Organisme(s) : EDF/MTI/MMN

Manuel de Référence
Fascicule R4.03 : Analyse de sensibilité
Document : R4.03.01

Sensibilité des champs thermo-mécaniques à une variation du domaine

Résumé

Pour connaître l'influence d'une variation du domaine sur les champs thermo-mécaniques, l'approche classique consiste à faire plusieurs calculs et à évaluer, par différence, la sensibilité. La méthode décrite dans ce document permet d'obtenir en un seul calcul avec le *Code_Aster* la valeur des champs de températures, déplacements et contraintes et leurs dérivées par rapport à la variation du domaine.

La méthode est d'abord exposée dans sa généralité : thermique et mécanique statique linéaire, 2D et 3D, variation d'un bord quelconque. Ensuite sont détaillés les différents calculs dans le cas 2D et pour certains chargements.

Table des matières

1 Introduction

Les développements présentés dans ce document visent à permettre des études probabilistes de rupture brutale par un couplage mécano-fiabiliste. La géométrie du domaine est traitée comme un champ aléatoire. L'évaluation de la probabilité d'amorçage de la rupture est assurée par couplage avec le logiciel PROBAN, avec les méthodes FORM/SORM. Cette évolution suppose de connaître les variations des contraintes et des températures par rapport la géométrie. Ainsi, une première application industrielle cherche à déterminer la probabilité de rupture de la cuve de réacteur nucléaire, dont l'épaisseur du revêtement intérieur est considérée comme une variable aléatoire. Ces contraintes et températures étant calculées par le *Code_Aster*, la technique classique consiste à effectuer des séries de calcul pour plusieurs valeurs de l'épaisseur du revêtement. Ensuite par différence, on en déduit l'influence de l'épaisseur sur ces champs.

Cette technique a des limites ; en particulier :

- précision : comment choisir les valeurs du paramètre d'épaisseur pour que la différence entre deux calculs représente bien son influence ?
- performance : pour une valeur du paramètre, au moins deux calculs avec le *Code_Aster* sont nécessaires pour calculer l'influence.

La méthode développée dans ce travail permet d'obtenir en un seul calcul avec le *Code_Aster* la valeur des contraintes et températures et leurs dérivées par rapport à l'épaisseur du revêtement.

La technique retenue est basée sur une dérivation directe des équations exprimées sous forme variationnelle. Elle reprend la méthode comme sous le nom de "méthode θ" déjà introduite pour le calcul du taux de restitution d'énergie dans le *Code_Aster*. De ce fait un certain nombre de résultats de base ne sont pas redémontrés mais font seulement l'objet de références en annexe.

La première partie concerne la dérivation de la température, en régimes stationnaire et transitoire, en thermique linéaire. Les principaux chargements sont étudiés : échange convectif, température imposée, source interne.

Ensuite, nous exposons la dérivation du champ de déplacement en mécanique statique linéaire. Les chargements pris en compte se limitent à des déplacements imposés et des pressions réparties. La dérivation du champ de contraintes se résume ensuite à un post-traitement de la dérivée du champ de déplacement.

La méthode est présentée dans sa généralité : 2D ou 3D, influence d'une variation quelconque d'un bord du domaine. Dans la pratique, la fonctionnalité n'est disponible actuellement qu'en 2D, pour les chargements mentionnés ci-avant.

2 Détermination du gradient de la température

2.1 Le problème

Une première étape du calcul des gradients du taux de restitution de l'énergie G est le calcul du gradient de la température par rapport à un paramètre réel. Ce paramètre pilote la variation du domaine de calcul : à partir du domaine de référence Ω, on étudie un domaine transformé Ω^{η}, où η est le paramètre symbolisant la transformation. Les gradients recherchés sont ceux qui sont exprimés à l'endroit de la résolution de référence, c'est-à-dire pour $\eta = 0$. On se reportera à l'annexe 1 pour les notations employées.

Nous partons de l'équation variationnelle régissant la thermique du problème sur le domaine transformé Ω^{η}. En suivant [R5.02.01], nous définissons les frontières par :

Γ_1^{η} : température imposée
Γ_2^{η} : flux normal imposé
Γ_3^{η} : échange convectif

ce qui donne l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega^{\eta}} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} T^* + \int_{\Omega^{\eta}} \lambda \ \nabla T . \nabla T^* + \int_{\Gamma_3^{\eta}} h \ T T^* = \int_{\Omega^{\eta}} s \ T^* + \int_{\Gamma_2^{\eta}} q \ T^* + \int_{\Gamma_3^{\eta}} h \ T_{ext} \ T^*$$

avec :

T	Température
ρC_p	chaleur volumique à pression constante
λ	conductivité thermique
h	coefficient d'échange convectif
s	source volumique thermique
q	flux de chaleur normal entrant imposé sur le bord Γ_2^{η}
T^*	fonction de test dans $H_1\left(\Omega^{\eta}\right)$, nulle sur Γ_1^{η}

Remarque :

Nous présentons ici uniquement le problème avec des conditions aux limites de température imposée, de flux normal imposé et d'échange convectif. La prise en compte des conditions d'échange entre paroi ou de rayonnement se fera ultérieurement.

2.2 Dérivation de l'équation variationnelle

Nous allons dériver successivement chacune des intégrales formant l'équation. A chaque fois, nous utiliserons la formule de Reynolds, après avoir défini le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ à partir de $\frac{\partial \mathrm{F}^{\eta}}{\partial \eta}$ pour la transformation F^{η} (cf. Annexe 2). $\boldsymbol{\theta}$ représente la direction de variation du domaine.

Nous choisissons des fonctions de test T^* qui sont indépendantes du paramètre η. Par ailleurs, on est ici dans un cas où les dérivations Lagrangienne et temporelle commutent (cf. Annexe 3).

Dans toutes les formules présentées, nous notons avec un point la dérivée lagrangienne de la grandeur : $\dot{T}$ est la dérivée lagrangienne de T.

2.2.1 Intégrale de la variation temporelle

$$I_1^\eta = \int_{\Omega^\eta} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} T^*$$

$$\Rightarrow \frac{dI_1^\eta}{d\eta} = \int_\Omega \left[\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} T^*\right]^{\bullet} + \left[\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} T^*\right] div\ \boldsymbol{\theta}$$

Nous supposons que la chaleur volumique ρC_p est indépendante du paramètre η c'est-à-dire purement lagrangienne (attachée au point matériel).

En utilisant la proposition 2 de l'annexe 2, $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nabla \varphi.\boldsymbol{\theta}$, nous avons ici $\dot{\varphi} = \nabla \varphi.\boldsymbol{\theta}$. D'où l'expression :

$$\begin{aligned} \left[\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}\right]^{\bullet} &= \left[\rho C_p\right]^{\bullet} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]^{\bullet} \\ &= \nabla\left(\rho C_p\right).\boldsymbol{\theta} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial \dot{T}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{dI_1^\eta}{d\eta} = \int_\Omega \rho C_p \frac{\partial \dot{T}}{\partial t} T^* + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} div\boldsymbol{\theta}\ T^* + \nabla\left(\rho C_p\right).\boldsymbol{\theta} \frac{\partial T}{\partial t} T^*$$

2.2.2 Intégrale de la conductivité thermique

$$I_2^\eta = \int_{\Omega^\eta} \lambda\ \nabla T.\nabla T^*$$

$$\Rightarrow \frac{dI_2^\eta}{d\eta} = \int_\Omega \left[\lambda\ \nabla T.\nabla T^*\right]^{\bullet} + \left[\lambda\ \nabla T.\nabla T^*\right] div\boldsymbol{\theta}$$

