Organisme(s) : EDF-R&D/AMA

Manuel d'Utilisation
Fascicule U2.06 : Dynamique
Document : U2.06.03

Notice de modélisation de l'amortissement mécanique

Résumé

Les analyses dynamiques linéaires et non-linéaires, pour l'étude de la réponse vibratoire avec une excitation en force ou en mouvement imposé ou pour l'analyse modale complexe, nécessitent d'ajouter des caractéristiques d'amortissement mécanique aux caractéristiques de rigidité et de masse.

On dispose de plusieurs modélisations classiques, applicables à tous les types d'éléments finis disponibles :

- le modèle d'amortissement visqueux,
- le modèle d'amortissement hystérétique (dit aussi "amortissement structural") pour l'analyse harmonique des matériaux visco-élastiques.

Pour les analyses utilisant une base modale de modes propres réels, il est possible d'introduire des coefficients d'amortissement modaux.

1 Modèle d'amortissement visqueux

Le modèle d'amortissement visqueux est le plus couramment utilisé. Il correspond à la modélisation d'une énergie dissipée proportionnelle à la vitesse vibratoire :

$$\mathbf{E_d} = \frac{1}{2} v^T C v = \frac{1}{2} u^T C u \qquad \textbf{éq 1-1}$$

où C est la matrice d'amortissement visqueux, à coefficients réels.

Il conduit aux équations classiques de la dynamique des structures :

$$Mu + Cu + Ku = f(t) \qquad \textbf{éq 1-2}$$

avec K matrice de rigidité et M matrice de masse.

1.1 Amortissement visqueux proportionnel "global"

Cette modélisation, facile à mettre en œuvre, correspond à :

$$C = \alpha \ K + \beta \ M \qquad \textbf{éq 1.1-1}$$

Elle est disponible actuellement, en utilisant l'opérateur `COMB_MATR_ASSE` [U4.72.01], après avoir assemblé les matrices de rigidité et de masse à coefficients réels, mais elle est d'une utilité faible :

- validation d'algorithmes de résolution,
- inutile pour les études industrielles, car elle ne permet pas de représenter l'hétérogénéité de la structure par rapport à l'amortissement (dissipation aux appuis ou aux assemblages). De plus l'identification globale des coefficients α et β n'est possible, en analyse modale expérimentale, que pour deux fréquences propres $[f_1 f_2]$ distinctes; elle donne, pour les fréquences propres $f_i \neq [f_i, f_2]$ avec $\omega_i = 2\pi f_i$, une loi d'évolution de l'amortissement réduit de la forme :

$$\xi_i = \alpha \ \omega_i + \frac{\beta}{\omega_i}$$

1.2 Amortissement visqueux proportionnel des éléments du modèle

1.2.1 Caractéristiques d'amortissement

Il est possible de construire une matrice d'amortissement à partir de chaque élément du modèle, comme pour la rigidité et la masse.

Deux fonctionnalités sont utilisables :

- l'affectation d'éléments discrets, sur des mailles `POI1` ou `SEG2`, par l'opérateur `AFFE_CARA_ELEM` [U4.42.01]. Celui-ci permet de définir, avec plusieurs modes de description possibles, une matrice d'amortissement pour chaque degré de liberté.
- la définition d'une caractéristique d'amortissement pour tout matériau élastique par l'opérateur `DEFI_MATERIAU` [U4.43.01] par :

  ```
  AMOR_ALPHA   :  α          [R]
  AMOR_BETA    :  β
  ```

  ce matériau étant ensuite affecté aux mailles concernées.

1.2.2 Calcul des matrices d'amortissement

Pour tous les types d'éléments finis (de milieux continus, structuraux ou discrets), il est possible de calculer les matrices élémentaires réelles correspondant à l'option de calcul 'AMOR_MECA', après avoir calculé les matrices élémentaires correspondant aux options de calcul 'RIGI_MECA' et 'MASS_MECA' ou 'MASS_MECA_DIAG'. Chaque matrice élémentaire est alors de la forme :

- quand le matériau i, de caractéristiques d'amortissement visqueux proportionnel (α_i β_i), est affecté à l'élément elem

$$\mathbf{c}_{elem} = \alpha_i \; \mathbf{k}_{elem} + \beta_i \; \mathbf{m}_{elem}$$

- pour un élément discret

$$\mathbf{c}_{elem} = \mathbf{a}_{discret}$$

Cette opération est possible avec :

```
mel  [matr_elem_DEPL_R] = CALC_MATR_ELEM
   (  /  ♦  OPTION:    'AMOR_MECA'
         ♦  MODELE:      mo              [modele]
         ♦  CHAM_MATER:  chmat           [cham_mater]
         ◊  CARA_ELEM:   cara            [cara_elem]
   );
```

L'assemblage de toutes les matrices élémentaires d'amortissement est obtenu avec l'opérateur ASSE_MATRICE habituel [U4.61.22]. On notera que l'on doit utiliser les mêmes numérotations et le même mode de stockage que pour les matrices de rigidité et de masse (opérateur NUME_DDL [U4.61.11]).

