

Manuel de Validation**Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des structures volumiques****Document : V6.04.186**

SSNV186 – LBB condition et contact frottant avec X-FEM

Résumé

Ce test a pour but de valider la prise en compte du contact (par la méthode continue [bib1]) sur les lèvres de la fissure dans le cadre de la méthode X-FEM [bib2], lorsque la LBB condition [bib3] [bib4] n'est pas respectée.

Ce test met en jeu un bloc parallélépipédique en compression. L'interface le traversant est représentée par une level set. L'interface est droite, non-penchée et traverse complètement les éléments.

1 Problème de référence

Des oscillations des pressions de contact peuvent apparaître dans certains cas, notamment pour des structures où l'interface coupe des pentaèdres, sous un chargement non-uniforme.

Cela est dû au non-respect de la LBB condition [bib3] [bib4]. Ce phénomène d'oscillations est comparable à celui rencontré en incompressibilité [bib5]. Physiquement, dans le cas du contact, cela revient à vouloir imposer le contact en trop de points de l'interface (surcontrainte), rendant le système hyperstatique. Pour le relâcher, il faut restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange, comme cela est fait dans [bib6] pour les conditions de Dirichlet avec X-FEM. L'algorithme proposé par Moës [bib6] pour réduire les oscillations est adapté au cas 3D (algorithme version 1). Cet algorithme a fait l'objet d'une amélioration pour le rendre plus physique et plus efficace (algorithme version 2). Une comparaison des deux versions est effectuée.

Notons qu'avec un maillage d'hexaèdres, il n'y a pas d'oscillations.

1.1 Géométrie

La structure est un parallélépipède droit à base carrée et sain. Les dimensions du bloc sont : $LX = 5$ m, $LY = 20$ m et $LZ = 20$ m. Il ne comporte aucune fissure [Figure 1.1-a].

L'interface est introduite par des fonctions de niveaux (level sets) directement dans le fichier de commandes à l'aide de l'opérateur `DEFI_FISS_XFEM` [U4.82.08]. L'interface est présente au sein de la structure par le biais de sa représentation par les level sets. La level set normale (LSN) permet de définir une interface plane non-penchée qui traverse complètement les éléments, par l'équation suivante :

$$LSN = Z - 17.5 \quad \text{éq 1.1-1}$$

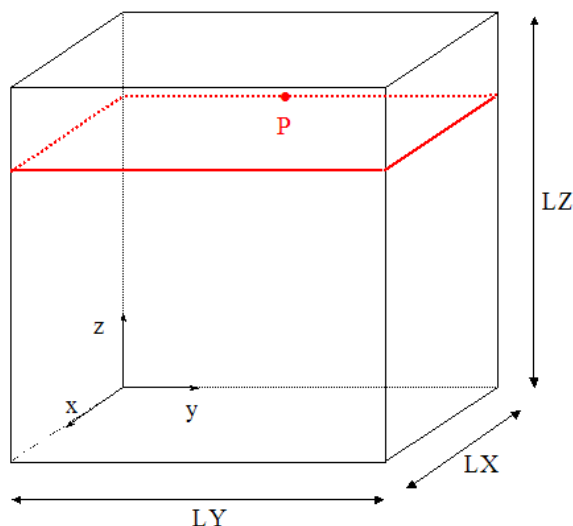


Figure 1.1-a : Géométrie et positionnement de l'interface

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young : $E = 1000$ Pa.

Coefficient de Poisson : $\nu = 0$.

Un module d'Young plus élevé entraîne un très mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, qui se traduit par un pivot nul lors de la factorisation. Pour palier ce problème, une mise à l'échelle des pressions de contact est en cours d'implémentation.

1.3 Conditions aux limites et chargements

La face inférieure est encastree.

La face supérieure est soumise à une pression parabolique ayant pour expression :

$$pression = \left(100 - \frac{(Y-10)^2}{2} \right) \frac{E}{10^6} \text{ Pa} \quad \text{éq 1.3-1}$$

Les déplacements suivant les axes x et y sont bloqués pour les nœuds de la surface supérieure.

