

Manuel de Validation**Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des structures volumiques****Document : V6.04.185**

SSNV185 – Fissure débouchante dans une plaque 3D de largeur finie avec X-FEM

Résumé

Ce test a pour but de valider la méthode X-FEM [bib1] sur un cas académique 3D, dans le cadre de la mécanique de la rupture élastique linéaire.

Ce test met en jeu une plaque 3D comportant une fissure débouchante plane à fond droit. Le calcul complet ainsi que l'extraction des facteurs d'intensité de contraintes est réalisé dans le cadre de la méthode X-FEM. Le maillage est sain, la fissure étant représentée virtuellement avec des level sets.

Plusieurs configurations de maillage sont testées et comparées avec la solution analytique. Le même problème traité de manière classique (avec un maillage fissuré) sert de référence afin de comparer les précisions des deux méthodes.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est une plaque 3D de dimensions $LX = 1$ m, $LY = 10$ m et $LZ = 30$ m, comportant une fissure plane débouchante de longueur $a = 5$ m, se situant à mi-hauteur (voir [Figure 1.1-a]).

Dans le cas où le problème est traité par une méthode classique, la fissure est maillée. Par contre, dans le cas où la méthode X-FEM est employée, la fissure n'est pas maillée, et la géométrie est en fait une plaque saine sans fissure. La fissure sera alors introduite par fonctions de niveaux (level sets) directement dans le fichier commande à l'aide de l'opérateur `DEFI_FISS_XFEM` [U4.82.08]. La level set normale (LSN = distance au plan de fissuration) permet de définir le plan de fissure et la level set tangente (LST = distance au fond de fissure) permet de définir la position du fond de fissure.

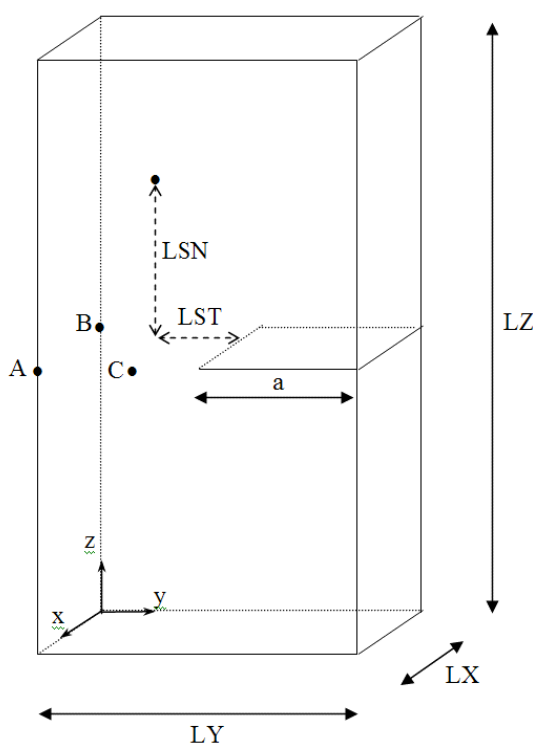


Figure 1.1-a : Géométrie de la plaque fissurée

On définit les points A (1, 0, 15), B (0, 0, 15) et C (1, 3, 15) qui serviront à bloquer les modes rigides.

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young : $E = 205\,000$ MPa (sauf mention contraire)

Coefficient de Poisson : $\nu = 0$.

2 Modélisation A : fissure maillée (cas classique)

Dans cette modélisation, le fissure est maillée, et on utilise la méthode standard des éléments finis pour réaliser le calcul. Cette modélisation servira de référence et permettra la comparaison avec la méthode X-FEM.

2.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage régulier composé de 5x30x50 HEXA8, respectivement suivant les axes x, y, z (voir [Figure 2.1-a]). Les deux surfaces superposées sont les lèvres de la fissure.

