

**Manuel de Validation****Fascicule V6.04 : Statique non-linéaire des structures volumiques****Document : V6.04.112**

# **SSNV112 - Cylindre creux en incompressible (grandes déformations)**

---

**Résumé :**

Ce test permet de valider les éléments quasi-incompressibles en grandes déformations, en statique pour un problème tridimensionnel, axisymétrique ou bidimensionnel (déformations planes). On considère un cylindre creux soumis à un déplacement radial interne. Le matériau a un coefficient de POISSON égal à 0.4999 et on utilise les éléments quasi-incompressibles (modélisation INCO) avec les déformations de SIMO\_MIEHE.

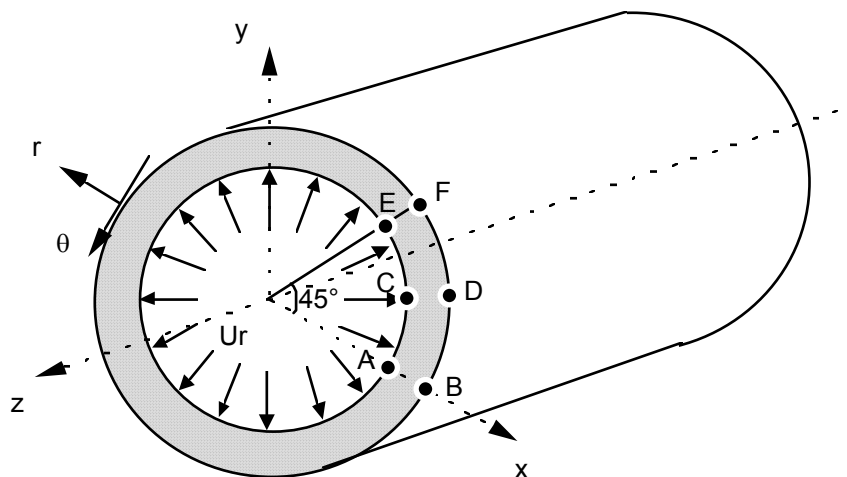
Quatre modélisations sont effectuées pour ce problème. Les modélisations A et B permettent de tester la modélisation quasi-incompressible 3D (3D\_INCO), d'une part avec des HEXA20 (A) et d'autre part avec des TETRA10 (B). Les modélisations C et D sont des études 2D s'appuyant sur des maillages mixtes QUAD8 et TRIA6. La modélisation C est l'étude en déformations planes (D\_PLAN\_INCO), la modélisation D est une étude axisymétrique (AXIS\_INCO).

Ce test est similaire au test SSLV130, qui teste les éléments quasi-incompressibles sous l'hypothèse des petites déformations.

Les résultats numériques sont satisfaisants pour toutes les modélisations.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Rayon interne  $a = 0.1 \text{ m}$   
Rayon externe  $b = 0.2 \text{ m}$

Coordonnées des points :

	A	B	E	F	C	D
x	0.1	0.2	$0.1 \cdot \cos(45)$	$0.2 \cdot \cos(45)$	$0.1 \cdot \cos(22.5)$	$0.2 \cdot \cos(22.5)$
y	0	0	$0.1 \cdot \sin(45)$	$0.1 \cdot \sin(45)$	$0.1 \cdot \sin(22.5)$	$0.1 \cdot \sin(22.5)$
z	0	0	0	0	0	0

### 1.2 Propriétés du matériau

$E = 2.10^5 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0.4999$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Déplacement radial  $U_0 = 6.10^{-5} \text{ m}$  (expansion)

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

Pour le problème étudié, le déplacement  $\mathbf{u}$  est radial et donc de la forme  $\mathbf{u} = [u, 0, 0]$ .

On en déduit la forme générale du tenseur des déformations en grandes déformations :

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^t = \begin{bmatrix} (1+u')^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\frac{u}{r})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que l'expression du tenseur des contraintes, qui s'écrit simplement si on prend en compte le fait que  $J = \det \mathbf{F} = 1$  pour un problème incompressible :

$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}_d + \mu\mathbf{b}^d$ , soit :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p + \mu \left[ \frac{2}{3}(1+u')^2 - \frac{1}{3}(1+\frac{u}{r})^2 - \frac{1}{3} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = -p + \mu \left[ -\frac{1}{3}(1+u')^2 + \frac{2}{3}(1+\frac{u}{r})^2 - \frac{1}{3} \right] \\ \sigma_{zz} = -p + \mu \left[ -\frac{1}{3}(1+u')^2 - \frac{1}{3}(1+\frac{u}{r})^2 + \frac{2}{3} \right] \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