Nous supposons que la conductivité thermique est également indépendante du paramètre η. Ainsi, nous avons :

$$\left[\lambda\ \nabla T.\nabla T^*\right]^{\bullet} = \dot{\lambda}\ \nabla T.\nabla T^* + \lambda \left(\nabla T\right)^{\bullet}.\nabla T^* + \lambda\ \nabla T.\left(\nabla T^*\right)^{\bullet}$$

Avec le résultat général de l'annexe 2, nous avons :

$$\begin{aligned} \left(\nabla T\right)^{\bullet} &= \nabla \dot{T} - \nabla T.\nabla \boldsymbol{\theta} \\ \left(\nabla T^*\right)^{\bullet} &= \nabla \dot{T}^* - \nabla T^*.\nabla \boldsymbol{\theta} = -\nabla T^*.\nabla \boldsymbol{\theta} \\ \dot{\lambda} &= \nabla \lambda\ .\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{d\,I_2^\eta}{d\eta} = \quad & \int_\Omega \lambda \;\; \nabla\dot{T}.\nabla T^* + \left(\nabla\lambda\;.\boldsymbol{\theta}\right)\nabla T.\nabla T^* \\ & -\lambda(\nabla T.\nabla\boldsymbol{\theta}).\nabla T^* - \lambda\;\;\nabla T.\left(\nabla T^*.\nabla\boldsymbol{\theta}\right) \\ & + div\,\boldsymbol{\theta}\;\lambda\nabla T.\nabla T^*\end{aligned}$$

2.2.3 Intégrale de l'échange convectif - Partie 1

$$I_3^\eta = \int_{\Gamma_3^\eta} hTT^*$$

Nous utilisons cette fois la proposition 4 (cf. Annexe 2) qui établit la dérivation pour une intégrale surfacique.

$$\Rightarrow \frac{dI_3^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_3}\left[\overset{\bullet}{hTT^*}\right] + hTT^* div_s\boldsymbol{\theta}$$

Nous supposons que le coefficient d'échange thermique par convection est lui encore indépendant du paramètre η . Ainsi, $\dot{h} = \nabla h.\boldsymbol{\theta}$.

$$\frac{d\,I_3^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_3} h\;\dot{T}T^* + (\nabla h.\boldsymbol{\theta})\;TT^* + hTdiv_s\boldsymbol{\theta}T^*$$

2.2.4 Intégrale des sources thermiques internes

$$\begin{aligned}& I_4^\eta = \int_{\Omega^\eta} sT^* \\ & \Rightarrow \frac{dI_4^\eta}{d\eta} = \int_\Omega\left[\overset{\bullet}{sT^*}\right] + \left[sT^*\right]div\boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

Nous supposons que la source volumique thermique est indépendante du paramètre η. Ainsi, $\dot{s} = \nabla s.\boldsymbol{\theta}$.

$$\frac{d\,I_4^\eta}{d\eta} = \int_\Omega \left(\nabla(s).\boldsymbol{\theta}\right)\,T^* + s\;div\boldsymbol{\theta}\,T^*$$

2.2.5 Intégrale des conditions aux limites à flux imposé

$$\begin{aligned}& I_5^\eta = \int_{\Gamma_2^\eta} q\;T^* \\ & \Rightarrow \frac{dI_5^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_2}\left[\overset{\bullet}{q\;T^*}\right] + q\;T^* div_s\boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

Nous supposons que le flux de chaleur externe est indépendant du paramètre η. Ainsi, $\dot{q} = \nabla q.\boldsymbol{\theta}$.

$$\frac{d\,I_5^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_2} (\nabla q.\boldsymbol{\theta})\; T^* + q\; T^*\, div_s\boldsymbol{\theta}$$

2.2.6 Intégrale de l'échange convectif - Partie 2

$$I_6^\eta = \int_{\Gamma_3^\eta} h\; T_{ext}\;\; T^*$$

$$\Rightarrow \frac{dI_6^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_3} \left[h\; \overset{\bullet}{T_{ext}}\; T^* \right] + h\; T_{ext}\; T^* div_s\boldsymbol{\theta}$$

Nous supposons que le coefficient d'échange thermique par convection et la température extérieure sont indépendants du paramètre η.

$$\frac{d\,I_6^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_3} (\nabla h.\boldsymbol{\theta})\; T_{ext} T^* + h\; (\nabla T_{ext}.\boldsymbol{\theta}) T^* + h T_{ext} T^* div_s\boldsymbol{\theta}$$

2.2.7 Bilan

Dans toutes ces expressions de dérivations d'intégrales, seule la dérivée lagrangienne de la température est inconnue. Nous pouvons donc former une nouvelle équation variationnelle dont $\dot{T}$ est l'inconnue.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho C_p \frac{\partial \dot{T}}{\partial t} T^* + \int_\Omega \lambda \nabla\dot{T}.\nabla T^* + \int_{\Gamma_3} h\dot{T}T^* = \\
&\quad - \int_\Omega \nabla(\rho C_p).\boldsymbol{\theta} \frac{\partial T}{\partial t} T^* - \int_\Omega \rho C_p div\boldsymbol{\theta} \frac{\partial T}{\partial t} T^* \\
&\quad - \int_\Omega (\nabla\lambda\,.\boldsymbol{\theta})\; \nabla T.\nabla T^* + \int_\Omega \lambda\, [\nabla T\; \nabla\boldsymbol{\theta}].\nabla T^* + \int_\Omega \lambda\; \nabla T.[\nabla T^* \nabla\boldsymbol{\theta}] - \int_\Omega div\boldsymbol{\theta}\, \lambda \nabla T.\nabla T^* \\
&\quad + \int_{\Gamma_3} (\nabla h.\boldsymbol{\theta})(T_{ext} - T)\; T^* + \int_{\Gamma_3} h\; (T_{ext} - T) div_s\boldsymbol{\theta}\; T^* + \int_{\Gamma_3} h\; (\nabla T_{ext}.\boldsymbol{\theta})\; T^* \\
&\quad + \int_\Omega (\nabla s.\boldsymbol{\theta})\; T^* + \int_\Omega s\; div\boldsymbol{\theta}\; T^* \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} (\nabla q.\boldsymbol{\theta})\; T^* + \int_{\Gamma_2} q\; div_s\boldsymbol{\theta}\; T^*
\end{aligned}$$

La frontière Γ_1 de conditions aux limites de Dirichlet pour le calcul de T correspond au même type de conditions aux limites : $\dot{T}$ est imposée à une valeur nulle le long de cette frontière.

2.3 Commentaires sur cette équation

On peut remarquer que le premier membre de cette équation est, formellement, identique à celui de l'équation variationnelle qui permet le calcul de la température. Il s'agit donc de résoudre la même équation, avec un second membre modifié.