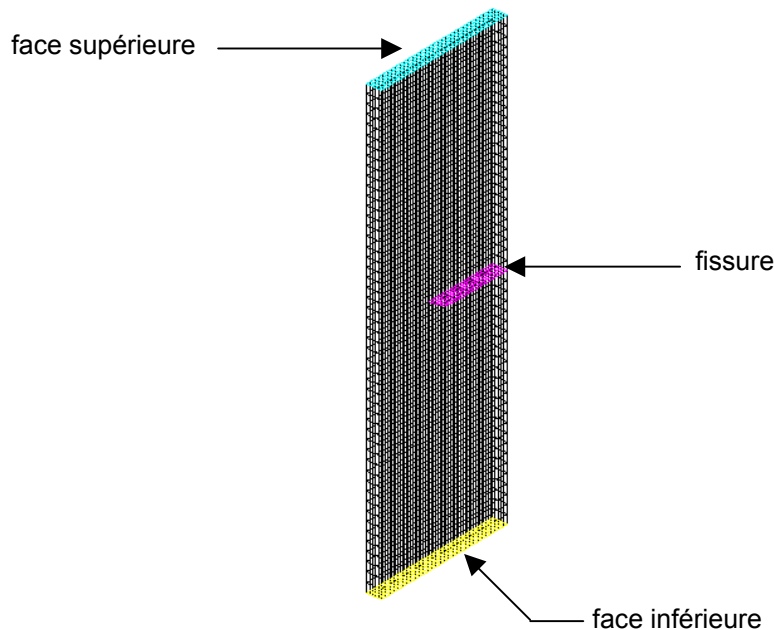


Figure 2.1-a : Maillage fissuré

2.2 Conditions aux limites et chargements

Deux types de chargement vont être étudiés : un chargement de traction sur les faces inférieure et supérieure de la structure, puis un chargement qui consiste à imposer un champ de déplacement en tout nœud, identique au le champ de déplacement asymptotique en mode I (solution de Westergaard pour un milieu infini [bib2]).

2.2.1 Chargement de traction

Une pression répartie est imposée sur les faces inférieure et supérieure de la structure (voir [Figure 2.1-a]). La pression est $p = -10^6$ Pa ($\sigma_{zz} = -p$), ce qui permet de solliciter la fissure en mode d'ouverture I pur.

Les modes rigides sont bloqués de la manière suivante :

- Le point A est bloqué suivant les 3 directions :
- Le point B est bloqué suivant l'axe Oz :
- Le point C est bloqué suivant les axes Ox et Oz :

$$\begin{cases} DX^{N4265} = 0 \\ DY^{N4265} = 0 \\ DZ^{N4265} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} DZ^{N3751} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} DX^{N4256} = 0 \\ DZ^{N4256} = 0 \end{cases}$$

2.2.2 Chargement avec le champ asymptotique en mode I

Le champ asymptotique en mode I pur, solution d'un problème de rupture élastique linéaire est connu de manière analytique [bib2]. Dans le repère défini, ce champ prend la forme suivante :

$$u_x = 0 \quad \text{éq 2.2.2-1}$$

$$u_y = -\frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (3-4\nu - \cos \theta) \quad \text{éq 2.2.2-2}$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (3-4\nu - \cos \theta) \quad \text{éq 2.2.2-3}$$

Ce champ est imposé sur tous les nœuds de la structure par le biais de formules dans l'opérateur AFPE_CHAR_MECA_F [U4.44.01]. Ces formules font intervenir les coordonnées polaires (r, θ) dans la base locale au fond de fissure :

$$r = \sqrt{(5-y)^2 + (z-15)^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{z-15}{5-y}\right) \quad \text{éq 2.2.2-4}$$

Cependant, il convient de traiter à part les nœuds appartenant aux lèvres de la fissure. En effet, pour les nœuds de la lèvre inférieure, la formule servant à calculer l'angle θ n'est pas valable (elle donnerait π alors que théoriquement, θ vaut $-\pi$). Pour les nœuds de la lèvre inférieure, la valeur de l'angle n'est donc pas calculé par l'équation [éq 2.2.2-4] mais est directement mise à $-\pi$. Pour les nœuds de la lèvre supérieure, la formule est néanmoins valable.

2.3 Solutions du problème

2.3.1 Chargement de traction

Le facteur d'intensité de contrainte en mode I est donné [bib3] par :

$$K_I = \sigma_{zz} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{LY}\right) \quad \text{éq 2.3.1-1}$$

où

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}\right)^{1/2} \frac{0.752 + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2b}\right)^3 + 2.02 \frac{a}{b}}{\cos \frac{\pi a}{2b}} \quad \text{éq 2.3.1-2}$$

La précision de cette formule atteint 0.5% quel que soit le rapport $\frac{a}{b}$.

