

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.52

Eléments de contacts dérivés d'une formulation hybride continue

Résumé :

Ce document décrit la manière dont les éléments de contact frottant sont dérivés d'une formulation hybride continue de problèmes de contact entre solides (2D ou 3D) en grandes transformations et précise la stratégie de résolution utilisée [bib1], [bib2].

L'approche est implémentée dans le *Code_Aster*. Elle est utilisable avec la modélisation `STAT_NON_LINE` en affectant au mot clé `CONTACT`, sous `AFFE_CHAR_MECA`, le mot-clé `METHODE='CONTINUE'`.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Formulation continue hybride du problème de contact.....	3
2.1	Principe des Travaux Virtuels	4
2.2	Appariement et condition cinématique de non interpénétration	5
2.3	Principe de l'Action et de la Réaction	6
2.4	Lois de contact.....	7
2.5	Formulation hybride quasi-statique	9
3	Stratégie de résolution	10
4	Eléments de contact	12
4.3	Matrices tangentes de contact.....	15
4.4	Matrices tangentes de frottement	16
4.5	Expression des seconds membres de contact-frottement	17
4.6	Calcul des matrices et des seconds membres	18
5	Implémentation	19
6	Bibliographie	20

1 Introduction

Il existe, pour le traitement du problème de contact-frottement, un "gap" important entre les formulations discrètes et la formulation continue. Les implémentations dans les codes de calcul sont (souvent) fondées sur des modèles discrets tels ceux développés par [bib3], [bib4], [bib5] ou, plus récemment, [bib6]. Ces derniers sont sans liens clairs avec la formulation continue. Cela pose la question de la précision et de la nature des résultats obtenus : vers quoi converge-t-on ?

Les deux objets essentiels de ce document sont d'une part la description de la dérivation d'éléments de contact à partir d'une formulation hybride continue d'un problème de contact entre des solides tridimensionnels, déformables, subissant de grandes transformations, et d'autre part le détail de la stratégie de résolution [bib1], [bib2], [bib7].

La section 2, consacrée à la formulation hybride continue, comporte cinq paragraphes. Dans le paragraphe [§2.1], on rappelle un formalisme lagrangien du **Principe des Travaux Virtuels** pour deux solides déformables qui peuvent entrer en contact. Grâce à une application d'appariement et au **Principe de l'Action et de la Réaction** détaillés dans les paragraphes [§2.2] et [§2.3], respectivement, on donne une expression simplifiée des travaux virtuels des forces de contact. Le paragraphe [§2.4] est consacré à des écritures équivalentes des lois de contact et de frottement qui se prêtent à des formulations faibles. La formulation hybride continue du problème est précisée dans le paragraphe [§2.5]. On précise la stratégie de résolution dans la section 3. Cette dernière est fondée sur des algorithmes de point fixe et de module tangent. Dans la section 4, on discrétise, par la méthode des éléments finis, la formulation hybride continue proposée au paragraphe [§2.5] et on évoque les difficultés dues à l'incompatibilité des modèles discrets d'interfaces. Les mots-clés concernant l'implémentation de cette approche dans le *Code_Aster* sont donnés dans la section 5.

2 Formulation continue hybride du problème de contact

On considère deux solides B^i ($i=1,2$) déformables, supposés élastiques (pour la clarté du document), en contact frottant. Ces deux solides occupent dans leur configuration initiale l'adhérence de deux domaines Ω^1 et Ω^2 de \mathbb{R}^3 et dans leur configuration courante (à l'instant t) l'adhérence de Ω_t^1 et Ω_t^2 , respectivement. On suppose que, dans leur configuration initiale, ces deux solides sont dans un état naturel, tel que sans contraintes résiduelles ou pré-déformations. Au cours de leur mouvement, ils peuvent entrer en contact, comme indiqué sur la [Figure 2-a]. La frontière de chaque solide B^i est décomposée en parties Γ_0^i , Γ_g^i et Γ_c^i dans la configuration initiale, dont les intersections sont vides 2 à 2, et en γ_0^i , γ_g^i et γ_c^i , déformées des précédentes, dans la configuration courante. La description de cette partition est donnée au [§2.1]. Le solide B^i est encastré sur Γ_0^i et soumis à une densité nominale de forces surfaciques notée \mathbf{g}^i sur la partie Γ_g^i . Par ailleurs, on note \mathbf{f}^i le champ de densité volumique d'efforts appliqués sur le solide B^i ($i=1,2$). Les parties des surfaces $\partial\Omega^i$, susceptibles d'entrer en contact lors de la déformation des deux solides, sont notées Γ_c^i . On suppose l'existence de cartes régulières notées Φ^i décrivant les surfaces Γ_c^i . Ces cartes sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi^i : \omega^i &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2) &\rightarrow \mathbf{p}^i = \Phi^i(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad \text{éq 2-1}$$

où ω^i est un domaine borné (de référence) contenu dans \mathbb{R}^2 . Par ailleurs, on désigne par φ^i la transformation du solide B^i , définie par :

$$\begin{aligned}\varphi^i : \overline{\Omega^i} &\rightarrow \overline{\Omega_t^i} \\ \mathbf{p}^i &\rightarrow \mathbf{x}^i\end{aligned}\quad \text{éq 2-2}$$

On note \mathbf{n}_p^i la normale unitaire à Γ_c^i extérieure à Ω^i et on note \mathbf{n}_x^i son vis-à-vis dans la configuration courante (cf. [Figure 2-a]). On désigne par \mathbf{u}^i le champ de déplacements du solide B^i et par \mathbf{F}^i le tenseur gradient de déformation, défini par :

$$\mathbf{F}^i = \nabla_p \varphi^i(\mathbf{p}^i, t) = \nabla_p \mathbf{u}^i + \mathbf{Id} \quad \text{éq 2-3}$$

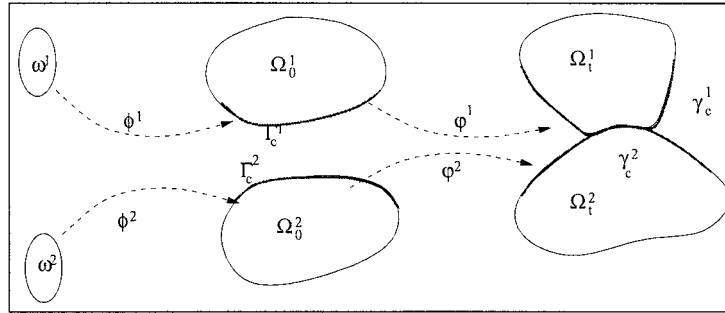


Figure 2-a : Description du problème mécanique

2.1 Principe des Travaux Virtuels

En utilisant les notations introduites précédemment, les équations locales d'équilibre, les conditions initiales et les conditions aux limites du problème considéré s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}Div \mathbf{\Pi}^i + \mathbf{f}^i &= \rho_p^i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial t^2} && \text{dans } \Omega^i \\ \mathbf{\Pi}^i \mathbf{n}_p^i &= \mathbf{g}^i && \text{sur } \Gamma_g^i \\ \mathbf{u}^i &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_0^i \\ \mathbf{\Pi}^i \mathbf{n}_p^i &= \mathbf{r}^i && \text{sur } \Gamma_c^i \\ \mathbf{u}^i(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{u}_0^i(\mathbf{p}) \text{ et } \frac{\partial \mathbf{u}^i(\mathbf{p}, 0)}{\partial t} \mathbf{u}^i(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{v}_0^i(\mathbf{p}) &&& \text{p.p dans } \Omega^i\end{aligned}\quad \text{éq 2.1-1}$$

