intermédiaire de ce problème, on teste l'élément de poutre en flexion de Timoshenko de section variable ainsi que le calcul des fréquences et des modes de vibration par la méthode de Lanczos. On teste aussi la fonctionnalité "norme à 1." au point d'amplitude maximale en translation" des modes de vibration.

En utilisant une discrétisation spatiale fine, les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats analytiques donnés dans le guide VPCS.

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie



Longueur de la poutre :  $L = 0.6$  m  
Epaisseur constante :  $h = 0.01$  m

### Section rectangulaire :

Section droite initiale :  
 largeur :  $b_0 = 0.03$  m  
 aire :  $A_0 = 3.10^{-4}$  m<sup>2</sup>  
 moment d'inertie :  $I_{z_0} = 0.25 \cdot 10^{-8}$  m<sup>4</sup>

Variation de la section :  
 $b = b_0 e^{-2\alpha x}$  avec  $\alpha = 1$ .  
 $A = A_0 e^{-2\alpha x}$   
 $I_z = I_{z_0} e^{-2\alpha x}$

### Coordonnées des points (m) :

	A	B
x	0.	0.6
y	0.	0.

## 1.2 Propriétés de matériaux

$E = 2.10^{11}$  Pa  
 $\nu = 0.3$   
 $\rho = 7\,800$ . kg/m<sup>3</sup>

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Points A et B : encastés,  $u = v = 0.$ ,  $\theta = 0$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLL10/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

La pulsation  $\omega_i$  est donnée par les racines de l'équation :

$$1 - \cos(rL) \operatorname{ch}(sL) + \frac{s^2 - r^2}{2rs} \operatorname{sh}(sL) \sin(rL) = 0$$

avec :

$$\lambda_i^4 = \frac{\rho A_0 \omega_i^2}{E I_{z0}} ; \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \lambda_i^2} ; \quad s = \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha^2} \text{ si } (\lambda_i^2 - \alpha^2) > 0$$

Les composantes de translation  $v$  du mode  $F_i(x)$  sont alors :

$$\phi_i(x) = e^{\alpha x} \left[ \cos(rx) - \operatorname{ch}(sx) + \frac{\cos(rL) - \operatorname{ch}(sL)}{r \operatorname{sh}(sL) - s \sin(rL)} (s \sin(rx) - r \operatorname{sh}(sx)) \right]$$

### 2.2 Résultats de référence

4 premières fréquences propres et modes propres normés à 1 pour la plus grande composante en translation.

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

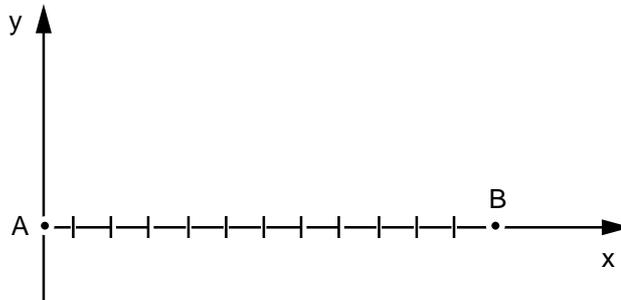
### 2.4 Références bibliographiques

- [1] Groupe de travail Analyse Dynamique. Comité de Validation des Progiciels de Calcul de Structure. Société Française des Mécaniciens (1988).

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Elément de poutre POU\_D\_T (Poutre droite de Timoshenko)



Découpage : poutre AB : 120 mailles SEG2 de section variable.

Conditions limites :  
 en tous les nœuds DDL\_IMPO ( TOUT: 'OUI' ,DZ: 0. , DRX: 0. , DRY: 0. )  
 aux nœuds  
 extrémités ( NŒUD: (AB) DX: 0. , DY: 0. , DRZ: 0. )

Noms des nœuds :  
 Point A x = 0. = N1  
 x = 0.1 = N21  
 x = 0.2 = N41  
 x = 0.3 = N61  
 x = 0.4 = N81  
 x = 0.5 = N101  
 Point B x = 0.6 = N121

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121  
 Nombre de mailles et types : 120 SEG2

#### 3.3 Fonctionnalités testées

Commandes				Clés
AFFE_CARA_ELEM	POUTRE	'GENERALE'	MAILLE	[U4.24.01]
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	TOUT		[U4.25.01]
		NOEUD		
AFFE_MATERIAU	TOUT			[U4.23.02]
AFFE_MODELE	'MECANIQUE'	'POU_D_T'	TOUT	[U4.22.01]
DEFI_MATERIAU	ELAS			[U4.23.01]
MODE_ITER_SIMULT	METHODE	'TRI_DIAG'		[U4.52.02]
	CALC_FREQ	OPTION	'PLUS_PETITE'	
		NMAX_FREQ		
NORM_MODE	NORME	'TRAN'		[U4.64.02]

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

Ordre du mode propre	Fréquence Référence	Aster	% différence	% tolérance
1	143.303	145.924	1.598	1.6
2	396.821	398.511	0.426	0.45
3	779.425	777.115	-0.296	0.3
4	1289.577	1278.011	-0.897	0.9

Les modes propres de Aster ont été normés à 1. au point d'amplitude maximum en translation comme dans la référence.

#### Mode propre $F_i(x)$ normé à 1 au point d'amplitude maximale

	i	x = 0.1	x = 0.2	x = 0.3	x = 0.4	x = 0.5
Référence		0.2349	0.6962	0.98960	0.8505	0.3507
Aster	1	0.2363	0.6970	0.9895	0.8516	0.3529
% différence		0.583	0.119	0.	0.132	0.631
% tolérance		0.6	0.15	0.1	0.15	0.7
Référence		-0.4653	-0.7558	0.	0.9232	0.6941
Aster	2	-0.4670	-0.7555	-2.910 <sup>-4</sup>	0.9226	0.6971
% différence		0.37	-0.041	-2.910 <sup>-4</sup>	-0.063	0.435
% tolérance		0.4	0.1	1.10 <sup>-3</sup>	0.1	0.45
Référence		0.6278	0.1969	-0.7783	0.2406	0.9366
Aster	3	0.6290	0.1952	-0.7782	0.2377	0.9387
% différence		0.192	-0.89	-0.014	-1.226	0.228
% tolérance		0.2	0.9	0.1	1.23	0.25
Référence		-0.666	0.4832	0.	-0.5901	0.9937
Aster	4	-0.6656	0.4840	4.610 <sup>-4</sup>	-0.5919	0.9928
% différence		-0.081	0.18	4.610 <sup>-4</sup>	0.31	-0.089
% tolérance		0.1	0.2	1.10 <sup>-3</sup>	0.35	0.1

### 4.2 Remarques

Calculs effectués par :

```
MODE_ITER_SIMULT METHODE: 'TRI_DIAG'
OPTION: 'PLUS_PETITE' NMAX_FREQ: 4
```

#### Contenu du fichier résultats :

4 premières fréquences propres, vecteurs propres.

### 4.3 Paramètres d'exécution

```
Version : 3.02.21
Machine : CRAY C90
Encombrement mémoire : 8 mégamots
Système : UNICOS 8.0
Temps CPU User : 9.8 secondes
```

---

## 5 Synthèse des résultats

---

Modélisation convenable (fréquences et modes propres à moins de 2%) avec un maillage fin.

Un calcul effectué sur un maillage grossier (12 mailles) montre des écarts plus importants avec la solution de référence. Ceci est surtout dû à la façon dont sont normés les modes.