

Manuel d'utilisation**Fascicule U2.05 : Mécanique de la rupture et de l'endommagement****Document U2.05.01**

Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture du *Code_Aster* et conseils d'utilisation

Résumé :

La caractérisation de l'état des pièces fissurées s'appuie sur la détermination du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contraintes, bases de nombreux critères en mécanique de la rupture fragile (amorçage en fond de fissure, propagation de défauts, méthodes simplifiées). Ce document présente ces fonctionnalités, disponibles dans le *Code_Aster*, indique leur domaine de validité et donne des conseils d'utilisation.

On présente également de nouvelles formulations issues de travaux de recherches récents mais non encore validées, comme GTP et Gp.

La lecture de ce document peut se faire à deux niveaux :

- pour un nouvel utilisateur en mécanique de la rupture, voulant connaître les méthodes utilisées et les commandes du *Code_Aster* nécessaires à la réalisation de son étude,
- pour un utilisateur plus averti, à la recherche de conseils d'utilisation pour résoudre certains points délicats et désireux de prendre connaissances de travaux de recherches récents.

Il est fait constamment référence aux Manuels d'Utilisation et de Référence, dont la lecture demeure indispensable. La bibliographie doit également permettre au lecteur d'approfondir le sujet qui l'intéresse.

Table des matières

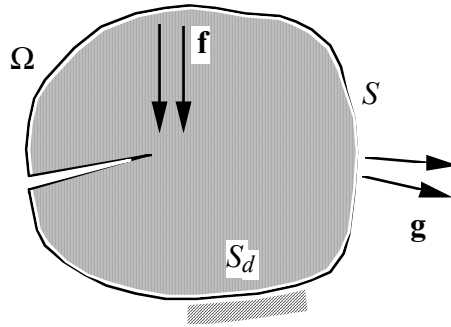
1	Cadre d'utilisation des fonctionnalités disponibles en mécanique de la rupture dans le <i>Code_Aster</i> ...	3
1.1	Cadre théorique : principe de la méthode théta	3
1.2	Formulation des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans le <i>Code_Aster</i>	4
1.3	Domaine de validité des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans le <i>Code_Aster</i>	7
1.4	Approche énergétique de la rupture élastoplastique et formulation du paramètre G_p	11
2	Méthodologie et recommandations d'utilisation.....	13
2.1	Maillage de la structure fissurée.....	13
2.2	Introduction du champ théta	14
2.3	Normalisation du taux de restitution global G dans le <i>Code_Aster</i>	17
2.4	Méthode d'interpolation en 3D.....	18
2.5	Calcul de G pour un problème non-linéaire.....	20
3	Mise en œuvre d'un calcul en mécanique de la rupture dans le <i>Code_Aster</i>	26
3.1	Méthodologie	26
3.2	Exemple 1 : Calcul de G , K_1 et K_2 pour un problème élastique linéaire en 2D.....	31
3.3	Exemple 2 : Calcul de G et $G(s)$ local pour un problème thermo-élastique en 3D	33
3.4	Exemple 3 : calcul de G_p pour un problème élastoplastique en 2D	37
4	Documentation du <i>Code_Aster</i> relative à la mécanique de la rupture fragile.....	49
5	Bibliographie	50

1 Cadre d'utilisation des fonctionnalités disponibles en mécanique de la rupture dans le Code_Aster

1.1 Cadre théorique : principe de la méthode théta

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω . Soient :

- \mathbf{u} le champ de déplacement,
- T le champ de température,
- \mathbf{f} le champ de forces volumiques appliquées sur Ω ,
- \mathbf{g} le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
- \mathbf{U} le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.
- $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ le tenseur des déformations d'origine thermique,
- $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ la densité d'énergie libre.



Considérons l'approche énergétique de la rupture de Griffith. Les résultats ne sont rigoureux qu'en thermo-élasticité linéaire mais des extensions sont possibles aux problèmes non linéaires.

Pour un solide élastique fissuré, le critère de propagation de Griffith se traduit par : $G > 2\gamma$ où γ est l'énergie de liaison par unité de surface. G , appelé taux de restitution d'énergie, est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre $W(\mathbf{u})$ par rapport au domaine Ω :

$$G = - \frac{\partial W(\mathbf{u})}{\partial \Omega}$$

$$\text{avec : } W(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), T) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Gamma$$

La difficulté du calcul du taux de restitution d'énergie vient de la dérivation par rapport au domaine d'une intégrale dépendant de ce même domaine. Une méthode rigoureuse est la méthode théta, qui est une méthode lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle. Elle consiste à introduire un champ $\boldsymbol{\theta}$ et à considérer des transformations $F^\eta : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \eta \boldsymbol{\theta}(\mathbf{M})$ du domaine de référence Ω en un domaine Ω_η qui correspondent à des propagations de la fissure. Ces transformations ne doivent pas modifier les bords du domaine hormis le fond de fissure.

Cette méthode est détaillée dans [bib38] et l'utilisation du champ théta dans le Code_Aster est décrite au [§2.2].

En élasticité linéaire plane (hypothèse des déformations planes ou des contraintes planes), le champ de déplacement \mathbf{u} peut se décomposer en une partie singulière et une partie régulière. La partie singulière, appelée également singularité, contient les coefficients d'intensité de contraintes K_I et K_{II} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}$$

En élasticité linéaire plane, les coefficients d'intensité de contraintes sont reliés au taux de restitution d'énergie par la formule d'IRWIN :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en déformations planes}$$

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en contraintes planes}$$

1.2 Formulation des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans le Code_Aster

1.2.1 Taux de restitution d'énergie G

Avec la méthode théta, le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_o} G(s) \boldsymbol{\theta}(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad , \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

où \mathbf{m} est la normale unitaire au fond de fissure Γ_o situé dans le plan tangent à $\partial\Omega$ et rentrant dans Ω , et où $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle $W(\mathbf{u}(\eta))$ à l'équilibre par rapport à l'évolution initiale du fond de fissure η :

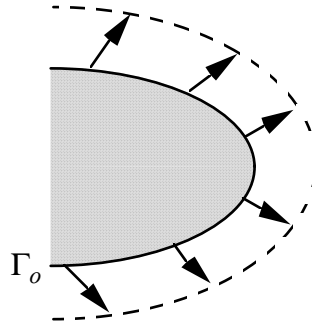
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = - \left. \frac{d W(\mathbf{u}(\eta))}{d\eta} \right|_{\eta=0}$$

On note Θ les conditions à remplir par le champ $\boldsymbol{\theta}$ (voir [§2.2.1]).

En dimension 2, le fond de fissure Γ_o se ramène à un point, et on peut choisir un champ $\boldsymbol{\theta}$ de telle sorte que l'équation variationnelle se ramène à $G = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$.

En dimension 3 la dépendance de $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ vis-à-vis du champ $\boldsymbol{\theta}$ sur le fond de fissure est plus complexe. Dans le Code_Aster, on peut calculer :

- le taux de restitution global G correspondant à une progression uniforme de la fissure (commande `CALC_G_THETA` [U4.82.03]). L'utilisateur doit choisir un champ théta unitaire au voisinage du fond de fissure vérifiant $\boldsymbol{\theta}(s) \cdot \mathbf{m}(s) = 1, \forall s$ et alors : $G l = \int_{\Gamma_o} G(s) ds = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$
 où l est la longueur du fond de fissure,



- le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ solution de l'équation variationnelle précédente (commande `CALC_G_LOCAL [U4.82.04]`). Dans ce cas, l'utilisateur ne donne pas de champ θ , les champs θ^i nécessaires à la résolution de l'équation variationnelle et au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement.

Pour un problème thermo-élastique linéaire ou non-linéaire l'expression de $G(\theta)$ est :

$$G(\theta) = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} - \psi \theta_{k,k} - \frac{\partial \psi}{\partial T} T_{,k} \theta_k) d\Omega + \int_{\Omega} (f_i u_i \theta_{k,k} + f_{i,k} \theta_k u_i) d\Omega$$

$$+ \int_s (g_{i,k} \theta_k u_i + g_i u_i (\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k)) d\Gamma - \int_{S_d} \sigma_{ij} n_j U_{i,k} \theta_k d\Gamma$$

Si on se place dans l'hypothèse des grandes transformations, il faut remplacer le terme

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} d\Omega \text{ par } \int_{\Omega} F_{ik} S_{kj} u_{i,p} \theta_{p,j} d\Omega \text{ avec}$$

S le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange appelé encore deuxième tenseur de Piola-Kirchoff,
F le gradient de la transformation qui fait passer de la configuration de référence à la configuration actuelle.

Si l'on tient compte des déformations initiales ε_{ij}^0 et des contraintes initiales σ_{ij}^0 , il faut ajouter le terme :

$$\int_{\Omega} \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\circ} \right) \varepsilon_{ij,k}^{\circ} - \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{\circ} \right) \sigma_{ij,k}^{\circ} \right] \theta_k d\Omega$$

Pour un problème thermo-élastoplastique l'expression de $G(\theta)$ retenue dans le *Code_Aster* est :

$$G(\theta) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,k} \theta_{k,j} - \tilde{\psi} \theta_{k,k} + \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial T} T_{,k} + (R + \sigma_y) p_{,k} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_{ij}} \beta_{ij,k} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k}^p \right) \theta_k d\Omega$$

+ termes classiques (**f**, **g**)

avec :

$\tilde{\psi}$ l'énergie mécanique totale,

ϵ^p le tenseur des déformations plastiques,

p la variable interne scalaire d'écrouissage isotrope (déformation plastique cumulée),

β une ou plusieurs variables tensorielles ou scalaires d'écrouissage cinématique,

σ_y la limite d'élasticité linéaire initiale,

R le rayon de la surface de charge pour l'écrouissage isotrope.

Pour un chargement radial et monotone : $\sigma_{ij} \epsilon_{ij,k}^p = (R + \sigma_y) p_{,k} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_{ij}} \beta_{ij,k}$ et on retrouve

l'expression de $G(\theta)$ en thermo-élasticité non linéaire [R7.02.03].

1.2.2 Coefficients d'intensité de contraintes K1 et K2 déduits du calcul de G.

En thermo-élasticité linéaire, le taux de restitution d'énergie G est une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement \mathbf{u} : $G = g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. En utilisant la méthode théta, la forme bilinéaire $g(\cdot, \cdot)$ associée à G est définie par :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial B}{\partial \mathbf{N} \mathbf{u}} \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta) + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{N} \mathbf{v}} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \operatorname{div} \theta \right] d\Omega$$

en se limitant au terme classique et en notant :

$$\psi(\epsilon(\mathbf{u})) \text{ la densité d'énergie élastique : } \psi(\epsilon(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \epsilon(\mathbf{u}) : \Lambda : \epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Λ le tenseur d'élasticité,

B la forme bilinéaire symétrique définie par : $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \epsilon(\mathbf{u}) : \Lambda : \epsilon(\mathbf{v})$

Dans la méthode implantée dans le *Code_Aster* (commande `CALC_G_THETA` [U4.63.03]), pour découpler les modes de rupture *I* et *II* et calculer les coefficients K_I et K_{II} , on utilise cette forme bilinéaire symétrique $g(\cdot, \cdot)$ et la décomposition du champ de déplacement \mathbf{u} en parties régulière

\mathbf{u}_R et singulière \mathbf{u}_S : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}$ (\mathbf{u}_S^I et \mathbf{u}_S^{II} sont connus explicitement) :

$$\begin{cases} K_I &= \frac{E}{\alpha} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} &= \frac{E}{\alpha} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^{II}) \end{cases}$$

$\alpha = 1 - \nu^2$ en déformations planes et $\alpha = 1$ en contraintes planes.

1.2.3 Coefficients d'intensité de contraintes K1, K2 et K3 obtenus par extrapolation du champ de déplacements.

Pour une fissure plane dans un matériau élastique, homogène et isotrope, on peut également accéder aux valeurs de K1, K2 et K3 par extrapolation des sauts de déplacements sur les lèvres de cette fissure (commande `POST_K1_K2_K3`).

Contrairement à l'approche précédente (calcul des K_i par la forme bilinéaire du taux de restitution d'énergie), on peut calculer ainsi ces coefficients en géométrie axisymétrique et 3D et accéder au coefficient K3. Pour chaque coefficient d'intensité de contrainte, la méthode, moins précise que la méthode `G_THETA` [R7.02.01], fournit deux valeurs encadrant la solution. On peut toutefois se faire une idée de la précision des résultats en recalculant G par la formule d'Irwin, à partir des valeurs de K1, K2 et K3, et en comparant cette valeur avec celle obtenue avec `G_THETA`. La précision des résultats est nettement améliorée si les éléments touchant le fond de fissure (éléments quadratiques) ont des nœuds milieux situés au quart des arêtes.

1.2.4 Propagation Lagrangienne

Il est possible avec le *Code_Aster* de calculer le taux de restitution de l'énergie pour différentes longueurs de fissure (en 2D et 3D) en utilisant un seul maillage représentant une longueur de fissure fixe de référence. Ces développements sont disponibles en élasticité linéaire, pour les éléments de milieu continu 2D et 3D, dans les situations où les variations de géométrie n'affectent pas les bords chargés.

Tout calcul utilisant cette méthode nécessite, pour assurer le passage du domaine réel étudié au domaine de référence, la création préalable d'un champ θ , à l'aide de la commande `CALC_THETA` [U4.82.02]. La formulation développée dans le *Code_Aster* ne tient pas compte des termes thermiques, des chargements sur les lèvres de la fissure ni des forces de volume en général, sauf des déformations initiales qui sont prises en compte en 2D seulement.

Pour plus de précisions sur cette option on se référera au document [R7.02.04].

1.3 Domaine de validité des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans le *Code_Aster*

1.3.1 Modèle

Le calcul du taux de restitution d'énergie G est valable pour les modélisations des milieux continus 2D déformations planes ou contraintes planes (`D_PLAN`, `C_PLAN`), 2D axisymétrique (`AXIS`) et 3D (`3D`). Ces modélisations correspondent pour un milieu bidimensionnel à des triangles à 3 ou 6 nœuds, des quadrangles à 4, 8 ou 9 nœuds et des segments à 2 ou 3 nœuds, pour un milieu tridimensionnel à des hexaèdres à 8, 20 nœuds ou 27 nœuds, des pentaèdres à 6 ou 15 nœuds, des tétraèdres à 4 ou 10 nœuds, des pyramides à 5 ou 13 nœuds, des faces à 4, 8 ou 9 nœuds.

Le calcul du taux de restitution d'énergie local $G(s)$ n'a de sens que pour la modélisation des milieux continus 3D.

Le calcul des facteurs d'intensité de contraintes K1, K2 déduits de la forme bilinéaire $g(\cdot, \cdot)$ est valable uniquement pour les modélisations des milieux continus 2D déformations planes ou contraintes planes (`D_PLAN`, `C_PLAN`). Le calcul du mode antiplan K3 n'est pas disponible.

En revanche, la méthode d'extrapolation des déplacements permet de calculer les K_i (dont K_3) en axisymétrique et 3D quand la fissure est plane.

	D_PLAN	C_PLAN	AXIS	3D
G	•	•	•	•
G(s) local	-	-	-	•
K1, K2 calcul de g	•	•	-	-
K1, K2, K3 extrapolation de u	•	•	•	•

Modélisations disponibles

1.3.2 Caractéristiques du matériau

Pour le calcul du taux de restitution d'énergie, les caractéristiques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation thermique et éventuellement limite d'élasticité, module d'écrouissage) peuvent dépendre de la température. Le calcul est valable pour un matériau homogène isotrope ou pour un bimatériau isotrope (fissure à l'interface de deux matériaux aux caractéristiques différentes).

Pour le calcul des coefficients d'intensité de contraintes à un instant donné, les caractéristiques du matériau doivent être indépendantes de la température. Le calcul est valable uniquement pour un matériau homogène isotrope (éventuellement pour un bimatériau si la pointe de fissure n'est pas située à l'interface des deux matériaux).