On remarque que la matrice d'amortissement obtenue est, en général, non proportionnelle :

$$C \;° = \alpha \;\; K + \beta \;\; M$$

1.2.3 Utilisation de la matrice d'amortissement visqueux

La matrice C est utilisable pour l'analyse dynamique linéaire directe (mot-clé MATR_AMOR) avec les opérateurs de réponse dynamique linéaire :

- transitoire **DYNA_LINE_TRAN** [U4.53.02]
- harmonique **DYNA_LINE_HARM** [U4.53.11]

Elle est indispensable pour l'analyse modale complexe avec les opérateurs de recherche des valeurs propres :

- par itérations inverses **MODE_ITER_INV** [U4.52.04]
- par itérations simultanées **MODE_ITER_SIMULT** [U4.52.03]

Pour les analyses en base modale, on doit projeter cette matrice dans le sous-espace défini par un ensemble Φ de modes propres réels. Cette opération est possible avec l'opérateur **PROJ_MATR_BASE** [U4.63.12]. Notons que dans le cas général (C non proportionnelle), la matrice projetée n'est pas diagonale. Elle reste néanmoins utilisable (mot-clé AMOR_GENE) pour le calcul de la réponse dynamique en force ou en mouvement imposé dans l'espace modal, avec l'opérateur de réponse dynamique linéaire :

- transitoire **DYNA_TRAN_MODAL** [U4.53.21]

1.2.4 Utilisation de l'amortissement modal visqueux

Pour les analyses en base modale de modes propres réels, l'équation différentielle dynamique en coordonnées généralisées :

$$\ddot{q}_i + 2\ \xi_i\ \omega_i\ \dot{q}_i + \omega_i^2\ q_i = \frac{\Phi_i^T}{\mu_i} f(t) \qquad \textbf{éq 1.2.4-1}$$

fait apparaître un cœfficient d'amortissement modal ξ_i exprimé comme une fraction de l'amortissement critique et la masse généralisée du mode μ_i , qui dépend du mode de normalisation du mode propre.

Dans le cas d'une matrice d'amortissement C strictement proportionnelle, les cœfficients ξ_i se déduisent des termes diagonaux de la matrice d'amortissement généralisée $\Phi^T C\ \Phi$ par :

$$2\ \xi_i\ \omega_i = \frac{\Phi_i^T C \Phi_i}{\Phi_i^T M\ \Phi_i}$$

et, dans le cas de modes propres normés à la masse modale unitaire,

$$2\ \xi_i\ \omega_i = \Phi_i^T C \Phi_i$$

On peut utiliser cette relation dans le cas d'une matrice d'amortissement C non proportionnelle, en appliquant l'hypothèse de BASILE, qui est acceptable pour des amortissements faibles (notamment s'il n'y a pas d'amortissement localisé dominant) et des modes propres réels suffisamment découplés.

Les cœfficients d'amortissement modaux peuvent être fournis par commande (mot clé `AMOR_REDUIT`) à deux opérateurs pour :

- l'analyse transitoire dans l'espace modal **DYNA_TRAN_MODAL** [U4.53.21]
- l'analyse sismique par spectre d'oscillateur **COMB_SISM_MODAL** [U4.84.01]

Notons qu'il n'existe aucun outil d'extraction automatique de ces cœfficients, à partir de la matrice d'amortissement généralisée $\Phi^T C\ \Phi$), concept produit par l'opérateur **PROJ_MATR_BASE** [U4.63.12].

2 Modèle d'amortissement hystérétique

Le modèle d'amortissement hystérétique est utilisable pour traiter les réponses harmoniques de structures avec des matériaux visco-élastiques. Le cœfficient d'amortissement hystérétique η est déterminé à partir d'un essai sous chargement cyclique harmonique à la pulsation ω pour lequel on obtient une relation contrainte-déformation qui permet de définir :

- l'énergie dissipée par cycle sous la forme :

$$\mathbf{E_d} = \int_{cycle} \sigma \mathrm{d}\varepsilon$$

- le module d'YOUNG complexe E* à partir de la relation contraintes-déformations :

$\sigma = \sigma_0\ e^{j\omega t}$ et $\varepsilon = \varepsilon_0\ e^{j(\omega t - \varphi)}$ avec σ_0 et ε_0 les amplitudes, φ la phase

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) e^{j\varphi} = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right) (\cos\ \varphi + j\ \sin\ \varphi)$$

où $E^* = E_1 + j\ E_2 = E_1\ (1 + j\ \eta)$

avec $E_1 = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)(\cos\ \varphi)$ = partie réelle et $E_2 = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)(\sin\ \varphi)$ = partie imaginaire

$\eta = \frac{E_1}{E_2} = tg\ \varphi$ = facteur de dissipation

Ceci conduit aux équations de la dynamique des structures :

$$M\ \ddot{u} + K * (1 + j\ \eta)\ u = f(\Omega) \qquad \text{éq 2-1}$$

avec K matrice de rigidité élastique réelle, M matrice de masse et η le coefficient d'amortissement hystérétique. Notons que l'on parle souvent de matrice de rigidité complexe.

