

Manuel de Validation
Fascicule V6.04 : Statique non linéaire des structures volumiques
Document V6.04.121

SSNV121 - Rotation et traction hyper-élastique d'un barreau

Résumé :

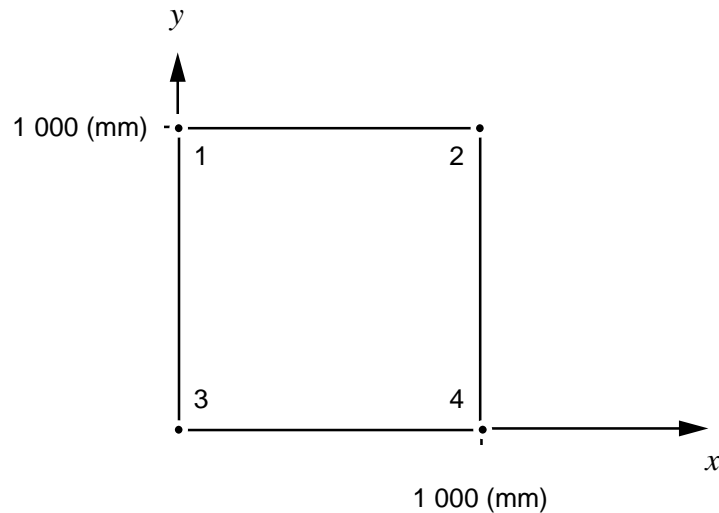
Ce test de mécanique quasi-statique consiste à faire tourner de 90° un barreau parallélépipédique, à le soumettre à une traction importante pour finalement le laisser revenir dans un état déchargé. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyper-élastiques (commande `STAT_NON_LINE` [U4.32.01], mot-clé `COMP_ELAS`), et donc en particulier les grandes rotations, pour une relation de comportement élastique linéaire.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA8, modélisation A) ou bien plan (QUAD4, hypothèse de déformations planes, modélisation B).

Les résultats obtenus par le *Code_Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

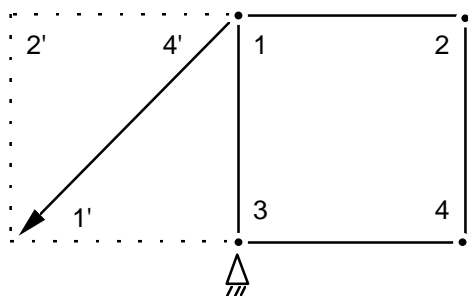
Comportement hyper-élastique de St Venant - Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E} \quad \begin{array}{l} E = 200\,000.\text{MPa} \\ \nu = 0.3 \end{array}$$

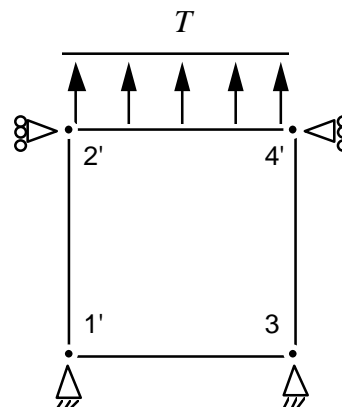
1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement est appliqué en deux temps : tout d'abord, une rotation d'ensemble de la structure, suivie par une traction dans la nouvelle configuration :

Rotation d'ensemble ($0 < t < 1$ s)



Traction ($1 \text{ s} < t < 2$ s)



2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Il s'agit d'un problème plan. On peut chercher la solution sous la forme d'une rotation rigide et d'un allongement d'un facteur λ dans la direction y .

$$\mathbf{U}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} -X - Y \\ (1 + \lambda)X - Y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le gradient de la transformation et la déformation de Green-Lagrange sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } e = \frac{\lambda(\lambda + 2)}{2}$$

La relation de comportement conduit alors à un tenseur de contraintes lagrangiennes diagonal :

$$\begin{cases} S_{xx} = \frac{(1 - \nu) E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \\ S_{yy} = S_{zz} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \end{cases}$$

La condition aux limites de l'équation d'équilibre nous permet alors de déterminer la valeur de l'allongement λ :

$$T = (\mathbf{FS})_{yx} = (1 + \lambda)S_{xx} \Rightarrow \frac{(1 - \nu) E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)}{2} = T$$

La contrainte de Cauchy est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\text{Det } \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \frac{S_{yy}}{1 + \lambda} \\ \sigma_{yy} = (1 + \lambda) S_{xx} \end{cases}$$

Enfin, la force exercée sur les faces :

- $[2,4] : F_y = \sigma_{yy} S_{[2,4]} = \sigma_{yy} S_{o[2,4]}$
- $[4,3] : F_x = \sigma_{xx} S_{[4,3]} = \sigma_{xx} (1 + \lambda) S_{o[4,3]}$
- $[1,2,3,4] : F_z = \sigma_{zz} S_{[1,2,3,4]} = \sigma_{zz} (1 + \lambda) S_{o[1,2,3,4]}$

où $S_{o[\cdot]}$ représentent les surfaces initiales des faces.