	Module d'Young $E(T)$	Coefficient de Poisson $\nu(T)$	Coefficient de dilatation thermique $\alpha(T)$	Limite d'élasticité $\sigma_y(T)$	Module d'écrouissage D_SIGM_EPSI
G	•	•	•	•	•
G(s) local	•	•	•	•	•
K1, K2	-	-	-	-	-

Dépendance des caractéristiques à la température

Les caractéristiques $\sigma_y(T)$ et $D_SIGM_EPSI(T)$ ne sont traitées que pour un problème élastique non linéaire avec écrouissage isotrope linéaire de Von Mises et avec l'option de calcul du taux de restitution d'énergie.

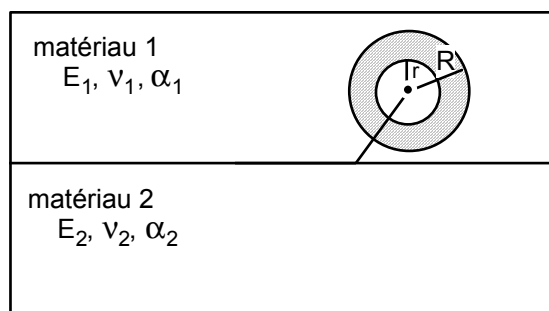
	Matériau homogène	Bimatériau (fissure à l'interface)
G	•	•
G(s) local	•	•
K1, K2	•	-

Homogénéité du matériau

	Matériau isotrope	Matériau orthotrope
G	•	-
G(s) local	•	-
K1, K2	•	-

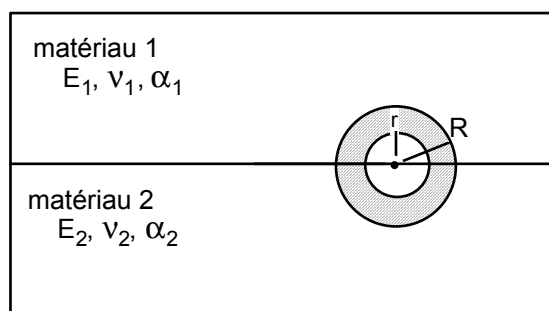
Isotropie du matériau

1^{er} cas : On a un bimatériau mais la pointe de fissure est dans un seul matériau.



Si on est assuré que la couronne, définie entre les rayons inférieur R_{inf} et supérieur R_{sup} (dans la commande `CALC_THETA` [U4.82.02]), a comme support des éléments du même matériau, le calcul est valable quelque soit l'option choisie. Sinon seul le calcul du taux de restitution d'énergie est valable.

2^{ème} cas : On a un bimatériau où la pointe de fissure est à l'interface.



A ce jour, seule l'option de calcul du taux de restitution d'énergie est valable. Le calcul de coefficients d'intensité de contraintes K_1 et K_2 est faux dans ce cas.

1.3.3 Relation de comportement utilisée en post-traitement de mécanique de la rupture

Pour le calcul du taux de restitution de l'énergie, les relations de comportement possibles sont :

- thermo-élasticité linéaire,
- thermo-élasticité non linéaire (hyperélasticité),
- thermo-élastoplasticité (critère de Von Mises avec écrouissage isotrope ou cinématique).

Le calcul des coefficients d'intensité de contraintes est possible uniquement en thermo-élasticité linéaire dans l'hypothèse des petites déformations.

La relation de comportement est choisie dans les commandes `CALC_G_THETA` [U4.82.03] et `CALC_G_LOCAL` [U4.82.04] par l'intermédiaire des mot-clés facteurs `COMP_ELAS` (thermo-élasticité linéaire ou non linéaire) ou `COMP_INCR` (thermo-élastoplasticité).

Les relations traitées sous le mot clé facteur `COMP_ELAS` sont :

- `ELAS` : thermo-élasticité linéaire,
- `ELAS_VMIS_LINE` : Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire,
- `ELAS_VMIS_TRAC` : Von Mises avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction.

Les relations traitées sous le mot clé facteur COMP_INCR sont :

VMIS_ISOT_LINE : Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire,
VMIS_ISOT_TRAC : Von Mises avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction,
VMIS_CINE_LINE : Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire.

	RELATION	G ou G(s) local	K1, K2
COMP_ELAS	'ELAS'	•	•
	'ELAS_VMIS_LINE'	•	-
	'ELAS_VMIS_TRAC'	•	-
COMP_INCR	'ELAS'	•	•
	'VMIS_ISOT_TRAC'	•	-
	'VMIS_ISOT_LINE'	•	-
	'VMIS_CINE_LINE'	-	-

Relation de comportement utilisée en mécanique de la rupture

La relation de comportement thermo-élastique non linéaire peut être utilisée avec de grands déplacements et de grandes rotations (à condition d'avoir uniquement des charges mortes). Cette fonctionnalité est déclenchée par le mot-clé DEFORMATION = 'GREEN'. Les déformations sont les déformations de Green-Lagrange [R7.02.03 §2.1] :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \right)$$

1.3.4 Chargement

Les chargements supportés actuellement par les différentes modélisations et pour le calcul des fonctionnalités de mécanique de la rupture sont les suivants (voir AFFE_CHAR_MECA(_F) [U4.44.01] pour plus de détails) :

	C_PLAN, D_PLAN, AXIS		3D
	K1, K2	G	G et G(s) local
TEMP_CALCULEE	•	•	•
FORCE_INTERNE	•	•	•
PRES_REP	•	•	•
FORCE_CONTOUR	•	•	///
FORCE_FACE	///	///	•
FORCE_NODALE	-	-	-
FORCE_ARETE	///	///	-
PESANTEUR	•	•	•
ROTATION	•	•	•
EPSI_INIT	-	-	-
DDL_IMPO (sur fissure)	-	-	-
FACE_IMPO (sur fissure)	-	-	-

- signifie possible et disponible
- /// signifie option sans objet
- signifie option possible mais non disponible

Ces chargements peuvent dépendre de la géométrie, de l'instant de calcul et éventuellement s'appliquer sur les lèvres de la fissure.

Les chargements non supportés par une option sont ignorés.

Il est important de noter que les seuls chargements à prendre en compte dans un calcul de mécanique de la rupture avec la méthode θ sont ceux appliqués sur les éléments à l'intérieur de la couronne (entre R_{inf} et R_{sup} pour un comportement thermo-élastique linéaire ou non linéaire [R7.02.01 §3.3], entre le fond de fissure et R_{sup} pour une relation thermo-élastoplastique [R7.02.07]).

Si on fait un calcul en grandes transformations (mot clé `DEFORMATION = 'GREEN'` sous le mot clé facteur `COMP_ELAS`) les chargements supportés doivent être des charges mortes, typiquement une force imposée et pas une pression [R7.02.03 §2.4].

1.3.5 Etat initial

Il est possible de tenir compte d'un état initial (soit des contraintes initiales, soit des déformations initiales) pour le calcul du taux de restitution d'énergie. Deux possibilités sont offertes à l'utilisateur :

- définir des déformations initiales avec le mot-clé `EPSI_INIT` dans la commande `AFFE_CHAR_MECA(_F)` [U4.44.01] et les récupérer sous le mot-clé `CHARGE` dans les commandes `CALC_G_THETA` [U4.82.03] ou `CALC_G_LOCAL` [U4.82.04],
- récupérer un champ de contraintes ou déformations initiales issu d'un calcul mécanique (`evol_noli` issu de la commande `STAT_NON_LINE` [U4.51.03]) avec le mot-clé `ETAT_INIT`.

1.3.6 Contact

Le calcul des grandeurs de mécanique de la rupture dans le *Code_Aster* n'est pas valide s'il y a contact avec frottement entre les faces de la fissure. En effet le calcul du taux de restitution d'énergie ne prend pas en compte les phénomènes dissipatifs.

En revanche si les éléments de contact sont au delà de la couronne définie entre R_{inf} et R_{sup} les calculs de G , $G(s)$, $K1$ et $K2$ sont valides.

Par contre, il est possible pour le calcul de G et de $G(s)$ seulement de prendre en compte des conditions de contact sans frottement pour éviter l'interpénétration des lèvres de la fissure.

1.4 Approche énergétique de la rupture élastoplastique et formulation du paramètre G_p

L'approche globale classique présente des limites importantes :

- le chargement doit être monotone,
- plus généralement, le chargement doit être proportionnel et radial (voir chapitre [§2.5.2]),
- on ne peut pas simuler de grandes propagations,
- on ne peut pas prendre en compte un champ de contraintes résiduelles (voir chapitre [§1.3.5]).

L'application de l'approche globale en dehors de son domaine de validité conduit à des problèmes de « transférabilité » d'éprouvettes à structures.

Une autre approche a alors été envisagée à EDF-R&D : l'approche énergétique.

Cette nouvelle approche a été développée, d'une part, dans le cadre de la déchirure ductile [bib57], et, d'autre part, dans le cadre de la rupture fragile par clivage.

Dans le cas de la rupture fragile par clivage, on part de la théorie de Francfort Marigo en élasticité [bib56]. Cette théorie est une généralisation du critère de Griffith pour les matériaux élastiques fragiles. On applique le principe de minimisation de l'énergie, pour prédire l'initiation ou la propagation d'une fissure de surface S d'une surface créée dS . On définit, à partir de l'énergie élastique, un paramètre G_e , taux de restitution de l'énergie en élasticité [bib58] par la formule suivante :

$$G_e = - [W_e(dS) - W_e(0)] / \text{Aire}(dS).$$

On étend ensuite cette approche à la plasticité, en faisant l'hypothèse que la dissipation plastique et la dissipation liée à la rupture sont indépendantes.

On peut alors définir un paramètre G_p plastique [bib58], noté G_p , comme un taux de restitution de l'énergie en plasticité incrémental [bib58] par la formule suivante :

$$G_p = - [W(dS) - W(0)] / \text{Aire}(dS)$$

où W est l'énergie totale (énergie libre + énergie d'érouissage + énergie dissipée plastiquement).

Mais on se retrouve alors confronté à 2 paradoxes de la théorie de Griffith [bib62] :

- le paradoxe de Rice,
- les effets d'échelle de la théorie de Francfort-Marigo induits par l'hypothèse de Griffith.

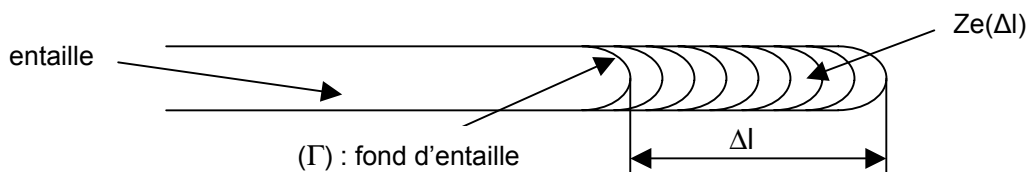
On fait alors le choix de modéliser le défaut sous forme d'entaille et non de fissure.

On définit un taux de restitution d'énergie G_p applicable à une fissure représentée en entaille, en s'appuyant sur la formulation de Francfort-Marigo et sur la mécanique continue de l'endommagement, moyennant quelques hypothèses supplémentaires.

Remarque :

Une autre alternative consiste à s'orienter vers une théorie de Francfort-Marigo basée sur un autre modèle que celui de Griffith, comme celui de Barenblatt.

On suppose que cette entaille a la forme d'un cigare, le fond d'entaille (Γ) étant représenté par un demi-cercle de rayon r . La zone correspondant à la propagation de l'entaille est notée $Z_e(\Delta l)$ (Zone endommagée) et dépend de Δl , distance propagée, conformément à la figure ci-dessous :



Le paramètre G_p est défini par la formule suivante :

$$G_p = \max_{\Delta l} \left[\left(\int_{\text{Entaille}(\Delta l)} (w_e dS) \right) / \Delta l \right]$$

où W_e est l'énergie élastique.

Ce paramètre permet de prédire :

- la propagation progressive de l'entaille (quand le maximum est obtenu pour $\Delta l = 0$)
- la propagation brutale de l'entaille (quand le maximum est obtenu pour $\Delta l \neq 0$).

On évacue dans ce cas les 2 paradoxes de la théorie de Griffith.

On peut utiliser Gp pour analyser des situations de rupture fragile par clivage, quand l'approche Gtheta n'est pas valide. Il peut s'agir de problèmes avec :

- décharges [bib59],
- chargements non proportionnels,
- contraintes résiduelles,
- effet petit défaut [bib60], [bib61].

On présente la mise en œuvre du calcul de Gp dans le *Code_Aster* dans le chapitre [§2.5.2.3] et on illustre cette approche sur un exemple dans le chapitre [§3.4].

2 Méthodologie et recommandations d'utilisation

2.1 Maillage de la structure fissurée

2.1.1 Outil de maillage de bloc fissuré

Le mailleur GIBI comporte une procédure automatique paramétrée qui permet de concevoir des maillages de blocs fissure en 3D. Cette procédure a été développée par EDF-R&D et a été validée pour assurer la bonne qualité du maillage. On obtient un maillage au format GIBI que peut reconnaître le *Code_Aster* (commande `PRE_GIBI`). L'utilisateur renseigne un certain nombre de paramètres géométriques (dimensions de fissure, taille de bloc,...) ou topologiques (modélisation du tore de fond de fissure en couronnes, secteurs et tranches, déraffinement, nombre d'éléments,...) et le logiciel génère un bloc fissure, qui peut ensuite être intégré dans une autre structure.

L'utilisateur dispose d'indicateurs de qualité de maillage pour ajuster au mieux les paramètres.

2.1.2 Méthodologie

De la qualité du maillage dépend la qualité numérique des résultats issus du calcul mécanique (déplacements et contraintes) et par conséquent de la qualité des grandeurs en mécanique de la rupture. En présence d'une fissure il faut donc raffiner au voisinage du fond de fissure pour capter au mieux les singularités. Mais il n'est pas nécessaire de raffiner exagérément : l'intérêt de la méthode théta est de faire intervenir les termes singuliers sur des éléments entre R_{inf} et R_{sup} et non sur ceux au voisinage du fond de fissure (à l'exception d'un calcul en thermo-élastoplasticité, pour ce cas particulier se reporter à [§2.5.2]).

Les calculs des grandeurs de mécanique de la rupture sont valides pour des éléments linéaires ou quadratiques, mais il est fortement conseillé d'utiliser des éléments quadratiques, en particulier en 3D. Le calcul de ces grandeurs nécessite en effet de déterminer avec une bonne approximation les champs de contrainte et de déformation qui varient fortement au voisinage du fond de fissure. Or, à nombre de nœuds identique, les éléments quadratiques donnent de meilleurs résultats que les éléments linéaires, sans doute parce qu'ils sont plus aptes à représenter ce type de variation. Ajoutons qu'en 3D, il est nécessaire de réaliser un compromis entre un raffinement suffisant en fond de fissure d'une part, et une taille de problème raisonnable d'autre part. Le choix d'éléments quadratiques contribue à réaliser un tel compromis.

Un maillage rayonnant en fond de fissure n'est pas obligatoire : les rayons R_{inf} et R_{sup} ne sont pas liés au maillage et la couronne peut être « à cheval » sur plusieurs éléments. Néanmoins la pratique montre qu'un maillage rayonnant en fond de fissure donne de bons résultats numériques.

Le maillage rayonnant a en particulier l'avantage de permettre d'imposer un découpage constant selon l'angle polaire, autour du fond de fissure, et dans le voisinage immédiat de celui-ci, découpage bien adapté à la représentation asymptotique des champs en fond de fissure. En effet, cette variation selon l'angle polaire ne dépend pas de la distance du point considéré au fond de fissure.

Dans le cas du calcul des coefficients d'intensité de contrainte par la méthode d'extrapolation des sauts de déplacements sur les lèvres de cette fissure (commande `POST_K1_K2_K3`), il est fortement conseillé de positionner les nœuds milieux des éléments quadratiques touchant le fond de fissure au quart des arêtes (maillage de type 'BARSOUM'). Ainsi la dépendance en \sqrt{r} du champ de déplacement est mieux représentée et la qualité des résultats est améliorée. Les valeurs des coefficients K_i obtenues par cette méthode tendent vers celles déduites du calcul de G (`CALC_G_THETA_T` option `CALC_K_G`) avec le raffinement du maillage autour du fond de fissure.