La résolution de cette équation fournit la dérivée lagrangienne de T. Pour avoir la dérivée qui nous intéresse, $\frac{\partial T}{\partial \eta}$, il reste à accomplir la dernière opération :

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \dot{T} - \nabla T.\boldsymbol{\theta}$$

2.4 Discrétisation en temps

La résolution temporelle va se faire en utilisant la méthode dite du θ-schéma, comme pour l'équation qui gouverne l'évolution de la température. Pour connaître la grandeur à l'instant $t+\Delta t$, nous poserons :

$$\dot{T}^{+}=\dot{T}(t+\Delta t) \text{ et } \dot{T}^{-}=\dot{T}(t)$$

La dérivée en temps s'approche ainsi par : $\dfrac{\partial \dot{T}}{\partial t} \simeq \dfrac{\dot{T}^{+}-\dot{T}^{-}}{\Delta t}$

A l'instant courant nous utiliserons l'approximation :

$$\dot{T} \simeq \theta_i \, \dot{T}^{+} + (1-\theta_i)\dot{T}^{-}$$

Nous appliquerons cette technique pour les principales variables du problème : $\dot{T}, T, h, q, s$. Tous les champs à l'instant t étant connus, l'équation discrétisée en temps peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\rho C_p}{\Delta t}\dot{T}^{+}T^{*} + \int_\Omega \theta_i \lambda \nabla \dot{T}^{+}.\nabla T^{*} + \int_{\Gamma_3} \theta_i h^{+}\dot{T}^{+}T^{*} = \\
&\int_\Omega \frac{\rho C_p}{\Delta t}\dot{T}^{-}T^{*} - \int_\Omega (1-\theta_i)\lambda \nabla \dot{T}^{-}.\nabla T^{*} - \int_{\Gamma_3} (1-\theta_i) h^{-}\dot{T}^{-}T^{*} \\
&-\int_\Omega \rho C_p div\boldsymbol{\theta} \frac{T^{+}-T^{-}}{\Delta t}T^{*} - \int_\Omega \nabla(\rho C_p).\boldsymbol{\theta}\frac{T^{+}-T^{-}}{\Delta t}T^{*} \\
&+\int_\Omega \lambda \left[\left(\theta_i \nabla T^{+} + (1-\theta_i)\nabla T^{-}\right).\nabla\boldsymbol{\theta}\right].\nabla T^{*} \\
&+\int_\Omega \lambda \left(\theta_i \nabla T^{+} + (1-\theta_i)\nabla T^{-}\right).\left[\nabla T^{*}.\nabla\boldsymbol{\theta}\right] \\
&-\int_\Omega (\nabla\lambda.\boldsymbol{\theta}) \left(\theta_i \nabla T^{+} + (1-\theta_i)\nabla T^{-}\right).\nabla T^{*} \\
&-\int_\Omega \lambda div\boldsymbol{\theta} \left[\theta_i \nabla T^{+} + (1-\theta_i)\nabla T^{-}\right].\nabla T^{*} \\
&+\int_\Omega \left(\theta_i \nabla s^{+} + (1-\theta_i)\nabla s^{-}\right).\boldsymbol{\theta} \ T^{*} \\
&+\int_\Omega div\boldsymbol{\theta} \left(\theta_i s^{+} + (1-\theta_i) s^{-}\right)T^{*} \\
&+\int_{\Gamma_2} \left(\theta_i \nabla q^{+} + (1-\theta_i)\nabla q^{-}\right).\boldsymbol{\theta} \ T^{*} \\
&+\int_{\Gamma_2} \left(\theta_i q^{+} + (1-\theta_i) q^{-}\right) div_s\boldsymbol{\theta} \ T^{*} \\
&+\int_{\Gamma_3} A \ div_s\boldsymbol{\theta} \ T^{*} \\
&+\int_{\Gamma_3} \left(\theta_i \nabla h^{+} + (1-\theta_i)\nabla h^{-}\right).\boldsymbol{\theta}\left(\theta_i\left(T_{ext}^{+}-T^{+}\right)+(1-\theta_i)\left(T_{ext}^{-}-T^{-}\right)\right) T^{*} \\
&+\int_{\Gamma_3} \left(\theta_i h^{+} + (1-\theta_i) h^{-}\right)\left(\theta_i \nabla T_{ext}^{+} + (1-\theta_i)\nabla T_{ext}^{-}\right).\boldsymbol{\theta} \, T^{*}
\end{aligned}$$

Le terme de flux d'échange convectif, A, prend deux expressions distinctes selon la dépendance de h et T_{ext} vis-à-vis du temps.

Si h et T_{ext} sont indépendants du temps, seule la température est à impliciter. D'où :

$$\int_{\Gamma_3} h\left(T_{ext} - \theta_i T^+ - (1-\theta_i)T^-\right) div_s \boldsymbol{\theta}\ T^*$$

Sinon, l'ensemble du flux subit le θ-schéma :

$$\int_{\Gamma_3} \left[\theta_i h^+\left(T_{ext}^+ - T^+\right) + (1-\theta_i)h^-\left(T_{ext}^- - T^-\right)\right] div_s \boldsymbol{\theta}\ T^*$$

Remarque :

On aura noté le désagrément d'avoir à traiter avec "les Dupond et Dupont du numérique", à savoir le θ-schéma et la méthode $\boldsymbol{\theta}$... Pour garder la cohérence avec le reste de la documentation du Code_Aster, nous avons choisi de conserver les notations $\boldsymbol{\theta}$ pour les deux paramètres de ces méthodes. Dans la mesure où c'est la "méthode" $\boldsymbol{\theta}$ qui nous intéresse le plus dans ce travail, le θ du "schéma" a été affecté d'un indice i, comme "implicitation". Espérons que cela aura été clair ...

2.5 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale de cette équation est exactement calquée sur celle employée pour la résolution de la thermique. Nous renvoyons à [R5.02.01] pour sa description.

3 Calcul du gradient du déplacement

3.1 Le problème

Une deuxième étape nécessaire au calcul des gradients du taux de restitution de l'énergie est le calcul du gradient du champ de déplacement par rapport à la variation du domaine. Nous reprenons exactement les mêmes conventions qu'au chapitre précédent pour le calcul du gradient de la température.

Seuls certains chargements sont pris en compte. L'extension à d'autres types de changement se ferait en suivant les principes qui vont être énoncés. Nous nous plaçons dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, en deux dimensions. La relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations est alors du type :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda}\ \boldsymbol{\varepsilon} + k\left(T - T_{ref}\right)\mathbf{Id}$$

Le domaine de calcul est noté Ω^{η}, où η est le paramètre réel de pilotage des variations du domaine.

Pour cette application, nous ne retenons que trois types de comportement au bord de Ω^η :

Γ_1^η : frontière à déplacement imposé
Γ_2^η : frontière à "liaison uniforme"
Γ_3^η : frontière à pression externe imposée

ce qui donne l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega^\eta} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3^\eta} p\mathbf{v}.\mathbf{n}$$

avec :

$\mathbf{u}$ champ de déplacement
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ tenseur des contraintes liées au déplacement u
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ tenseur des déformations associées au déplacement v
p pression répartie sur le bord Γ_3^η

3.2 Dérivation de l'équation variationnelle

Nous allons dériver les deux intégrales qui constituent l'équation variationnelle en appliquant le théorème de Reynolds (cf. Annexe 2 et [§2.2]).

3.2.1 Intégrale volumique

$$I^\eta = \int_{\Omega^\eta} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$$

Du fait de l'isotropie du problème, nous avons l'égalité des produits scalaires :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s(\mathbf{v})$$

où $\nabla^s(\mathbf{v})$ est le gradient symétrisé de $\mathbf{v}$.