2.2 Résultats de référence

On adopte comme résultats de référence les déplacements, la contrainte de Cauchy et la force exercée sur les faces [2,4] et [4,3].

Au temps $t = 2$ s :

On cherche T tel que l'allongement $\lambda = 0.1$

$$\Rightarrow T = 31\,096.154 \text{ MPa.}$$

La contrainte de Cauchy est alors :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 11\,013.986 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 31\,096.154 \text{ MPa} \end{cases}$$

Les forces exercées sont :

$$\begin{aligned} F_x &= 12\,115.385 \times S_{o[4,3]} \text{ N} \\ F_y &= 31\,096.154 \times S_{o[2,4]} \text{ N} \\ F_z &= 12\,115.385 \times S_{o[1,2,3,4]} \text{ N} \end{aligned}$$

Au temps $t = 3$ s :

Le barreau est revenu dans son état initial :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \sigma = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

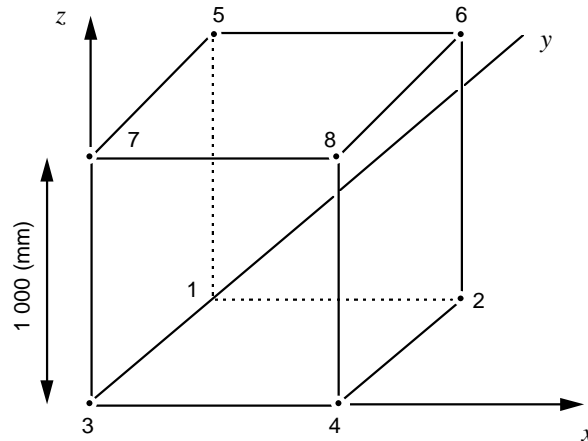
- [1] Eric LORENTZ "Une relation de comportement hyperélastique non linéaire" Note interne EDF/DER HI-74/95/011/0

Page laissée intentionnellement blanche.

3 Modélisation A

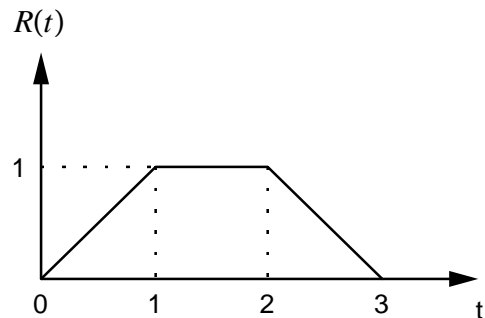
3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA 8
1 maille QUAD4

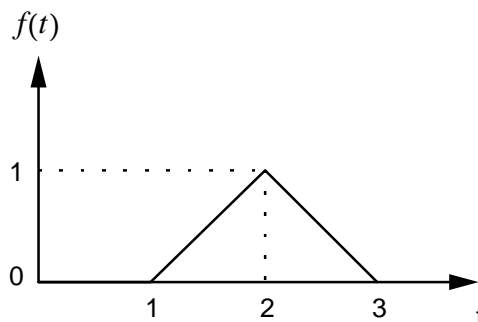


Conditions aux limites :

(3,7) : $DX = 0$
(1,5) : $DX = -1\,000\,R(t)$
(2,6) : $DX = -2\,000\,R(t)$
(4,8) : $DX = -1\,000\,R(t)$
 $DY = 0$
 $DY = -1\,000\,R(t)$



Chargement : Traction sur la face [2,4,8,6]
maille [2,4,8,6] (QUAD4) : $FY = 31\,096.154\,f(t)$ MPa



3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles : 2
1 HEXA8
1 QUAD4

3.3 Fonctionnalités testées

STAT_NON_LINE	COMP_ELAS	DEFORMATION : 'GREEN'
CALC_NO	OPTION : 'FORC_NODA'	GEOMETRIE : 'DEFORMEE'

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

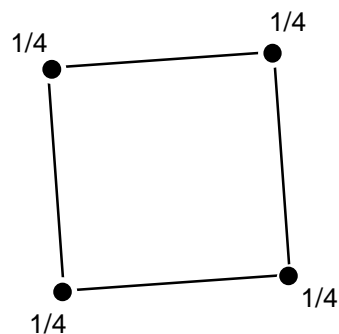
Identification	Référence	Aster	% différence
t = 2 Déplacement DX (NO2)	100	100	0
t = 2 Déplacement DY (NO4)	1100	1100	0
t = 2 Contraintes SIGXX (PG1)	11013.986	11013.986	0
t = 2 Contraintes SIGYY (PG1)	31096.154	31096.154	0
t = 2 Contraintes SIGZZ (PG1)	11013.986	11013.986	0
t = 2 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-9}$	/
t = 2 Contraintes SIGXZ (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 2 Contraintes SIGYZ (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Déplacement DX10 (NO2)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Déplacement DY (NO4)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 3 Contraintes SIGXX (PG1)	0	$\approx 10^{-9}$	/
t = 3 Contraintes SIGYY (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGZZ (PG1)	0	$\approx 10^{-9}$	/
t = 3 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 3 Contraintes SIGXZ (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGYZ (PG1)	0	$\approx 10^{-11}$	/
t = 2 Force nodale DX (NO8)	$3.0289 \cdot 10^9$	$3.0288 \cdot 10^9$	-0.002%
t = 2 Force nodale DY (NO8)	$7.774 \cdot 10^9$	$7.774 \cdot 10^9$	0
t = 2 Force nodale DZ (NO8)	$3.0289 \cdot 10^9$	$3.0288 \cdot 10^9$	-0.002%