L'écriture des équations d'équilibre conduit à la vérification d'une seule équation :

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

qui permet de déterminer la pression  $p$  connaissant le champ de déplacement radial  $u$  :

$$p' = \mu \left[ \frac{4}{3}(1+u')u'' - \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{u}{r} \right) \left( \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{(1+u')^2}{r} - \frac{\left( 1 + \frac{u}{r} \right)^2}{r} \right]$$

### 2.2 Particularisation de la solution

La condition d'incompressibilité s'écrit  $\det \mathbf{F} = 1$  avec  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1+u' & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Le déplacement  $u$

vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$ru' + u + u'u = 0$$

éq 2.2-1

Le chargement imposé est le suivant  $u = U_0$  en  $r = a$ .

La solution en déplacement est donc :

$$\begin{cases} u_r = -r + \sqrt{r^2 + U_0(U_0 + 2a)} \\ u_\theta = u_z = 0 \end{cases}$$

Le tenseur des déformations a donc pour expression :

$$\begin{cases} b_{rr} = \frac{r^2}{r^2 + U_0(U_0 + 2a)} \\ b_{\theta\theta} = \frac{r^2 + U_0(U_0 + 2a)}{r^2} \\ b_{zz} = 1 \\ b_{r\theta} = b_{z\theta} = b_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

Et les contraintes valent :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p + \mu \left[ \frac{2}{3} \frac{r^2}{r^2 + U_0(U_0 + 2a)} - \frac{1}{3} \frac{r^2 + U_0(U_0 + 2a)}{r^2} - \frac{1}{3} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = -p + \mu \left[ -\frac{1}{3} \frac{r^2}{r^2 + U_0(U_0 + 2a)} + \frac{2}{3} \frac{r^2 + U_0(U_0 + 2a)}{r^2} - \frac{1}{3} \right] \\ \sigma_{zz} = -p + \mu \left[ -\frac{1}{3} \frac{r^2}{r^2 + U_0(U_0 + 2a)} - \frac{1}{3} \frac{r^2 + U_0(U_0 + 2a)}{r^2} + \frac{2}{3} \right] \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

avec  $p$  obtenu par intégration de [éq 2.2-1] qui vaut :

$$p = \mu \left[ \frac{U_0(U_0 + 2a)}{6r^2} - \frac{2U_0(U_0 + 2a)}{3(U_0(U_0 + 2a) + r^2)} - \text{Log}(r) + \frac{1}{2} \text{Log}[U_0(U_0 + 2a) + r^2] \right] + C$$

où  $C$  est une constante

On obtient finalement les valeurs numériques suivantes :

en $r = 0.1$	$u_r = 6.10^{-5}$	en $r = 0.2$	$u_r = 3.00067 \cdot 10^{-5}$
	$\sigma_{rr} = -59.9955$		$\sigma_{rr} = 0.$
	$\sigma_{\theta\theta} = 99.9566$		$\sigma_{\theta\theta} = 40.006$
	$\sigma_{zz} = 19.9326$		$\sigma_{zz} = 20.$

Le passage dans le système cartésien se fait à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - 2 \sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + 2 \sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{rr} \sin \theta \cos \theta - \sigma_{\theta\theta} \sin \theta \cos \theta - 2 \sigma_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