L'intégrale et sa dérivée s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} I^\eta &= \int_{\Omega^\eta} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{v}) \\ \Rightarrow \quad \frac{dI^\eta}{d\eta} &= \int_\Omega \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \overset{\bullet}{\nabla^s(\mathbf{v})} \right] + \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{v}) \right] div\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

Nous utiliserons la propriété de dérivation d'un gradient de vecteur, où FT est une fonction tensorielle, décrite en annexe 2 :

$$\left(\overset{\bullet}{\nabla \mathbf{v}} \right) = \nabla \mathbf{v} - \mathrm{FT}(\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\theta})$$

Nous avons :

$$\left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{v})\right]^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \nabla^s_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \dot{\nabla}^s(\mathbf{v})$$
$$= \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \nabla^s_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \left[\nabla^s(\dot{\mathbf{v}}) - \mathrm{T}\left(\nabla^s_{\mathbf{v}}, \nabla\boldsymbol{\theta}\right)\right]$$
$$= \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \nabla^s_{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathrm{FT}\left(\nabla^s(\mathbf{v}), \nabla\boldsymbol{\theta}\right)$$

car les fonctions $\mathbf{v}$ sont supposées indépendantes des variations du domaine, donc $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Pour calculer la dérivée point de $\boldsymbol{\sigma}$, nous remarquons que $\boldsymbol{\sigma}$ est fonction de la déformation et de la température :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathbf{e}}\dot{\mathbf{e}} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T}\dot{T}$$

Dans le cas particulier de l'élasticité linéaire isotrope :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, T) &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e} + k\left(T - T_{ref}\right)\mathbf{Id} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathbf{e}} &= \boldsymbol{\Lambda} \\ \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} &= k\,\mathbf{Id} \end{aligned}$$

d'où : $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{e}} + k\,\dot{T}\,\mathbf{Id}$

Il reste à exprimer la dérivée de la déformation $\mathbf{e}$, à partir de son expression en fonction du déplacement $\mathbf{u}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t\right] \\ \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2}\left[\dot{\nabla}\mathbf{u} + \left[\overset{\bullet}{\nabla\mathbf{u}}\right]^t\right] \\ \dot{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} - \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\boldsymbol{\theta})\right] + \frac{1}{2}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} - \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\boldsymbol{\theta})\right]^t \\ \dot{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^t\right] - \frac{1}{2}\left[\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\boldsymbol{\theta})^t\right] \end{aligned}$$

L'expression définitive de la dérivation de l'intégrale est alors :

$$\begin{aligned} \frac{dI^{\eta}}{d\eta} = \quad & \int_{\Omega} \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^t\right] : \nabla^s(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\Lambda}\left[\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\boldsymbol{\theta})^t\right]\right] : \nabla^s(\mathbf{v}) \\ & + k\ \dot{T}\ \mathbf{Id} : \nabla^s(\mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{u}) : \mathrm{FT}\left(\nabla^s(\mathbf{v}), \nabla\theta\right) \\ & + \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s(\mathbf{v})\right] div\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

3.2.2 Intégrale surfacique

$$I_3^\eta = \int_{\Gamma_3^\eta} p\,\mathbf{v}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d\ I_3^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_3} \left[\overset{\bullet}{p\,\mathbf{v}}\right] + p\,\mathbf{v}\ div_s\boldsymbol{\theta}$$

Par choix des fonctions $\mathbf{v}$ nous avons $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Nous supposons que la pression externe est indépendante du paramètre η. Ainsi :

$$\left[\overset{\bullet}{p\mathbf{v}}\right] = \left[\nabla p.\boldsymbol{\theta}\right]\mathbf{v}$$

$$\frac{d\,I_3^\eta}{d\eta} = \int_{\Gamma_3} \left[\nabla p.\boldsymbol{\theta}\right]\mathbf{v} + p\ div_s\boldsymbol{\theta}\ \ \mathbf{v}$$

3.2.3 Bilan

Dans toutes ces expressions de dérivations d'intégrales, seule la dérivée lagrangienne du déplacement est inconnue. Nous pouvons donc former une nouvelle équation variationnelle dont $\dot{\mathbf{u}}$ est l'inconnue et où $\nabla\mathbf{v}$ est le gradient symétrisé de $\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^t\right] : \nabla\mathbf{v} = &\\
&\int_\Omega \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\Lambda}\left[\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta})^t\right]\right] : \nabla\mathbf{v}\\
&- \int_\Omega k\ \dot{T}\,\mathbf{Id} : \mathbf{v}\\
&+ \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{v},\nabla\boldsymbol{\theta})\\
&- \int_\Omega \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{v}\right] div\boldsymbol{\theta}\\
&+ \int_{\Gamma_3} \left[\nabla p.\boldsymbol{\theta}\right]\mathbf{v}\\
&+ \int_{\Gamma_3} p\ div_s\boldsymbol{\theta}
\end{aligned}$$

Sur la frontière Γ_1, le déplacement est imposé. Quelle que soit la position de cette frontière, la condition aux limites suit la matière, ce qui entraîne $\dot{\mathbf{u}} = 0$.

Sur la frontière Γ_2, à liaison uniforme, les degrés de libertés sont identiques, mais libres : u_y = constante par exemple. Il en est de même pour la dérivée $\dot{\mathbf{u}}$.

3.3 Commentaires sur l'équation à résoudre

Nous allons constater que, comme pour le problème en température, le problème à résoudre ici est formellement le même que celui de la détermination du déplacement $\mathbf{u}$. La matrice est la même. Seul le second membre évolue.

Si nous repartons de l'équation variationnelle initiale :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p\mathbf{v}.\mathbf{n}$$

nous pouvons la transformer en utilisant les expressions de $\boldsymbol{\sigma}$ et de $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{v} = \int_{\Gamma_3} p\,\mathbf{v} \\
\Leftrightarrow &\int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + k\left(T - T_{ref}\right)\mathbf{Id}\right] : \nabla\mathbf{v} = \int_{\Gamma_3} p\,\mathbf{v} \\
\Leftrightarrow &\int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\right] : \nabla\mathbf{v} = -\int_{\Omega} k\left(T - T_{ref}\right)\mathbf{Id} : \nabla\mathbf{v} + \int_{\Gamma_3} p\,\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t\right]$, nous retrouvons bien la même expression au premier membre que pour l'équation transformée.

4 Détermination du gradient des contraintes

L'étape suivante vise à déterminer le gradient des contraintes. Il sera calculé à partir de la connaissance des gradients de la température et du déplacement.

Nous avons vu que dans le cas particulier de l'élasticité linéaire isotrope, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ pouvait s'exprimer sous la forme (cf. [§3.2.1]) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^t\right] - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left[\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta})^t\right] + k\,\dot{T}\,\mathbf{Id}$$

A ce stade, toutes les quantités à droite du signe = sont connues ; il n'y a plus qu'à faire un post-traitement pour obtenir $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

De même, sachant que :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\eta} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\theta},$$

la dérivée eulérienne des contraintes s'exprime en post-traitement des quantités précédemment calculées.

Remarque :

Cette phase de dérivation impose que le calcul ait eu lieu avec des éléments quadratiques.

5 Conclusion

Pour poursuivre ce travail, il reste à faire le calcul de la dérivée du taux de restitution d'énergie. Cela est prévu dans une version ultérieure.

L'utilisation de cette fonctionnalité, prévue initialement pour la mécanique probabiliste, peut s'étendre à d'autres domaines : optimisation de formes, identification.

Annexe 1 La transformation du domaine

La technique utilisée pour calculer les différents gradients au cours d'une variation du domaine est celle de la méthode dite « méthode θ ». Cette méthode a été mise au point pour le calcul du taux de restitution de l'énergie G ; elle est décrite dans [bib1] et [R7.02.03]. Nous donnons ici les diverses expressions qui sont utilisées dans ce document.

Le domaine de calcul de référence est noté Ω. Il est transformé en un domaine noté Ω^η, où η est un paramètre réel. L'ensemble des transformations est représenté par les fonctions F^η. Nous convenons que F^0 correspond à l'identité.