où $\mathbf{\Pi}^i$ désigne le premier tenseur des contraintes de Piola Kirchoff, ρ_p^i est la masse volumique sur la configuration initiale, \mathbf{u}^i est le champ des déplacements et \mathbf{r}^i est la densité des efforts, due aux interactions de contact frottant éventuelles entre les deux solides, inconnue du problème. En outre, sauf mention explicite contraire, l'exposant i prend ici, et dans toute la suite, la valeur 1 ou 2. Nous supposons, entre autres, pour nous concentrer sur le problème de contact, que la densité des forces volumiques ainsi que celle des efforts surfaciques appliqués sur les deux solides sont nulles, i.e., $\mathbf{f}^i = \mathbf{0}$ et $\mathbf{g}^i = \mathbf{0}$.

On désigne par $(\mathbf{CA})^i$ l'espace des champs des déplacements cinématiquement admissibles pour le solide B^i . Le **Principe des Travaux Virtuels** s'écrit :

Pour tout $\mathbf{w}^i \in (\mathbf{CA})^i$,

$$-\int_{\Omega^i} \rho_p^i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{\partial t^2} \cdot \mathbf{w}^i d\Omega = \int_{\Omega^i} Tr(\mathbf{F}^i \mathbf{S}^i (\nabla_p(\mathbf{w}^i))^T) d\Omega - \int_{\Gamma_c^i} \mathbf{r}^i(\mathbf{p}, t) \cdot \mathbf{w}^i d\Gamma_c^i \quad \text{éq 2.1-2}$$

Dans [éq 2.1-2], le point en gras (.) représente le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^3 et $(*)^T$ est la transposée de (*). La trace d'un tenseur d'ordre 2 est notée Tr et \mathbf{S}^i désigne le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, lié au premier tenseur par la relation suivante :

$$\mathbf{S}^i = (\mathbf{F}^i)^{-1} \mathbf{\Pi}^i \quad \text{éq 2.1-3}$$

Sans restreindre la généralité concernant la mécanique de contact (objet du présent document), on supposera que les matériaux constituant les deux solides sont hyperélastiques, i.e.,

$$\mathbf{\Pi}^i = \rho_p^i \frac{\partial W^i(\mathbf{F}^i)}{\partial \mathbf{F}^i} \quad \text{éq 2.1-4}$$

où W^i est la densité massique d'énergie interne locale définie sur le solide B^i .

2.2 Appariement et condition cinématique de non interpénétration

Pour traduire la non interpénétration, on procède comme suit :

- 1) on couple les points des deux surfaces de contact : c'est l'appariement,
- 2) on impose entre les deux points d'un couple de points appariés la non pénétration suivant une direction donnée.

La première étape peut être modélisée en recherchant, pour tout point $\mathbf{x}^1(t) = \varphi^1(\mathbf{p}^1, t)$ de la frontière γ_c^1 , le point de γ_c^2 qui est le plus proche de lui. Ceci revient à résoudre les problèmes d'optimisation, sous contraintes, suivants :

Pour tout $\mathbf{p}^1 \in \Gamma_c^1$ (donc $\mathbf{p}^1 = \Phi^1(\zeta)$, $\zeta \in \omega^1$) et tout $t \geq 0$,

Trouver $\bar{\xi}(\zeta, t) = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in \omega^2$ tel que :

$$\bar{\xi}(\zeta, t) = ArgMin \left\{ \frac{1}{2} \left\| \varphi^1(\Phi^1(\zeta), t) - \varphi^2(\Phi^2(\xi), t) \right\|^2, \xi \in \omega^2 \right\} \quad \text{éq 2.2-1}$$

La solution de ce problème permet formellement de définir, à tout instant t , une application d'appariement,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t : \omega^1 &\rightarrow \omega^2 \\ \zeta &\rightarrow \bar{\xi}(\zeta, t)\end{aligned}\quad \text{éq 2.2-2}$$

Cette application définit, également, le point $\mathbf{p}^2(\mathbf{p}^1, t) = \Phi^2(\bar{\xi}(\mathbf{p}^1, t))$, noté $\bar{\mathbf{p}}^1$, apparié à \mathbf{p}^1 , à l'instant t . Elle définit aussi le point $\bar{\mathbf{x}}^1$, apparié au point \mathbf{x}^1 .

La condition de non interpénétration entre \mathbf{x}^1 de γ_c^1 et $\bar{\mathbf{x}}^1$ de γ_c^2 est écrite dans la direction de $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_x^2(\bar{\mathbf{x}}^1)$, la normale unitaire à γ_c^2 , en $\bar{\mathbf{x}}^1$, intérieure à Ω_t^2 , sous la forme :

$$d_n = (\mathbf{x}^1 - \bar{\mathbf{x}}^1) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad \text{éq 2.2-3}$$

Une deuxième approche (cf [bib8] pour des commentaires) consiste à introduire une direction de recherche admissible [bib9]. Une de ces directions (cf. [bib8], [bib2]) est le champ des vitesses normalisées \mathbf{V} .

Par la suite on notera x_n la quantité qui représente le produit scalaire $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ ou encore la projection de \mathbf{x} sur \mathbf{n} .

On continue cependant à imposer la non pénétration comme précédemment. L'influence, en pratique, du choix de la stratégie d'appariement sur la résolution des problèmes de contact est montrée dans [bib10], [bib8].

Remarque 1 :

On rappelle que, sous l'hypothèse des petits déplacements, l'appariement n'est fait qu'une seule fois. En grandes transformations, l'appariement dépend de la déformation et introduit la non linéarité géométrique de contact.

Remarque 2 :

Bien que l'appariement semble introduire une dissymétrie de traitement entre les deux surfaces constituant l'interface de contact, l'approche reste "démocratique", en continu. La dissymétrie est en fait due à la discrétisation (par la méthode des éléments finis) et a inspiré à certains auteurs le concept maître/esclave [bib11] ou de surfaces géométriques/cinématiques [bib1].