## 2.3 Grandeurs et résultats de référence

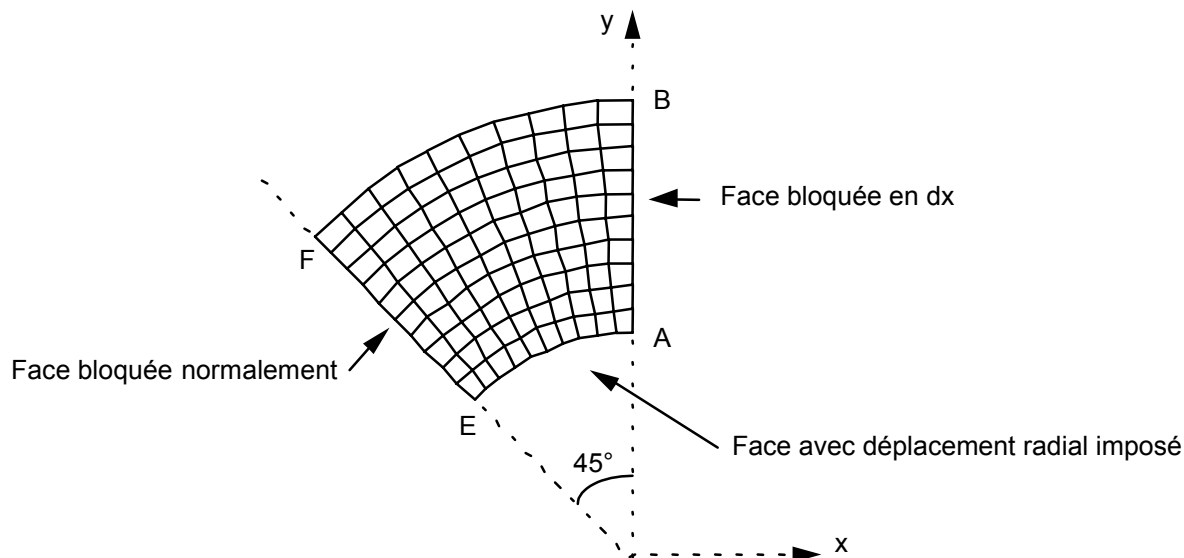
On compare aux valeurs de référence :

- les déplacements (u,v) aux points A et F,
- les contraintes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ) aux points A et F,
- les contraintes de Von Mises et Tresca ainsi que les valeurs propres du tenseur des contraintes au point A.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 3D incompressibles de type HEXA20 uniquement



Suivant l'axe z :

- épaisseur totale  $e = 0.01$
- 2 couches d'éléments

Conditions limites :

DDL_IMPO =	GROUP_NO = 'FACSUP'	DZ =	0.	faces AEFD ( $z=0$ et $z = 0.01$ )
	GROUP_NO = 'FACINF'	DZ =	0.	
	GROUP_NO = 'FACEAB'	DX =	0.	
FACE_IMPO =	GROUP_MA = 'FACEEF'	DNOR =	0.	face EF
	GROUP_MA = 'FACEAE'	DNOR =	$-6 \cdot 10^{-5}$	face AE

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1501 nœuds  
Nombre de mailles : 240 HEXA20

## 3.3 Fonctionnalités testées

### Commandes

AFFE_MODELE	MODELISATION	'3D_INCO'	GROUP_MA
DEFI_MATERIAU	ELAS		
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	GROUP_NO	
	FACE_IMPO	GROUP_MA	
	PRES_REP	GROUP_MA	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	RELATION	ELAS
		DEFORMATION	SIMO_MIEHE
	NEWTON	REAC_ITER	1

## 3.4 Grandeurs testées et résultats

Les déplacements et les contraintes sont évalués aux points A et F. Les composantes du champ EQUI\_NOEU\_SIGM sont testées au point A uniquement.

Identification	Référence	Aster	% différence
A $u$	0.	$6.6703 \cdot 10^{-21}$	-
$v$	$6. \cdot 10^{-5}$	$6.0046 \cdot 10^{-5}$	-0.077
$\sigma_{xx}$	99.9566	99.3400	-0.617
$\sigma_{yy}$	-59.9955	-60.9543	1.598
$\sigma_{zz}$	19.9326	19.2770	-3.289
$\sigma_{xy}$	0.	-1.1617	-
VMIS	138.5226	138.6161	0.067
TRESCA	159.9521	160.0601	0.068
PRIN_1	-59.9955	-60.8372	1.403
PRIN_2	19.9326	19.2770	-3.289
PRIN_3	99.9566	99.2229	-0.734
VMIS_SG	138.5226	1.8.6161	-0.067

Identification	Référence	Aster	% différence
F $u$	$-2.1218 \cdot 10^{-5}$	$-2.1219 \cdot 10^{-5}$	0.007
$v$	$+2.1218 \cdot 10^{-5}$	$2.1219 \cdot 10^{-5}$	0.007
$\sigma_{xx}$	20.003	20.029	0.129
$\sigma_{yy}$	20.003	19.980	-0.115
$\sigma_{zz}$	20.003	20.001	-0.011
$\sigma_{xy}$	20.003	20.026	0.111