De manière générale, les seules grandeurs qui nous intéressent sont les gradients exprimés au point de la résolution. Ce sont donc les dérivées par rapport au paramètre η exprimées pour $\eta = 0$. C'est pourquoi, pour alléger les notations, dans tout le document nous écrivons :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \text{ au lieu de } \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

Le champ de vecteurs $\dfrac{\partial \mathrm{F}^\eta}{\partial \eta}$ est noté $\boldsymbol{\theta}$.

Nous utiliserons les grandeurs déduites suivantes :

- champ scalaire $div\boldsymbol{\theta}$, divergence volumique, et $div^s\boldsymbol{\theta}$, divergence surfacique,
- tenseur $\nabla\theta$.

Annexe 2 Formulaire

Nous allons rappeler ici, les principales formules utiles aux calculs de dérivation. On se reportera à [bib1] pour leur démonstrations.

Soit $\varphi(\eta, M)$ un champ quelconque. Nous notons :

$$\overline{\varphi}(\eta, M) = \varphi(\eta, \mathrm{F}^\eta(M))$$

Dérivée lagrangienne : $\dot{\varphi} = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \eta}$

Proposition 1 : $(i)\dfrac{\partial(\nabla \mathrm{F}^\eta)}{\partial \eta} = \nabla\boldsymbol{\theta} \quad (ii)\dfrac{\partial(\nabla \mathrm{F}^\eta)^{-1}}{\partial \eta} = -\nabla\boldsymbol{\theta} \quad (iii)\dfrac{\partial(\det \nabla \mathrm{F}^\eta)}{\partial \eta} = div\boldsymbol{\theta}$

Proposition 2 : $(i)\dot{\varphi} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nabla\varphi\boldsymbol{\theta}$

$\dot{\varphi}$ est la dérivée lagrangienne pour le mouvement F^η

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ est la dérivée eulérienne

- si φ est un champ scalaire,
  $\nabla\varphi\boldsymbol{\theta}$ est un produit scalaire, ce qui donne
  $$\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\theta_k$$
- si $\boldsymbol{\varphi}$ est un champ de vecteur, $\nabla\boldsymbol{\varphi}$ est un tenseur, ce qui donne :
  $$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta} + \sum_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\theta_k$$
- si $\boldsymbol{\varphi}$ est un tenseur, la même formule appliquée à chacune des composantes du tenseur donne :
  $$\dot{\varphi}_{i,j} = \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial\eta} + \sum_k \frac{\partial\varphi_{i,j}}{\partial x_k}\theta_k$$

Remarque :

L'expression analytique de cette formule est la même en 2D plan ou 2D axisymétrique. En effet, le terme complémentaire de $\nabla\boldsymbol{\varphi}$ si $\boldsymbol{\varphi}$ est un vecteur est $\varphi r / r$. Il serait à multiplier par la composante orthoradiale du vecteur $\boldsymbol{\theta}$; celle-la étant nulle, il n'y a aucune modification de l'expression. On passe donc de la formule 2D plan à la formule 2D axisymétrique par l'analogie formelle $(x,y) \Leftrightarrow (r,z)$.

Proposition 2 : $(ii)\left(\nabla\dot{\varphi}\right) = \nabla\dot{\varphi} - \mathrm{FT}\left(\nabla\varphi, \nabla\boldsymbol{\theta}\right)$

L'opérateur FT est l'opérateur matriciel qui s'apparente formellement au produit matriciel.

- si φ est un champ scalaire, en 2D plan :
  En partant de l'expression $(2i)$ et en la dérivant par rapport à x :

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\theta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\theta y$$
$$\Rightarrow \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\theta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\theta y\right)$$
$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x}\theta x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\theta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\theta_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\theta_y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}$$

En appliquant la formule $(2.i)$ aux trois premiers termes de cette somme, nous avons :

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} = \left(\overset{\bullet}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}$$

La même technique utilisée en dérivant $(2.i)$ par rapport à y permet d'établir :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} + & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\left(\nabla \overset{\bullet}{\varphi}\right) = \nabla \dot{\varphi} - \mathrm{FT}(\nabla \varphi, \nabla \boldsymbol{\theta})$$

- si φ est un champ scalaire, en 2D axisymétrique, son gradient en 2D axisymétrique vaut le vecteur :

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

Le point de départ est encore l'expression $(2.i)$:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\theta_r + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\theta_z$$

En dérivant cette formule par rapport à r ou à z, nous retrouvons formellement la même expression qu'en 2D plan, pour les termes en $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$.

D'où l'expression :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\dfrac{\partial \theta_r}{\partial r} + & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial \theta_z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\dfrac{\partial \theta_r}{\partial z} + & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial \theta_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Résumé pour un scalaire :

$$\left(\frac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x_i} - \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}$$

avec i et $k \in \{x, y\}$ ou $\{r, z\}$

- lorsque $\boldsymbol{\varphi}$ est un vecteur ou un tenseur, nous appliquons le même raisonnement à chacune de ses composantes en coordonnées cartésiennes :

$$\left(\frac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}_j}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_j}{\partial x_i}\right) - \sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}$$

$$\left(\frac{\partial \overset{\bullet}{\varphi}_{j,l}}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_{j,l}}{\partial x_i}\right) - \sum_k \frac{\partial \varphi_{j,l}}{\partial x_k}\frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}$$

avec $i, j, k, l \in \{x, y\}$

- pour un vecteur ou un tenseur en axisymétrique, il faut tenir compte des particularités du gradient.

Nous avons en effet :

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_r \mathbf{e}_r + \varphi_z \mathbf{e}_z \Rightarrow \nabla \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{\varphi_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} \end{pmatrix}$$

Les dérivations des termes en $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ s'obtiennent comme vu précédemment. Il faut désormais appliquer l'expression $(2.i)$ au terme central $\frac{\varphi_r}{r}$:

$$\left(\overset{\bullet}{\frac{\varphi_r}{r}}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)}{\partial \eta} + \frac{\partial\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)}{\partial r}\theta_r + \frac{\partial\left(\frac{\varphi_r}{r}\right)}{\partial z}\theta_z$$

$$\Rightarrow \left(\overset{\bullet}{\frac{\varphi_r}{r}}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta} + \varphi_r \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial r}\theta_r - \frac{\varphi_r}{r^2}\theta_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\theta_z$$

La dérivée eulérienne de $\frac{1}{r}$ est nulle par construction. Les termes 1, 3 et 5 de la somme sont l'expression $(2.i)$ appliquée à φ_r. Ce qui donne :

$$\left(\overset{\bullet}{\frac{\varphi_r}{r}}\right) = \frac{\dot{\varphi}_r}{r} - \frac{1}{r^2}\varphi_r \theta_r$$

D'où l'expression

$$\overset{\bullet}{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{\varphi_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \dot{\varphi}_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{\dot{\varphi}_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \dot{\varphi}_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \varphi_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\varphi_r \theta_r}{r^2} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_r}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Proposition 3 (théorème de Reynolds)

Avec $I^\eta = \int_{\Omega^\eta} \varphi \, d\, \Omega$, Ω^η domaine de R^3 :

$$(i)\ \frac{d\,I^\eta}{d\eta} = \int_\Omega \left(\dot{\varphi} + \varphi\ div\,\boldsymbol{\theta}\right) d\,\Omega$$

$$(ii)\frac{d\,I^\eta}{d\eta} = \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\, d\ \Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi\ \boldsymbol{\theta}.n\,d\,s$$

Proposition 4 :

Avec $J^\eta = \int_{s^\eta} \varphi\ d\,s,\ s^\eta$ surface de R^3 et en notant n la normale extérieure à s :

$$(i)\frac{d\,J^\eta}{d\eta} = \int_s \left[\dot{\varphi} + \varphi\, div_s \boldsymbol{\theta}\right] ds$$