2.1.3 Estimateurs d'erreurs

Pour apprécier la qualité du maillage il est conseillé de réaliser un calcul élastique et d'utiliser les estimateurs d'erreurs de discrétisation : les estimateurs d'erreurs de ZHU-ZIENKIEWICZ en élasticité 2D [R4.10.01] ou l'estimateur d'erreur par résidu [R4.10.02].

Ces estimateurs sont implantés dans le *Code_Aster* dans la commande `CALC_ELEM` [U4.81.01]. Ils sont activés à partir des options suivantes : `ERRE_ELEM_NOZ1` pour ZZ1, `ERRE_ELEM_NOZ2` pour ZZ2 et `ERRE_ELGA_NORE` pour l'estimateur en résidu par élément.

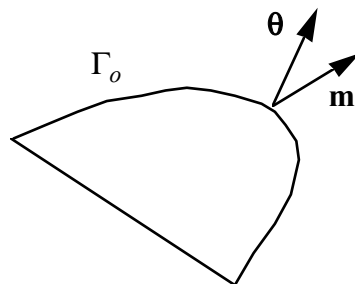
2.2 Introduction du champ théta

2.2.1 Définition du champ théta et conditions à respecter

Le champ théta est un champ de vecteurs, défini sur le solide fissuré, qui représente la transformation du domaine lors d'une propagation de fissure. On rappelle que le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_o} G(s) \boldsymbol{\theta}(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad , \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

où \mathbf{m} est la normale unitaire au fond de fissure Γ_o situé dans le plan tangent à $\partial\Omega$ (c'est-à-dire tangent au plan de fissuration en 3D ou aux lèvres de la fissure en 2D) et rentrant dans Ω . On note Θ les conditions à remplir par le champ $\boldsymbol{\theta}$ ci dessous :



La transformation ne doit modifier que la position du fond de fissure et pas le bord du domaine $\partial\Omega$. Le champ $\boldsymbol{\theta}$ doit donc être tangent à $\partial\Omega$ (en particulier les lèvres de la fissure), i.e. en notant \mathbf{n} la normale à $\partial\Omega$: $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Le champ $\boldsymbol{\theta}$ doit être localement dans le plan tangent aux lèvres de la fissure et en 3D normal à l'arête à laquelle il appartient. Ceci correspond à la direction de propagation de la fissure.

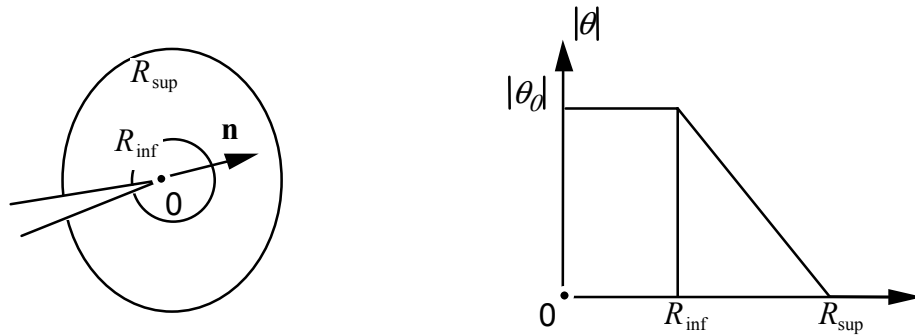
Le champ $\boldsymbol{\theta}$ doit également être continu sur Ω .

La quantité $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m}$ représente la vitesse normale du fond de fissure.

2.2.2 Choix du champ théta dans le Code_Aster

En raison de la singularité du champ de déplacement, on utilise des champs θ . \mathbf{m} constants au voisinage du fond de fissure, annulant ainsi dans ce voisinage les termes singuliers $\sigma_{ij} \mu_{i,p} \theta_{p,k} - \psi \theta_{k,k}$ dans $G(\theta)$.

Le champ théta est défini de la façon suivante : en chaque nœud du fond de fissure, on se donne 2 rayons $R_{\text{inf}}(s)$ et $R_{\text{sup}}(s)$. En deçà de $R_{\text{inf}}(s)$ le module du champ théta est constant, au delà il est nul et il est linéaire entre les deux.



La construction du champ théta est décrite précisément dans [R7.02.01]. Elle est implantée dans la commande `CALC_THETA` en 2D et en 3D pour le calcul du taux de restitution global G , et dans la commande `CALC_G_LOCAL` pour le calcul du taux de restitution local $G(s)$.

En 2D et en axisymétrie le fond de fissure Γ_o se limite à un point. L'utilisateur définit :

- les rayons R_{inf} et R_{sup} ,
- le module $|\theta_o|$ en fond de fissure,
- la direction de propagation de la fissure \mathbf{m} .

En 3D l'utilisateur définit :

- les rayons $R_{\text{inf}}(s)$ et $R_{\text{sup}}(s)$,
- les directions de propagation de la fissure uniquement aux extrémités du fond de fissure (mots clés `DTAN_ORIG` et `DTAN_EXTR` dans la commande `DEFI_FOND_FISS` [U4.82.01]),
- la topologie du fond de fissure : ouvert ou fermé suivant si la fissure est débouchante ou non,
- le module $|\theta_o|$ en fond de fissure (uniquement pour le calcul de G global sinon les P champs θ^i nécessaires à la résolution de l'équation variationnelle et au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement selon la famille de fonctions d'interpolation choisie : Lagrange ou Legendre, voir [§2.4]).

Les directions du champ théta hors extrémités sont calculés automatiquement à partir des lèvres de la fissure, mais l'utilisateur peut éventuellement les définir lui-même en utilisant le mot clé `DIRE_THETA`, voir [§2.2.3].

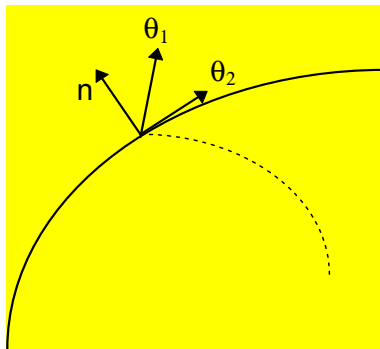
Le champ θ est alors construit de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \theta(r(s)) &= \mathbf{0} & \text{si } r(s) \geq R_{\text{sup}}(s) \\ \theta(r(s)) &= |\theta_o| \mathbf{m} & \text{si } r(s) \leq R_{\text{inf}}(s) \\ \theta(r(s)) &= \frac{R_{\text{sup}} - r}{R_{\text{sup}} - R_{\text{inf}}} |\theta_o| \mathbf{m} & \text{si } R_{\text{inf}}(s) \leq r(s) \leq R_{\text{sup}}(s) \end{aligned}$$

2.2.3 Problème de la discrétisation en 3D

Problème de la fissure débouchante de façon non perpendiculaire : à l'extrémité débouchante du fond de fissure, le champ θ ne peut pas simultanément être normal à l'arête à laquelle il appartient (dans le plan tangent des lèvres de la fissure) et vérifier la condition $\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Solution conseillée : Définir la direction du champ θ_o sur tous les nœuds du fond de fissure avec le mot clé DIRE_THETA dans les commandes CALC_THETA [U4.82.02] ou CALC_G_LOCAL [U4.82.04]. Au voisinage de l'extrémité débouchante choisir comme direction pour le champ θ_o la moyenne entre la direction vérifiant $\theta_1 \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et la direction normale à l'arête θ_2 .



Problème du choix de R_{inf} et R_{sup} : Le calcul des grandeurs de mécanique de la rupture est indépendant du choix de la couronne d'intégration, c'est-à-dire du choix de R_{inf} et R_{sup} . Néanmoins il est préférable de respecter quelques règles :

- ne jamais prendre $R_{inf} = 0$ ou trop petit par rapport aux dimensions du problème car les déplacements singuliers sont mal calculés au voisinage du fond de fissure (valable également en 2D),
- en 3D il faut trouver un compromis entre R_{inf} pas trop petit et R_{sup} pas trop grand. En effet si on analyse l'algorithme de construction du champ théta (voir [R7.02.01]), on constate que pour connaître la direction du champ théta en un point quelconque du solide, il faut projeter ce point sur le fond de fissure (c'est à dire déterminer l'abscisse du point de fond fissure le plus proche) et lui associer la même direction. Si on considère un point trop éloigné du fond de fissure, il se peut que l'algorithme de recherche du point de fond de fissure le plus proche donne un point « erroné » : la direction du champ théta est mal calculée, au sens où elle ne correspond pas à la propagation de fissure attendue.

Solutions :

- vérifier en visualisant le maillage que, pour le R_{sup} choisi, on ne risque pas d'avoir des points « mal » projetés,
- prendre plusieurs couronnes pour vérifier l'invariance de G, de préférence qui se suivent [R1,R2], [R2,R3], [R3, R4],...

2.3 Normalisation du taux de restitution global G dans le Code_Aster

2.3.1 2D contraintes planes et déformations planes

En dimension 2 (contraintes planes et déformations planes), le fond de fissure est réduit à un point et la valeur $\mathcal{G}(\theta)$ issue de la commande `CALC_G_THETA` est indépendante du choix du champ θ :

$$G = \mathcal{G}(\theta) \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$

2.3.2 Axisymétrie

En axisymétrie il faut normaliser la valeur $\mathcal{G}(\theta)$ obtenue avec Aster :

$$G = \frac{1}{R} \mathcal{G}(\theta)$$

où R est la distance du fond de fissure à l'axe de symétrie [R7.02.01, §2.3.3].

2.3.3 3D

En dimension 3, la valeur de $\mathcal{G}(\theta)$ pour un champ θ donné par l'utilisateur est tel que :

$$\mathcal{G}(\theta) = \int_{\Gamma_o} G(s) \theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds$$

Dans la commande `CALC_THETA` [U4.82.02], l'utilisateur définit la direction du champ θ en fond de fissure. Par défaut, c'est la normale au fond de fissure dans le plan des lèvres. En choisissant un champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure, on a :

$$\theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) = 1$$

et :

$$\mathcal{G}(\theta) = \int_{\Gamma_o} G(s) d\Gamma$$

Soit G le taux de restitution de l'énergie global, pour avoir la valeur de G par unité de longueur, il faut diviser la valeur obtenue par la longueur de la fissure l :

$$\mathcal{G}(\theta) = G l \quad \text{en 3D}$$

2.3.4 Symétrie du modèle

Ne pas oublier de multiplier par 2, les valeurs du taux de restitution d'énergie G ou $G(s)$ si on ne modélise que la moitié du solide par rapport à la fissure (ou préciser le mot clé `SYME_CHAR` = 'SYME' ou 'ANTI' dans les commandes concernées) .

2.4 Méthode d'interpolation en 3D

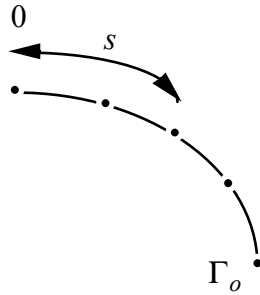
2.4.1 Cadre général

Le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ est solution de l'équation variationnelle

$$\int_{\Gamma_o} G(s) \boldsymbol{\theta}(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad , \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta .$$

Pour résoudre cette équation, le champ scalaire $G(s)$ est discrétisé sur une base que nous notons $(p_j(s))_{1 \leq j \leq N}$.

Soit G_j les composantes de $G(s)$ dans cette base : $G(s) = \sum_{j=1}^N G_j p_j(s)$



Il faut également définir P champs $\boldsymbol{\theta}^i$ indépendants discrétisés sur une base notée $(q_k(s))_{1 \leq k \leq M}$:

$$\boldsymbol{\theta}^i(s) = \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\theta}_k^i q_k(s)$$

Les G_j sont déterminés en résolvant le système linéaire à P équations et N inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j = b_i \quad , \quad i = 1, P \\ \text{avec } a_{ij} = \sum_{k=1}^M \boldsymbol{\theta}_k^i \int_{\Gamma_o} p_j(s) q_k(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds \\ b_i = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}^i) \end{array} \right.$$

Ce système a une solution si on choisit P champs $\boldsymbol{\theta}^i$ indépendants tels que : $P \geq N$ et si $M \geq N$. Il peut comporter plus d'équations que d'inconnues, auquel cas il est résolu au sens des moindres carrés.

2.4.2 Méthodes de lissage de G et Théta : polynômes de Legendre, fonctions de forme des nœuds

Dans le Code_Aster, on a choisi deux familles de bases (cf. [§2.2]) :

- les polynômes de LEGENDRE $\gamma_j(s)$ de degré j ($0 \leq j \leq 7$),
- les fonctions de forme du nœud k de Γ_o : $\varphi_k(s)$ ($1 \leq k \leq NNO = \text{nombre de nœuds de } \Gamma_o$) (de degré 1 pour les éléments linéaires et de degré 2 pour les éléments quadratiques).

$G(s)$ est décomposé :

- soit suivant les polynômes de LEGENDRE :
LISSAGE_G = 'LEGENDRE'
- soit suivant les fonctions de formes des nœuds du fond de fissure :
LISSAGE_G = 'LAGRANGE'
- soit suivant les fonctions de formes des nœuds du fond de fissure avec simplification de la matrice à inverser :
LISSAGE_G = 'LAGRANGE_NO_NO'

$\theta^i(s)$ sont décomposés :

- soit suivant les polynômes de LEGENDRE :
LISSAGE_THETA = 'LEGENDRE'
- soit suivant les fonctions de formes des nœuds du fond de fissure :
LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE'

Attention, toutes les combinaisons entre les familles de fonctions de lissage pour G et THETA ne sont pas autorisées :

	$G(s)$ LEGENDRE	$G(s)$ LAGRANGE	$G(s)$ LAGRANGE_NO_NO
$\bar{\theta}^i(s)$ LEGENDRE	•	non	non
$\bar{\theta}^i(s)$ LAGRANGE	•	•	•

Méthode Théta : Legendre / G : Legendre : la résolution du système linéaire donne :

$$G(s) = \sum_{j=0}^{NDEG} G(\theta^j) \gamma_j(s)$$

Méthode Théta : Lagrange / G : Legendre : on se ramène à la résolution du système linéaire à NNO équations et à $NDEG + 1$ inconnues :

$$\sum_{j=0}^{NDEG} \left(\int_{\Gamma_o} \gamma_j(s) \varphi_i(s) dS \right) G_j = G(\theta^i) \quad , \quad i = 1, NNO$$

Dans ce cas, on doit avoir $NDEG \leq NNO$, soit $NDEG \leq \min(7, NNO)$ où NNO est le nombre de nœuds du fond de fissure.

Méthode Théta : Lagrange / G : Lagrange : on se ramène à la résolution du système linéaire carré

$$\sum_{j=0}^{NNO} \left(\int_{\Gamma_o} \varphi_j(s) \varphi_i(s) dS \right) G_j = G(\theta^i) \quad , \quad i = 1, NNO$$

La méthode simplifiée dite `LAGRANGE_NO_NO` pour le lissage de G consiste à diagonaliser la matrice ainsi obtenue par sommation des termes horizontaux.