2.3 Principe de l'Action et de la Réaction

En utilisant la procédure d'appariement, décrite au paragraphe [§2.2], le **Principe de l'Action et de la Réaction (PAR)** s'écrit sous la forme locale suivante :

$$\mathbf{r}^1(p^1, t) d\Gamma_c^1 + \mathbf{r}^2(\bar{p}^1, t) d\Gamma_c^2 = 0 \quad \text{éq 2.3-1}$$

En tenant compte du principe de l'action et de la réaction [éq 2.3-1] et de l'hypothèse faite sur l'appariement, on écrit l'équilibre faible des efforts comme suit :

$$\forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) \in (\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2$$

$$\sum_{i=1}^2 - \int_{\Omega^i} \rho_p^i \frac{\partial^2 \mathbf{u}^i}{(\partial t)^2} \cdot \mathbf{w}^i d\Omega = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} Tr(\mathbf{F}^i \mathbf{S}^i (\nabla_p (\mathbf{w}^i))^T) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \mathbf{r}(\mathbf{p}, t) [[\mathbf{w}]] d\Gamma_c \quad \text{éq 2.3-2}$$

Dans [éq 2.3-2], on a utilisé la notation suivante :

$$[[*]](p^1) = (*)^1(p^1) - (*)^2(p^1) \quad \text{éq 2.3-3}$$

En outre, on a posé $\Gamma_c = \Gamma_c^1$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}^1$. On signale, enfin, que la densité d'efforts \mathbf{r}^2 est prolongée par zéro aux points de Γ_c^2 sans vis-à-vis sur Γ_c^1 .

2.4 Lois de contact

On décompose la densité d'effort de contact \mathbf{r} en une partie normale λ qui désigne la pression normale de contact et une autre tangentielle \mathbf{r}_τ . Ainsi, l'effort de contact \mathbf{r} s'écrit :

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{n} + \mathbf{r}_\tau \quad \text{éq 2.4-1}$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire, définie dans le paragraphe [§2.2].

Les lois de Signorini s'écrivent sous la forme suivante :

$$\lambda \leq 0, \quad d_n \leq 0, \quad \lambda d_n = 0 \quad \text{éq 2.4-2}$$

où d_n est la distance orientée, définie par [éq 2.2-3].

En introduisant la fonction caractéristique de \mathbb{R}^- , notée χ :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.4-3}$$

et le multiplicateur (dit de contact augmenté [bib3]), noté g_n , défini par :

$$g_n = \lambda - \rho_n d_n \quad \text{éq 2.4-4}$$

où ρ_n est un réel strictement positif (noté `COEF_REGU_CONT` dans les fichiers de commande), les lois de contact [éq 2.4-2] s'écrivent comme suit :

$$\lambda - \chi(g_n)g_n = 0 \quad \text{éq 2.4-5}$$

Pour les phénomènes de frottement, on utilise les lois isotropes de Coulomb qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_\tau(\mathbf{p}, t)\| &\leq \mu |\lambda(\mathbf{p}, t)| \\ \text{Si } \|\mathbf{r}_\tau(\mathbf{p}, t)\| &< \mu |\lambda(\mathbf{p}, t)| \quad \text{alors} \quad \mathbf{v}_\tau(\mathbf{p}, t) = 0 \\ \text{Si } \|\mathbf{r}_\tau(\mathbf{p}, t)\| &= \mu |\lambda(\mathbf{p}, t)| \quad \text{alors } \exists \alpha \geq 0; \quad \mathbf{v}_\tau(\mathbf{p}, t) = -\alpha \mathbf{r}_\tau(\mathbf{p}, t) \end{aligned} \quad \text{éq 2.4-6}$$

où μ est le coefficient de frottement de Coulomb et \mathbf{v}_τ est la vitesse relative tangente. On définit cette vitesse \mathbf{v}_τ , en un point donné de la surface de contact, par :

$$\mathbf{v}_\tau(\mathbf{p}^1, t) = (\mathbf{Id} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \left\{ \frac{\partial \varphi^1(\mathbf{p}^1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^2(\mathbf{p}^1, t)}{\partial t} \right\} = (\mathbf{Id} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{v}(\mathbf{p}^1, t) \quad \text{éq 2.4-7}$$

On note par la suite \mathbf{x}_τ la projection de \mathbf{x} sur le plan tangent à la surface de contact, définie par $\mathbf{x}_\tau = (\mathbf{Id} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{x}$, où le symbole \otimes désigne le produit tensoriel.

Une formulation équivalente des lois [éq 2.4-6] est la suivante [bib12] :

$$\mathbf{r}_\tau = \mu \lambda \mathbf{\Lambda} \quad \text{éq 2.4-8}$$

$$\mathbf{\Lambda} - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_\tau) = 0 \quad \text{éq 2.4-9}$$

$$\mathbf{g}_\tau = \mathbf{\Lambda} + \rho_\tau \mathbf{v}_\tau \quad \text{éq 2.4-10}$$

Dans ces quantités, définies sur Γ_c , ρ_τ est un paramètre strictement positif, $\mathbf{\Lambda}$ est un semi-multiplicateur (vectoriel) de frottement, \mathbf{g}_τ est le semi-multiplicateur (vectoriel) de frottement augmenté et $P_{B(0,1)}$ est la projection sur la boule unité.

Les lois de frottement sont complétées par l'équation (de type exclusion) suivante :

$$d_n \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad (1 - \chi(g_n)) \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \quad \text{éq 2.4-11}$$

2.5 Formulation hybride quasi-statique

Dans la suite du document, on adopte l'hypothèse de quasi-staticité du mouvement. On néglige les termes d'inertie. A une étape de chargement donnée (k) , correspondant à l'instant fictif t_k , on suppose connus les champs à l'instant t_{k-1} notés $\mathbf{u}_{k-1}^i, \lambda_{k-1}$ et Λ_{k-1} , et on cherche les nouveaux champs à l'instant t_k .

En utilisant [éq 2.3-2], [éq 2.4-5], [éq 2.4-9] et [éq 2.4-11], on dérive la formulation faible, hybride (à trois champs : $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), \lambda$ et Λ) et quasi-statistique du problème de contact, suivante :

Trouver $(\mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2, \lambda_k, \Lambda_k) \in (\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2 \times H \times \mathbf{H}$;
 $\forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \lambda^*, \Lambda^*) \in (\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2 \times H \times \mathbf{H}$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} \text{Tr} \left(\mathbf{F}^i \mathbf{S}^i (\nabla_p (\mathbf{w}^i))^T \right) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \chi(g_{nk}) g_{nk} \llbracket \mathbf{w} \rrbracket_{nk} d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \mu \chi(g_{nk}) \lambda_k P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau k}) \llbracket \mathbf{w} \rrbracket_{\tau k} d\Gamma_c = 0 \quad \text{éq 2.5-1}$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-1}{\rho_n} \{ \lambda_k - \chi(g_{nk}) g_{nk} \} \lambda^* d\Gamma_c = 0 \quad \text{éq 2.5-2}$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-\mu \chi(g_{nk}) \lambda_k}{\rho_\tau} \{ \Lambda_k - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau k}) \} \Lambda^* d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} (1 - \chi(g_{nk})) \Lambda_k \Lambda^* d\Gamma_c = 0, \quad \text{éq 2.5-3}$$

$$g_{nk} = \lambda_k - \rho_n d_{nk} \quad \text{éq 2.5-4}$$

$$\mathbf{g}_{\tau k} = \Lambda_k + \rho_{\tau k} (\mathbf{Id} - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \Delta \llbracket \mathbf{x}_\alpha^k \rrbracket \quad \text{éq 2.5-5}$$

où $\rho_{\tau k} = \frac{\rho_\tau}{\Delta t_k}$ est un coefficient positif (ρ_τ est noté COEF_REGU_FROT dans les fichiers de commande Code_Aster) et $\Delta^{(*)k}$ est l'incrément de $(*)$, à l'instant t_k . On note qu'un schéma d'Euler a été utilisé pour discrétiser en temps le champ des vitesses.