Annexe 3 Commutativité des dérivations lagrangienne et temporelle

Proposition :

$$\frac{\partial\,\dot{\varphi}}{\partial\,t} = \left(\dot{\overline{\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}}}\right)$$

Preuve :

Pour la transformation F^η, nous posons classiquement :

$$\overline{\varphi}(\eta, M, t) = \varphi\left(\eta, \mathrm{F}^\eta(M), t\right)$$

Par définition, la dérivée lagrangienne vaut :

$$\dot{\varphi}(M,t) = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}$$

Dans le cas où la transformation appliquée est la même à chaque instant, l'instant, t , et le paramètre de la transformation sont indépendants l'un de l'autre. Les dérivations par rapport à t et η peuvent donc commuter.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\eta}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi\left(\eta, \mathrm{F}^\eta(M), t\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi\left(\eta, \mathrm{F}^\eta(M), t\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t}\right] = \left[\dot{\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}}\right]
\end{aligned}$$

Annexe 4 Mise en œuvre numérique

A4.1 Calcul du gradient de température

A4.1.1 Principe général

Nous avons vu au [§2.2] que l'équation à résoudre est la même que celle qui gouverne le calcul thermique, au second membre près. Cela nous incite à insérer le calcul de la dérivée de la température dans le calcul de la température elle-même (opérateur `THER_LINEAIRE`). Il sera ainsi possible à chaque instant de réutiliser les matrices assemblées et de traiter tous les chargements du problème thermique.

A4.1.2 Algorithme global

Plus précisément, les calculs de T et $\dot{T}$ s'imbriquent de la manière suivante :

- Initialisation du champ de températures T, et de son gradient, $\dot{T}$, avec deux possibilités :
  - mise à zéro
  - reprise d'un champ précédemment calculé
- Boucle en temps :
  1) Calcul des matrices élémentaires, puis assemblage
  2) Calcul du second membre de l'équation de la thermique
  3) Résolution

  A ce stade, on connaît T_n et T_{n+1}. On peut enchaîner sur le calcul de $\dot{T}$.

  4) Calcul du second membre du calcul de $\dot{T}$
     - terme dû à la source thermique et aux conditions aux limites de flux
     - terme dû à la dérivation de l'équation
     - terme dû à la méthode d'implicitation. On utilise le même programme que pour le calcul de T, en ayant remplacé le champ T par le champ $\dot{T}$
  5) Résolution du système pour connaître la nouvelle valeur de $\dot{T}$
  6) Bascule des valeurs de T_{n+1} et $\dot{T}_{n+1}$ dans T_n et $\dot{T}_n$

A4.1.3 Conditions aux limites de Dirichlet

Partout où on a des conditions aux limites de Dirichlet sur le problème thermique, on retrouve des conditions aux limites de Dirichlet pour le calcul de $\dot{T}$. En ces points, T étant imposée, T est indépendant des variations du domaine :

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$$

Comme nous avons la relation :

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \eta} + \nabla T . \boldsymbol{\theta}$$

nous en déduisons les valeurs des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\dot{T}_{di} = \nabla T.\boldsymbol{\theta}$$

Cette valeur est donc calculée en chaque nœud de la frontière Γ_1.

A4.1.4 Détail des différents termes du second membre

Nous allons regrouper sous une même intégrale les termes obligatoires dus à la dérivation de l'équation, puis examiner chacun des éventuels changements. Le résultat sera écrit sous la forme de la contribution du nœud i au point de Gauss pg l'élément courant dans le calcul des intégrales par la formule de Gauss, sachant que toutes ses contributions sont à cumuler.

Terme dû à la dérivation

Il faut calculer la contribution de :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 \text{, avec}$$

$$I_1 = \int_\Omega \frac{\rho C_p}{\Delta t} \dot{T}^- T^*$$

$$I_2 = -\int_\Omega (1-\theta_i)\lambda \ \nabla\dot{T}^- T^*$$

$$I_3 = \int_\Omega - div\boldsymbol{\theta}\, \rho C_p \frac{T^+ - T^-}{\Delta t} T^*$$

$$I_4 = \int_\Omega - \nabla\left(\rho C_p\right).\boldsymbol{\theta} \ \ \frac{T^+ - T^-}{\Delta t} T^*$$

$$I_5 = \int_\Omega \lambda \left[\left(\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-\right)\nabla\boldsymbol{\theta}\right].\nabla T^*$$

$$I_6 = \int_\Omega \lambda \left(\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-\right)\left[\nabla T^* \nabla\boldsymbol{\theta}\right]$$

$$I_7 = \int_\Omega - \left(\nabla\lambda \ .\boldsymbol{\theta}\right)\left(\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-\right).\nabla T^*$$

$$I_8 = \int_\Omega \lambda\, div\boldsymbol{\theta}\left[\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-\right]\nabla T^*$$

- Calcul de I_1

  En régime stationnaire, ce terme n'existe pas. En transitoire, on aura exprimé $\dot{T}^-$, dérivée lagrangienne de T à l'instant précédent aux points de Gauss. ρC_p est supposé constant par élément. D'où la contribution :

$$I_{1,i,pg} = \frac{\rho C_p}{\Delta t} \ \dot{T}^-(pg) \ ui \ (pg) \ \omega_{pg}$$

- Calcul de I_2

  En régime stationnaire, ce terme n'existe pas. En transitoire, on aura exprimé le gradient de $\dot{T}$ aux points de Gauss. λ est supposé constant par élément. D'où la contribution :

$$I_{2,i,pg} = (1-\theta_i)\lambda \sum_j \left(\nabla \dot{T}^-\right)_{pg,j} \frac{\partial ui}{\partial xj}\ \omega_{pg}$$

- Calcul de I_3

  En régime stationnaire, ce terme n'apparaît pas. ρC_p est supposé constant par élément. $div\boldsymbol{\theta},\ T^+$ et T^- auront été calculés aux points de Gauss comme rappelé en annexe 5. D'où la contribution :

$$I_{3,i,pg} = -\frac{\rho C_p}{\Delta t} div\boldsymbol{\theta}(pg)\left(T^+(pg) - T^-(pg)\right)ui(pg)\ \omega_{pg}$$

- Calcul de I_4

  ρC_p est supposé constant par élément. Son gradient est donc nul par élément. D'où :

$$I_{4,i,pg} = 0$$

- Calcul de I_5

  λ est supposé constant par élément. $\nabla T^+, \nabla T^-$ et $\nabla\boldsymbol{\theta}$ auront été calculés aux points de Gauss. On commence par calculer la quantité $\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-$. Le résultat est un vecteur dont les composantes au point de Gauss sont :

$$A_j(pg) = \sum_i \left[\theta_i T^+(i) + (1-\theta_i)T^-(i)\right] \frac{\partial\, ui}{\partial\, xj}(pg)$$

  Le produit tensoriel contracté $\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta}$ s'écrit : $(\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta})_k = \sum_j A_j\ \nabla\theta_{jk}$

  Exemple : $(\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta})_x = A_x \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial\theta_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial\theta_z}{\partial x}$ etc, d'où la formule :

$$I_{5,i,pg} = \lambda \sum_k (\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta})_k (pg)\ \frac{\partial ui}{\partial xk}(pg).\ \omega_{pg}$$

  En 2D axisymétrique, le produit $\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta})_r &= A_r \frac{\partial\theta_r}{\partial r} + A_z \frac{\partial\theta_z}{\partial x} + A_\theta \frac{\partial\theta_\theta}{\partial x} \\
(\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta})_z &= A_r \frac{\partial\theta_r}{\partial z} + A_z \frac{\partial\theta_z}{\partial z} + A_\theta \frac{\partial\theta_\theta}{\partial z} \\
(\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{\theta})_\theta &= A_\theta \frac{\theta_r}{r}
\end{aligned}$$

Ici, la composante A_θ est toujours nulle. Nous retrouvons donc la même expression qu'en coordonnées cartésiennes 2D.