Remarques et conseils d'utilisation :

- L'utilisateur ne donne pas de champ théta, les champs θ^i nécessaire au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement selon la méthode spécifiée dans la commande `CALC_G_LOCAL` [U4.82.04].
- **Choix du degré maximum des polynômes de Legendre** : ce choix dépend du nombre de nœuds en fond de fissure. Si on a un faible nombre de nœuds (une dizaine) il est inutile de prendre un degré supérieur à 3 (on conçoit facilement que les résultats sont médiocres si on essaie de trouver un polynôme de degré 7 passant par 10 points). Au delà d'une vingtaine de nœuds en fond de fissure on peut utiliser des degrés allant jusqu'à 7. L'expérience montre que le choix d'un degré égal à 5 donne de bons résultats dans la plupart des cas.
- **Choix de la méthode** : il est difficile de donner une préférence à l'une ou l'autre méthode. En principe les deux donnent des résultats numériques équivalents. Néanmoins la méthode Théta : Lagrange est un peu plus coûteuse en temps CPU que la méthode Théta : Legendre. Pour un premier calcul, l'utilisation des deux méthodes et la comparaison des résultats, permet de conforter la validité du modèle. Si le fond de fissure est une courbe fermée, des problèmes de continuité de la solution au point arbitrairement choisi comme abscisse curviligne origine interdisent l'emploi des polynômes de Legendre. Si le fond de fissure a été déclaré « fermé » dans `DEFI_FOND_FISS` [U4.82.01], on doit utiliser les fonctions de forme (Lagrange) pour décrire les fonctions G et Théta.
- **Problème du non respect de la symétrie** : si on ne modélise que la moitié du solide par rapport à la fissure, on doit en principe avoir une courbe $G(s)$ dont la pente de la tangente est nulle à l'interface de la symétrie. Ceci n'est pas respecté par les deux méthodes. Les valeurs de $G(s)$ obtenues aux extrémités du fond de fissure doivent toujours être interprétées avec prudence, surtout si la fissure est débouchante de façon non perpendiculaire (voir [§2.2.3]).
- **Problème des oscillations** de la solution avec lissage de G par les polynômes de Legendre, en particulier si $G(s) = 0$ ou constante. Si on essaie d'interpoler une fonction constante par un polynôme de degré élevé, on s'attend à ce problème.

2.5 Calcul de G pour un problème non-linéaire

Le problème essentiel dans les situations non linéaires provient de la difficulté de séparer les différentes contributions énergétiques. Il faut considérer deux classes de problèmes très distinctes :

- celle où, malgré les non linéarités géométriques ou de comportement, on peut exhiber un potentiel pour les actions intérieures et extérieures (élasticité non linéaire ou hyperélasticité),
- celle où un tel potentiel n'existe pas (thermo-élastoplasticité).

Pour la première classe, on peut étendre le critère de Griffith en utilisant l'énergie potentielle à l'équilibre, et calculer le taux de restitution d'énergie comme en thermo-élasticité linéaire.

Pour la seconde classe de problème, la difficulté essentielle vient du fait que la dissipation n'est pas uniquement due à la propagation de la fissure elle-même. On ne peut plus distinguer quelle part de l'énergie restituée sert à la propagation et quelle part est directement utilisée par un autre phénomène dissipatif (la plasticité en l'occurrence).

2.5.1 Thermo-élasticité non linéaire [R7.02.03]

2.5.1.1 Non linéarité de comportement

La relation de comportement élastique non linéaire est décrite en [R5.03.20]. Il est à noter que la loi élastoplastique de Hencky-Von Mises (écrouissage isotrope) dans le cas d'un chargement radial et monotone est équivalent à la loi élastique non-linéaire. Le matériau hyperélastique a un comportement mécanique réversible, c'est-à-dire que tout cycle de chargement n'engendre aucune dissipation. De ce fait la relation de comportement du matériau dérive du potentiel d'énergie libre et on sait donner un sens au taux de restitution d'énergie dans le cadre de l'approche énergétique de Griffith.

2.5.1.2 Non linéarité géométrique

On étend la relation de comportement à de grandes déformations, dans la mesure où elle dérive d'un potentiel (loi hyperélastique). Cette fonctionnalité est déclenchée par le mot-clé `DEFORMATION = 'GREEN'` dans les commandes `CALC_G_THETA` [U4.82.03] et `CALC_G_LOCAL` [U4.82.04].

Le comportement du solide est supposé hyperélastique, à savoir que le tenseur de déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} est relié au champ de déplacement \mathbf{u} mesuré par rapport à la configuration de référence Ω_0 par :

$$E_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k} u_{k,j})$$

et que la relation de comportement dérive du potentiel d'énergie libre $\Psi(\mathbf{E})$:

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}}$$

\mathbf{S} étant le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange appelé encore deuxième tenseur de Piola-Kirchoff

Une telle relation de comportement permet en toute rigueur de prendre en compte de grandes déformations. Toutefois, on se cantonne à de grands déplacements et de grandes rotations, mais on reste en petites déformations. Cela pour assurer l'existence d'une solution et pour être identique à un comportement élastoplastique sous un chargement radial monotone [R5.03.20 §2.1].

2.5.2 Thermo-élastoplasticité [R7.02.07]

Le domaine de validité du calcul du taux de restitution d'énergie est limité au cadre thermo-élastique linéaire ou non-linéaire. Pour traiter le problème élastoplastique, deux solutions sont envisageables :

- se ramener à un problème thermo-élastique non-linéaire avec des hypothèses restrictives,
- utiliser une autre formulation, comme celle de l'approche énergétique.

2.5.2.1 Equivalence entre un problème thermo-élastique non linéaire et un problème thermo-élastoplastique

La relation de comportement élastique non linéaire offre la possibilité de traiter les problèmes de mécanique de la rupture en approchant le comportement thermo-élastoplastique. Dans le cas d'un **chargement radial monotone**, elle permet d'obtenir des déformations et des contraintes de la structure semblables à celles que l'on obtiendrait si le matériau présentait un écrouissage isotrope. L'utilisation des indicateurs de décharge et de perte de radialité permet de s'assurer de l'équivalence des lois de comportement.

Mais les conditions de chargements proportionnels et monotones, indispensables pour assurer la cohérence du modèle avec le matériau réel, conduisent à des restrictions importantes du champ des problèmes à même d'être traités par cette méthode (la thermique en particulier peut conduire à des décharges locales).

2.5.2.2 Formulation du paramètre GTP

Attention :

Cette formulation est issue de travaux de recherche récents et le paramètre GTP n'a pas encore de validité expérimentale.

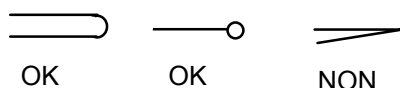
Dans le cadre thermo-élastoplastique, l'énergie dissipée se répartit d'une part en rupture et d'autre part en plasticité sans qu'il soit possible de quantifier a priori séparément ces deux types de dissipation. Le choix proposé dans le *Code_Aster* consiste à dériver l'énergie mécanique totale pour obtenir un taux de restitution d'énergie, que nous appellerons paramètre de rupture GTP. Ce paramètre permet d'analyser les situations de chargements non monotones du défaut, pour des comportements de matériau irréversibles. Les relations de comportement thermo-élastoplastique sont décrites en détail dans le document [R5.03.02].

Comment faire un calcul de GTP en thermo-plasticité ?

- La présence du mot clé facteur `COMP_INCR`, et du mot clé facteur `RELATION = 'VMIS_ISOT_LINE'` (ou `'VMIS_ISOT_TRAC'`) dans les commandes `CALC_G_THETA` et `CALC_G_LOCAL` indique qu'il est nécessaire de récupérer le champ de déplacements \mathbf{u} , les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, et les caractéristiques du matériau élastoplastique. Il est également nécessaire de récupérer les champs des tenseurs de déformation plastique par l'opérateur `CALC_ELEM` [U4.81.01].
- Modélisation par une entaille : Le défaut doit être modélisé par une entaille et non pas par une fissure.

En effet la formulation de G pour une relation thermo-élastoplastique n'est valable que pour un solide entaillé et pas pour un solide fissuré : la difficulté principale dans l'établissement de cette formulation est l'impossibilité de démontrer l'existence de la dérivée de l'énergie mécanique totale pour un domaine comportant une fissure, et ceci principalement par l'absence de connaissance des singularités des champs en plasticité. Il est important de noter que les termes pris en compte dans un calcul thermo-élastoplastique avec la méthode *théta* sont ceux supportés par les éléments entre la pointe de fissure et R_{sup} (par opposition au calcul en thermo-élasticité non-linéaire où seuls les termes entre R_{inf} et R_{sup} sont non nuls).

Forme d'entaille possible :



Dans le cadre de la méthode thêta on considère que l'entaille se propage en gardant la même forme (même si cela n'a pas de signification physique pour une entaille de type pastille).

Le type de l'entaille et le rayon en fond d'entaille n'ont pas d'influence sur les valeurs de GTP à condition que l'épaisseur de l'entaille soit faible par rapport aux dimensions de la structure. Si on modélise par une entaille pointue (fissure classique) les résultats doivent être considérés comme faux (les termes de gradient des déformations plastiques sont mal calculés numériquement).

Il est nécessaire d'utiliser un maillage fin avec des éléments quadratiques au voisinage du fond de l'entaille pour avoir des résultats fiables dans les cas de décharge.

- **Difficultés :**

La finesse du maillage peut conduire à des temps de calcul importants.

La modélisation d'une fissure par une entaille est délicate en 3D.

Quelle interprétation faire des résultats obtenus avec ce paramètre de rupture GTP ? Au cours de la décharge les valeurs de GTP sont d'abord décroissantes puis ensuite croissantes : ceci est conforme à la définition de GTP qui intègre toute l'accumulation plastique en fond de défaut. Si l'on se place dans l'hypothèse de Griffith, on pourrait donc avoir propagation de la fissure en décharge, ce qui est problématique. Comme on le voit le problème reste ouvert et nécessite encore la validation d'un critère de rupture par des essais expérimentaux.

2.5.2.3 Approche énergétique de la rupture élastoplastique et formulation du paramètre Gp

Cette formulation est issue de travaux de recherche récents [bib62].

On définit un taux de restitution d'énergie en plasticité appelé Gp applicable à une fissure représentée en **entaille**, en s'appuyant sur la formulation de Francfort-Marigo pour les milieux fragiles et sur la mécanique continue de l'endommagement (voir le chapitre [§1.4]).

Le paramètre Gp est défini par la formule suivante :

$$G_p = \max_{\Delta l} \left[\left(\int_{Entaille(\Delta l)} (w_e \cdot dS) \right) / \Delta l \right]$$

où w_e est l'énergie élastique.

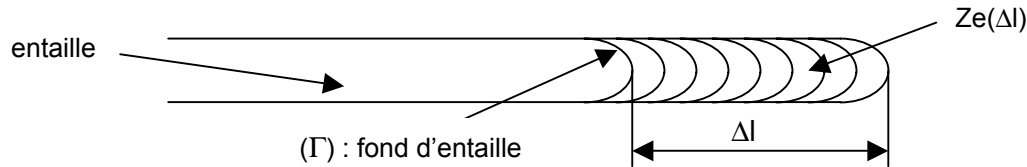
Comment faire un calcul de Gp en thermo-plasticité ?

Maillage :

L'utilisateur doit réaliser un maillage de la structure avec un défaut modélisé sous forme d'une entaille et non sous forme d'une fissure. L'entaille a la forme d'un cigare ou bien encore la forme d'une fissure prolongée d'un cercle en son extrémité.



Le fond d'entaille (Γ) est représenté par un demi-cercle de rayon r . La zone correspondant à la propagation de l'entaille est notée $Ze(\Delta l)$ (Zone endommagée) et dépend de Δl , distance propagée, conformément à la figure ci-dessous :



Entaille avec copeaux

La zone endommagée potentielle est modélisée par un empilement d'une centaine de copeaux qui vont permettre de faire le calcul de l'énergie.

Le raffinement du maillage près du fond de l'entaille doit être extrêmement fin. En effet, on conseille de choisir les données géométriques suivantes :

- le rayon du cercle en fond d'entaille doit être de l'ordre de $r = 50$ microns, suivant le matériau considéré,
- chacun des copeaux doit avoir une épaisseur égale à $1/5 r$ soit $\text{deltal} = 10$ microns.

On fait varier la distance propagée Δl en faisant varier le nombre de copeaux considérés : $\Delta l = k \text{ deltal}$. Un seul maillage suffit.

Remarque :

| Le paramètre G_p ne dépend pas pathologiquement du maillage.

Difficultés :

| Le maillage doit être paramétré de sorte à pouvoir réaliser les post-traitements automatiquement avec des boucles sur le k ème copeau considéré.

| Du fait de la finesse du maillage, les calculs peuvent être assez longs et nécessiter de la place mémoire.

| Le maillage d'une entaille en 3D est assez délicat à réaliser.

Calcul :

| On fait un calcul avec `STAT_NON_LINE()`. Le calcul de l'énergie dans le Code_Aster se fait simplement grâce à la commande `POST_ELEM()` avec l'option `ENER_ELAS`.

| Il faut ensuite pour chaque instant du calcul non linéaire, calculer $G_p(k)$, pour chaque valeur de Δl correspondant à k copeaux par la formule :

$$G_p(k) = E_{\text{elas}}(k) / (k \text{ deltal})$$

| On détermine ensuite pour chaque instant du calcul, le ligament où le maximum de G_p est obtenu et en particulier à l'instant correspondant à la rupture.

2.5.3 Indicateurs de décharge et de perte de radialité

Ces indicateurs permettent de localiser les décharges locales et la perte de radialité. Attention à l'interprétation des indicateurs de décharge et de perte de radialité : la valeur donnée au temps t_i correspond au diagnostic de ce qui se passe entre t_i et t_{i+1} . Ainsi, la valeur calculée au dernier pas de temps n'a pas de sens. L'indicateur de décharge est négatif pour indiquer une décharge locale, et l'indicateur de radialité vaut 0 pour un trajet radial.

2.5.4 Conseils d'utilisation de la loi de comportement

Calcul en thermo-élasticité linéaire :

Avant de réaliser un calcul en non-linéaire il est conseillé de réaliser un premier calcul thermo-élastique linéaire et de post-traiter les résultats pour avoir une première idée de l'ordre de grandeur des résultats.

Calcul en non-linéaire :

Dans la mesure où c'est possible il est préférable de faire un calcul thermo-élastoplastique et de comparer les résultats obtenus à ceux d'un calcul thermo-élastique non linéaire. Cela permet de s'assurer que le chargement est radial et monotone, avec éventuellement une certaine approximation (utilisation des indicateurs de décharge et de perte de radialité). Si tel n'est pas le cas, le problème reste ouvert, et on peut s'orienter alors vers des post-traitements du type « approche locale ».

Même si rien n'interdit dans le *Code_Aster* de réaliser un calcul avec une loi de comportement et de post-traiter avec une autre loi, les résultats sont généralement à mettre en question et l'utilisateur doit donc être très attentif sur ce point.

3 Mise en œuvre d'un calcul en mécanique de la rupture dans le Code_Aster

3.1 Méthodologie

3.1.1 Commandes du Code_Aster

On présente ici les principales commandes à mettre en œuvre dans le Code_Aster Version 6. pour réaliser un post-traitement en mécanique de la rupture fragile. Pour davantage de précisions sur les commandes concernées, on pourra se reporter à la documentation d'utilisation.

Acquisition des données du fichier de maillage : LIRE_MALLAGE [U4.21.01]

Pour un maillage 3D il faut penser dès la génération du maillage à nommer les nœuds du fond de fissure et les mailles des lèvres de la fissure. Les nœuds du fond de fissure doivent être ordonnés pour définir le sens de parcours de l'abscisse curviligne du fond de fissure. On peut ordonner les nœuds du fond de fissure avec la commande DEFI_FOND_FISS [U4.82.01].

Conseil :

Utiliser des éléments quadratiques (obligatoirement pour un problème élasto-plastique et fortement conseillé pour un problème 3D).

Pour plus de détails consulter [§2.1].

Définition du modèle : AFFE_MODELE [U4.41.01]

Le phénomène physique modélisé est mécanique (PHENOMENE= 'MECANIQUE '). La modélisation est choisie parmi les modélisations des milieux continus 2D déformations planes ou contraintes planes, 2D axisymétrique et 3D (D_PLAN, C_PLAN, AXIS, 3D).

Caractéristiques du matériau : DEFI_MATERIAU [U4.43.01] et AFFE_MATERIAU [U4.43.03]

Le comportement est soit élastique linéaire (mot clé facteur ELAS ou ELAS_FO) soit non linéaire (mot clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO ou TRACTION). Les caractéristiques du ou des matériaux à définir sont le module d'Young, le coefficient de Poisson, éventuellement le coefficient de dilatation thermique et dans le cas non linéaire la limite d'élasticité et le module d'écrouissage ou la courbe de traction. Ces caractéristiques peuvent dépendre de la température pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

Pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes les caractéristiques doivent être définies sur tous les matériaux, y compris sur les éléments de bord, du fait de la méthode de calcul [R7.02.05]. Pour s'assurer de ce fait, il est conseillé de faire un AFFE=_F(TOUT='OUI') dans la commande AFFE_MATERIAU [U4.43.03], quitte à utiliser la règle de surcharge ensuite.