2.1 Amortissement hystérétique "global"

Cette modélisation, facile à mettre en œuvre, correspond à :

$$\left(-M\ \omega^2 + j\ \eta K + K\right) u = f(\Omega) \qquad \text{éq 2.1-1}$$

Elle est disponible actuellement, en utilisant l'opérateur `COMB_MATR_ASSE` [U4.72.01], après avoir assemblé la matrice de rigidité à coefficients réels, mais elle est d'une utilité faible :

- validation d'algorithmes de résolution,
- inutile pour les études industrielles, car elle ne permet pas de représenter l'hétérogénéité de la structure par rapport à l'amortissement (dissipation localisée dans des zones particulières de la structure traitées avec des matériaux visco-élastiques).

2.2 Amortissement hystérétique des éléments du modèle

2.2.1 Caractéristiques d'amortissement

Il est possible de construire une matrice de rigidité complexe à partir de chaque élément du modèle, comme pour la rigidité réelle et la masse.

Deux fonctionnalités sont utilisables :

- l'affectation d'éléments discrets, sur des mailles `POI1` ou `SEG2`, par l'opérateur `AFFE_CARA_ELEM` [U4.42.01]. Celui-ci permet de définir, avec plusieurs modes de description possibles, une **matrice de rigidité réelle** pour chaque degré de liberté **et** un cœfficient d'amortissement hystérétique à appliquer à cette matrice.

  ```
  AMOR_HYST :   éta              [R]
  ```

- la définition d'une caractéristique d'amortissement pour tout matériau élastique par l'opérateur `DEFI_MATERIAU` [U4.43.01] par le mot clé :

  ```
  AMOR_HYST :   éta             [R]
  ```

ce matériau étant ensuite affecté aux mailles concernées.

2.2.2 Calcul des matrices d'amortissement

Pour tous les types d'éléments finis (de milieux continus, structuraux ou discrets), il est possible de calculer les matrices élémentaires complexes correspondant à l'option de calcul 'RIGI_MECA_HYST', après avoir calculé les matrices élémentaires correspondant aux options de calcul 'RIGI_MECA'. Chaque matrice élémentaire est alors de la forme :

- quand le matériau i, de caractéristiques d'amortissement hystérétique η_i, est affecté à l'élément elem

$$\mathbf{k}^*_{elem} = \mathbf{k}_{elem} (1 + j \eta_i)$$

- pour un élément discret défini par une matrice de rigidité $\mathbf{k}_{discret}$ et un cœfficient d'amortissement hystérétique η

$$\mathbf{k}^*_{elem} = \mathbf{k}_{discret} (1 + j \eta)$$

Cette opération est possible avec :

```
mel  [matr_elem_DEPL_C] = CALC_MATR_ELEM
    (  /  ♦  OPTION:   'RIGI_MECA_HYST'
          ♦  MODELE:      mo              [modele]
          ♦  CHAM_MATER:  chmat           [cham_mater]
          ◊  CARA_ELEM:   cara            [cara_elem]
          ♦  RIGI_MECA:   rigi            [matr_elem_*]
          ♦  CHARGE   :   l_char          [l_char_meca]
    );
```

L'assemblage de la matrice de rigidité complexe K^*, à partir des matrices élémentaires est obtenu avec l'opérateur ASSE_MATRICE habituel [U4.61.22]. On notera que l'on doit utiliser la même numérotation et le même mode de stockage que pour la matrice de masse (opérateur NUME_DDL [U4.61.11]).
Le chargement utilisé pour le calcul de la matrice de rigidité réelle (OPTION 'RIGI_MECA') doit être renseigné par le mot clé 'CHARGE' pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire complexe.

2.2.3 Utilisation de la matrice de rigidité complexe

La matrice de rigidité complexe K^* est utilisable pour l'analyse dynamique linéaire directe (mot-clé MATR_RIGI) avec l'opérateur de réponse dynamique linéaire :

- harmonique **DYNA_LINE_HARM** [U4.53.11]

Pour la recherche de valeurs propres, aucune fonctionnalité n'est disponible actuellement pour l'utilisation du modèle d'amortissement hystérique.

Pour les analyses en base modale, aucune fonctionnalité n'est disponible actuellement pour l'utilisation du modèle d'amortissement hystérétique.