- Calcul de I_6

  λ est supposé constant dans l'élément. $\nabla T^+, \nabla T^-$ et $div\boldsymbol{\theta}$ auront été calculés aux points de Gauss. Le vecteur $\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-$ sera noté $\mathbf{A}$, comme précédemment. Le produit tensoriel contracté $\nabla T^* \nabla \boldsymbol{\theta}$ a sur le nœud courant i pour composante :

$$\left(\nabla T^* \nabla \boldsymbol{\theta}\right)_{i,k} = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(pg) \nabla \theta_{jk}$$

Ex : $$\left(\nabla T^* \nabla \boldsymbol{\theta}\right)_{i,x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}(pg)\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y}(pg)\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial z}(pg)\frac{\partial \theta_z}{\partial x}$$

d'où la formule :

$$I_{6,i,pg} = \lambda \sum_k A_k(pg)\left(\nabla T^* \nabla \boldsymbol{\theta}\right)_{i,k} . \omega_{pg}$$

Comme pour l'intégrale précédente en 2D axisymétrique, la composante A_θ est nulle. L'expression est donc la même en 2D cartésien ou en axisymétrique.

- Calcul de I_7

  λ est supposé constant dans l'élément. Son gradient y est donc nul. D'où :

$$I_{7,i,pg} = 0$$

- Calcul de I_8

  λ est supposé constant dans l'élément. $\nabla T^+, \nabla T^-$ et $div\boldsymbol{\theta}$ auront été calculés aux points de Gauss. Le vecteur $\theta_i \nabla T^+ + (1-\theta_i)\nabla T^-$ est noté $\mathbf{A}$, comme précédemment. Nous avons alors :

$$I_{8,i,pg} = \lambda \, div\boldsymbol{\theta}(pg) \sum_k A_k(pg)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(pg)\, \omega_{pg}$$

Terme source d'énergie

Nous calculons les deux intégrales :

$$I_1 = \int_\Omega div\boldsymbol{\theta}\left(\theta_i s^+ + (1-\theta_i)s^-\right)T^*$$
$$I_2 = \int_\Omega \left(\theta_i \nabla s^+ + (1-\theta_i)\nabla s^-\right).\ \boldsymbol{\theta}\, T^*$$

s^+ et s^- sont connus aux points de Gauss. $div\boldsymbol{\theta}$ a été calculé au point de Gauss. D'où la contribution :

$$I_{1,i,pg} = div\boldsymbol{\theta}(pg)\left(\theta_i s^+(pg) + (1-\theta_i)s^-(pg)\right)u_i(pg)\, \omega_{pg}$$

La source s étant constante par élément, son gradient est nul. D'où :

$$I_{2,i,pg} = 0$$

Terme des conditions aux limites de flux imposé

$$I_1 = \int_\Omega \left(\theta_i q^+ + (1-\theta_i) q^-\right) div_s\, \boldsymbol{\theta}\; T^*$$

q^+ et q^- sont connus aux points de Gauss. $div(\boldsymbol{\theta})$ se calcule au point de Gauss.

$$I_{1,i,pg} = \left[\theta_i q^+(pg) + (1-\theta_i) q^-(pg)\right] \times div_s \boldsymbol{\theta}(pg) u_i(pg) \omega_{pg}$$

Remarques :

Le calcul des $\partial \theta_j / \partial x_k$ se fait aux points de Gauss de l'élément de bord, par exemple sur un segment pour un calcul 2D. Or sur ce segment, on ne connaît que les dérivées curvilignes des fonctions de forme, c'est-à-dire les dérivées tangentielles. Il faut donc calculer au préalable les quantités $\partial \theta_j / \partial x_k$ en se basant sur les éléments de volume et cela aux nœuds des éléments de bord. Ensuite, on évalue leurs valeurs aux points de Gauss de l'élément de bord avec les fonctions de cet élément de bord.

L'expression est la même en 2D axisymétrique qu'en cartésien car le terme complémentaire de $\nabla \boldsymbol{\theta}, \dfrac{\theta r}{r}$, se trouve multiplié par la composante orthoradiale de la normale n. Or cette composante est nulle.

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \left(\theta_i \nabla q^+ + (1-\theta_i) \nabla q^-\right) . \boldsymbol{\theta}\, T^*$$

q est supposé constant par élément. Son gradient y est donc nul. D'où :

$$I_{2,i,pg} = 0$$

Terme des conditions aux limites d'échange convectif

Si h et T_{ext} sont indépendants du temps, nous calculons l'expression suivante :

$$I = -\int_{\Gamma_3} (1-\theta_i) h\, \dot{T}^- T^* + \int_{\Gamma_3} h\left(T_{ext} - \theta_i T^+ - (1-\theta_i) T^-\right) div_s \boldsymbol{\theta}\, T^*$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{i,pg} = \; & \left[(1-\theta_i) h\, \dot{T}^-(pg)\right] + \\ & h\left(T_{ext} - \theta_i T^+(pg) - (1-\theta_i) T^-(pg)\right) \times div_s \boldsymbol{\theta}(pg) u_i(pg) \omega_{pg} \end{aligned}$$

Si h ou T_{ext} sont indépendants du temps, il faut alors calculer :

$$\begin{aligned} I = \; & -\int_{\Gamma_3} (1-\theta_i) h^- \dot{T}^- T^* + \\ & + \int_{\Gamma_3} \left[\theta_i h^+ \left(T^+_{ext} - T^+\right) + (1-\theta_i) h^- \left(T^-_{ext} - T^-\right)\right] div_s \boldsymbol{\theta}\, T^* \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{i,pg} = \; & \left[\left(1-\theta_i\right)h^- \; T^-\left(pg\right)\right] \\ & +\left[\theta_i h^+\left(T^+_{ext} - T^+\left(pg\right)\right) + \left(1-\theta_i\right)h^-\left(T^-_{ext} - T^-\left(pg\right)\right)\right] \times \\ & div\boldsymbol{\theta}\left(pg\right)u_i\left(pg\right)\omega_{pg} \end{aligned}$$

Les mêmes remarques qu'au paragraphe précédent s'appliquent au calcul des quantités $\partial \theta_j / \partial x_k$.

Les deux intégrales faisant intervenir ∇h et ∇T_{ext} sont nulles, dans la mesure où h et T_{ext} sont supposés constants par élément.

A4.2 Calcul du gradient des déplacements et des contraintes

A4.2.1 Principe général

Comme pour la thermique, le calcul du gradient de déplacement est inséré dans le calcul du déplacement, c'est-à-dire l'opérateur `MECA_STATIQUE`.

Ensuite le calcul de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \eta}$ se fera en post-traitement, dans les commandes `CALC_ELEM` et `CALC_NO`.

A4.2.2 Conditions aux limites de Dirichlet et de liaison uniforme

Rien n'est à faire pour ces deux types de conditions aux limites. Leur traitement est assuré par le fonctionnement standard du calcul de mécanique statique linéaire.