Affectation des chargements mécaniques : AFFE_CHAR_MECA(_F) [U4.44.01]

Les chargements mécaniques sont ceux des milieux continus. On veillera à ce que les chargements utilisés soit bien supportés par les opérateurs de mécanique de la rupture (voir §1.3.4) sinon ils sont ignorés.

Pour un problème où la thermique intervient, on récupère le chargement d'origine thermique par le mot clé TEMP_CALCULEE dans la commande AFFE_CHAR_MECA [U4.44.01]. Pour la résolution éventuelle du problème thermique, il faut définir le modèle thermique avec AFFE_MODELE [U4.41.01] (la modélisation choisie est la même que celle du modèle mécanique). Les chargements thermiques sont ceux des milieux continus et sont définis avec AFFE_CHAR_THER(_F) [U4.44.02]. La résolution est faite avec THER_LINEAIRE [U4.54.01] ou THER_NON_LINE [U4.54.02].

Résolution du problème mécanique : MECA_STATIQUE [U4.51.01] ou STAT_NON_LINE [U4.51.03]

Si le problème est élastique linéaire, on utilise l'opérateur global MECA_STATIQUE qui calcule les déplacements à partir du modèle, du champ de matériau, des conditions aux limites et du chargement. Le concept produit par cet opérateur est de type evol_elas.

Si le problème est non-linéaire, on utilise l'opérateur global STAT_NON_LINE qui produit un concept de type evol_noli.

Il est possible d'utiliser la commande `CREA_CHAMP (OPERATION= ' EXTR ')` [U4.72.04] pour récupérer le champ de déplacements aux nœuds (nécessaire pour le post-traitement de mécanique de la rupture). Mais on peut également utiliser directement les concept `evol_elas` et `evol_noli` dans les commandes de mécanique de la rupture, en précisant les numéros d'ordre voulus.

Conseil : Pour un calcul non-linéaire coûteux en mémoire et en temps CPU, il est conseillé de constituer une base et de poursuivre l'étude pour les post-traitements (en particulier en mécanique de la rupture). Pour plus de détails consulter les documents `DEBUT` [U4.11.01], `POURSUITE` [U4.11.03] et `FIN` [U4.11.02]. Il faut alors être vigilant sur la compatibilité des versions de *Code_Aster* entre deux exécutions enchaînées.

Post-traitement en mécanique de la rupture

Définition des caractéristiques du fond de fissure : `DEFI_FOND_FISS` [U4.82.01]

Cette commande permet de définir :

- en 2D le nœud du fond de fissure et la normale à la fissure,
- en 3D les nœuds du fond de fissure et les mailles des lèvres de la fissure.

En 2D cette commande est obligatoire uniquement pour le calcul des coefficients d'intensité de contraintes. Dans le cas d'une structure symétrique où la moitié de la fissure est représentée, l'unique lèvre doit être définie par `LEVRE_SUP`. Si la fissure ne débouche pas, il n'est alors bien sûr pas nécessaire de définir les directions de θ aux extrémités par `DTAN_ORIG` et `DTAN_EXTR`.

Affectation du champ θ : `CALC_THETA` [U4.82.02]

Cette commande permet d'affecter le champ θ nécessaire au calcul du taux de restitution d'énergie ou des facteurs d'intensité de contraintes. Le champ θ est un champ aux nœuds définis sur tout le maillage.

L'utilisateur doit définir les caractéristiques du champ θ :

- le module (égal à 1. a priori),
- la direction de propagation : égale à celle du fond de fissure en 2D, calculée automatiquement en 3D à partir des directions de propagation des nœuds en fond de fissure (ces directions sont récupérées par le concept de type `fond_fiss` produit par l'opérateur `DEFI_FOND_FISS` ou par le mot clé `DIRE_THETA`),
- les rayons R_{inf} et R_{sup} des couronnes entourant le fond de fissure et utilisés dans la méthode θ : en 2D le fond de fissure est réduit à un nœud et les couronnes sont circulaires. En 3D les rayons peuvent être variables avec l'abscisse curviligne du fond de fissure et R_{inf} , R_{sup} définissent alors deux cylindres déformés et variables entourant le fond de fissure.

Cette commande n'est pas nécessaire si on réalise un calcul du taux de restitution d'énergie local : le champ θ est calculé automatiquement à partir du fond de fissure issu de `DEFI_FOND_FISS`, des rayons R_{inf} et R_{sup} et de la méthode d'interpolation définis dans la commande `CALC_G_LOCAL`.

Choix des rayons R_{inf} et R_{sup} :

- Le choix des rayons R_{inf} et R_{sup} est indépendant de la topologie du maillage (même si c'est préférable, on n'est pas obligé d'avoir un maillage rayonnant en pointe de fissure).
- Ne jamais utiliser un champ θ défini avec un rayon inférieur R_{inf} nul. En effet les champs de déplacements sont singuliers en fond de fissure et introduisent des résultats imprécis en post-traitement de mécanique de la rupture.
- En thermo-élastoplasticité, on utilise une fissure comme entaille. On s'assurera que le rayon inférieur R_{inf} est bien supérieur au rayon de l'entaille.
- En 2D le rayon supérieur R_{sup} peut être aussi grand que l'on veut à condition bien sûr que la couronne ainsi définie soit contenue dans le solide.
- En 3D le problème est plus délicat : il faut trouver un compromis entre R_{inf} pas trop petit (résultats imprécis à cause des champs de déplacements singuliers mal calculés en fond de

fissure) et R_{sup} pas trop grand (direction du champ θ peut être mal calculée). Lire le [§2.2.3] pour plus de détails.

- Ne pas oublier que les chargements appliqués au-delà de R_{sup} ont une contribution nulle dans les post-traitements de mécanique de la rupture. Ceci peut être utile si on applique un chargement non supporté comme `FORCE_NODALE`, `DDL_IMPO` (en 2D) ou `FACE_IMPO` (en 3D) voir [§1.3.4].
- Prendre plusieurs couronnes consécutives pour vérifier $[R1, R2]$, $[R2, R3]$, $[R3, R4]$,...

Calcul du taux de restitution d'énergie en 2D ou en 3D : `CALC_G_THETA(_T)` [U4.82.03]

La commande `CALC_G_THETA` permet de calculer le taux de restitution d'énergie G en 2D ou en 3D par la méthode θ dans le cas d'un problème thermo-élastique linéaire ou non linéaire.

Pour ce calcul l'utilisateur doit préciser obligatoirement :

- le modèle,
- le champ de matériau,
- le champ de déplacements (à partir d'un champ aux nœuds ou d'un résultat),
- le champ θ ,

et éventuellement :

- le chargement (si chargement volumique, surfacique sur les lèvres de la fissure ou d'origine thermique),
- la relation de comportement (par défaut thermo-élasticité linéaire),
- les déformations plastiques (si le comportement est thermo-élastoplastique).

La commande `CALC_G_THETA` permet également le calcul du taux de restitution d'énergie avec propagation Lagrangienne (c'est-à-dire pour une extension de la fissure en utilisant le même maillage) en 2D ou en 3D dans le cas d'un problème thermo-élastique linéaire (option `CALC_G_LAGR`). Pour plus de précisions on se référera au document [R7.02.04].

Calcul des coefficients d'intensité de contraintes en 2D : `CALC_G_THETA(_T)` [U4.82.03]

La commande `CALC_G_THETA` permet de calculer les coefficients d'intensité de contraintes en 2D (contraintes planes ou déformations planes) par la méthode θ dans le cas d'un problème thermo-élastique linéaire. Il faut préciser l'option `CALC_K_G` sous le mot clé `OPTION`.

Pour ce calcul l'utilisateur doit préciser obligatoirement :

- le modèle,
- le champ de matériau,
- le champ de déplacements (à partir d'un champ aux nœuds ou d'un résultat),
- le champ θ ,
- le fond de fissure,

et éventuellement le chargement (si chargement volumique, surfacique sur les lèvres de la fissure ou d'origine thermique).

Calcul des coefficients d'intensité de contraintes par extrapolation du champ de déplacements : `POST_K1_K2_K3`.

La commande `POST_K1_K2_K3` permet de calculer les coefficients d'intensité de contraintes (y compris $K3$) en 2D (contraintes planes ou déformations planes), 3D et axisymétrique le cas d'une fissure plane dans un matériau élastique homogène et isotrope.

Pour ce calcul l'utilisateur doit préciser obligatoirement les champs de déplacement sur chaque lèvre, fournis sous forme de tables extraites du concept résultat `evol_elas` par la commande `POST_RELEVE_T`.

Calcul du taux de restitution d'énergie local en 3D : `CALC_G_LOCAL(_T)` [U4.82.04]

La commande `CALC_G_LOCAL` permet de calculer le taux de restitution d'énergie G en 2D ou en 3D par la méthode θ dans le cas d'un problème thermo-élastique linéaire ou non linéaire.

Pour ce calcul l'utilisateur doit préciser obligatoirement :

- le modèle,
- le champ de matériau,
- le champ de déplacements (à partir d'un champ aux nœuds ou d'un résultat),
- le fond de fissure,
- les rayons R_{inf} et R_{sup} définissant les couronnes entourant le fond de fissure,

et éventuellement :

- le chargement (si chargement volumique, surfacique sur les lèvres de la fissure ou d'origine thermique),
- la relation de comportement (par défaut thermo-élasticité linéaire),
- la méthode de discrétisation du champ θ en fond de fissure (par défaut méthode de Legendre, degré 5),
- les déformations plastiques (si le comportement est thermo-élastoplastique).

On notera que le champ θ est calculé à partir du fond de fissure et des rayons R_{inf} et R_{sup} (inutile d'utiliser la commande `CALC_THETA` sauf pour le cas particulier de la propagation Lagrangienne).

La commande `CALC_G_THETA` permet également le calcul du taux de restitution d'énergie local avec propagation Lagrangienne en 3D (option `CALC_G_LGLO`) dans le cas d'un problème thermo-élastique linéaire [R7.02.04].

Calcul de l'énergie pour le calcul du taux de restitution d'énergie en plasticité G_p :

On utilise la commande `POST_ELEM()`, avec l'option `ENER_ELAS`. On obtient le calcul de G_p par un post_traitement manuel (voir chapitre [§1.4] et chapitre [§2.5.2.3]).

3.1.2 Pièges à éviter

Maillage :

En 3D les nœuds du fond de fissure doivent être ordonnés.

Pour un problème thermo-élastoplastique (paramètre GTP et G_p) il faut modéliser la fissure par une entaille et utiliser des éléments quadratiques.

Chargement :

Lors d'un calcul thermique, il ne faut pas oublier d'introduire dans l'opérande `CHARGE` de `CALC_G_THETA` ou `CALC_G_LOCAL` la charge d'origine thermique.

Les chargements non supportés sont ignorés. Aucun message d'alarme n'est émis, on se reportera donc au [§1.3.4] pour s'assurer que les chargements utilisés ont un sens en mécanique de la rupture et sont bien traités.

Si la liste des charges comporte plus d'une charge, un chargement de même nature ne peut figurer que dans une seule charge. Dans le cas contraire, seule la dernière charge est prise en compte.

Si le champ de déplacement a été calculé par une charge avec un coefficient multiplicateur différent de 1., on devra, pour obtenir le G correspondant au bon chargement, introduire dans l'opérande `CHARGE` de `CALC_G_THETA` ou `CALC_G_LOCAL` la charge en question multipliée par ce coefficient (voir `COMB_CHAM_NO` [U4.72.02] pour ce problème).

Si on fait un calcul en grandes transformations (mot clé `DEFORMATION = 'GREEN'` sous le mot clé facteur `COMP_ELAS`) les chargements supportés doivent être des charges mortes, typiquement une force imposée et pas une pression [R7.02.03 §2.4].

Loi de comportement :

Rien n'interdit en pratique de résoudre le problème mécanique avec une loi de comportement (dans MECA_STATIQUE ou STAT_NON_LINE) et de réaliser le post-traitement avec une autre loi de comportement : à éviter.

Symétrie du chargement et normalisation :

Dans les commandes CALC_G_THETA et CALC_G_LOCAL le mot clé SYME_CHAR permet d'indiquer si le chargement est symétrique ou antisymétrique dans le cas où on ne modélise que la moitié du solide par rapport à la fissure.

Ce mot clé est indispensable si on utilise l'option 'CALC_K_G' pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes : il permet d'affecter K2 à 0 si le chargement est symétrique par rapport à la fissure ou K1 à 0 s'il est antisymétrique.

Il permet également de multiplier par 2, les valeurs du taux de restitution d'énergie G si on ne modélise que la moitié du solide par rapport à la fissure.

	' SANS '	' SYME '	' ANTI '
G	G _{ASTER}	2.* G _{ASTER}	2.* G _{ASTER}
K1	K1 _{ASTER}	K1 _{ASTER}	0.
K2	K2 _{ASTER}	0.	K2 _{ASTER}

Attention :

Ne pas oublier que dans certaines configurations, un post-traitement manuel est nécessaire pour obtenir la normalisation de la valeur du taux de restitution d'énergie. En particulier en axisymétrie, il faut diviser G_{ASTER} par la distance du fond de fissure à l'axe de symétrie et en 3D par la longueur du fond de fissure [§2.3].

Définition du fond de fissure et des rayons Rinf et Rsup en 3D :

Quand la fissure est débouchante, bien définir les directions du champ théta aux extrémités du fond de fissure à l'aide des mots clés DTAN_ORIG et DTAN_EXTR dans la commande DEFI_FOND_FISS [U4.82.01]. Voir 2.2.2.

Attention au choix des rayons Rinf et Rsup de la couronne. Voir [§2.2.3].

Calcul de l'énergie pour le calcul du taux de restitution d'énergie en plasticité Gp :

Il faut veiller à ce que l'énergie soit calculée avec suffisamment de précision car on effectue pour le calcul de Gp une différence entre des quantités très faibles.

3.1.3 Vérifications concernant les post-traitements de mécanique de la rupture

Il est important d'avoir une idée de l'ordre de grandeur des résultats avant de commencer tout calcul numérique (modèle simplifié, test de référence, bibliographie, ...).

Il est conseillé d'utiliser successivement les commandes CALC_G_THETA ou CALC_G_LOCAL avec au moins 3 champs théta de couronnes différentes pour s'assurer de la stabilité des résultats. En cas de variation importante (supérieure à 5-10%) il faut s'interroger sur la bonne prise en compte de toute la modélisation. Cette stabilité est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour la validité des résultats.

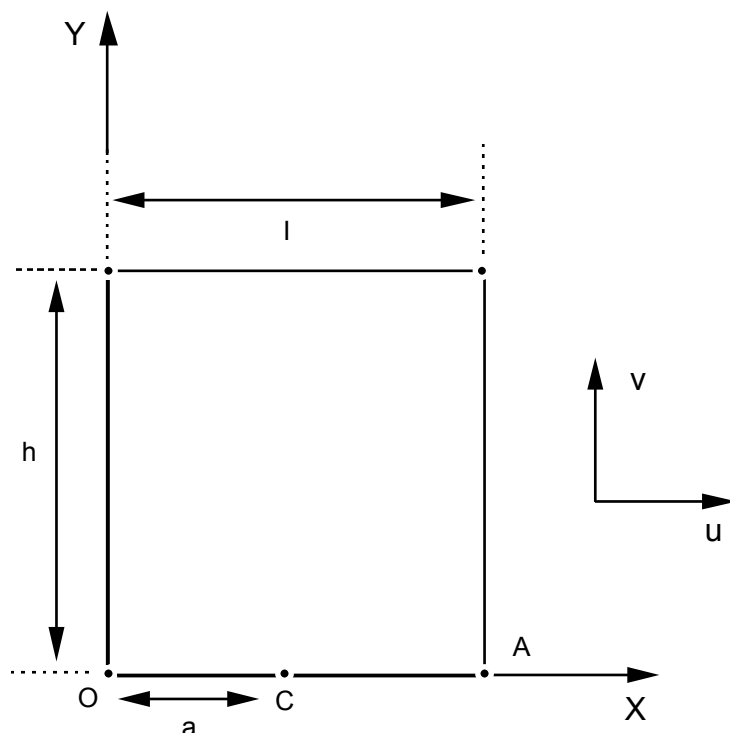
3.2 Exemple 1 : Calcul de G, K1 et K2 pour un problème élastique linéaire en 2D

Il s'agit d'un test de mécanique de la rupture pour un problème élastique linéaire en contraintes planes SSLP101 [V3.02.101]. On calcule le taux de restitution d'énergie et les coefficients d'intensité de contraintes pour un problème élastique linéaire en contraintes planes.