2 Modélisation A : hexaèdres

Dans cette modélisation, le maillage considéré ne comporte que des hexaèdres. Cette modélisation sert de référence pour les autres, car ce cas ne présente pas d'oscillations des pressions de contact. En effet, dans le cas des hexaèdres coupés par une interface parallèlement aux faces, le nombre de pressions de contact (une par arête coupée) est compatible avec la discrétisation du champ de déplacement [bib1] [bib2]. La LBB condition est alors respectée et il n'y a pas d'oscillations des pressions de contact.

2.1 Caractéristiques du maillage

Le problème est invariant suivant l'axe Ox. Afin de limiter le temps de calcul, le maillage considéré ici ne comporte qu'un seul élément suivant cet axe. La structure est alors modélisée par un maillage régulier composé de 1x20x20 HEXA8 voir [Figure 2.1-a].

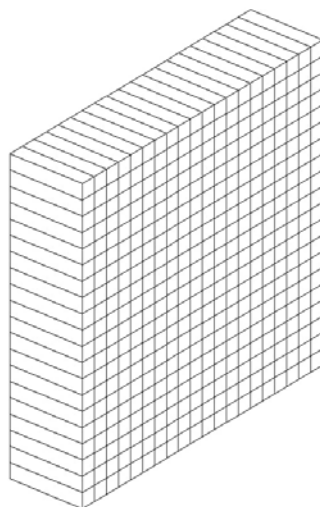


Figure 2.1-a : Maillage d'hexaèdres

Ce maillage est composé d'éléments finis linéaires. Cependant, dans le cadre de la méthode continue [bib1] avec X-FEM [bib2], il est nécessaire de passer à des éléments linéaires un peu spéciaux. Ces éléments ont des fonctions de forme linéaires et une maille support quadratique. Sur ces éléments, les nœuds sommet portent les inconnues du déplacement, et les nœuds milieu portent les inconnues liées au contact. De plus, lorsque l'interface suit la bordure d'un élément, ses nœuds sommet portent aussi les inconnues de contact.

2.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact. Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est désactivé.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	INTEGRATION='FPG4'
		CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='NON'

3 Résultats de la modélisation A

3.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (0, 10, 17.5). Cette valeur sert de référence pour les autres modélisations.

$$\lambda = -9.52844 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$$

4 Modélisation B : pentaèdres (sans algorithme)

4.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage régulier composé de pentaèdres.

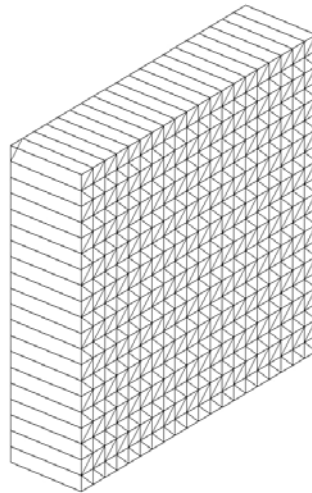


Figure 4.1-a : Maillage de pentaèdres

4.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.
Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives.
L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange n'est pas activé.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	INTEGRATION='FPG4'
		CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='NON'

5 Résultats de la modélisation B

5.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (0, 10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	-0.186853	96.0

On réalise aussi un test de non-régression (par rapport à la version 8.1.20).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	-0.186853	-0.186853	0.00

5.2 Commentaires

Cette modélisation montre que sans l'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange de pression, les valeurs des pressions de contact sont complètement fausses (voir aussi la [Figure 12.2-a]).

6 Modélisation C : pentaèdres (algorithme version 1)

6.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

6.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.
Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives.
L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	INTEGRATION='FPG4'
		CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='VERSION1'

7 Résultats de la modélisation C

7.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (0, 10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.5188 \cdot 10^{-2}$	0.10

7.2 Commentaires

Cette modélisation montre que l'algorithme mis en place permet de réduire de manière efficace les oscillations. Cependant, on observe que l'algorithme version 1 a tendance à introduire des approximations P0 par morceaux des pressions de contact sur l'interface (voir aussi la [Figure 12.2-a] et la [Figure 12.2-b]).

8 Modélisation D : pentaèdres (algorithme version 2)

8.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

8.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.
Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives.
L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	INTEGRATION='FPG4'
		CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='VERSION2'

9 Résultats de la modélisation D

9.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (0, 10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.5188 \cdot 10^{-2}$	0.10

9.2 Commentaires

Cette modélisation montre que l'algorithme version 2 permet de réduire de manière efficace les oscillations. On observe que l'algorithme version 2 a tendance à introduire des approximations P1 par morceaux des pressions de contact sur l'interface, ce qui le rend plus précis que la version1 (voir aussi la [Figure 12.2-a] et la [Figure 12.2-b]).