3 Stratégie de résolution

Le problème décrit par la formulation [éq 2.5-1] à [éq 2.5-5] est fortement non linéaire. En effet, outre la non linéarité "classique" due au cadre des grandes déformations (et à celle éventuellement due aux comportements non-linéaires des matériaux), plusieurs niveaux de non-linéarités inhérentes aux phénomènes de contact frottant, peuvent être distingués :

- La non-linéarité due à la méconnaissance de la surface effective de contact.
Elle est résolue par une stratégie itérative qui peut être rapprochée de la méthode des contraintes actives implémentée dans le *Code_Aster* (cf. [bib13] (cadre linéaire), [bib14] (cadre non-linéaire)).
- La non-linéarité géométrique de contact définie en remarque 1 du paragraphe [§2.2].
Elle est résolue par un algorithme de point fixe sur la géométrie.
- La non-linéarité liée au seuil de frottement (dépendante du champ λ , inconnu).
Cette non-linéarité est également résolue par la méthode du point fixe.

Les autres non-linéarités sont traitées par un algorithme de type module tangent (ou Newton généralisé). Le schéma général de l'algorithme est donc le suivant :

I. Boucle sur les étapes de temps :

champs \mathbf{u} , λ et Λ connus à l'étape précédente

II. Boucle sur la géométrie :

$\mathbf{n} = \mathbf{n}_d$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_d$ et $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_d$ (nouvel appariement)

III. Boucle sur les seuils pour le frottement :

$\lambda = \lambda_s$ (seulement pour les termes de frottement)

IV. Boucle sur la surface des contacts avec une méthode de type contraintes actives :

$\chi = \chi_d$

V. Boucle de module tangent :
linéarisation généralisée

VI. Fin de la boucle de module tangent

VII. Fin de la boucle de la méthode des contraintes actives

VIII. Fin de la boucle sur les seuils

IX. Fin de la boucle sur non linéarité géométrique

X. Fin de la boucle sur les étapes de temps.

Remarque 3 :

Par défaut dans Code_Aster le statut initial des nœuds esclaves est non contactant. Par ailleurs λ_s est initialisé à zéro. Cela revient à commencer par résoudre le problème sans contact à la première itération, puis ensuite avec contact mais sans frottement, puis ensuite à activer le frottement avec des pressions de contact λ_s fixes, c'est-à-dire à résoudre un problème de Tresca.

Remarque 4 :

Le test d'arrêt des boucles géométriques et de seuil est basé sur les variations relatives des champs de déplacements relatifs. Trois mots clés : `ITER_FROT_MAX`, `ITER_CONT_MAX` et `ITER_GEOM_MAX` permettent à l'utilisateur de contrôler le déroulement du calcul.

Remarque 5 :

La boucle de géométrie est nécessaire surtout pour les problèmes avec des surfaces de contact gauches. En pratique une seule correction est souvent suffisante et conseillée (`ITER_GEOM_MAX=1`) s'il y a peu de modifications géométriques et cinématiques des surfaces de contact.

Le problème résolu par l'algorithme du module tangent est un problème d'élasticité non linéaire (il pourrait être d'élastoplasticité en grandes déformations ou autres) avec un terme de frottement de Tresca et un appariement \mathcal{A}_d réactualisé. Il s'écrit :

Trouver $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \lambda, \Lambda) \in (\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2 \times H \times \mathbf{H}$;
 $\forall (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \lambda^*, \Lambda^*) \in (\mathbf{CA})^1 \times (\mathbf{CA})^2 \times H \times \mathbf{H}$

$$G^1(\mathbf{u}^1, \mathbf{w}^1) - \int_{\Gamma_c} \chi_d g_{n_d} w_{n_d}^1(\gamma) d\gamma - \int_{\Gamma_c} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \mathbf{w}_{\tau_d}^1(\gamma) d\gamma = 0 \quad \text{éq 3-1}$$

$$G^2(\mathbf{u}^2, \mathbf{w}^2) + \int_{\Gamma_c} \chi_d g_{n_d} w_{n_d}^2(\mathcal{A}_d(\gamma)) d\gamma + \int_{\Gamma_c} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}) \mathbf{w}_{\tau_d}^2(\mathcal{A}_d(\gamma)) d\gamma = 0 \quad \text{éq 3-2}$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-1}{\rho_n} (\lambda - \chi_d g_{n_d}) \lambda^* d\gamma = 0 \quad \text{éq 3-3}$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-\chi_d \mu \lambda_s}{\rho_\tau} (\Lambda - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d})) \Lambda^* d\gamma + \int_{\Gamma_c} (1 - \chi_d) \Lambda \Lambda^* d\gamma = 0 \quad \text{éq 3-4}$$

où $G^1(.,.)$ et $G^2(.,.)$ désignent les travaux virtuels des efforts internes aux solides B^1 et B^2 respectivement et où g_{n_d} et \mathbf{g}_{τ_d} sont tels que :

$$g_{n_d} = \lambda - \rho_n [[x]]_{n_d} \quad \text{éq 3-5}$$

$$\mathbf{g}_{\tau_d} = \Lambda + \rho_\tau \Delta [[\mathbf{u}]]_{\tau_d} \quad \text{éq 3-6}$$

La référence au temps " t_k " est omise pour alléger l'écriture. En outre, dans les intégrales sur la surface de contact on a remplacé $d\Gamma_c$ par $d\gamma$ pour simplifier les notations.

Remarque 6 :

On résout le problème à l'itération i en utilisant les seuils de frottements $\mu \lambda_s$ obtenus à l'aide des pressions de contact λ_s de l'itération $i-1$. A convergence, le critère d'arrêt sur le seuil est défini par rapport aux variations relatives entre λ et λ_s .