2.3.2 Chargement avec le champ asymptotique en mode I

En présence d'un tel chargement, la valeur théorique est

$$K_I = 1 \quad \text{éq 2.3.2-1}$$

2.4 Fonctionnalités testées

L'option `CALC_K_G` de l'opérateur `CALC_G_LOCAL_T` [U4.82.04] permet le calcul des facteurs d'intensité de contraintes par la méthode énergétique « G-theta ». Cette fonctionnalité est testée avec le chargement n°1. Ce cas de chargement sert de base de comparaison pour la méthode X-FEM. Lorsqu'une des charges est une fonction ou une formule (provenant de `AFFE_CHAR_MECA_F` [U4.44.01]), l'option devient `CALC_K_G_F`. Cette fonctionnalité est testée avec le chargement n°2.

Commandes

<code>CALC_G_LOCAL_T</code>	<code>CALC_K_G</code>
	<code>CALC_K_G_F</code>

3 Résultats de la modélisation A

3.1 Valeurs testées

On teste les valeurs de K_I le long du fond de fissure, pour différentes couronnes de champs theta. Les valeurs des rayons inf et sup du tore sont les suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	2	0.666	1	1	1	2.1
Rsup	4	1.666	2	3	4	3.9

Tableau 3.1-1

Pour tester tous les nœuds du fond de fissure en une seule fois, on teste les valeurs min et max de K_I sur tous les nœuds du fond de fissure.

3.1.1 Chargement de traction

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.1
Couronne 1 : MIN (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.1
Couronne 2 : MAX (K_I)	$1.049 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.3
Couronne 2 : MIN (K_I)	$1.048 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.3
Couronne 3 : MAX (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.2
Couronne 3 : MIN (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.2
Couronne 4 : MAX (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.2
Couronne 4 : MIN (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.2
Couronne 5 : MAX (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.2
Couronne 5 : MIN (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.2
Couronne 6 : MAX (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.1
Couronne 6 : MIN (K_I)	$1.051 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-6.1

3.1.2 Chargement avec le champ asymptotique en mode I

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	0.999987	1.0	-0.001
Couronne 1 : MIN (K_I)	0.999987	1.0	-0.001
Couronne 2 : MAX (K_I)	0.998279	1.0	-0.172
Couronne 2 : MIN (K_I)	0.998279	1.0	-0.172
Couronne 3 : MAX (K_I)	1.000162	1.0	0.016
Couronne 3 : MIN (K_I)	1.000162	1.0	0.016
Couronne 4 : MAX (K_I)	1.000058	1.0	0.006
Couronne 4 : MIN (K_I)	1.000058	1.0	0.006
Couronne 5 : MAX (K_I)	1.000045	1.0	0.005
Couronne 5 : MIN (K_I)	1.000045	1.0	0.005
Couronne 6 : MAX (K_I)	0.999981	1.0	-0.002
Couronne 6 : MIN (K_I)	0.999981	1.0	-0.002

3.2 Commentaires

Le 1er chargement de cette modélisation sert de base de comparaison pour la méthode X-FEM. Le 2ème cas de chargement permet de valider l'option CALC_K_G_F pour les éléments 3D.

4 Modélisation B : fissure non maillée (cas X-FEM)

Dans cette modélisation, la fissure n'est plus maillée, mais elle est représentée par des level sets :

$$LSN = z - 15 \quad \text{éq 4-1}$$

$$LST = LY - a - y \quad \text{éq 4-2}$$

4.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage sain, régulier composé de 5x30x50 HEXA8, respectivement suivant les axes x, y, z de façon à avoir le même nombre d'éléments que pour le maillage de la modélisation A (voir [Figure 4.1-a]). Ainsi, le plan de fissure est en correspondance avec des faces d'HEXA8 et le fond de fissure avec des arêtes d'HEXA8.