10 Modélisation E : tétraèdres (algorithme version 1)

Ce test met en jeu un maillage libre composé de tétraèdres. Afin de réduire le nombre d'éléments et donc le temps de calcul, la longueur de la structure suivant l'axe Ox est $LX = 1$ m.

10.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage considéré est un maillage libre réalisé avec GMSH. Il est constitué de 3629 TETRA4. La [Figure 10.1-a] représente le maillage dans le plan Oyz. L'interface y est tracé, uniquement à des fins de visualisation.

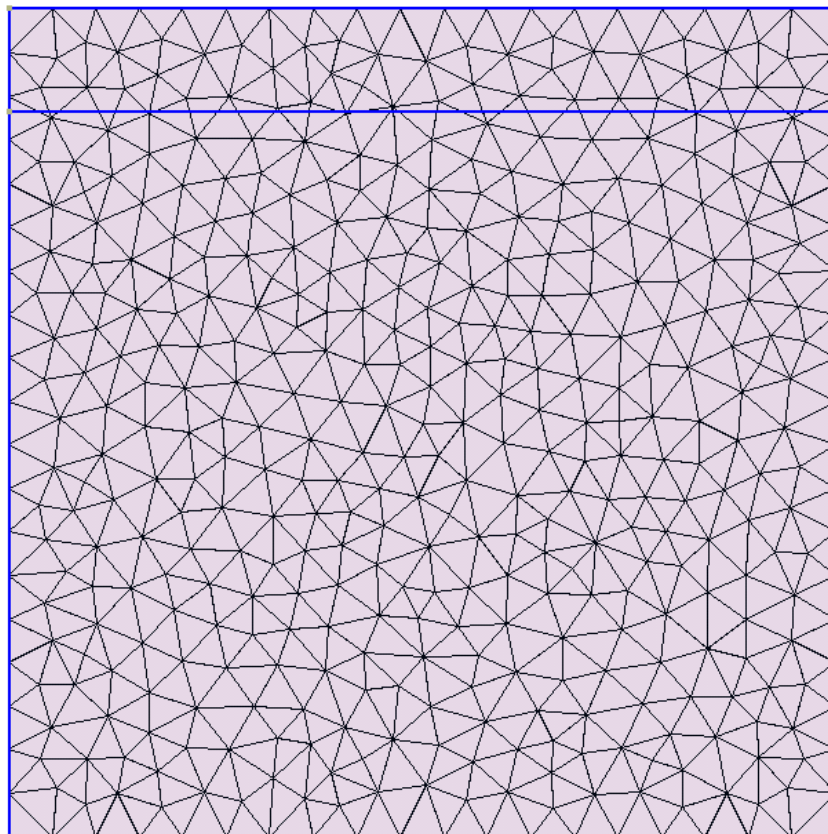


Figure 10.1-a : Maillage libre

10.2 Conditions aux limites et chargements

La face inférieure est encastée.

La face supérieure est soumise à une pression uniforme :

$$pression = 100 \frac{E}{10^6} \text{ Pa} \quad \text{éq 10.2-1}$$

Les déplacements suivants les axes x et y sont bloqués pour les nœuds de la surface supérieure.

10.3 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.

Le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives mais le frottement n'est pas pris en compte

L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	INTEGRATION='FPG4'
		CONTACT_INIT='OUI'
		ALGO_LAGR='VERSION1'

11 Résultats de la modélisation E

11.1 Valeurs testées

On teste la valeur des pressions de contact pour tous les points de l'interface. La solution analytique est tout simplement :

$$\lambda = \sigma_{zz} = -\text{pression} \quad \text{éq 11.1-1}$$

Identification	Référence	Aster	% différence
MAX(LAGS_C)	-0.1	0.0979	-2.08
MIN(LAGS_C)	-0.1	-0.1016	1.62

Pour tester tous les points de contact en une seule fois, on teste le MIN et le MAX de la colonne.

11.2 Commentaires

Ce test permet de valider la robustesse de l'algorithme de restriction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange de pression, dans un cas de maillage libre en 3D. Même sur une structure soumise à pression constante, l'algorithme est indispensable car des oscillations des pressions de contact peuvent apparaître (c'est le cas ici si l'algorithme n'est pas activé).