4 Eléments de contact

On décrit dans cette section la discrétisation spatiale du problème, défini par les équations [éq 3-1] à [éq 3-6], dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Les domaines Ω^i sont supposés être approchés par des domaines Ω_h^i polygonaux et donc les surfaces de contact Γ_c par Γ_{ch} . La frontière Γ_{ch} est composée de N_c éléments :

$$\Gamma_{ch} = \bigcup_{j=1}^{N_c} e_j$$

On introduit les espaces approchés suivants :

- $(\mathbf{CA})_h^i$: espace approché de $(\mathbf{CA})^i$ de dimension m_i . On désigne par $N^{i,j}$ pour $j = 1, m_i$ les fonctions de base. Ainsi, le champ approché des déplacements, noté \mathbf{u}_h^i , s'écrit-il comme suit :

$$\mathbf{u}_h^i = \sum_{j=1}^{m_i} \mathbf{u}_j^i N^{i,j} \quad \text{éq 4-1}$$

où \mathbf{u}_j^i sont les composantes du vecteur des déplacements sur la base. Chaque \mathbf{u}_j^i a deux ou trois composantes suivant que le problème est 2D ou 3D dans la base cartésienne de référence $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. On notera par la suite \mathbf{n}_d^e le vecteur qui s'écrit : $\mathbf{n}_d^e = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_d, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_d, \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_d)^T$ qui n'est rien d'autre que le vecteur \mathbf{n}_d exprimé dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

- H_h : espace approché de H de dimension N_c . On note ψ^j les fonctions de base. Ainsi, la densité d'effort normal de contact approchée, notée λ_h se décompose sous la forme suivante :

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^{N_c} \lambda_j \psi^j \quad \text{éq 4-2}$$

les λ_j étant les composantes de λ_h sur la base.

- \mathbf{H}_h : espace approché de \mathbf{H} , de dimension N_m . On note φ^j les fonctions de base. Ainsi le semi-multiplicateur de frottement approché $\mathbf{\Lambda}_h$ s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda}_h = \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{\Lambda}_j \varphi^j \quad \text{éq 4-3}$$

où les $\mathbf{\Lambda}_j$ sont les composantes de $\mathbf{\Lambda}_h$ sur la base.

La discrétisation du problème, défini par les équations [éq 3-1], [éq 3-6], donne le système non linéaire suivant :

Trouver $\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2, \lambda_h$ et Λ_h tels que,

pour tous $\mathbf{w}_j^1, \mathbf{w}_k^2, \lambda_l^*$ et Λ_m^* avec $1 \leq j \leq m_1, 1 \leq k \leq m_2, 1 \leq l \leq N_c$ et $1 \leq m \leq N_m$:

$$G^1(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{w}_j^1 N^{1,j}) - \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mathbf{g}_{n_d}^h(\mathbf{w}_j^1 \cdot \mathbf{n}_d) N^{1,j}(\gamma) d\gamma - \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}^h) \cdot (\mathbf{w}_j^1)_{\tau_d} N^{1,j}(\gamma) d\gamma = 0 \quad \text{éq 4-4}$$

$$G^2(\mathbf{u}_h^2, \mathbf{w}_k^2 N^{2,k}) + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mathbf{g}_{n_d}^h(\mathbf{w}_k^2 \cdot \mathbf{n}_d) N^{2,k}(\mathcal{A}_d(\gamma)) d\gamma + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}^h) \cdot (\mathbf{w}_k^2)_{\tau_d} N^{2,k}(\mathcal{A}_d(\gamma)) d\gamma = 0 \quad \text{éq 4-5}$$

$$\int_{\Gamma_{c_h}} \frac{-1}{\rho_n} (\lambda_h - \chi_d \mathbf{g}_{n_d}^h) \lambda_l^* \psi^l d\gamma = 0 \quad \text{éq 4-6}$$

$$\int_{\Gamma_{c_h}} \frac{-\chi_d \mu \lambda_s}{\rho_\tau} (\Lambda_h - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_{\tau_d}^h)) \Lambda_m^* \varphi^m d\gamma + \int_{\Gamma_{c_h}} (1 - \chi_d) \Lambda_h \Lambda_m^* \varphi^m d\gamma = 0 \quad \text{éq 4-7}$$

où :

$$\mathbf{g}_{n_d}^h = \lambda_h - \rho_n [[\mathbf{x}_h]] \mathbf{n}_d \quad \text{éq 4-8}$$

$$\mathbf{g}_{\tau_d}^h = \Lambda_h + \rho_\tau \Delta [[\mathbf{u}_h]]_{\tau_d} \quad \text{éq 4-9}$$

Soit encore trouver $\mathbf{u}_{i1}^1, \mathbf{u}_{i2}^2, \lambda_p$ et Λ_q pour tous $1 \leq i1 \leq m_1, 1 \leq i2 \leq m_2, 1 \leq p \leq N_c$ et $1 \leq q \leq N_m$, tels que pour tous $\mathbf{w}_j^1, \mathbf{w}_k^2, \lambda_l^*$ et Λ_m^* avec $1 \leq j \leq m_1, 1 \leq k \leq m_2, 1 \leq l \leq N_c$ et $1 \leq m \leq N_m$:

$$G^1\left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{u}_{i1}^1 N^{1,i1}(\mathbf{x}), \mathbf{w}_j^1 N^{1,j}(\mathbf{x})\right) - \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \left(\sum_{p=1}^{N_c} \lambda_p \psi^p - \rho_n \left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{x}_{i1}^1 N^{1,i1}(\gamma) - \sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{x}_{i2}^2 N^{2,i2}(\mathcal{A}_d(\gamma)) \right) \cdot \mathbf{n}_d \right) (\mathbf{w}_j^1 \cdot \mathbf{n}_d) N^{1,j}(\gamma) d\gamma - \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_q \varphi^q + \rho_\tau \Delta \left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{u}_{i1}^1 N^{1,i1}(\gamma) - \sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{u}_{i2}^2 N^{2,i2}(\mathcal{A}_d(\gamma)) \right) \right)_{\tau_d} \cdot (\mathbf{w}_j^1)_{\tau_d} N^{1,j}(\gamma) d\gamma = 0 \quad \text{éq 4-4bis}$$

$$\begin{aligned}
 & G^2 \left(\sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{u}_{i2}^2 N^{2,i2}(\mathbf{x}), \mathbf{w}_k^2 N^{2,k}(\mathbf{x}) \right) \\
 & + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \left(\sum_{p=1}^{N_c} \lambda_p \psi^p - \rho_n \left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{x}_{i1}^1 N^{1,i1}(\gamma) - \sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{x}_{i2}^2 N^{2,i2}(\mathcal{A}_d(\gamma)) \right) \cdot \mathbf{n}_d \right) (\mathbf{w}_k^2 \cdot \mathbf{n}_d) N^{2,k}(\mathcal{A}_d(\gamma)) d\gamma \\
 & + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s P_{B(0,1)} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_q \varphi^q + \rho_\tau \Delta \left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{u}_{i1}^1 N^{1,i1}(\gamma) - \sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{u}_{i2}^2 N^{2,i2}(\mathcal{A}_d(\gamma)) \right) \right)_{\tau_d} \cdot (\mathbf{w}_k^2)_{\tau_d} N^{2,k}(\mathcal{A}_d(\gamma)) d\gamma = 0
 \end{aligned}$$