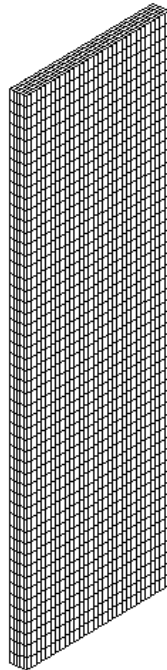


Figure 4.1-a : Maillage sain

4.2 Conditions aux limites et chargements

Un seul type de chargement est étudié ici : il s'agit d'une pression répartie imposée sur les faces inférieure et supérieure de la structure (identique au 1^{er} cas de chargement de la modélisation A). Les modes rigides sont bloqués de la manière suivante :

- Le point A est bloqué suivant les 3 directions :
- Le point B est bloqué suivant l'axe Oz :
- Le point C est bloqué suivant les axes Ox et Oz :

$$\begin{cases} DX^{N3751} = 0 \\ DY^{N3751} = 0 \\ DZ^{N3751} = 0 \end{cases}$$

$$DZ^{N9276} = 0$$

$$\begin{cases} DX^{N3760} = 0 \\ DZ^{N3760} = 0 \end{cases}$$

4.3 Fonctionnalités testées

Commandes

```
DEFI_FISS_XFEM
CALC_G_LOCAL_T      CALC_K_G
```

5 Résultats de la modélisation B

5.1 Valeurs testées

On teste les valeurs de K_I le long du fond de fissure, pour différentes couronnes de champs theta. Les valeurs des rayons inf et sup du tore sont les suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	2	0.666	1	1	1	2.1
Rsup	4	1.666	2	3	4	3.9

Tableau 5.1-1

Pour tester tous les nœuds du fond de fissure en une seule fois, on teste les valeurs min et max de K_I sur tous les nœuds du fond de fissure.

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	$1.111 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.8
Couronne 1 : MIN (K_I)	$1.110 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.9
Couronne 2 : MAX (K_I)	$1.112 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.8
Couronne 2 : MIN (K_I)	$1.111 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.9
Couronne 3 : MAX (K_I)	$1.111 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.8
Couronne 3 : MIN (K_I)	$1.110 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.9
Couronne 4 : MAX (K_I)	$1.111 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.8
Couronne 4 : MIN (K_I)	$1.110 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.9
Couronne 5 : MAX (K_I)	$1.111 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.8
Couronne 5 : MIN (K_I)	$1.110 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.9
Couronne 6 : MAX (K_I)	$1.111 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.8
Couronne 6 : MIN (K_I)	$1.110 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-0.9

5.2 Commentaires

Les résultats sont stables pour n'importe quelle couronne choisie.

À même nombre d'éléments, la précision des résultats obtenus avec X-FEM est bien meilleure que celle obtenue dans le cas classique (moins de 1% pour X-FEM contre 6% pour une méthode classique).

6 Modélisation C : fissure non maillée (cas X-FEM)

Dans cette modélisation, la fissure n'est pas maillée, mais elle est représentée par des level sets :

$$LSN = z - 15 \quad \text{éq 6-1}$$

$$LST = LY - a - y \quad \text{éq 6-2}$$

6.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage sain, régulier composé de 5x31x51 HEXA8, respectivement suivant les axes x, y, z. De cette manière, le fond de fissure se trouve au centre d'éléments et le plan de fissure ne correspond plus à des faces d'éléments. La [Figure 6.1-a] représente en coupe Oyz l'enrichissement dans une zone à proximité de fond de fissure.

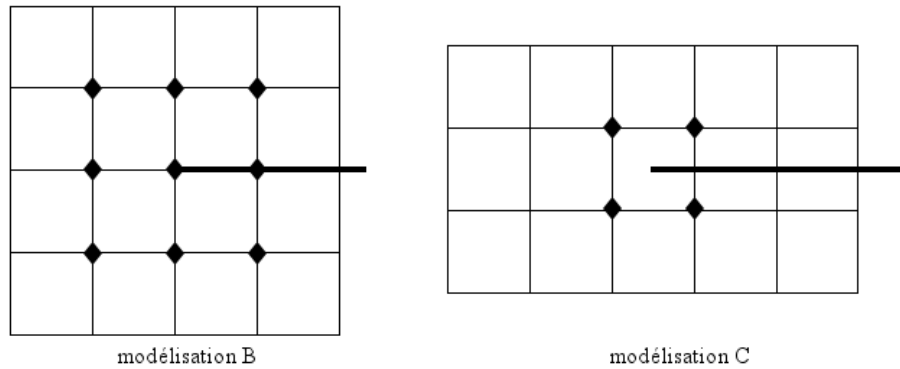


Figure 6.1-a : Différents enrichissements en fond de fissure

6.2 Conditions aux limites et chargements

De même que précédemment, une pression répartie est imposée sur les faces inférieure et supérieure de la structure (identique au 1^{er} cas de chargement de la modélisation A).