12 Synthèses des résultats 3D

12.1 Résumé

Dans le cadre de la méthode X-FEM, on a montré que, sans traitement particulier, une structure maillée avec des pentaèdres soumis à un chargement non-uniforme peut présenter de fortes oscillations des pressions de contact (modélisation B), alors que la même structure maillée avec des hexaèdres soumis au même chargement ne présente pas de telles oscillations (modélisation A servant de référence).

On a proposé deux algorithmes permettant de réduire significativement ces oscillations. Le premier (modélisation C) semble moins précis que le second (modélisation D).

De plus même sous chargement uniforme, des oscillations peuvent apparaître et il est indispensable d'utiliser un algorithme de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange de pression (modélisation E).

12.2 Courbes de comparaison

La [Figure 12.2-a] rassemble les courbes des pressions de contact le long de l'axe Oy pour les 4 premières modélisations présentées. On remarque que les oscillations pour la modélisation B sont si fortes qu'en certains points la valeur de la pression de contact devient positive, ce qui voudrait dire qu'il y a décollement de l'interface. Les deux algorithmes permettent une réduction visible des oscillations, et on retrouve la courbe de référence obtenue avec le maillage d'hexaèdres.

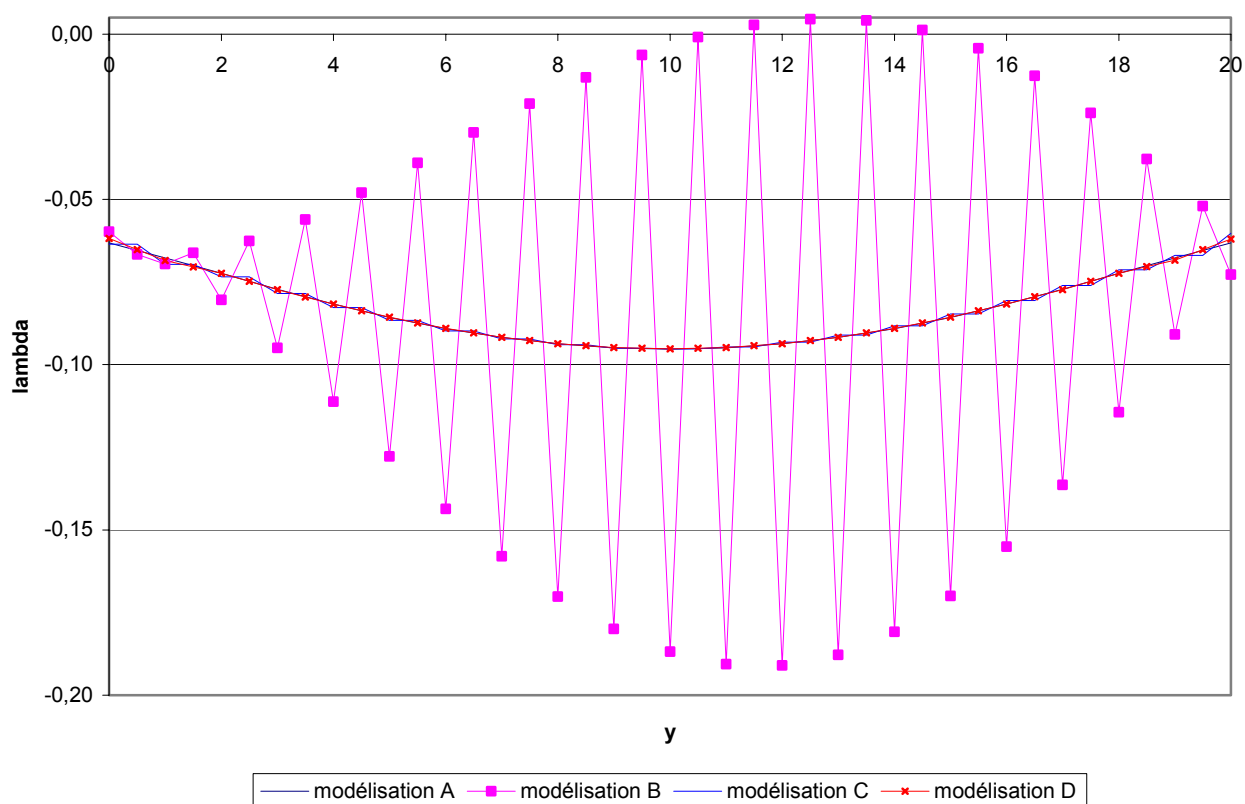


Figure 12.2-a : Comparaison des pressions de contact suivant les modélisations

La [Figure 12.2-b] compare en détails les effets des deux algorithmes. On remarque que le premier implique souvent des pressions de contact constantes par morceaux, alors que le second tend à linéariser les pressions. Il est évident que de telles différences s'amenuisent en raffinant le maillage.

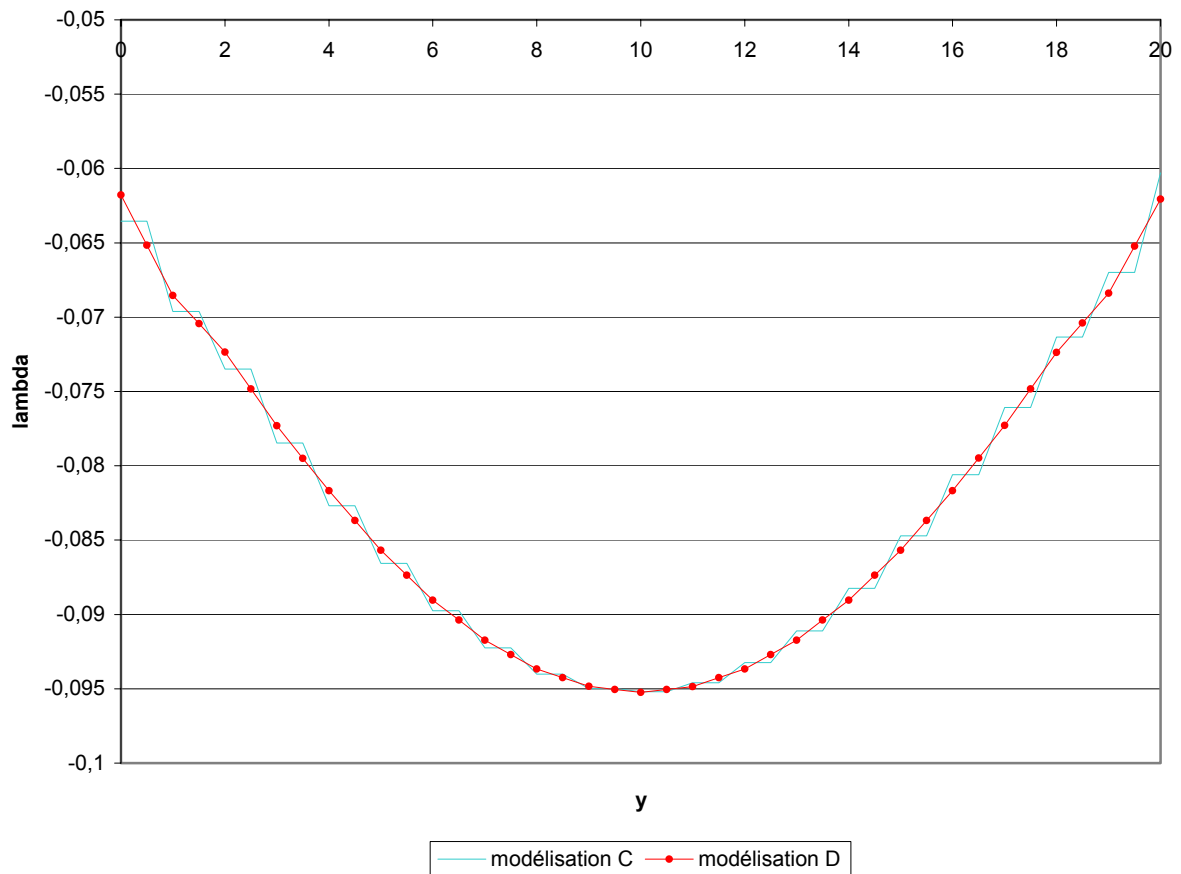


Figure 12.2-b : Comparaison des 2 algorithmes

13 Modélisation F : quadrangles 2D

Cette modélisation est l'équivalent en 2D de la modélisation A (référence). Ce cas ne présente pas d'oscillations des pressions de contact. Tout comme dans la modélisation A, les quadrangles sont coupés par une interface parallèlement aux arêtes, et le nombre de pressions de contact (une par arête coupée) est compatible avec la discrétisation du champ de déplacement [bib1] [bib2]. La LBB condition est alors respectée et il n'y a pas d'oscillations des pressions de contact.