3.2.1 Géométrie

Plaque rectangulaire avec fissure OC débouchante.

Pour des raisons de symétrie, le modèle est réduit à la demi-structure $Y \geq 0$.



Hauteur plaque : $h = 250$ mm C = N668

Largeur plaque : $l = 100$ mm

Profondeur fissure : $a = 37.5$ mm (OC)

3.2.2 Propriétés de matériaux

$E = 200000$ MPa $\nu = 0.3$

Hypothèse des contraintes planes.

3.2.3 Conditions aux limites et chargements

Contrainte imposée en $Y = h$: $\sigma = 1$ MPa

Déplacement pour le bord ($a \leq X \leq l, Y = 0$) : $v = 0$.

Point fixe A : $u = v = 0$.

Titre : Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture Date : 03/04/03
Auteur(s) : I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE Clé : U2.05.01-A Page : 32/52

3.2.4 Fichier de commande

```
DEBUT( )
MA=LIRE_MALLAGE( )
MO=AFFE_MODELE( MALLAGE=MA,
                 AFPE=F( TOUT = 'OUI',
                        PHENOMENE = 'MECANIQUE',
                        MODELISATION = 'C_PLAN' ))

MAT=DEFI_MATERIAU(ELAS=F( E = 200000., NU = 0.3, RHO = 1.))
CHMAT=AFPE_MATERIAU( MALLAGE=MA,
                    AFPE=F( TOUT = 'OUI',MATER = MAT))

CH=AFPE_CHAR_MECA( MODELE=MO,DDL_IMPO=(
                    _F( GROUP_NO = 'GRNM5', DY = 0.),
                    _F( NOEUD = 'N451', DX = 0.)),
                    FORCE_CONTOUR=F( GROUP_MA = 'GRMA1', FY = 1. ) )

FCONT = FORMULE(REEL=""(REEL:X,REEL:Y) =1."")
CHFONC=AFPE_CHAR_MECA_F( MODELE=MO,
                        FORCE_CONTOUR=F( GROUP_MA = 'GRMA1',
                                         FY = FCONT) )

CHAMDEPL=MECA_STATIQUE( MODELE=MO, CHAM_MATER=CHMAT,
                        EXCIT=F( CHARGE = CH))

DEP=CREA_CHAMP( OPERATION='EXTR', TYPE_CHAM='NOEU_DEPL_R',
               NOM_CHAM='DEPL', RESULTAT=CHAMDEPL,
               NUME_ORDRE=1 )

THETA1=CALC_THETA( MODELE=MO,
                  THETA_2D=F( NOEUD = 'N668', MODULE = 1.,
                             R_INF = 22.04078,
                             R_SUP = 30.),
                  DIRECTION=( 1., 0., 0.))

FOND=DEFI_FOND_FISS( MALLAGE=MA,
                   FOND=F( NOEUD = 'N668'),
                   NORMALE=(0., 1., 0.))

G1=CALC_G_THETA_T( MODELE=MO,
                  DEPL=DEP,
                  THETA=THETA1,
                  CHARGE=CHFONC,
                  SYME_CHAR='SYME',
                  COMP_ELAS=F( RELATION = 'ELAS',
                              DEFORMATION = 'PETIT'),
                  CHAM_MATER=CHMAT )

GK1=CALC_G_THETA_T( MODELE=MO,
                  DEPL=DEP,
                  THETA=THETA1,
                  FOND_FISS=FOND,
                  SYME_CHAR='SYME',
                  CHARGE=CHFONC,
                  CHAM_MATER=CHMAT,
                  OPTION='CALC_K_G')
                  PRECISION=1.E-4 )

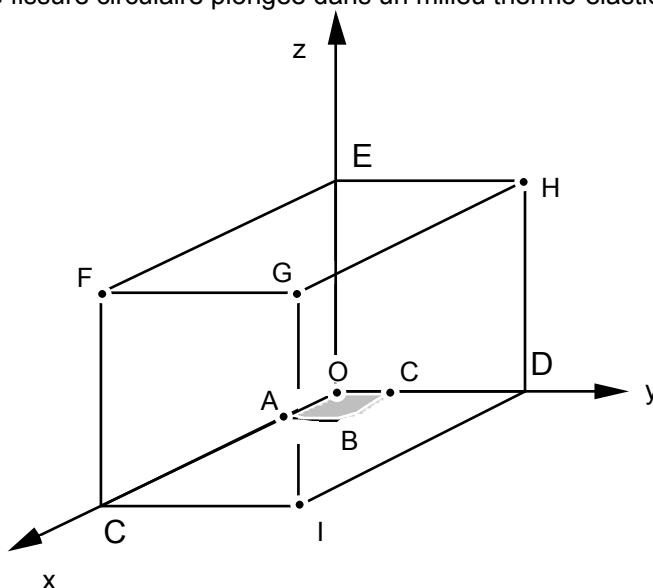
FIN( )
```


3.3 Exemple 2 : Calcul de G et G(s) local pour un problème thermo-élastique en 3D

Il s'agit d'un test de mécanique de la rupture en thermo-mécanique pour un problème tridimensionnel HPLV103 [V7.03.103]. On considère une fissure circulaire plongée dans un milieu thermo-élastique. On impose une température uniforme sur les lèvres de la fissure. Ce test permet de calculer le taux de restitution d'énergie global G et le taux de restitution G local en différents points du fond de fissure.

3.3.1 Géométrie

On considère une fissure circulaire plongée dans un milieu thermo-élastique :



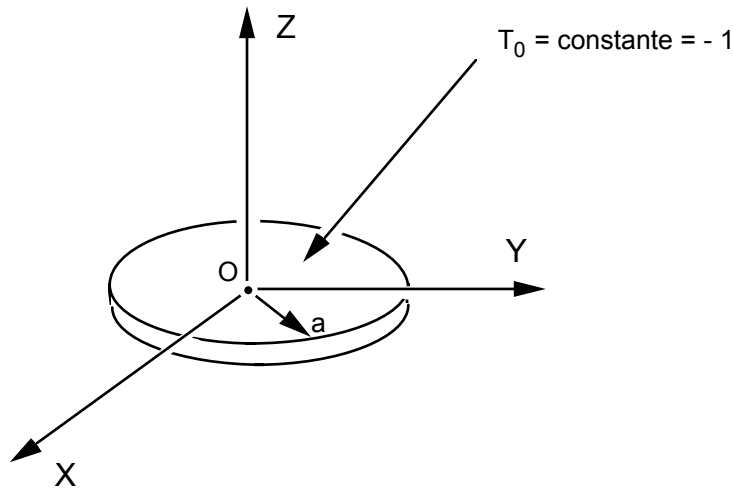
Le rayon de la fissure est : $OA = OB = 1.0$

Le milieu est modélisé par un parallélépipède de dimensions : $OE = OD = OC = 30.0$

3.3.2 Propriétés de matériaux

Conductivité thermique : $\lambda = 1.$
Coefficient de dilatation thermique : $\alpha = 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Module d'Young : $E = 2.10^5 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

3.3.3 Conditions aux limites et chargements



3.3.4 Fichier de commande

```
DEBUT( )
M=LIRE_MALLAGE( )
M=DEFI_GROUP( reuse=M,      MAILLAGE=M,CREA_GROUP_NO=(
    _F( GROUP_MA = 'LEVREINF' ),
    _F( GROUP_MA = 'SSUP_S' ),
    _F( GROUP_MA = 'SAV_S' ),
    _F( GROUP_MA = 'SLAT_S' ),
    _F( GROUP_MA = 'SINF' ),
    _F( GROUP_MA = 'SAR' ),
    _F( GROUP_MA = 'SLAT' ),
    _F( NOM = 'INFINI',
        UNION = ( 'SINF','SAR','SLAT', ) )
)
)

#-----
#          DEBUT DU THERMIQUE          #
#-----

MOTH=AFFE_MODELE( MAILLAGE=M,
    AFFE=_F( TOUT = 'OUI',
        PHENOMENE = 'THERMIQUE',
        MODELISATION = '3D' )
)

MATH=DEFI_MATERIAU( THER=_F( RHO_CP = 0., LAMBDA = 1. ) )

CMTH=AFFE_MATERIAU(      MAILLAGE=M,
    AFFE=_F( TOUT = 'OUI',
        MATER = MATH )
)

CHTH=AFFE_CHAR_THER(     MODELE=MOTH,TEMP_IMPO=(
    _F( GROUP_NO = 'INFINI',
        TEMP = 0.0 ),
    _F( GROUP_NO = 'LEVREINF',
        TEMP = 1. ) )
)
```

Titre : *Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture* Date : 03/04/03
Auteur(s) : *I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE* Clé : U2.05.01-A Page : 35/52

```
THLI=THER_LINEAIRE( MODELE=MOTH,
                    CHAM_MATER=CMTH,
                    EXCIT=_F( CHARGE = CHTH)
                    )

TEMP=CREA_CHAMP( OPERATION='EXTR', TYPE_CHAM='NOEU_TEMP_R',
                 NOM_CHAM='TEMP', RESULTAT=THLI,
                 INST=0.0
                 )

#-----
#                FIN DU THERMIQUE                #
#-----

MO=AFFE_MODELE( MAILLAGE=M,
                AFFE=_F( TOUT = 'OUI',
                        PHENOMENE = 'MECANIQUE',
                        MODELISATION = '3D' )
                )

MA=DEFI_MATERIAU( ELAS=_F( E = 200000.,
                          NU = 0.3,
                          ALPHA = 0.000001)
                  )

#

CM=AFFE_MATERIAU( MAILLAGE=M,
                  AFFE=_F( TOUT = 'OUI',
                          MATER = MA,
                          TEMP_REF = 0.)
                  )

#

CH=AFFE_CHAR_MECA( MODELE=MO,
                   TEMP_CALCULEE=TEMP,DDL_IMPO=(
                                   _F( GROUP_NO = 'SSUP_S', DZ = 0.),
                                   _F( GROUP_NO = 'SLAT_S', DX = 0.),
                                   _F( GROUP_NO = 'SAV_S', DY = 0.)
                                   )
                   )

#

MEST=MECA_STATIQUE( MODELE=MO,
                    CHAM_MATER=CM,
                    EXCIT=_F( CHARGE = CH)
                    )

#

DEPLA=CREA_CHAMP( OPERATION='EXTR', TYPE_CHAM='NOEU_DEPL_R',
                  NOM_CHAM='DEPL', RESULTAT=MEST,
                  INST=0.0
                  )
```

Titre : Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture Date : 03/04/03
Auteur(s) : I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE Clé : U2.05.01-A Page : 36/52

```
#-----
#                                CALCUL DE G
#-----

FF=DEFI_FOND_FISS( MAILLAGE=M,
                   FOND= F( GROUP_NO = 'LFF' ),
                   NORMALE=( 0., 0., 1. ),
                   DTAN_ORIG=( 1., 0., 0. ),
                   DTAN_EXTR=( 0., 1., 0. )
                   )

#
#
THETA1=CALC_THETA( MODELE=MO,
                   FOND_FISS=FF,
                   THETA_3D= F( TOUT = 'OUI',
                                MODULE = 1.0,
                                R_INF = 0.07,
                                R_SUP = 0.2 )
                   )

#

G1=CALC_G_THETA_T( MODELE=MO,
                   DEPL=DEPLA,
                   CHAM_MATER=CM,
                   THETA=THETA1,
                   CHARGE=CH,
                   COMP_ELAS= F( RELATION = 'ELAS',
                                DEFORMATION = 'PETIT' )
                   )

#-----
#                                CALCUL DE GLOCAL
#-----

GLOC1=CALC_G_LOCAL_T( MODELE=MO,
                      DEPL=DEPLA,
                      CHAM_MATER=CM,
                      FOND_FISS=FF,
                      CHARGE=CH,
                      DEGRE=6,
                      R_INF=0.07,
                      R_SUP=0.2,
                      LISSAGE_THETA='LAGRANGE',
                      LISSAGE_G='LEGENDRE',
                      COMP_ELAS= F( RELATION = 'ELAS',
                                    DEFORMATION = 'PETIT' )
                      )

FIN( )
```

3.4 Exemple 3 : calcul de Gp pour un problème élastoplastique en 2D

On réalise un calcul en mécanique de la rupture pour un problème élastoplastique en 2D déformations planes.

On met en œuvre le calcul du paramètre Gp issu de travaux de recherches récents (voir chapitre [§2.5.2.3]) pour mettre en évidence « l'effet petit défaut ».

Contexte et objectif :

La ténacité est un paramètre déterminé expérimentalement sur une éprouvette CT fissurée en traction, qui est censé représenter la résistance à la rupture du matériau. Mais sur les éprouvettes, les fissures sont de grandes tailles par rapport aux cas réels. Les effets de triaxialité sont importants et la plasticité faible.

Au contraire sur cas réels, les fissures sont de plus petites tailles, les effets de triaxialité sont plus faibles, et la plasticité est plus forte. La ténacité mesurée serait alors plus grande, d'où un gain de marges potentiel. La taille de la fissure a donc un effet sur la valeur mesurée de la ténacité. C'est cet effet qui est appelé « effet petit défaut ».

On applique ici l'approche énergétique basée sur le calcul de paramètre Gp à l'interprétation de l'effet petit défaut.

On considère d'une part une éprouvette SENB avec un grand défaut (SENB1) et d'autre part une éprouvette SENB avec un petit défaut (SENB2).

3.4.1 Géométrie

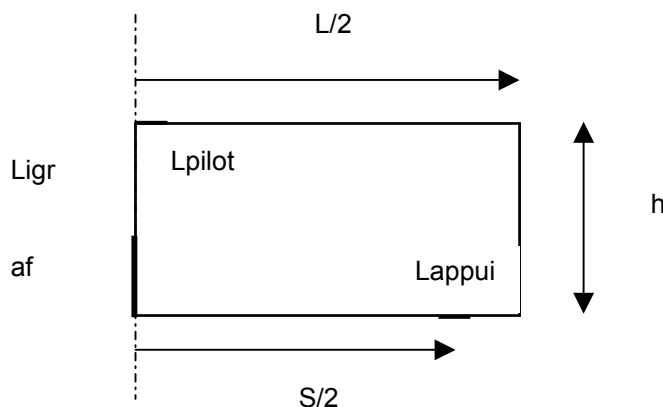
Plaque rectangulaire avec petit ou grand défaut. On ne représente que la moitié de la structure.

Hauteur plaque $h = 50$ mm

Largeur plaque $L = 420$ mm

Ecartement entre deux appuis $S = 370$ mm

Taille du défaut $a_f = 25$ mm (SENB1) ou 3.8 mm (SENB2).



3.4.2 Propriétés des matériaux

Module d'young : $E = 208510$

Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

Courbe de traction avec écrouissage non linéaire (comportement VMIS_ISOT_TRAC)

3.4.3 Conditions aux limites et chargements

On applique la condition d'appui sur Lappui $dy = 0$.

On applique la condition de symétrie $dx = 0$ sur le ligament du défaut LIGR.

On charge en déplacement en dy sur le bord LPILOT.