Afin de reproduire les cas précédents, il est nécessaire de bloquer les mêmes points A, B et C. cependant ici, il n'y a pas de nœuds dans le plan médian. Pour bloquer les modes rigides, il faut alors imposer des relations entre les ddl des nœuds juste au-dessus et au-dessous du plan médian [Figure 6.2-a] :

- le point A est bloqué suivant les 3 directions :

$$\begin{cases} DX^{N4031} + DX^{N3876} = 0 \\ DY^{N4031} + DY^{N3876} = 0 \\ DZ^{N4031} + DZ^{N3876} = 0 \end{cases}$$
- le point B est bloqué suivant l'axe Oz :

$$DZ^{N3886} + DZ^{N4041} = 0$$
- le point C est bloqué suivant les axes Ox et Oz :

$$\begin{cases} DX^{N9768} + DX^{N9767} = 0 \\ DZ^{N9768} + DZ^{N9767} = 0 \end{cases}$$

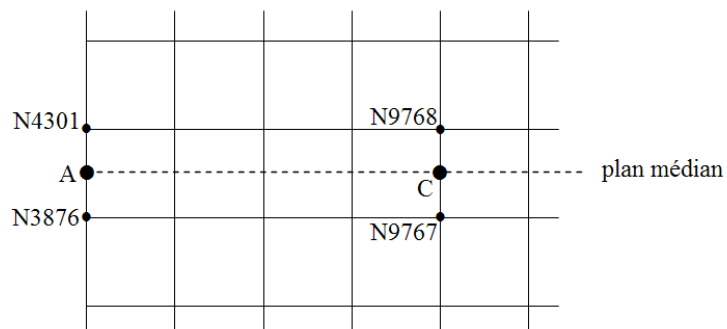


Figure 6.2-a : Conditions de Dirichlet autour du plan médian

La [Figure 6.2-a] est une vue schématique du plan Oyz, sur laquelle le nombre d'éléments finis n'est pas respecté. Elle sert simplement à comprendre les relations linéaires imposées afin de bloquer les déplacements des points A et C. Pour le point B, on agit de la même manière.

6.3 Fonctionnalités testées

Commandes

```
DEFI_FISS_XFEM  
CALC_G_LOCAL_T      CALC_K_G
```

7 Résultats de la modélisation C

7.1 Valeurs testées

On teste les valeurs de K_I le long du fond de fissure, pour différentes couronnes de champs theta. Les valeurs des rayons inf et sup du tore sont les suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	2	0.666	1	1	1	2.1
Rsup	4	1.666	2	3	4	3.9

Tableau 7.1-1

Pour tester tous les nœuds du fond de fissure en une seule fois, on teste les valeurs min et max de K_I sur tous les nœuds du fond de fissure.

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	$1.084 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.2
Couronne 1 : MIN (K_I)	$1.079 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.7
Couronne 2 : MAX (K_I)	$1.087 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.0
Couronne 2 : MIN (K_I)	$1.083 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.4
Couronne 3 : MAX (K_I)	$1.083 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.3
Couronne 3 : MIN (K_I)	$1.079 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.7
Couronne 4 : MAX (K_I)	$1.084 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.3
Couronne 4 : MIN (K_I)	$1.079 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.7
Couronne 5 : MAX (K_I)	$1.083 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.3
Couronne 5 : MIN (K_I)	$1.079 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.7
Couronne 6 : MAX (K_I)	$1.084 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.2
Couronne 6 : MIN (K_I)	$1.079 \cdot 10^7$	$1.120 \cdot 10^7$	-3.7

7.2 Commentaires

Les résultats sont stables pour n'importe quelle couronne choisie.