13.1 Caractéristiques du maillage

La structure est alors modélisée par un maillage régulier composé de 20x20 QUAD4 (Voir Figure 13.1-a).

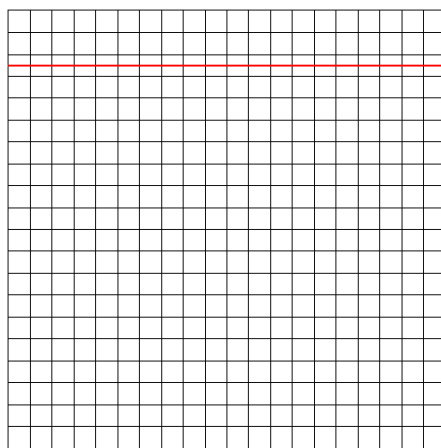


Figure 13.1-a : Maillage de quadrangles

13.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est désactivé.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='NON'

14 Résultats de la modélisation F

14.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-4}$

14.2 Commentaires

Ce cas test permet de retrouver les valeurs de référence des pressions de contacts calculées dans la modélisation A, et de vérifier que dans le cas de quadrangles coupés parallèlement à leurs faces, ces pressions de contacts ne présentent pas d'oscillations (voir [Figure 19.2-a]).

15 Modélisation G : triangles (algorithme version 1)

15.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage régulier composé de triangles. Le test est l'équivalent en 2D de la modélisation B (Voir [Figure 15.1-a]).

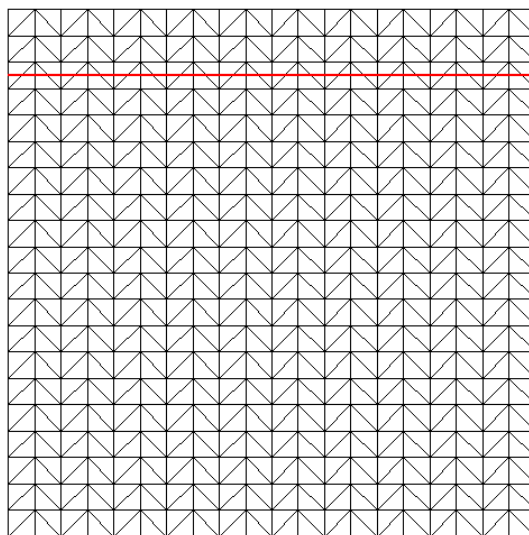


Figure 15.1-a : Maillage de triangles

15.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='VERSION1'

16 Résultats de la modélisation G

16.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.59082 \cdot 10^{-2}$	0.655

16.2 Commentaires

Cette modélisation montre que l'algorithme mis en place permet de réduire efficacement les oscillations. (voir [Figure 19.2-a]).

17 Modélisation H : triangles (algorithme version 2)

17.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation G.

17.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1^{ère} itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	CONTACT	CONTACT_INIT='OUI'
		FROTTEMENT='COULOMB'
		ALGO_LAGR='VERSION2'

18 Résultats de la modélisation H

18.1 Valeurs testées

On teste la valeur de la pression de contact au point P de coordonnées (10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point P	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.59082 \cdot 10^{-2}$	0.655

18.2 Commentaires

Cette modélisation montre qu'en 2D, l'algorithme version 2 a un comportement très proche de celui de la version 1. En effet, mis à part les premières pressions de contacts mesurées sur la gauche du maillage, les valeurs observés sont identiques, et les courbes obtenues avec les deux algorithmes se recouvrent presque intégralement. (voir [Figure 19.2-a]).

19 Synthèses des résultats 2D

19.1 Résumé

On a, dans un premier temps, vérifié que le comportement de la structure de référence (modélisation A) pouvait être retrouvé en 2D (modélisation F). Après avoir observé le phénomène d'oscillations en 2D, semblable à celui obtenu dans la modélisation B, on a testé sur des cas en 2D les deux algorithmes qui permettent de réduire ces oscillations en 3D.