4.2 Remarques

Calcul de la force nodale :

La force appliquée F sur une face décrite par une maille linéaire se répartit par :

$$F_{\text{noeud}} = \frac{1}{4} F$$



4.3 Paramètres d'exécution

Version : 3.03.30

Machine : CRAY C90

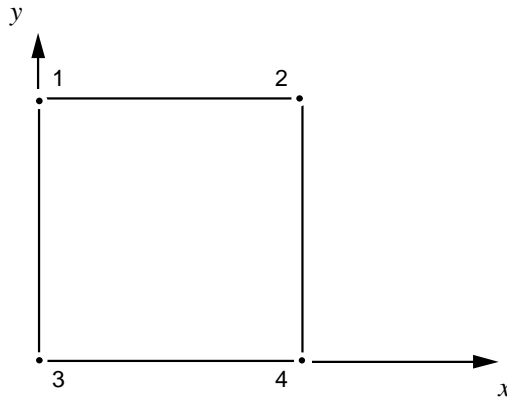
Encombrement mémoire : 8 MW

Temps CPU User : 62.3 secondes

5 Modélisation B

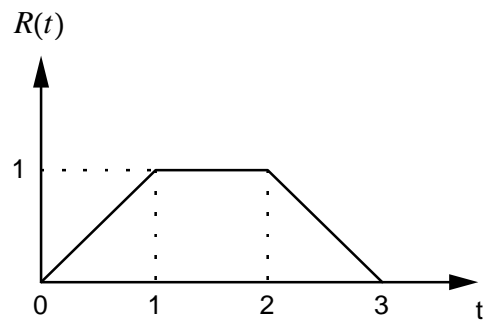
5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D déformations planes



Conditions aux limites :

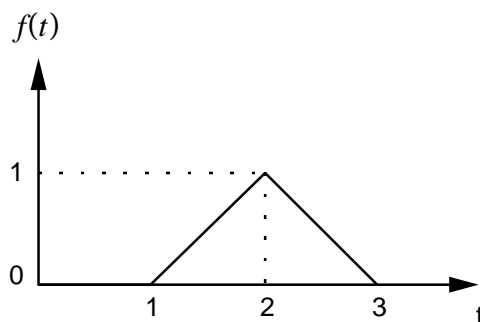
3 : DX = 0
1 : DX = - 1 000 R(t)
2 : DX = - 2 000 R(t)
4 : DX = - 1 000 R(t)
DY = 0
DY = - 1 000 R(t)



Chargement :

Traction sur la face [2,4]

maille [2,4] : FY = 31 096.154 f(t) MPa



5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles : 2
1 QUAD4
1 SEG2

5.3 Fonctionnalités testées

STAT_NON_LINE	COMP_ELAS	DEFORMATION : 'GREEN'
CALC_NO	OPTION : 'FORC_NODA'	GEOMETRIE : 'DEFORMEE'

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Aster	% différence
t = 2 Déplacement DX (NO2)	100	100	0
t = 2 Déplacement DY (NO4)	1100	1100	0
t = 2 Contraintes SIGXX (PG1)	11013.986	11013.986	0
t = 2 Contraintes SIGYY (PG1)	31096.154	31096.154	0
t = 2 Contraintes SIGZZ (PG1)	11013.986	11013.986	0
t = 2 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Déplacement DX (NO2)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 3 Déplacement DY (NO4)	0	$\approx 10^{-12}$	/
t = 3 Contraintes SIGXX (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGYY (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGZZ (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 3 Contraintes SIGXY (PG1)	0	$\approx 10^{-10}$	/
t = 2 Force nodale DX (NO4)	$6.0577 \cdot 10^6$	$6.0577 \cdot 10^6$	0
t = 2 Force nodale DY (NO4)	$15.5481 \cdot 10^6$	$15.5481 \cdot 10^6$	0

6.2 Remarques

Calcul de la force nodale :

La force appliquée F sur une face décrite par une maille linéaire se répartit par :

$$F_{\text{noeud}} = \frac{1}{2} F$$



6.3 Paramètres d'exécution

Version : NEW 3.03.30

Machine : CRAY C90

Encombrement mémoire : 8 MW

Temps CPU User : 48.3 secondes

7 Synthèse des résultats

Il apparaît à l'issue de ce test que la solution numérique coïncide remarquablement avec la solution analytique. On remarquera cependant que la forte non linéarité due aux grandes rotations nécessite une discrétisation en temps relativement fine, sans être pénalisante sur la précision puisque, contrairement à une loi de comportement incrémentale, les erreurs ne se cumulent pas d'un pas de temps sur l'autre.