La précision des résultats obtenus est moins bonne que pour la modélisation B. Cela peut s'expliquer par le fait que la zone d'enrichissement est ici moins étendue.

Cependant, les résultats restent meilleurs que dans le cas classique.

8 Modélisation D : fissure non maillée (cas X-FEM)

Cette modélisation est exactement la même que la modélisation B, sauf que la longueur de la fissure est : $a = 4.8333$, de manière à ce que le fond de fissure ne coïncide pas avec des arêtes des éléments.

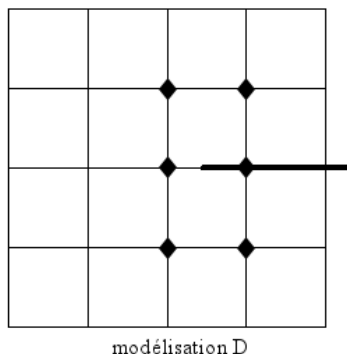


Figure 8-a : Enrichissement dans une zone proche du fond de fissure

9 Résultats de la modélisation D

9.1 Valeurs testées

On teste les valeurs de K_I le long du fond de fissure, pour différentes couronnes de champs theta. Les valeurs des rayons inf et sup du tore sont les suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	2	0.666	1	1	1	2.1
Rsup	4	1.666	2	3	4	3.9

Pour tester tous les nœuds du fond de fissure en une seule fois, on teste les valeurs min et max de K_I sur tous les nœuds du fond de fissure.

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	$1.020 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-2.4
Couronne 1 : MIN (K_I)	$1.033 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-1.1
Couronne 2 : MAX (K_I)	$1.021 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-2.3
Couronne 2 : MIN (K_I)	$1.034 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-1.1
Couronne 3 : MAX (K_I)	$1.021 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-2.3
Couronne 3 : MIN (K_I)	$1.033 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-1.1
Couronne 4 : MAX (K_I)	$1.021 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-2.3
Couronne 4 : MIN (K_I)	$1.033 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-1.1
Couronne 5 : MAX (K_I)	$1.021 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-2.3
Couronne 5 : MIN (K_I)	$1.033 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-1.1
Couronne 6 : MAX (K_I)	$1.020 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-2.3
Couronne 6 : MIN (K_I)	$1.033 \cdot 10^7$	$1.045 \cdot 10^7$	-1.1

9.2 Commentaires

Ces résultats confirment que la taille de la zone d'enrichissement influe sur la précision des résultats. Ici, la zone d'enrichissement est intermédiaire entre le cas B et le cas C, et la précision de même.

10 Modélisation E : fissure non maillée (cas X-FEM)

Dans cette modélisation, la fissure n'est pas maillée, mais elle est représentée par des level sets :

$$LSN = z - 15 \quad \text{éq 10-1}$$

$$LST = LY - a - y \quad \text{éq 10-2}$$

Dans cette modélisation, le module d'Young est égal à 100 MPa.

10.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage sain, régulier composé de 3x11x31 HEXA8, respectivement suivant les axes x, y, z (voir [Figure 10.1-a]). Une telle discrétisation conduit à une configuration d'enrichissement similaire à celle de la modélisation C.

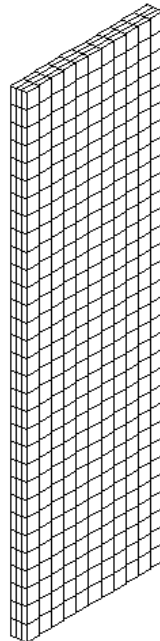


Figure 10.1-a : Maillage

10.2 Conditions aux limites et chargements

On souhaite appliquer le même chargement que le chargement n°2 de la modélisation A, c'est-à-dire imposer sur tous les nœuds du maillage le champ de déplacement asymptotique en mode I pur.

