

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.14

Intégration explicite des relations de comportement non linéaire

Résumé

Ce document décrit une méthode d'intégration explicite pour la résolution de problèmes avec comportement non linéaire utilisée en élastoviscoplasticité (dans l'opérateur `STAT_NON_LINE` [R5.03.01]).

La méthode numérique présentée est celle de Runge_Kutta d'ordre 2 à pas adaptatif.

Table des matières

1 Introduction	3
2 Notations générales	3
3 Intégration explicite d'une relation de comportement incrémentale	4
3.1 But de l'intégration	4
3.2 Démarche générale	4
3.3 Utilisation d'une méthode explicite	4
3.4 Contrôle du pas de temps	5
3.5 Influence sur l'étape globale	5
3.6 Implantation d'un nouveau modèle de comportement par la méthode explicite	6
4 Bibliographie	6

1 Introduction

Dans l'opérateur `STAT_NON_LINE` [U4.32.01] est introduit une méthode d'intégration explicite de type Runge_Kutta d'ordre 2 (option '`RUNGE_KUTTA_2`' de l'opérande `RESO_INTE` du mot-clé facteur `CONVERGENCE`) pour les problèmes incrémentaux de comportement non linéaire (opérande `RELATION` du mot clé facteur `COMP_INCR`).

Pour plus de détails consulter le document [U4.32.01] du manuel utilisateur. Les relations concernées actuellement sont :

<code>VISCOCHAB</code> :	Comportement élasto-viscoplastique de Chaboche,
<code>V_ENDO_CHAB</code> :	Comportement viscoplastique avec endommagement de Chaboche
<code>POLY_CFC</code> :	Comportement élasto-viscoplastique polycristallin pour les matériaux de structure cubique à faces centrées.

La relation `VISCOCHAB` peut également être intégrée par la méthode implicite (cf. [R5.03.11] tandis que les 2 autres relations mentionnés ne sont accessibles que par la méthode explicite présentée ci-après.

Ce type d'intégration permet d'implanter très facilement un nouveau modèle de comportement [bib2]. On décrit le calcul du champ de contraintes à partir d'un incrément de déformation donné en suivant l'évolution des variables internes.

2 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$.

Les quantités évaluées à l'instant $t^- + \Delta t$ ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par Δ . On a ainsi :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t^- + \Delta t) = \mathbf{Q}(t^-) + \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- + \Delta \mathbf{Q}.$$

σ	tenseur des contraintes.
$\Delta \varepsilon$	incrément de déformation.
\mathbf{A}	tenseur d'élasticité.
Y	variables internes
μ, E, ν	coefficients de l'élasticité isotrope.
T	température.
ε_{ij}	déformation totale.
ε_{ij}^p	déformation plastique.
ε_{ij}^{th}	déformation thermique.

3 Intégration explicite d'une relation de comportement incrémentale

3.1 But de l'intégration

Dans un calcul de structures, l'écriture des équations d'équilibre est traduite sous forme intégrale et nécessite le calcul des efforts intérieurs. Il est donc nécessaire de calculer le champ de contrainte en chaque point d'intégration ; dans le cas de l'élasticité linéaire, ce calcul est élémentaire mais, dans les situations où la représentation du comportement du matériau nécessite l'utilisation d'un modèle non linéaire, celui-ci est plus complexe et il faut, de plus, suivre l'évolution des variables internes ([cf. R5.03.01]).

Le comportement non linéaire du matériau modifie également la stratégie du calcul puisque l'on adopte, dans la majorité des cas, une démarche incrémentale en temps. Celle-ci consiste à discrétiser l'intervalle d'étude en incréments pour mieux suivre la non linéarité de la réponse de la structure.