Titre : Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture Date : 03/04/03
Auteur(s) : I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE Clé : U2.05.01-A Page : 38/52

3.4.4 2 fichiers de commandes pour chacun des 2 cas

EPROUVETTE SENB1 GRAND DEFAULT af / h = 0.5 SOIT af = 25 MM

```
DEBUT( )
PRE_GIBI( )
MA=LIRE_MALLAGE( )
MA=DEFI_GROUP(reuse =MA,
              MAILLAGE=MA,
              CREA_GROUP_NO=_F(TOUT_GROUP_MA='OUI', ), )
#
# MODELISATION DU MALLAGE
#
MOD=AFPE_MODELE(MAILLAGE=MA,
                AFPE=_F(TOUT='OUI',
                       PHENOMENE='MECANIQUE',
                       MODELISATION='D_PLAN', ), )
#
# DEFINITION DU MATERIAU
#
SIGM_F = DEFI_FONCTION ( NOM_PARA = 'EPSI',
                        VALE= (
                            2.74E-03, 571.32,
                            1.29E-02, 609.42,
                            2.31E-02, 647.52,
                            3.33E-02, 685.62,
                            4.34E-02, 715 ,
                            5.36E-02, 746 ,
                            6.37E-02, 775 ,
                            7.38E-02, 797 ,
                            8.39E-02, 814 ,
                            9.40E-02, 831.66,
                            0.10405 , 844.47,
                            0.11411 , 856.22,
                            0.12416 , 867.1 ,
                            0.14425 , 886.7 ,
                            0.16434 , 904.04,
                            0.18441 , 919.62,
                            0.20448 , 933.78, ),
                        PROL_DROITE = 'CONSTANT',
                        PROL_GAUCHE = 'CONSTANT',
                        )
ACIER=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E=208510.,
                          NU=0.3,
                          ALPHA=0.0, ),
                  TRACTION=_F( SIGM = SIGM_F),
                  )
#
CH_MAT=AFPE_MATERIAU(MAILLAGE=MA,
                    AFPE=_F(GROUP_MA='SENB',
                          MATER=ACIER,
                          TEMP_REF=0.0, ), )
#
```

DEFINITION D'UNE LISTE D'INSTANTS ET D'UNE RAMPE

#

```
LIST=DEFI_LIST_REEL(DEBUT=0.0,  
                    INTERVALLE=( _F(JUSQU_A=22.0,  
                                    NOMBRE=22, ),  
                                _F(JUSQU_A=27.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=32.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=37.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=42.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=47.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=52.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=57.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=61.0,  
                                    NOMBRE=4, ),  
                                _F(JUSQU_A=65.0,  
                                    NOMBRE=4, ),  
                                _F(JUSQU_A=70.0,  
                                    NOMBRE=5, ),  
                                _F(JUSQU_A=76.0,  
                                    NOMBRE=6, ),  
                                _F(JUSQU_A=82.0,  
                                    NOMBRE=6, ),  
                                _F(JUSQU_A=88.0,  
                                    NOMBRE=6, ),  
                                _F(JUSQU_A=94.0,  
                                    NOMBRE=6, ),  
                                _F(JUSQU_A=100.0,  
                                    NOMBRE=6, ), ), )
```

Titre : Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture Date : 03/04/03
Auteur(s) : I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE Clé : U2.05.01-A Page : 40/52

```
RAMPE=DEFI_FONCTION(NOM_PARA='INST',
                    VALE=(0.0,0.0,100.0,100.0),
                    PROL_DROITE='LINEAIRE',
                    PROL_GAUCHE='LINEAIRE',)

#
# CHARGEMENT ET CONDITIONS LIMITES
#
CHAR=AFFE_CHAR_MECA(MODELE=MOD,
                    DDL_IMPO=( _F(GROUP_NO='LIGR',
                                   DX=0.0, ),
                              _F(GROUP_NO='LAPPUI',
                                   DY=0.0, ),
                              _F(GROUP_NO='LPILOT',
                                   DY=-0.04, ), ), )

#
# APPLICATION DE LA CHARGE & CALCUL DES CONTRAINTES
#
RESU=STAT_NON_LINE(MODELE=MOD,
                   CHAM_MATER=CH_MAT,
                   EXCIT=_F(CHARGE=CHAR,
                             FONC_MULT=RAMPE, ),
                   COMP_INCR=_F(RELATION='VMIS_ISOT_TRAC',
                                 DEFORMATION='PETIT',
                                 GROUP_MA='SENB', ),
                   INCREMENT=_F(LIST_INST=LIST,
                                 NUME_INST_FIN=30, ),
                   NEWTON=_F(PREDICTION='TANGENTE',
                              MATRICE='TANGENTE',
                              REAC_ITER=4, ),
                   RECH_LINEAIRE=_F(RESI_LINE_RELA=1.E-3,
                                     ITER_LINE_MAXI=3, ),
                   CONVERGENCE=_F(RESI_GLOB_MAXI=1.E-08,
                                   RESI_GLOB_RELA=1.E-08,
                                   ITER_GLOB_MAXI=20, ),
                   SOLVEUR=_F(METHODE='MULT_FRONT',
                              RENUM='METIS', ), )

#
# CALCUL DE G
#
THETA1=CALC_THETA(MODELE=MOD,
                  DIRECTION=(0.0,1.0,0.0),
                  THETA_2D=_F(GROUP_NO='O',
                               MODULE=1.0,
                               R_INF=0.25,
                               R_SUP=0.5, ), )

G1=CALC_G_THETA_T(MODELE=MOD,
                  CHAM_MATER=CH_MAT,
                  THETA=THETA1,
                  RESULTAT=RESU,
                  TOUT_ORDRE='OUI',
                  SYME_CHAR='SYME',
                  COMP_ELAS=_F(RELATION='ELAS_VMIS_TRAC',
                                DEFORMATION='PETIT', ), )
```



```
IMPR_TABLE(TABLE=G1,FORMAT = 'AGRAF')
```

```
THETA2=CALC_THETA(MODELE=MOD,  
                  DIRECTION=(0.0,1.0,0.0),  
                  THETA_2D=_F(GROUP_NO='O',  
                               MODULE=1.0,  
                               R_INF=0.50,  
                               R_SUP=1.0),),  
G2=CALC_G_THETA_T(MODELE=MOD,  
                  CHAM_MATER=CH_MAT,  
                  THETA=THETA2,  
                  RESULTAT=RESU,  
                  TOUT_ORDRE='OUI',  
                  SYME_CHAR='SYME',  
                  COMP_ELAS=_F(RELATION='ELAS_VMIS_TRAC',  
                               DEFORMATION='PETIT',),),
```

```
IMPR_TABLE(TABLE=G2,FORMAT = 'AGRAF')
```

```
THETA3=CALC_THETA(MODELE=MOD,  
                  DIRECTION=(0.0,1.0,0.0),  
                  THETA_2D=_F(GROUP_NO='O',  
                               MODULE=1.0,  
                               R_INF=1.0,  
                               R_SUP=2.0),),
```

```
G3=CALC_G_THETA_T(MODELE=MOD,  
                  CHAM_MATER=CH_MAT,  
                  THETA=THETA3,  
                  RESULTAT=RESU,  
                  TOUT_ORDRE='OUI',  
                  SYME_CHAR='SYME',  
                  COMP_ELAS=_F(RELATION='ELAS_VMIS_TRAC',  
                               DEFORMATION='PETIT',),),
```

```
IMPR_TABLE(TABLE=G3,FORMAT = 'AGRAF')
```

```
FIN()
```

Titre : *Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture* Date : 03/04/03
Auteur(s) : *I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE* Clé : U2.05.01-A Page : 42/52

```
POURSUITE(PAR_LOT='NON')

ENEE=[None]*200
ENET=[None]*200
#
deltal = 0.01
#
import os
f2=open("fort.44","w")
f3=open("fort.45","w")
f2.write("Propagation brutale - Eprouvette SENB1 - Maillage M1\n")
f2.write("Ecouissage courbe de traction CEA\n")
f2.write("Propagation - Energie élastique - G plastique (dW/dl) \n" )

for k in range(1,101):

    LIG = 'COPS_%i' %(k)
    print " ligament numero : ",k
    print " propagation cumulée : ",k*deltal," millimètres"

    ENEE[k] = POST_ELEM (          MODELE=MOD,
                                RESULTAT=RESU,
                                CHAM_MATER=CH_MAT,
                                TOUT_ORDRE = 'OUI',
                                ENER_ELAS=_F(GROUP_MA=LIG),
                                TITRE='Energie élastique',
                                )
    IMPR_TABLE (TABLE=ENEE[k],
                FORMAT_R='1PE18.11')

# Fin des itérations

for j in range(1,31):
    f2.write("Instant : %f \n" % (j) )
    gpmax = 0.
    for k in range(1,101):
        ETOT=ENEE[k]['TOTALE',j]
        GP = 2.0*(ETOT)/(k*deltal)
        if GP > gpmax:
            gpmax = GP
            kmax = k*deltal
        f2.write("%f %0.11f %3f \n" % ((k*deltal),ETOT,GP))
    f3.write("%f %3f %3f \n" % (j,kmax,gpmax))

f2.close()
f3.close()

FIN()

EPROUVETTE SENB2 PETIT DEFAUT af / h = 0.076 SOIT af = 3.8 MM
```

Titre : *Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture* Date : 03/04/03
Auteur(s) : *I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE* Clé : U2.05.01-A Page : 43/52

DEBUT()

PRE_GIBI()

MA=LIRE_MALLAGE()

MA=DEFI_GROUP(reuse =MA,
 MAILLAGE=MA,
 CREA_GROUP_NO=_F(TOUT_GROUP_MA='OUI',),)

MODELISATION DU MAILLAGE
#

MOD=AFFE_MODELE(MAILLAGE=MA,
 AFFE=_F(TOUT='OUI',
 PHENOMENE='MECANIQUE',
 MODELISATION='D_PLAN',),)

DEFINITION DU MATERIAU
#

SIGM_F = DEFI_FONCTION (NOM_PARA = 'EPSI',
 VALE= (2.74E-03, 571.32,
 1.29E-02, 609.42,
 2.31E-02, 647.52,
 3.33E-02, 685.62,
 4.34E-02, 715 ,
 5.36E-02, 746 ,
 6.37E-02, 775 ,
 7.38E-02, 797 ,
 8.39E-02, 814 ,
 9.40E-02, 831.66,
 0.10405 , 844.47,
 0.11411 , 856.22,
 0.12416 , 867.1 ,
 0.14425 , 886.7 ,
 0.16434 , 904.04,
 0.18441 , 919.62,
 0.20448 , 933.78,
),
 PROL_DROITE = 'CONSTANT',
 PROL_GAUCHE = 'CONSTANT',
)

ACIER=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E=208510.,
 NU=0.3,
 ALPHA=0.0,)),
 TRACTION=_F(SIGM = SIGM_F),
)

CH_MAT=AFFE_MATERIAU(MAILLAGE=MA,
 AFFE=_F(GROUP_MA='SENB',
 MATER=ACIER,
 TEMP_REF=0.0,),)

#

Titre : Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture Date : 03/04/03
Auteur(s) : I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE Clé : U2.05.01-A Page : 44/52

DEFINITION D'UNE LISTE D'INSTANTS ET D'UNE RAMPE

#

```
LIST=DEFI_LIST_REEL(DEBUT=0.0,
                    INTERVALLE=( _F(JUSQU_A=22.0,
                                     NOMBRE=22, ),
                                  _F(JUSQU_A=27.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=32.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=37.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=42.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=47.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=52.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=57.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=61.0,
                                     NOMBRE=4, ),
                                  _F(JUSQU_A=65.0,
                                     NOMBRE=4, ),
                                  _F(JUSQU_A=70.0,
                                     NOMBRE=5, ),
                                  _F(JUSQU_A=76.0,
                                     NOMBRE=6, ),
                                  _F(JUSQU_A=82.0,
                                     NOMBRE=6, ),
                                  _F(JUSQU_A=88.0,
                                     NOMBRE=6, ),
                                  _F(JUSQU_A=94.0,
                                     NOMBRE=6, ),
                                  _F(JUSQU_A=100.0,
                                     NOMBRE=6, ), ), )
```

```
RAMPE=DEFI_FONCTION(NOM_PARA='INST',
                    VALE=(0.0,0.0,100.0,100.0),
                    PROL_DROITE='LINEAIRE',
                    PROL_GAUCHE='LINEAIRE', )
```

#

CHARGEMENT ET CONDITIONS LIMITES

#

```
CHAR=AFFE_CHAR_MECA(MODELE=MOD,
                    DDL_IMPO=( _F(GROUP_NO='LIGR',
                                   DX=0.0, ),
                                _F(GROUP_NO='LAPPUI',
                                   DY=0.0, ),
                                _F(GROUP_NO='LPILOT',
                                   DY=-0.04, ), ), )
```

Titre :	Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture	Date :	03/04/03
Auteur(s) :	I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE	Clé :	U2.05.01-A
		Page :	45/52

```
#
# APPLICATION DE LA CHARGE & CALCUL DES CONTRAINTES
#
RESU=STAT_NON_LINE(MODELE=MOD,
                    CHAM_MATER=CH_MAT,
                    EXCIT=_F(CHARGE=CHAR,
                              FONC_MULT=RAMPE, ),
                    COMP_INCR=_F(RELATION='VMIS_ISOT_TRAC',
                                   DEFORMATION='PETIT',
                                   GROUP_MA='SENB', ),
                    INCREMENT=_F(LIST_INST=LIST,
                                   NUME_INST_FIN=95, ),
                    NEWTON=_F(PREDICTION='TANGENTE',
                               MATRICE='TANGENTE',
                               REAC_ITER=4, ),
                    RECH_LINEAIRE=_F(RESI_LINE_RELA=1.E-3,
                                       ITER_LINE_MAXI=3, ),
                    CONVERGENCE=_F(RESI_GLOB_MAXI=1.E-08,
                                    RESI_GLOB_RELA=1.E-08,
                                    ITER_GLOB_MAXI=20, ),
                    SOLVEUR=_F(METHODE='MULT_FRONT',
                                RENUM='METIS', ), )
```

```
#
# CALCUL DE G
#
```

```
THETA1=CALC_THETA(MODELE=MOD,
                  DIRECTION=(0.0,1.0,0.0),
                  THETA_2D=_F(GROUP_NO='O',
                               MODULE=1.0,
                               R_INF=0.25,
                               R_SUP=0.5, ), )
```

```
G1=CALC_G_THETA_T(MODELE=MOD,
                  CHAM_MATER=CH_MAT,
                  THETA=THETA1,
                  RESULTAT=RESU,
                  TOUT_ORDRE='OUI',
                  SYME_CHAR='SYME',
                  COMP_ELAS=_F(RELATION='ELAS_VMIS_TRAC',
                                DEFORMATION='PETIT', ), )
```

```
IMPR_TABLE(TABLE=G1,FORMAT = 'AGRAF')
```

```
THETA2=CALC_THETA(MODELE=MOD,
                  DIRECTION=(0.0,1.0,0.0),
                  THETA_2D=_F(GROUP_NO='O',
                               MODULE=1.0,
                               R_INF=0.50,
                               R_SUP=1.0, ), )
```

Titre : *Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture* Date : 03/04/03
Auteur(s) : *I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE* Clé : U2.05.01-A Page : 46/52

```
G2=CALC_G_THETA_T(MODELE=MOD,
                   CHAM_MATER=CH_MAT,
                   THETA=THETA2,
                   RESULTAT=RESU,
                   TOUT_ORDRE='OUI',
                   SYME_CHAR='SYME',
                   COMP_ELAS=_F(RELATION='ELAS_VMIS_TRAC',
                                DEFORMATION='PETIT',),),)
```

```
IMPR_TABLE(TABLE=G2,FORMAT = 'AGRAF')
```

```
THETA3=CALC_THETA(MODELE=MOD,
                  DIRECTION=(0.0,1.0,0.0),
                  THETA_2D=_F(GROUP_NO='O',
                               MODULE=1.0,
                               R_INF=1.0,
                               R_SUP=2.0),),)
```

```
G3=CALC_G_THETA_T(MODELE=MOD,
                   CHAM_MATER=CH_MAT,
                   THETA=THETA3,
                   RESULTAT=RESU,
                   TOUT_ORDRE='OUI',
                   SYME_CHAR='SYME',
                   COMP_ELAS=_F(RELATION='ELAS_VMIS_TRAC',
                                DEFORMATION='PETIT',),),)
```

```
IMPR_TABLE(TABLE=G3,FORMAT = 'AGRAF')
```

```
#
```

```
FIN()
```

```
POURSUITE(PAR_LOT='NON')
```

```
ENEE=[None]*200 ;
ENET=[None]*200 ;
#
deltal = 0.01
#
#
import os
f2=open("fort.44","w")
f3=open("fort.45","w")
f2.write("Propagation brutale - Eprouvette SENB2 - Maillage M1\n")
f2.write("Ecrouisseage courbe de traction CEA\n")
f2.write("Propagation - Energie élastique - G plastique (dW/dl) \n" )

for k in range(1,101):

    LIG = 'COPS_%i' %(k)
    print " ligament numero : ",k
    print " propagation cumulée : ",k*deltal," millimètres"

    ENEE[k] = POST_ELEM (          MODELE=MOD,
                                RESULTAT=RESU,
                                CHAM_MATER=CH_MAT,
                                TOUT_ORDRE ='OUI',
                                ENER_ELAS= F(GROUP_MA=LIG),
                                TITRE='Energie élastique',
                                )
    IMPR_TABLE (TABLE=ENEE[k],
                FORMAT_R='1PE18.11')

# Fin des itérations

for j in range(1,96):
    f2.write("Instant : %f \n" % (j) )
    gpmax = 0.
    for k in range(1,101):
        # f2.write("Deltal : %f \n" % (k*deltal) )
        # f2.write("Nb copeaux : %i\n" % (k) )
        ETOT=ENEE[k][',j]
        GP = 2.0*(ETOT)/(k*deltal)
        if GP > gpmax:
            gpmax = GP
            kmax = k*deltal
        f2.write("%f %0.11f %3f \n" % ((k*deltal),ETOT,GP))
    f3.write("%f %3f %3f \n" % (j,kmax,gpmax))

f2.close()
f3.close()

FIN()
```

3.4.5 Interprétation

Pour la grande fissure (SENB1)

Ce cas correspond au calcul sur éprouvette CT.