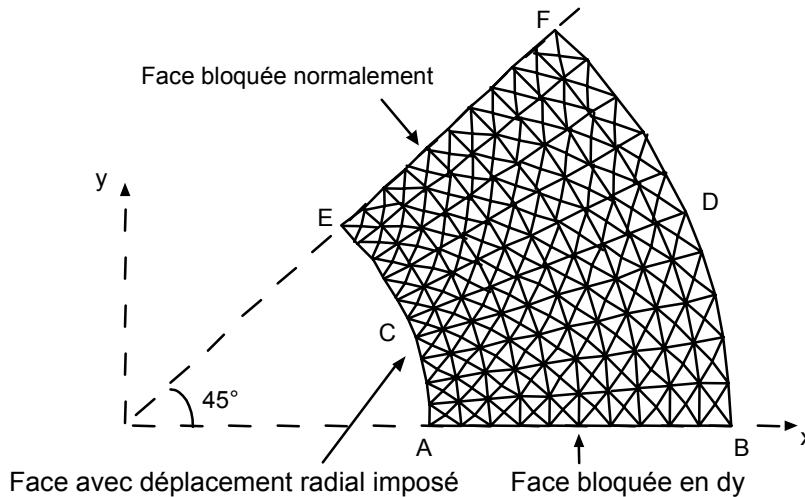
## 3.5 Remarques

On obtient de très bons résultats puisque pour toutes les grandeurs examinées, la différence entre la solution obtenue avec le code et la solution analytique est inférieure à 0.1% pour les déplacements et inférieurs à 1.6 % pour les contraintes.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 3D incompressibles de type TETRA10 uniquement



AB est sur l'axe OX (contrairement à la modélisation A).

Le maillage a été obtenu avec GMSH pour une densité de 0,01.

#### Conditions limites :

DDL_IMPO =	GROUP_NO = 'FACSUP'	DZ =	0.	faces AEFD (z=0 et z = 0.01)
	GROUP_NO = 'FACINF'	DZ =	0.	
	GROUP_NO = 'FACEAB'	DY =	0.	
FACE_IMPO =	GROUP_MA = 'FACEEF'	DNOR =	0.	face EF
=	GROUP_MA = 'FACEAE'	DNOR =	$-6 \cdot 10^{-5}$	face AE

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2064

Nombre de mailles : 1121 TETRA10



## 4.3 Fonctionnalités testées

### Commandes

AFFE_MODELE	MODELISATION	'3D_INCO'	GROUP_MA
DEFI_MATERIAU	ELAS		
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	GROUP_NO	
	FACE_IMPO	GROUP_MA	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	RELATION	ELAS
		DEFORMATION	SIMO_MIEHE
	NEWTON	REAC_ITER	1

## 4.4 Grandeurs testées et résultats

On note les résultats obtenus pour les points A et F.

Identification	Référence	Aster	% différence
A $u$	$6. \cdot 10^{-5}$	$6.009 \cdot 10^{-5}$	0.158
$v$	0.	$2.65 \cdot 10^{-23}$	-
$\sigma_{xx}$	-59.9955	-60.90	1.512
$\sigma_{yy}$	99.9566	98.63	-1.323
$\sigma_{zz}$	19.9326	19.39	-2.707
$\sigma_{xy}$	0.	-2.765	-
VMIS	138.5226		
TRESCA	159.9521		
PRIN_1	-59.9955		
PRIN_2	19.9326		
PRIN_3	99.9566		
VMIS_SG	138.5226		

Identification	Référence	Aster	% différence
F $u$	$2.1218 \cdot 10^{-5}$	$2.1198 \cdot 10^{-5}$	-0.096
$v$	$2.1218 \cdot 10^{-5}$	$2.1198 \cdot 10^{-5}$	-0.096
$\sigma_{xx}$	20.003	19.94	-0.302
$\sigma_{yy}$	20.003	19.90	-0.496
$\sigma_{zz}$	20.003	20.025	0.110
$\sigma_{xy}$	-20.003	-19.90	-0.535