Les deux algorithmes testés dans les modélisations G et H donnent, en 2 dimensions, des résultats très proches, et permettent de réduire conséquemment les oscillations introduites par le maillage.

19.2 Courbes de comparaison

La [Figure 19.2-a] représente les courbes des pressions de contact le long de l'axe Ox pour les 3 modélisations en 2D présentées. On remarque que les courbes représentatives des deux algorithmes se recouvrent presque intégralement. Les deux algorithmes sont donc à peu près aussi efficaces l'un que l'autre en 2D. Ils permettent néanmoins de réduire efficacement les oscillations.

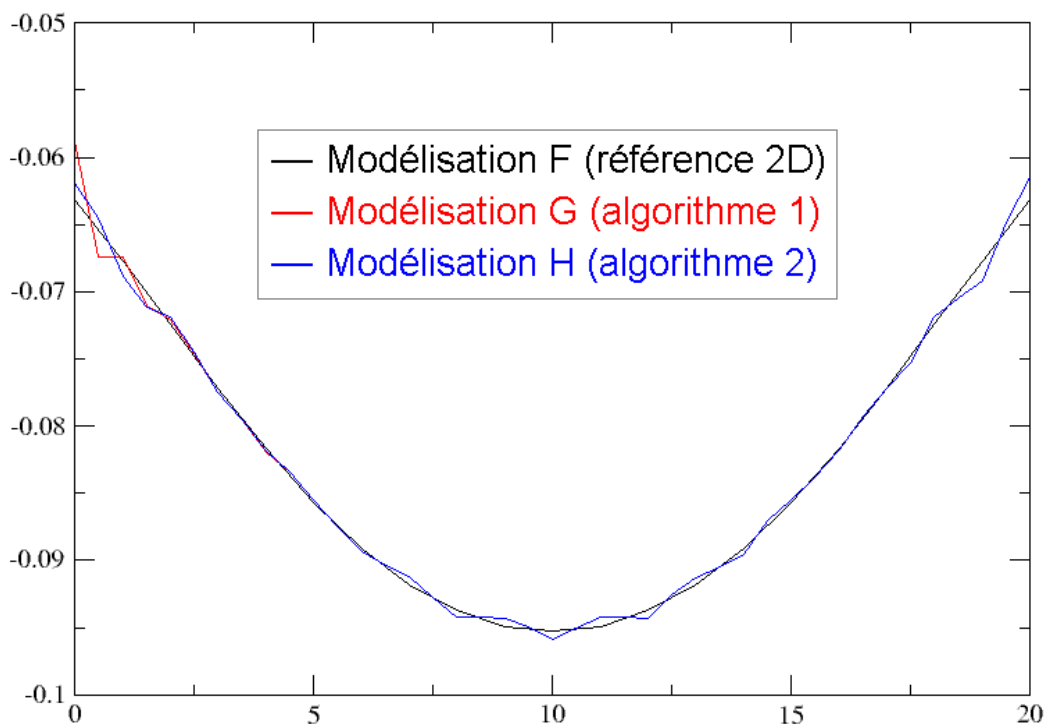


Figure 19.2-a : Comparaison des pressions de contact suivant les modélisations 2D

Il est à noter qu'un raffinement de maillage augmente évidemment la précision des résultats obtenus.

20 Bibliographie

- [1] Massin P., Ben Dhia H., Zarroug M. : Éléments de contacts dérivés d'une formulation hybride continue, Manuel de référence du *Code_Aster*, [R5.03.52]
- [2] Massin P., Geniaut S. : Méthode X-FEM, Manuel de référence du *Code_Aster*, [R7.02.12]
- [3] Babuška I. : The finite element method with lagrangian multipliers, *Numerische Math* 20, 179-192, 1973
- [4] Barbosa H., Hugues T. : Finite element method with lagrange multipliers on the boundary. Circumventing the Babuška-Brezzi condition, *Comp. Meth. Applied Mech Engrg.* 85 (1), 109-128, 1991
- [5] Chapelle D., Bathe K. J. : The Inf-sup test, *Computers & Structures* 47 (4/5), 537-545, 1993
- [6] Moës N., Béchet E., Tourbier M. : Imposing essential boundary conditions in the X-FEM, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2005, submitted.