éq 4-5bis

$$\int_{\Gamma_{c_h}} \frac{-1}{\rho_n} \left((1 - \chi_d) \sum_{p=1}^{N_c} \lambda_p \psi^p + \chi_d \rho_n \left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{x}_{i1}^1 N^{1,i1}(\gamma) - \sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{x}_{i2}^1 N^{1,i2}(\mathcal{A}_d(\gamma)) \right) \cdot \mathbf{n}_d \right) \lambda_i^* \psi^l d\gamma = 0 \quad \text{éq 4-6bis}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_{c_h}} \frac{-\chi_d \mu \lambda_s}{\rho_\tau} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_q \varphi^q - P_{B(0,1)} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_q \varphi^q + \rho_\tau \Delta \left(\sum_{i1=1}^{m1} \mathbf{u}_{i1}^1 N^{1,i1}(\gamma) - \sum_{i2=1}^{m2} \mathbf{u}_{i2}^2 N^{1,i2}(\mathcal{A}_d(\gamma)) \right) \right)_{\tau_d} \right) \Lambda_m^* \varphi^m d\gamma \\
 & + \int_{\Gamma_{c_h}} (1 - \chi_d) \sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_q \varphi^q \cdot \Lambda_m^* \varphi^m d\gamma = 0
 \end{aligned}$$

éq 4-7bis

La quantité non-différentiable est la projection sur la boule unité, définie par :

$$P_{B(0,1)}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in B(0,1) \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 4-10}$$

La différentielle "généralisée" de cette application est la suivante :

$$\partial_x P_{B(0,1)}(x) \delta x = \begin{cases} \delta x & \text{si } x \in B(0,1) \\ \frac{1}{\|x\|} \left(I_d - \frac{x \cdot x^T}{\|x\|^2} \right) \delta x & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 4-11}$$

On l'écrit sous la forme générique suivante :

$$\partial_x P_{B(0,1)}(x) \delta x = [K(x)] \delta x \quad \text{éq 4-12}$$

avec

$$[K(x)] = \begin{cases} Id & \text{si } x \in B(0,1) \\ \frac{1}{\|x\|} \left(Id - \frac{x \cdot x^T}{\|x\|^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 4-13}$$

Remarque 7 :

On peut généraliser [éq 4-13] comme suit [bib15] [bib16] :

$$[K(x)] = \begin{cases} Id & \text{si } x \in B(0,1) \\ \frac{1}{\|x\|} \left(Id - \theta \frac{x \cdot x^T}{\|x\|^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{éq 4-14}$$

où $0 \leq \theta \leq 1$.

L'utilisation de l'algorithme du module tangent pour la résolution du problème non linéaire défini par les équations [éq 4-4] à [éq 4-9], donne lieu, à chaque itération $n+1$, à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} K^n + A_u^n + B_u^n & A^{nT} & B^{nT} \\ A^n & C^n & 0 \\ B^n & 0 & F^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta U_h^{n+1} \\ \delta \lambda_h^{n+1} \\ \delta \Lambda_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^n \\ L_2^n \\ L_3^n \end{pmatrix} \quad \text{éq 4-15}$$

où K^n désigne la matrice de rigidité tangente classique des deux solides à l'état n . Les quantités δU_h^{n+1} , $\delta \lambda_h^{n+1}$ et $\delta \Lambda_h^{n+1}$ correspondent aux incréments des vecteurs composantes des champs des déplacements approchés, du champ de densité d'effort normal approché et du champ semi-multiplicateur de frottement approché à l'itération $n+1$. Par ailleurs, $[A^n]$, $[A_u^n]$ et $[C^n]$ désignent les matrices assemblées de contact et $[B^n]$, $[B_u^n]$ et $[F^n]$ les matrices assemblées de frottement. Les seconds membres du système [éq 4-15], notés L_1^n , L_2^n et L_3^n sont calculés de manière classique en tenant compte de la contribution des termes de contact et de frottement. Leur expression est donnée dans ce paragraphe après celle des matrices tangentes.

4.3 Matrices tangentes de contact

Les contributions élémentaires aux matrices tangentes de contact unilatéral sont données ci-dessous, où, pour la clarté, les fonctions de base des espaces $(\mathbf{CA})_h^1$ et $(\mathbf{CA})_h^2$ ont été renumérotées de 1 à $m_1 + m_2$ et notées \tilde{N}^i avec pour convention :

$$\begin{aligned} \text{Pour } 1 \leq i \leq m_1 \quad & \tilde{N}^i(\gamma) = N^{1,i}(\gamma) \\ \text{Pour } m_1 \leq i \leq m_1 + m_2 \quad & \tilde{N}^i(\gamma) = -N^{2,i-m_1}(\mathcal{A}_d^e(\gamma)) \end{aligned}$$

- Pour $[A]$ si le problème est 3D (la version 2D s'en déduit immédiatement en ne tenant pas compte de la composante sur \mathbf{e}_3) on a alors pour $i = 1, N_c, 1 \leq j \leq m_1 + m_2$

$$[A^e]_{\lambda_i^*, \partial v_j} = - \int_e \chi_d \psi^i(\gamma) \tilde{N}^j(\gamma) \mathbf{n}_d^e d\gamma \quad \text{éq 4.3-1}$$

où l'exposant e , rajouté à l'application d'appariement \mathcal{A}_d , renvoie au fait qu'en discret, on travaille avec plusieurs cartes et que l'appariement doit en tenir compte.

- Pour $[A_u]$ (de type pénalisation) avec $1 < i, j \leq m_1 + m_2$, on a :

$$[A_u^e]_{w_i, \partial U_j} = \int_e \rho_n \chi_d \tilde{N}^i(\gamma) \tilde{N}^j(\gamma) \mathbf{n}_d^e \mathbf{n}_d^{eT} d\gamma \quad \text{éq 4.3-2}$$

- Pour $[C]$ avec $1 \leq i, j \leq N_c$:

$$[C^e]_{\lambda_i^*, \lambda_j} = \int_e \frac{-(1 - \chi_d)}{\rho_n} \psi^i(\gamma) \psi^j(\gamma) d\gamma \quad \text{éq 4.3-3}$$

4.4 Matrices tangentes de frottement

Avant de détailler l'expression des matrices de frottement, on désigne par \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 les deux vecteurs covariants du plan tangent (en un point) et par $(*)_\tau$ la partie tangentielle du vecteur $(*)$.

On désigne par $[P]$ l'opérateur de projection sur le plan défini par la normale \mathbf{n} :

$$[P] = [\mathbf{Id} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]$$

auquel on associe la matrice \mathbf{P} dans la base cartésienne de référence définie par :

$$\mathbf{P} = [P_1 P_2 P_3] = \begin{bmatrix} 1 - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & 1 - n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & 1 - n_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{éq 4.4-1}$$

où (n_1, n_2, n_3) sont les composantes du vecteur normal \mathbf{n} .