Pour tous les nœuds classiques (non enrichis), on impose alors les champs précédemment définis. Pour les nœuds enrichis en fond de fissure, on cherche à imposer chaque ddl enrichi. Pour ce faire, on réécrit les expressions analytiques des champs de déplacements à imposer aux nœuds dans la base des fonctions d'enrichissement :

$$u_x = 0 \quad \text{éq 10.2-1}$$

$$u_y = -\frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} (2-4\nu) + \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad \text{éq 10.2-2}$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} (4-4\nu) - \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad \text{éq 10.2-3}$$

On rappelle que la base des fonctions d'enrichissement est la suivante :

$$\left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad \text{éq 10.2-4}$$

Pour les nœuds enrichis par la fonction Heaviside, il faut aussi procéder à un calcul au préalable. Considérons un couple de nœuds A et B, et notons C⁺ et C⁻ les points situés sur les lèvres supérieur et inférieure de la fissure, celle-ci coupant un élément de façon symétrique. On se trouve dans la configuration suivante :

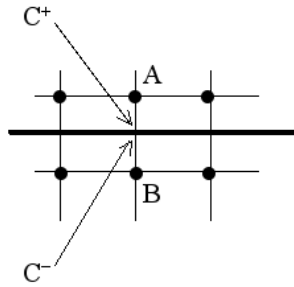


Figure 10.2-a : Enrichissement Heaviside

Les nœuds représentés par des ronds [Figure 10.2-a] portent des ddl classiques a et des ddl Heaviside h .

D'après l'approximation X-FEM, la fissure passant au milieu des éléments, les déplacements s'écrivent :

$$\begin{cases} u(A) = a^A + h^A \\ u(B) = a^B - h^B \\ u(C^+) = \frac{a^A + h^A}{2} + \frac{a^B + h^B}{2} \\ u(C^-) = \frac{a^A - h^A}{2} + \frac{a^B - h^B}{2} \end{cases} \quad \text{éq 10.2-5}$$

En inversant ce système linéaire, on obtient les expressions des inconnues nodales en fonction des déplacements connus analytiquement :

$$\begin{cases} a^A = \frac{u(A) - u(B)}{2} + u(C^-) \\ h^A = \frac{u(A) + u(B)}{2} - u(C^-) \\ a^B = \frac{u(B) - u(A)}{2} + u(C^+) \\ h^B = \frac{-u(B) - u(A)}{2} + u(C^+) \end{cases} \quad \text{éq 10.2-6}$$

10.3 Fonctionnalités testées

Commandes

CALC_G_LOCAL_T CALC_K_G_F

11 Résultats de la modélisation E

11.1 Valeurs testées

On teste les valeurs de K_I le long du fond de fissure, pour différentes couronnes de champs theta.
Les valeurs des rayons inf et sup du tore sont les suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	2	0.666	1	1	1	2.1
Rsup	4	1.666	2	3	4	3.9

Tableau 11.1-1

Pour tester tous les nœuds du fond de fissure en une seule fois, on teste les valeurs min et max de K_I sur tous les nœuds du fond de fissure.

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	0.9996	1.0	-0.04
Couronne 1 : MIN (K_I)	0.9996	1.0	-0.04
Couronne 2 : MAX (K_I)	1.0272	1.0	2.7
Couronne 2 : MIN (K_I)	1.0272	1.0	2.7
Couronne 3 : MAX (K_I)	1.0053	1.0	0.53
Couronne 3 : MIN (K_I)	1.0053	1.0	0.53
Couronne 4 : MAX (K_I)	1.0023	1.0	0.23
Couronne 4 : MIN (K_I)	1.0023	1.0	0.23
Couronne 5 : MAX (K_I)	1.0015	1.0	0.15
Couronne 5 : MIN (K_I)	1.0015	1.0	0.15
Couronne 6 : MAX (K_I)	9.9969	1.0	-0.03
Couronne 6 : MIN (K_I)	9.9969	1.0	-0.03

11.2 Commentaires

Les résultats sont stables pour n'importe quelle couronne choisie.
Ils permettent de valider l'option CALC_K_G_F pour les éléments 3D X-FEM.

12 Modélisation F : fissure non maillée (cas X-FEM)

Cette modélisation est exactement la même que la modélisation C. La seule différence est que la zone d'enrichissement en fond de fissure a maintenant une taille fixée par l'utilisateur, elle n'est donc plus limitée à une seule couche éléments en fond de fissure.