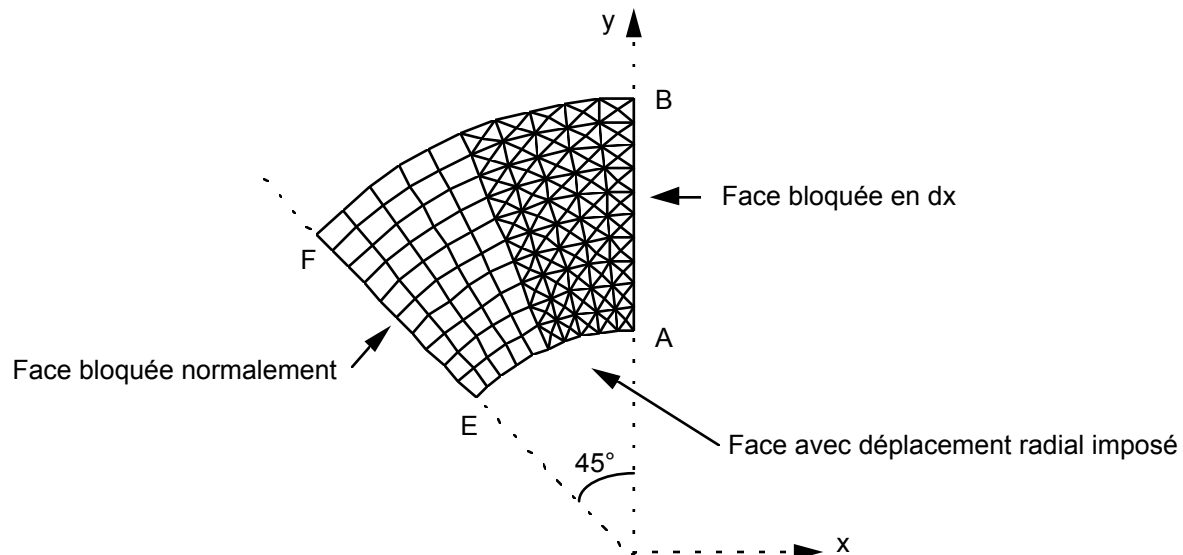
## 4.5 Remarques

Les résultats obtenus sont tout à fait corrects puisque les contraintes sont obtenues avec une précision inférieure à 3 % voire 0.5 % au point F. L'écart est ici un peu plus important que pour les HEXA20, mais peut s'expliquer par le fait que le chargement est imposé ici de manière un peu moins précise puisque le déplacement  $u$  au point A, n'est défini qu'à une précision de 0.158% contre 0.077% (soir le facteur 2, qu'on retrouve sur les contraintes).

## 5 Modélisation C

## 5.1 Caractéristiques de la modélisation

### Maillage avec des éléments 2D incompressibles de type QUAD8 et TRIA6



### Conditions limites :

```
DDL_IMPO =      GROUP_NO = 'GRNM11'      DX =      0.      côté AB
FACE_IMPO =      GROUP_MA = 'GRMA12'      DNOR =      0.      coté EF
           = GROUP_MA = 'GRMA13'      DNOR = -6. 10-5 face AE
```

**Nom des nœuds :**

A = N2, B = N361, C = N121, D = N584, E = N155, F = N503

## 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 591

Nombre de mailles : 200 TRIA6, 50 QUAD8.

### 5.3 Fonctionnalités testées

## Commandes

AFFE_MODELE	MODELISATION	'D_PLAN_INCO'	GROUP_MA
DEFI_MATERIAU	ELAS		
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO	GROUP_NO	
	FACE_IMPO	GROUP_MA	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR	RELATION	ELAS
		DEFORMATION	SIMO_MIEHE
	NEWTON	REAC_ITER	1

## 5.4 Grandeurs testées et résultats

On note les résultat obtenus pour les points A et F .

Identification	Référence	Aster	% différence
A $u$	0 .	$-5.93 \cdot 10^{-21}$	-
$v$	$6. \cdot 10^{-5}$	$6.0046 \cdot 10^{-5}$	0.077
$\sigma_{xx}$	99.9566	99.7104	-0.246
$\sigma_{yy}$	-59.9955	-61.0467	1.752
$\sigma_{zz}$	19.9326	19.5237	-2.052
$\sigma_{xy}$	0 .	1.9020	-
VMIS	138.5226	19.1945	0.485
TRESCA	159.9521	160.7273	0.485
PRIN_1	-59.9955	-61.0318	1.727
PRIN_2	19.9326	19.5237	-2.052
PRIN_3	99.9566	99.6955	-0.261
VMIS_SG	138.5226	139.1945	0.485

Identification	Référence	Aster	% différence
F $u$	$-2.1218 \cdot 10^{-5}$	$-2.1212 \cdot 10^{-5}$	-0.029
$v$	$+2.1218 \cdot 10^{-5}$	$2.1212 \cdot 10^{-5}$	-0.029
$\sigma_{xx}$	20.003	20.0456	0.213
$\sigma_{yy}$	20.003	19.9883	-0.073
$\sigma_{zz}$	20.003	20.0048	0.009
$\sigma_{xy}$	20.003	20.0252	0.111