3.2 Démarche générale

On se place à un instant t^- où la structure est en équilibre et où l'on connaît, à chaque point de Gauss, les valeurs des variables internes Y^- . Pour les modèles élasto(visco)plastiques, ces variables internes permettent de calculer la contrainte σ_{ij} avec la loi de Hooke (la déformation plastique ϵ_{ij}^p est souvent présente parmi les variables internes) :

$$\sigma_{ij} = \mathbf{A}(T) [\epsilon_{ij}(U) - \epsilon_{ij}^p - \epsilon_{ij}^{th}(T)]$$

Pour passer à l'incrément suivant (instant $t^- + \Delta t$), il faut estimer la contrainte $\sigma_{ij}(t^- + \Delta t)$, associée par la relation de comportement, à l'incrément de déplacement ΔU^k proposé par l'itération k de l'étape globale. Il suffit donc de suivre l'évolution des variables internes Y en résolvant le système d'équations différentielles : $dY/dt = F(Y, \epsilon^k, T)$ avec les conditions initiales $Y(t^-) = Y^-$. Classiquement, on adopte une interpolation linéaire du déplacement et de la température (connue pour les analyses découplées) au cours l'intervalle de temps $[t^-, t = t^- + \Delta t]$, ce qui conduit à :

$$\forall \tau \in [t^-, t] \quad T(\tau) = T^- + \frac{\tau - t^-}{\Delta t} [T - T^-]$$

$$\epsilon_{ij}^k(\tau) = \epsilon_{ij}(U^-) + \frac{\tau - t^-}{\Delta t} [\epsilon_{ij}^k(U^- + \Delta U^k) - \epsilon_{ij}(U^-)]$$

3.3 Utilisation d'une méthode explicite

L'une des techniques les plus simples à mettre en œuvre pour résoudre ces équations différentielles est l'utilisation de méthodes explicites. Pour qu'elles restent efficaces numériquement, il est indispensable de leur associer un contrôle de pas automatique pour conserver un bon compromis coût précision. Les méthodes de Runge et Kutta explicites et emboîtées [bib1], [bib2] sont sans doute les schémas d'intégration les plus simples respectant ces critères. Leur principe est d'associer deux schémas d'intégration d'ordre différent pour contrôler le pas de temps en fonction d'une précision requise. En fonction de l'ordre d'intégration choisi, plusieurs algorithmes sont disponibles et le schéma le plus simple est une méthode d'ordre deux. Le calcul des variables internes à l'instant $t + h$ n'est

fonction que des valeurs de leurs dérivées $\frac{dY}{dt} = F(Y, t)$ selon le schéma suivant :

$$Y_{t+h} = Y^{(2)} \text{ si le critère de précision est satisfait (cf. [§3.4])}$$

$$Y^{(2)} = Y + \frac{h}{2} [F(Y, t) + F(Y^{(1)}, t + h)] \text{ avec } Y^{(1)} = Y + h F(Y, t)$$

La différence entre $Y^{(2)}$ (schéma d'ordre 2) et $Y^{(1)}$ (schéma d'ordre 1, Euler) fournit une estimation de l'erreur d'intégration et permet de contrôler la taille du pas de temps h qui est initialisé à Δt_i pour la première tentative. Ainsi, la méthode reste efficace si le comportement reste élastique au cours de l'incrément et on dispose naturellement de sous pas locaux indépendants de l'incrément global pour intégrer, avec une meilleure précision, l'évolution des variables internes aux points de Gauss où la non linéarité du comportement est la plus significative.

3.4 Contrôle du pas de temps

La stratégie du contrôle du pas est définie à partir d'une norme de l'écart entre les deux méthodes d'intégration : $\|Y^{(2)} - Y^{(1)}\|$ et de la précision requise par l'utilisateur η (mot-clé : RESI_INTE_RELA).

Le critère retenu est le suivant, où l'on note $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$:

$$\delta Y(t) = \sup_{j=1,N} \left\{ \frac{|y_j^{(2)} - y_j^{(1)}|}{\max[\varepsilon, |y_j(t)|]} \right\} < \eta$$

Le paramètre ε est fixé à 0,001. La précision d'intégration souhaitée η doit être cohérente avec le niveau de précision requis pour l'étape globale. Pour les modèles élastoviscoplastiques, une valeur classique de ce paramètre est de 0,001. Pour les matériaux avec une viscosité faible et pour les modèles élastoplastiques, la valeur de ce paramètre est un peu plus faible (0,0001 ou 0,00001).