12.1 Enrichissement en fond de fissure

Les nœuds se trouvant à une distance du fond de fissure égale ou inférieure à un certain critère sont enrichis par les fonctions singulières. Ce critère est choisi comme dans [bib4], égal à un dixième de taille de la structure. Ici, il vaut 1 m puisque LY vaut 10 m.

12.2 Fonctionnalités testées

Commandes

DEFI_FISS_XFEM	RAYON_ENRI
CALC_G_LOCAL_T	CALC_K_G

13 Résultats de la modélisation F

13.1 Valeurs testées

On teste les valeurs de K_I le long du fond de fissure, pour différentes couronnes de champs theta. Les valeurs des rayons inf et sup du tore sont les suivantes :

	Couronne 1	Couronne 2	Couronne 3	Couronne 4	Couronne 5	Couronne 6
Rinf	2	0.666	1	1	1	2.1
Rsup	4	1.666	2	3	4	3.9

Tableau 13.1-1

Pour tester tous les nœuds du fond de fissure en une seule fois, on teste les valeurs min et max de K_I sur tous les nœuds du fond de fissure.

Identification	Aster	Référence	% différence
Couronne 1 : MAX (K_I)	1.109 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.0
Couronne 1 : MIN (K_I)	1.104 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.5
Couronne 2 : MAX (K_I)	1.111 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-0.8
Couronne 2 : MIN (K_I)	1.106 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.2
Couronne 3 : MAX (K_I)	1.110 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-0.9
Couronne 3 : MIN (K_I)	1.105 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.4
Couronne 4 : MAX (K_I)	1.110 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.0
Couronne 4 : MIN (K_I)	1.105 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.4
Couronne 5 : MAX (K_I)	1.110 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.0
Couronne 5 : MIN (K_I)	1.104 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.4
Couronne 6 : MAX (K_I)	1.109 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.0
Couronne 6 : MIN (K_I)	1.104 10 ⁷	1.120 10 ⁷	-1.5

13.2 Commentaires

Les résultats sont stables pour n'importe quelle couronne choisie.

La précision des résultats obtenus est meilleure que pour la modélisation C. Cela prouve l'influence bénéfique de l'augmentation la taille de la zone d'enrichissement, à maillage identique.

Cependant, s'il on compare avec la précision de la modélisation B (inférieure à 1%) on pourrait s'étonner de ne pas trouver de meilleurs résultats avec la zone fixe. L'explication se trouve dans [bib4].

En effet, sur la modélisation B, l'approximation du déplacement est exactement en \sqrt{r} sur une couche d'élément autour du fond. Par contre, dans la modélisation F, l'approximation est $\sum_{elt \text{ enrichis}} \sqrt{r}$

sur la zone d'enrichissement. Dans ce cas (maillage relativement grossier), l'approximation par une somme de racines carrées sur une zone étendue est moins bonne que l'approximation par une seule racine carrée sur une zone plus restreinte.

Toutefois, lorsque l'on raffine suffisamment le maillage, la précision obtenue avec un enrichissement sur une zone fixe devient meilleure que celle obtenue avec un enrichissement sur une seule couche éléments.

14 Synthèses des résultats

Les objectifs de ce test sont atteints :

- Valider sur un cas simple la prise en compte de l'enrichissement singulier en fond de fissure avec la méthode X-FEM.
- Valider le calcul des facteurs d'intensité de contraintes (ici seulement le mode I) pour les éléments X-FEM, quelle que soit la charge (fixe ou fonction).

On retiendra que l'utilisation de la méthode X-FEM permet d'améliorer sensiblement la précision du calcul de K_I , et que celle-ci augmente lorsque la zone d'enrichissement n'est pas restreinte à une seule couche d'éléments en fond de fissure.

15 Bibliographie

- [1] MASSIN P., GENIAUT S. : Méthode X-FEM, Manuel de référence du *Code_Aster*, [R7.02.12]
- [2] VISSE E. : Calcul des coefficients d'intensité de contraintes, Manuel de référence du *Code_Aster*, [R7.02.05]
- [3] BARTHELEMY B. : Notions pratiques de la mécanique de la rupture, Eyrolles, 1980.
- [4] LABORDE P., POMMIER J., RENARD Y., SALÜN M. : "High-order extended finite element method for cracked domains", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 (3), 354-381, 2005.