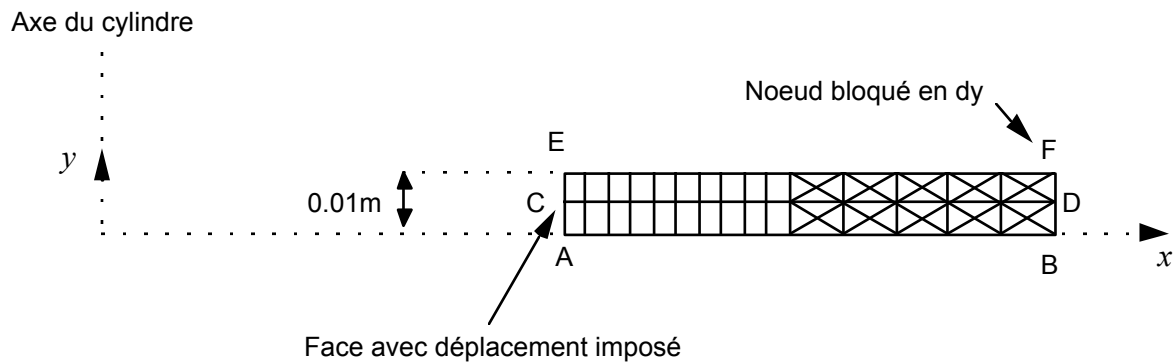
## 5.5 Remarques

Comme pour la modélisation 3D, les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants.

## 6 Modélisation D

## 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments axi incompressibles (TRIA6 + QUAD8)



**Conditions limites :**

```
DDL_IMPO =      GROUP_NO = 'FACSUP'      DY =      0.      y=0.1
              GROUP_NO = 'FACINF'      DY =      0.      y=0
FACE_IMPO =      GROUP_MA = 'FACEAE'      DX = 6. 10-5      face AE
```

## 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 175.  
Nombre de mailles et types : 20 QUAD8, 40 TRIA6.

### 6.3 Fonctionnalités testées

## Commandes

AFFE MODELE	MODELISATION	'AXIS_INCO'	GROUP_MA
DEFI MATERIAU	ELAS		
AFFE_CHAR_MECA	DDL_IMPO FACE_IMPO	GROUP_NO GROUP_MA	
STAT_NON_LINE	COMP_INCR NEWTON	RELATION REAC_ITER DEFORMATION	ELAS 1 SIMO MIEHE

## 6.4 Grandeurs testées et résultats

On note les résultats obtenus pour A et F.

Identification	Référence	Aster	% différence
A $u$	$6. \cdot 10^{-5}$	$6.0000 \cdot 10^{-5}$	0.00
$v$	0.	$5.71 \cdot 10^{-21}$	-
$\sigma_{xx}$	-59.9955	-59.8619	-0.223
$\sigma_{yy}$	19.9326	19.9708	0.192
$\sigma_{zz}$	99.9566	99.9171	-0.039
$\sigma_{xy}$	0.	$-3.03 \cdot 10^{-7}$	-
VMIS	138.5226	138.3727	-0.108
TRESCA	159.9521	159.7790	-0.108
PRIN_1	-59.9955	-59.8619	-0.223
PRIN_2	19.9326	19.9708	0.192
PRIN_3	99.9566	99.9171	-0.0039
VMIS_SG	138.5226	138.3727	-0.108

Identification	Référence	Aster	% différence
F $u$	$3.0007 \cdot 10^{-5}$	$3.0011 \cdot 10^{-5}$	0.038
$v$	0.	$4.90 \cdot 10^{-22}$	-
$\sigma_{xx}$	0.	$2.59 \cdot 10^{-2}$	-
$\sigma_{yy}$	20.	19.9975	-0.013
$\sigma_{zz}$	40.006	39.9965	-0.024
$\sigma_{xy}$	0.	$-4.87 \cdot 10^{-3}$	-

## 6.5 Remarques

La précision obtenue est très bonne puisque toutes les contraintes sont obtenues avec une précision inférieure à 0.5%.

---

## 7 Synthèse des résultats

---

Avec un coefficient de Poisson  $\nu$  très proche de 0.5, on retrouve les résultats de la solution analytique incompressible en grandes déformations, avec une précision tout à fait correcte.