En notant $[\mathcal{K}^n]$ la quantité suivante (cf. [éq 4-13]) :

$$[\mathcal{K}^n] = [\mathbf{K}(\mathbf{g}_{\tau d}^{hn})]$$

avec

$$\mathbf{g}_{\tau d}^{hn} = \Lambda_h^n + \rho_\tau \llbracket \Delta \mathbf{u}_h^n \rrbracket_{\tau d}$$

En notant :

$$\begin{cases} \Phi^i = \varphi^i(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = (\Phi_1^i & \Phi_2^i) & \text{pour } 1 \leq i \leq N_m \\ \Phi_\alpha^i = \varphi^i \mathbf{t}_\alpha & \text{pour } 1 \leq i \leq N_m \end{cases} \quad \text{éq 4.4-2}$$

On a ainsi :

$$\sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_q \varphi^q = \sum_{q=1}^{N_m} \Lambda_{1q} \varphi^q \mathbf{t}_1 + \Lambda_{2q} \varphi^q \mathbf{t}_2 = \sum_{q=1}^{N_m} \Phi^q \begin{pmatrix} \Lambda_{1q} \\ \Lambda_{2q} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{N_m} \Phi^q \bar{\Lambda}_q$$

qui permet d'avoir les valeurs des semi-multiplicateurs dans la base cartésienne locale associée à la surface de contact.

En utilisant les notations établies précédemment, on déduit les contributions élémentaires suivantes aux matrices tangentes de frottement :

- Pour $[B^n]$ nous avons pour $1 < i \leq N_m$ et pour $1 < j \leq m_1 + m_2$:

$$[B^{ne}]_{\bar{\Lambda}_i, \delta U_j} = - \int_e \chi_d(\gamma) \mu \lambda_s \Phi^{iT}(\gamma) \tilde{N}^j(\gamma) [\mathcal{K}^n] \mathbf{P} d\gamma \quad \text{éq 4.4-3}$$

- Pour la contribution élémentaire dans la matrice tangente de frottement $[B_u^n]$ nous avons pour $1 < i, j \leq m_1 + m_2$:

$$[B_u^{ne}]_{\mathbf{w}_i, \delta U_j} = - \int_e \chi_d(\gamma) \mu \lambda_s \rho_\tau \tilde{N}^i(\gamma) \tilde{N}^j(\gamma) \mathbf{P}^T [\mathcal{K}^n] \mathbf{P} d\gamma \quad \text{éq 4.4-4}$$

- Pour $[F^n]$ et ce quels que soient $1 < i, j \leq N_m$ nous avons :

$$[F_u^{ne}]_{\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_j} = \int_e - \frac{\chi_d(\gamma) \mu \lambda_s}{\rho_\tau} \Phi^{iT}(\gamma) [\mathbf{Id} - \mathcal{K}^n] \Phi^j(\gamma) d\gamma + \int_e (1 - \chi_d(\gamma)) \varphi^i(\gamma) \varphi^j(\gamma) \mathbf{M} d\gamma \quad \text{éq 4.4-5}$$

\mathbf{M} dont les composantes sont $[\mathbf{M}]_{\alpha\beta} = t_\alpha t_\beta$ est la métrique de la base covariante courante.

4.5 Expression des seconds membres de contact-frottement

On explicite ici les seconds membres du système [éq 4-15], notés L_1^n, L_2^n et L_3^n en ne tenant compte que de la contribution des termes de contact et de frottement. On a ainsi :

- Pour L_1^n :

$$L_{\mathbf{w}_i}^n = \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \left(\sum_{p=1}^{N_c} \lambda_p^n \psi^p(\gamma) - \rho_n \sum_{j=1}^{m_1+m_2} (\mathbf{x}_j^n \cdot \mathbf{n}_d) \tilde{N}^j(\gamma) \right) \mathbf{n}_d^e \tilde{N}^i(\gamma) d\gamma + \int_{\Gamma_{c_h}} \chi_d \mu \lambda_s \mathbf{P}^T P_{B(0,1)} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Phi_q(\gamma) \bar{\Lambda}_q^n + \rho_\tau \mathbf{P} \sum_{j=1}^{m_1+m_2} \Delta \mathbf{u}_j^n \tilde{N}^j(\gamma) \right) \tilde{N}^i(\gamma) d\gamma \quad \text{éq 4.5-1}$$

- Pour L_2^n :

$$L_{\lambda_i^n}^n = \int_{\Gamma_{c_h}} \frac{1}{\rho_n} \left((1 - \chi_d) \sum_{p=1}^{N_c} \lambda_p^n \psi^p(\gamma) + \chi_d \rho_n \left(\sum_{j=1}^{m_1+m_2} \mathbf{x}_j^n \cdot \mathbf{n}_d \tilde{N}^j(\gamma) \right) \right) \psi^i(\gamma) d\gamma \quad \text{éq 4.5-2}$$

- Pour L_3^n :

$$L_{\Lambda_i}^n = \int_{\Gamma_{ch}} \frac{\chi_d \mu \lambda_s}{\rho_\tau} \Phi^{iT} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Phi^q \bar{\Lambda}_q^n - P_{B(0,1)} \left(\sum_{q=1}^{N_m} \Phi^q \bar{\Lambda}_q^n + \rho_\tau \mathbf{P} \sum_{j=1}^{m1+m2} \Delta \mathbf{u}_j^n \tilde{N}^j(\lambda) \right) \right) d\gamma$$

$$- \int_{\Gamma_{ch}} (1 - \chi_d) \Phi^{iT} \sum_{q=1}^{N_m} \Phi^q \bar{\Lambda}_q^n d\gamma$$

éq 4.5-3

Dans ces expressions, on notera que les quantités indicées n correspondent aux valeurs des champs courants discrets $\mathbf{u}_{i1}^1, \mathbf{u}_{i2}^2, \lambda_p$ et $\bar{\Lambda}_q$ à l'itération n du pas de temps auquel s'effectue le calcul. Seul $\Delta \mathbf{u}_j^n$ a une signification un peu particulière, puisqu'il correspond à l'incrément de déplacement depuis le début du pas de temps considéré, c'est-à-dire à l'incrément de déplacement entre l'itération 1 et l'itération n .

4.6 Calcul des matrices et des seconds membres

Le calcul effectif des solutions des systèmes [éq 4-4] à [éq 4-7] nécessite :

- la définition des fonctions de base \tilde{N}^i, ψ^i et φ^i .
- la formule d'intégration numérique utilisée pour les termes de contact et de frottement.

Le choix de fonctions de base définissant des espaces d'approximation et le choix d'une formule d'intégration numérique (jointes à la formulation globale du problème de contact) définissent un **élément de contact**. Toutefois, ce choix n'est pas évident a priori. En effet, la formulation étant de type mixte, il convient de faire attention à des considérations de compatibilité entre les éléments de la surface de contact cible ou maître et ceux de la surface de contact contactante ou esclave. Dans *Code_Aster* on a fait le choix de prendre les mêmes fonctions de forme pour le contact que pour les éléments finis sur lesquels les surfaces de contact s'appuient. Les discrétisations des champs de densités d'efforts sont opérées dans les espaces discrets correspondant aux traces des champs de déplacements du solide dit esclave sur la surface de contact. Ce choix est, dans les cadres modèles au moins, étayé mathématiquement [bib17] [bib18] [bib19].