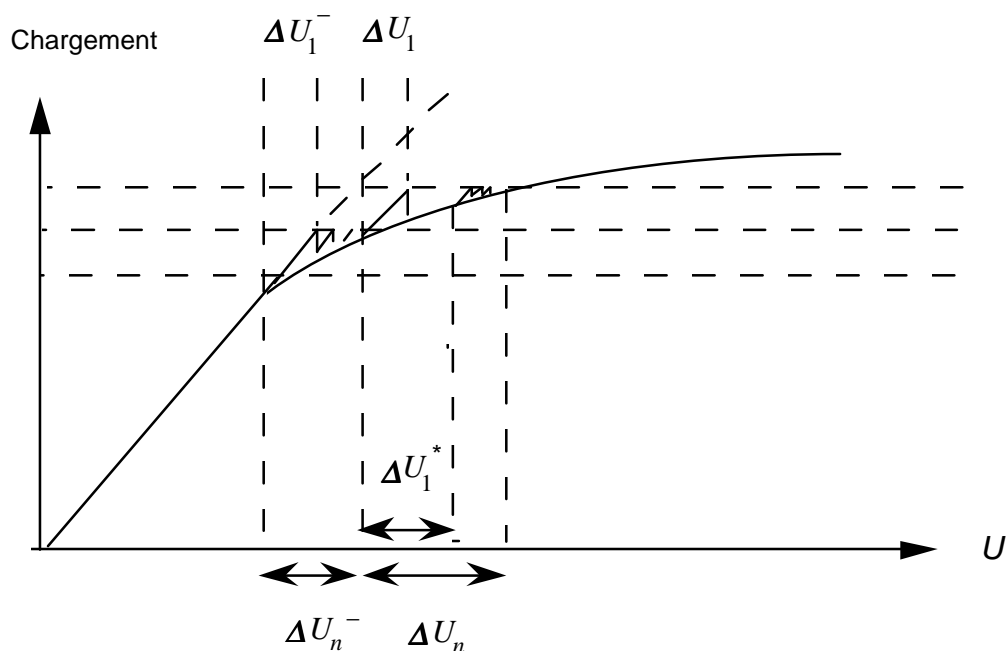
Si le critère n'est pas vérifié, le pas de temps est redécoupé selon une méthode heuristique. Lorsque le pas de temps devient trop faible ($h < 1.10^{-20}$), le calcul est arrêté avec un message d'erreur.

3.5 Influence sur l'étape globale

Dans sa version actuelle, la méthode ne fournit pas de matrice tangente ; son évaluation serait possible par une technique de perturbations. On utilise pour l'instant la matrice élastique pour l'équilibre global, ce qui implique un nombre d'incréments plus important pour que la résolution globale soit facilitée.

Pour pallier à ces inconvénients, on peut suggérer la possibilité de développer au niveau global un schéma de type BFGS [bib3]. Une autre solution plus simple de développement consiste, au lieu de considérer l'incrément de déplacement pour la première itération à l'instant courant (proposé avec la matrice élastique), à initialiser l'incrément de déplacement recherché pour la première itération ΔU_1 à partir de la valeur ΔU_n^- , solution à l'incrément précédent (cf. figure page suivante).

Le mot-clé PREDICTION : 'EXTRAPOL' (sous NEWTON) permet d'initialiser avec l'incrément convergé du pas précédent (pondéré par le rapport des pas de temps). Cette estimation est projetée sur le champ des déplacements cinématiquement admissibles pour que la solution finale vérifie bien les conditions aux limites de Dirichlet.



3.6 Implantation d'un nouveau modèle de comportement par la méthode explicite

Pour implanter un modèle de comportement, il suffit de modifier les 2 routines d'aiguillage NMCOMP (routine général de l'environnement PLASTI) et RDIF01 (routine propre à l'intégration explicite) et d'écrire 2 routines supplémentaires :

- XXXMAT : récupération des données matériau,
- RKDXXX : écriture des équations constitutives du modèle (expression des dérivés temporelles des variables internes ; ceci nécessite le calcul préalable du multiplicateur plastique à l'aide de l'équation de consistance pour les modèles élasto-plastiques).

La mise à jour des catalogues matériau concerne uniquement DEFI_MATERIAU et STAT_NON_LINE.

4 Bibliographie

- [1] CROUZEIX M., MIGNOT A.L. : "Analyse numérique des équations différentielles", Masson, 1989.
- [2] CAILLETAUD G., PILVIN P. : "Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis", Revue européenne des éléments finis, vol.3, n°4, pp. 515-541, 1994.
- [3] MATTHIES H., STRANG G., Int. J. Numer. Meth. Eng., vol.4, pp. 1613-1626, 1979.