On identifie l'instant $t_1 = 30$ s correspondant à la flèche à la rupture expérimentale de 1.21 mm. On détermine à cet instant G_{θ} qui est stable pour différentes couronnes :

$$G_{\theta}^{\text{SENB1}} = 47.86$$

On détermine ensuite pour tous les instants le ligament où G_p est maximum

et en particulier à l'instant t_1 : $G_p = 0.606$ sur le ligament 26 pour $dl = 0.26$ mm.

Pour la petite fissure (SENB2)

On détermine dans ce cas l'instant où G_{pmax} vaut également 0.606.

Il s'agit de $t_2 = 80$ s sur le ligament 16 pour $dl = 0.16$ mm.

On calcule à l'instant t_2 la valeur de $G_{\theta}^{\text{SENB2}} = 153.79$.

On en déduit donc un effet petit défaut qui s'exprime sous la forme :

$$(\text{epd})^2 = G_{\theta}^{\text{SENB2}} / G_{\theta}^{\text{SENB1}} = 3.21 \text{ soit } \text{epd} = K^{\text{SENB2}} / K^{\text{SENB1}} = 1.79$$

4 Documentation du Code_Aster relative à la mécanique de la rupture fragile

Clé	Titre du document
-----	-------------------

Documents de Référence :

[R7.02.01]	Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire
[R7.02.03]	Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité non linéaire
[R7.02.04]	Représentation Lagrangienne de variation de domaine
[R7.02.05]	Calcul des coefficients d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire plane
[R7.02.07]	Taux de restitution d'énergie en thermo-élasto-plasticité
[R7.02.08]	Calcul des coefficients d'intensité de contraintes par extrapolation du champ de déplacements

Documents d'Utilisation :

[U4.82.01]	Opérateur DEFI_FOND_FISS
[U4.82.02]	Opérateur CALC_THETA
[U4.82.03]	Opérateur CALC_G_THETA_T
[U4.82.04]	Opérateur CALC_G_LOCAL_T
[U4.82.05]	Opérateur POST_K1_K2_K3
[U4.81.22]	Opérateur POST_ELEM

Documents de Validation :

SSLP101	Taux de restitution d'énergie en contraintes planes
SSLP102	Taux de restitution de l'énergie avec déformations initiales (propagation lagrangienne)
SSLP103	Calculs des facteurs d'intensité de contraintes KI et KII pour une plaque circulaire fissurée en élasticité linéaire
SSLP310	Biblio_18 Fissure pressurisée dans un domaine plan illimité
SSLP311	Biblio_65 fissure centrale oblique dans une plaque rectangulaire finie, à deux matériaux, soumise à traction uniforme
SSLP313	Fissure inclinée dans une plaque illimitée, soumise à une traction uniforme à l'infini
SSLV110	Taux de restitution d'énergie pour une fissure semi-elliptique dans un milieu infini
SSLV112	Calcul de G par la méthode lagrangienne pour une fissure circulaire
SSLV134	Fissure circulaire en milieu infini
SSNP102	Taux de restitution d'énergie pour une plaque entaillée en élasto-plasticité
SSNP311	Biblio_131 Fissuration en mode II d'une éprouvette élastoplastique
SSNP312	DMT94.132 Fissure parallèle à l'interface dans une éprouvette CT bimétallique
HPLA310	Biblio_49 Fissure radiale externe dans un barreau circulaire soumis à un choc thermique
HPLA311	Murakami 11.39 Fissure circulaire au centre d'une sphère soumise à une température uniforme sur les lèvres
HPLP100	Calcul du taux de restitution de l'énergie d'une plaque fissurée en thermo-élasticité
HPLP101	Plaque fissurée en thermoélasticité (contraintes planes)
HPLP310	Biblio_35 Fissure radiale interne dans un cylindre épais sous pression et chargement thermique
HPLP311	Murakami 11.17 : Fissure au centre d'une plaque mince rectangulaire faisant obstacle à un flux de chaleur uniforme en milieu isotrope
HPLV102	Taux de restitution d'énergie en thermo-élasticité pour une fissure circulaire en milieu infini
HPLV103	Calcul de G thermo-élastique 3D pour une fissure circulaire

* Ces tests sont issus de la validation indépendante de la version 3 en mécanique de la rupture et sont diffusés en documentation électronique.

5 Bibliographie

- [1] BABUSKA I., Accurate and reliable determination of edge and vertex stress intensity factors, ICAS-90-4.9.2, 1990
- [2] BABUSKA I., PAPADAKIS J., PANAGIOTIS J., Determination of certain quantities related to K1-K2, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 122, 1995, 69-92
- [3] BONNAMY M., WADIER Y., BLOCFISS Maillages 2D et 3D de blocs fissure, HI-74/96/007/0, octobre 96
- [4] BUI H.D., Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977
- [5] BUI H.D., AMESTOY M., DANG VAN K., Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire, C.R. Acad. SC. Paris, t. 289, série B, No 8, p99, 1979
- [6] BUI H.D., Découplage du modes mixte de rupture par l'utilisation de 2 nouvelles intégrales de contour, C.R. Acad. SC. Paris, t. 295, série B, p521, 1982
- [7] BUI H.D., MAIGRE H., Facteur d'intensité de contraintes tiré des grandeurs mécaniques globales, C.R. Acad. SC. Paris, t. 306, série B, p1213-1216, 1988
- [8] COOR. MECANIQUE, ANDRIEUX S., MIALON P., Co, Session Mécanique de la Rupture, Séminaire de formation Code_Aster, IMA/MMN, HI-74/94/019/0
- [9] DAUGE M., Coefficients des singularités pour le problème de Dirichlet sur un polygone, C.R. Acad. SC. Paris, t. 304, série A, No 16, 1987
- [10] DAUGE M., Problèmes aux limites elliptiques sur des domaines à coins (1), C.R. Acad. SC. Paris, t. 304, série A, Nos 17, 18 et 19, 1987
- [11] DAUGE M., COSTABEL M., Computation of corner singularities in linear elasticity, IRMAR, Prépublication 93-23, Octobre 1993
- [12] DEBRUYNE G., Problème de la propagation finie d'une fissure, représentation Lagrangienne, IMA/MMN, HI-73/8193, 1992
- [13] DEBRUYNE G., Propagation de fissures et contraintes résiduelles, IMA/MMN, HI-74/94/083/0, 1995
- [14] DEBRUYNE G., Proposition d'un paramètre énergétique de rupture ductile en thermoplasticité, IMA/MMN, HI-74/95/027/0, 1995
- [15] DESTUYNDER Ph, DJAOUA M., Equivalence de l'intégrale de Rice et de G en mécanique de la rupture, C.R. Acad. SC. Paris, t. 290, série A, p347, 1980
- [16] DESTUYNDER Ph., DJAOUA M., Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences, Vol. 3, pp. 70-87, 1981.
- [17] DESTUYNDER Ph., DJAOUA M., LESCURE S., Nouvelle méthode du calcul de la singularité pour un problème elliptique, C.R. Acad. SC. Paris, t. 293, série A, p343, 1981
- [18] DESTUYNDER Ph., OUSSET Y., STACKLER C., Sur les singularités de contraintes dans les joints collés, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 7, No 6, 899-926, 1988
- [19] ERDOGAN F., Stress intensity factors, Journal of Applied Mechanics, Vol 50, 993, 1983
- [20] EYMARD I., Singularités de contraintes élastiques à la jonction de deux matériaux, IMA/MMN, HI-74/93/099, 1994
- [21] GRIFFITH A., The phenomena of Rupture and flow in solids, M.Eng. (of the Royal Aircraft Establishment), communicated by Taylor, F.R.S., 1920

- [22] GRISVARD P., Elliptic problems in nonsmooth domains, Monograph and Studies in Mathematics 24, Pitman, 1985
- [23] GRISVARD P., Problèmes aux limites dans les polygones, Mode d'emploi - EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, 1, 1986 pp. 21-59.
- [24] HUTCHINSON J.W., Fundamentals of the phenomenological theory of non-linear fracture mechanics, Journal of Applied Mechanics, Vol 50, dec. 1983
- [25] LEGUILLON D., Rupture fragile anisotrope. Micro-fissures collatérales à une fissure principale, C.R. Acad. SC. Paris, t. 313, série B, 139-144, 1991
- [26] LEGUILLON D., Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non-isotropic materials, Journal of Mechanics, A/Solids, 1991
- [27] LEGUILLON D., Analysis of the brittle fracture in composites using singularities, Micromechanics of materials, 1993
- [28] LEGUILLON D., Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non-isotropic materials, Eur. J. Mech., A/Solids, 12, No 1, 33-51, 1993
- [29] LENCZNER M., Formulation lagrangienne des équations de micro-fissures et calcul des facteurs d'intensité de contraintes, Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 4 juillet 1991
- [30] LENCZNER M., Caractérisation des fonctions singulières duales pour le Laplacien 3D, C.R. Acad. SC. Paris, t. 314, série A, 265-270, 1992
- [31] LESCURE S., Etudes des critères de propagation droite ou déviée d'une fissure d'un bimatériau, IMA/MMN, HI/4567-07, 1983
- [32] MAUGIN A., TRIMARCO C., Bui's path independent integral in finite elasticity, Meccanica 30, 139-145, 1995
- [33] MAUGIN G.A., Eshelby stress in elastoplasticity and ductile fracture, International Journal of Plasticity, Vol. 10, No 4, 393-408, 1994
- [34] MEISTER E., WADIER Y., Etude de l'applicabilité de l'approche globale sur une structure bimatériau, IMA/MMN, HI-73/7949, 1992
- [35] MEISTER E., Eléments bibliographiques sur la mécanique de la rupture des interfaces bimatériau, IMA/MMN, HI-74/93/116, 1994
- [36] MEISTER E., Approche à deux paramètres en mécanique de la rupture, IMA/MMN, HI-74/94/020/0, 1994
- [37] MIALON P., Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure, note interne EDF, HI/4740-07, 1984.
- [38] MIALON P., Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta, EDF, Bulletin de la direction des études et recherches, Série C, 1988
- [39] MIALON P., VISSE E., Taux de restitution de l'énergie en grands déplacements, Deuxième colloque national en calcul des structures, Giens, 16-19 mai 1995
- [40] MOUSSAOUI M., AMARA M., Approximation of solutions and singularities coefficients for an elliptic problem, Labo Math., E.N.S.L., Lyon
- [41] NEEDLEMAN A., SHIH C.F., LI F.Z., A comparison of methods for calculating energy release rates, Engineering Fracture Mechanics, Vol 21, pp 405-421, 1985
- [42] NGUYEN Q.S., Sur l'utilisation des critères de l'énergie en Rupture et en Fatigue, C.R. Acad. SC. Paris, t. 286, série A, p483, 13 mars 1978

Titre : *Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture* Date : 03/04/03
Auteur(s) : **I. DEBOST, G. DEBRUYNE, Y. WADIER, E. VISSE** Clé : U2.05.01-A Page : 52/52

- [43] NGUYEN Q.S., Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture, Journal de mécanique, Vol. 19, No 2, 1980
- [44] NGUYEN Q.S., A thermodynamic description of the running crack problem, IUTAM, Dourdan, France, 2-5 June 1980
- [45] NGUYEN Q.S., Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture, J. Mech. Phys. Solids, Vol.35, No 3, pp 303-324, 1987
- [46] PARKS D.M., General finite element technique for J-integral evaluation, Int. Cong. Num. Meth. Fracture, Swansea, 1978, 464-478
- [47] RICE J.R., PARIS P.C., MERKLE J.G., Some further results of J-integral analysis and estimates, Progress in flaw growth and fracture toughness testing, ASTM STP 536, pp 231-245
- [48] RICE J.R., Thermodynamics of the quasi-static growth of Griffith cracks, J. Mech. Phys. Solids, Vol.26, pp 61-78, 1978
- [49] SIH G.C., Handbook of stress-intensity factor, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1973
- [50] SIH G.C., Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, Int. Journal of Fracture, Vol. 10, No 3, Sept. 1974
- [51] VISSE E., Calcul des facteurs d'intensité de contrainte en élasticité linéaire plane, HI-75/94/061/0, 1994
- [52] VOLDOIRE F., Introduction d'une loi de comportement élastique non-linéaire et calcul de G dans ALIBABA, IMA/MMN, HI/5614-07, 1986
- [53] WADIER Y., Application de la méthode théta à l'étude d'une éprouvette en rupture élastoplastique, IMA/MMN, HI/5696-07, 1987
- [54] WADIER Y., Mécanique de la rupture élastoplastique : étude numérique du paramètre GTP, et réflexions sur le critère de rupture. CR MMN/97/087, juillet 97.
- [55] WADIER Y., Quelques remarques sur le problème de charge/décharge en rupture élastoplastique, IMA/MMN, HI-70/95/020/0, 1995.
- [56] FRANCFORT G. and MARIGO J.J. (1998), « Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem ». J. Mech. Phys. Solids, 46, n°8, pp 1319-1342.
- [57] WADIER Y., DEBRUYNE G., « New energetic parameters for cleavage fracture and ductile tearing : application to the analysis of a subclad flaw located in a pressure vessel of a PWR ». PVP 2000, Seattle.
- [58] LORENTZ E., WADIER Y., DEBRUYNE G. (2000), « Mécanique de la rupture en présence de plasticité : définition d'un taux de restitution d'énergie ». C.R.A.S. t. 328, série lib.
- [59] WADIER Y., LORENTZ E., « The energetic approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the problem of unloading ». SMIRT 16-2001, Washington.
- [60] WADIER Y., LORENTZ E., « New considerations and results on crack separation energy rates in elastic-plastic fracture mechanics ». ICF10, December 2001, Honolulu.
- [61] DEBOST I., WADIER Y. : Application de l'approche énergétique à l'interprétation de l'effet petit défaut. Première partie : modèle de défaut de type fissure. Note HI-74/01/015/A, Juin 2001.
- [62] WADIER Y. : Présentation succincte de l'approche énergétique en rupture élastoplastique appliquée à la rupture par clivage. Note HT-64/03/001/A (à paraître).