Avec la configuration des éléments des surfaces de contact proposées à la [Figure 4.6-a] le choix de la surface esclave et celui de la surface maître repose sur les considérations de compatibilité énoncées précédemment. En effet, si l'on fait comme choix de la surface esclave, celle qui est maillée le plus finement alors le produit des fonctions de forme $\varphi^1 \cdot \varphi^2$ intervenant dans les intégrations des rigidités et des seconds membres reste polynomial pour cet élément. A contrario, si l'on choisit comme surface esclave la surface la moins maillée le produit des fonctions de forme $\varphi^1 \cdot \varphi^2$ perd son caractère polynomial – il existe un compact de mesure non nulle sur lequel le produit $\varphi^1 \cdot \varphi^2$ vaut zéro – ce qui rend illicite les intégrations des contributions à la rigidité et au second membre du contact. La convergence de l'algorithme n'est alors plus assurée.

D'un point de vue pratique, on conseille à l'utilisateur dont le calcul ne convergerait pas d'invertir le rôle des surfaces maître et esclave, de vérifier que la surface esclave qu'il choisit est discrétisée au moins autant que la surface maître et d'utiliser le même type d'élément de part et d'autre de la surface de contact.

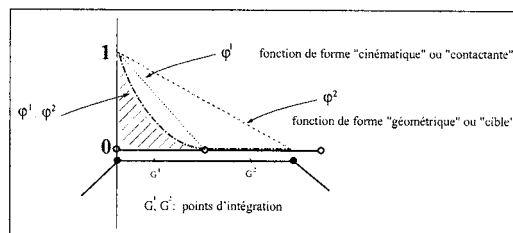


Figure 4.6-a : Problème d'intégration numérique sur les surfaces de contact

Par ailleurs, même en utilisant des fonctions de base linéaires, le calcul exact des termes des matrices et des seconds membres issus du contact est délicat pratiquement. Les quantités que nous aurions à intégrer sont, de par l'appariement, la fonction caractéristique et la projection, non régulières (cf. [Figure 4.6-a]). On peut toutefois en donner une "approximation" par des méthodes d'intégration numérique. On a implémenté différentes techniques d'intégration :

- intégration aux sommets,
- intégration aux points de Gauss,
- intégration de type simpson.

On conseille à l'utilisateur non satisfait de ces résultats de passer de l'une à l'autre de ces méthodes dans l'ordre donné ci-dessus, l'intégration de type simpson étant la plus riche mais aussi la plus coûteuse.

5 Implémentation

Cette formulation est utilisable avec la méthode 'METHODE' : 'CONTINUE' sous le mot clé 'AFFE_CHAR_MECA'. Les paramètres de la méthode ρ_n et ρ_τ sont précisés par les mots clés 'COEF_REGU_CONT' et 'COEF_REGU_FROT', respectivement.

Derrière le mot clé 'INTEGRATION' on peut utiliser soit le mot 'GAUSS' soit le mot 'NOEUD'. Les modélisations axisymétriques sont prises en compte par un autre mot clé 'MODEL_AXIS'. Ce dernier est suivi du mot 'OUI' ou du mot 'NON'.

Remarque 8 :

Les choix 'GAUSS' ou 'NOEUD' doivent être toujours précisés même avec une modélisation axisymétrique puisque le mot clé 'MODEL_AXIS' ne fait que préciser la modélisation. Le mot clé 'NOEUD' est recommandé pour des surfaces de contact gauches (non-planes).

Notons que dans la formulation implémentée, le multiplicateur de contact λ et le semi-multiplicateur de frottement Λ sont des champs définis sur la surface esclave. Pour cela, une modélisation 'SURF_DVP_2D' dans le cas 2D ou 'SURF_DVP_3D' dans le cas 3D, doit être ajoutée dans la version 6 de Code_Aster. On notera qu'en version 7, il n'est plus nécessaire de faire ce rajout et que les surfaces de contact n'ont plus besoin d'être précisées au niveau de l'affectation du modèle.

6 Bibliographie

- [1] BEN DHIA H., VAUTIER I. : "Une formulation pour traiter le contact frottement en 3d dans le Code_Aster", Rapport EDF HI-75/99/007/A, 1999
- [2] BEN DHIA H., VAUTIER I., ZARROUG M. : "Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret", Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 9, pp. 243-261, 2000
- [3] ALART P., CURNIER A. : "A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 9, pp. 353-375, 1991
- [4] HALLQUIST J.O. : "Nike2d : A vectorized implicit, f.e code...", Report UCID-19677, vol. University of California, 1986
- [5] LAURSEN T.A., SIMO J.C. : "A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibodies, large deformation frictional contact problems, " Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 36, pp. 3451-3485, 1993
- [6] CHRISTENSEN P.W. KLARBRING A., PANG J.S., STROMBERG N. : "Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems, " Int. J. Numer. Meth. Engng. vol. 42, pp. 145-173, 1998
- [7] BEN DHIA H., ZARROUG M. : "Hybrid frictional contact particles-in elements," Revue Européenne des Eléments Finis, n° 9, pp. 417-430, 2002
- [8] BEN DHIA H., ZARROUG M. : "Mixed frictional contact elements and local "volumic" contact interfaces", ECCM'01 CD-ROM, Cracow, Poland, June 26-29, 2001
- [9] BEN DHIA H., DURVILLE D. : "Calembour : An implicit method based on enriched kinematical thin plate model for sheet metal forming simulation", J. of Materials Processing Technology, vol. 50, pp. 70-80, 1995
- [10] BEN DHIA H., ZARROUG M. : "Eléments hybrides de contact frottant", 5ème Colloque national en calcul des structures, 15-18 Mai, vol. I, pp. 253-260, 2001
- [11] HALLQUIST J.O. GOUDREAU G.L., BENSON D.J. : "Sliding interfaces with contact-impact in large-scale langrangian computations", Comput. Methods. Appl. Mech. Engng., vol 51, pp. 107-137, 1985
- [12] BEN DHIA H. : "Modelling and numerical approach of contact and dry friction in simulation of sheet metal forming", in WCCM2, pp. 779-782, 1990
- [13] DUMONT G. : "Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement", Revue européenne des éléments finis, vol. 4, n° 1, pp. 55-73, 1995
- [14] VAUTIER I. : "Contact unilatéral par des conditions cinématiques", Rapport EDF, HI-75/97/033/A, 1997
- [15] MASSIN P. : "Algorithmes d'optimisation pour la modélisation du contact avec frottement en 2d et 3d", [R5.03.51], HI-75/01/001/A, 2001
- [16] BEN DHIA H., MASSIN P. : "2D and 3D algorithms for frictional problems with small diisplacements", ECCOMAS 2000, p. 347, Barcelone, 11-14 Septembre 2000.
- [17] COOREVITS P., HILD P., LHALOUANI K., SASSI T. : "Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies", Mathematics of Computations, 71, pp.1-25, 2002.
- [18] BATHE K.J., BREZZI F. : "Stability of finite element mixed interpolation for contact problems", Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 12, pp.159-166, 2001.
- [19] BEN BLEGACEM F., HILD P., LABORDE P. : "Extension of the Mortar Finite Element to a Variational Inequality Modeling Unilateral Contact", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 9, pp.287-303, 2002.