A4.2.3 Détail des différents termes du second membre

Nous allons regrouper sous une même intégrale les termes obligatoires dûs à la dérivation de l'équation, puis examiner chacun des éventuels chargements. Le résultat sera écrit sous la forme de la contribution du nœud i et du point de Gauss pg pour l'élément courant.

Terme dû à la dérivation

Il faut calculer la contribution de :

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \; & \int_\Omega \left[\boldsymbol{\Lambda}\left[\mathrm{FT}\left(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta}\right) + \mathrm{FT}\left(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta}\right)^t\right]\right] : \nabla^s_{\mathbf{v}} \\ & -\int_\Omega k \; \dot{T} \; \mathbf{Id} : \nabla^s \mathbf{v} \\ & \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \mathrm{FT}\left(\nabla^s \mathbf{v},\nabla\boldsymbol{\theta}\right) \\ & -\int_\Omega \left[\sigma(\mathbf{u}) : \nabla^s \mathbf{v}\right] div\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

où $\nabla^s \mathbf{v}$ est le gradient symétrisé de $\mathbf{v}$ soit $\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^t\right)$.

Pour mettre en forme cette écriture symbolique, nous allons partir de la forme analytique décomposée et écrire les dérivations sur les termes scalaires.

On se souviendra (cf. [§3.2.1]) que cette intégrale est issue de la dérivation de :

$$\int_{\Omega^\eta} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s \mathbf{v}$$

et que nous l'avons décomposée en :

$$\int_\Omega \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla^s \mathbf{v}\right] div\boldsymbol{\theta} + \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) : \left[\overset{\bullet}{\nabla^s \mathbf{v}}\right] + \int_\Omega \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \nabla^s \mathbf{v}$$

Nous commençons par expliciter la première intégrale car cela va permettre de mettre en place les différents termes selon le mode : plan ou axisymétrique.

- En déformations planes :

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{v} = \sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

La divergence du champ $\boldsymbol{\theta}$ est une donnée, calculée aux points de Gauss.

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ est connu aux points de Gauss. Le tenseur $\nabla \mathbf{v}$ est connu. D'où les contributions :

$$I_{1,i,pg,x} = -\left[\sigma_{xx}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial x} + \sigma_{xy}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial y}\right] div(\boldsymbol{\theta})(pg).\omega_{pg}$$

$$I_{1,i,pg,y} = -\left[\sigma_{xy}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial x} + \sigma_{yy}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial y}\right] div(\boldsymbol{\theta})(pg).\omega_{pg}$$

Le terme de la deuxième intégrale se décompose en :

$$\int_\Omega \sigma_{xx}\left(\overset{\bullet}{\frac{\partial v_x}{\partial x}}\right) + \sigma_{yy}\left(\overset{\bullet}{\frac{\partial v_y}{\partial y}}\right) + \sigma_{xy}\left(\overset{\bullet}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}\right)$$

Il suffit alors d'utiliser les formules démontrées en annexe 2 pour la fonction FT et d'établir l'expression suivante, sachant que $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \quad & \sigma_{xx}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right] \\ & + \sigma_{yy}\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right] \\ & + \sigma_{xy}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right] \end{aligned}$$

En répartissant sur les fonctions de forme, nous avons :

$$I_{2,i,pg,x} = -\left[\left[\sigma_{xx}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\sigma_{xy}\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right]\frac{\partial v_i}{\partial x}+\left[\sigma_{xx}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+\sigma_{xy}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right]\frac{\partial v_i}{\partial y}\right]\omega_{pg}$$

$$I_{2,i,pg,y} = -\left[\left[\sigma_{yy}\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\sigma_{xy}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right]\frac{\partial v_i}{\partial x}+\left[\sigma_{yy}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+\sigma_{xy}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right]\frac{\partial v_i}{\partial y}\right]\omega_{pg}$$

La troisième intégrale vaut :

$$\int_\Omega \dot\sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\dot\sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\dot\sigma_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

Dans le cas élastique isotrope, nous avons :

$$\sigma_{xx} = \Lambda_1\frac{\partial u_x}{\partial x}+\Lambda_2\frac{\partial u_y}{\partial y}+k\left(T-T_{ref}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \Lambda_2\frac{\partial u_x}{\partial x}+\Lambda_1\frac{\partial u_y}{\partial y}+k\left(T-T_{ref}\right)$$

$$\sigma_{zz} = \Lambda_2\frac{\partial u_x}{\partial x}+\Lambda_2\frac{\partial u_y}{\partial y}+k\left(T-T_{ref}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\Lambda_3\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

avec
$$\Lambda_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\Lambda_3 = \frac{E\nu}{1+\nu}$$

Détaillons le calcul de $\dot\sigma_{xx}$:

$$\begin{aligned}\dot\sigma_{xx} &= \Lambda_1\left(\overset{\bullet}{\frac{\partial u_y}{\partial y}}\right)+\Lambda_2\left(\overset{\bullet}{\frac{\partial u_y}{\partial y}}\right)+k\;\dot T\\ &= \Lambda_1\left(\frac{\partial \dot u_y}{\partial x}\right)+\Lambda_2\left(\frac{\partial \dot u_y}{\partial y}\right)+k\;\dot T\\ &-\Lambda_1\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right]-\Lambda_2\left[\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right]\end{aligned}$$

Comme il a été vu au [§3.2], les termes en $\dot{u}_x$ et $\dot{u}_y$ sont au premier membre. La même technique de dérivation appliquée à σ_{yy}, σ_{zz} et σ_{xy} incite à poser la notation LAGUGT pour l'expression $\frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}\left[\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta})+\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta})^t\right]$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LAGUGT}(1) &= \Lambda_1\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right]+\Lambda_2\left[\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right]\\
\mathrm{LAGUGT}(2) &= \Lambda_2\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right]+\Lambda_1\left[\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right]\\
\mathrm{LAGUGT}(3) &= \Lambda_2\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right]+\Lambda_2\left[\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right]\\
\mathrm{LAGUGT}(4) &= \frac{1}{2}\Lambda_3\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial y}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial \theta_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right]
\end{aligned}
$$

ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{xx} &= \Lambda_1\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}+\Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} \quad -\mathrm{LAGUGT}(1)+k\dot{T}\\
\dot{\sigma}_{yy} &= \Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}+\Lambda_1\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} \quad -\mathrm{LAGUGT}(2)+k\dot{T}\\
\dot{\sigma}_{zz} &= \Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}+\Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} \quad -\mathrm{LAGUGT}(3)+k\dot{T}\\
\dot{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{2}\Lambda_3\left[\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}+\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}\right] \quad -\mathrm{LAGUGT}(4)
\end{aligned}
$$

La contribution au second membre est donc :

$$
\begin{aligned}
I_{3,i,pg,x} &= \left[\left[\mathrm{LAGUGT}(1)-k\dot{T}\right]\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x}+\mathrm{LAGUGT}(4)\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y}\right]\omega_{pg}\\
I_{3,i,pg,y} &= \left[\mathrm{LAGUGT}(4)\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x}+\left[\mathrm{LAGUGT}(2)-k\dot{T}\right]\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y}\right]\omega_{pg}
\end{aligned}
$$

- En 2D axisymétrique

L'expression de départ est :

$$
\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s\mathbf{v} = \sigma_{rr}\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial r}+\sigma_{zz}\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z}+\sigma_{\theta\theta}\frac{\mathbf{v}_r}{r}+\sigma_{rz}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial r}\right)
$$

Nous retrouvons donc la même écriture formelle qu'en 2D plan, augmentée d'un terme complémentaire :

$$I_{1,i,pg,r} = -\left[\sigma_{rr}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial r} + \sigma_{rz}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta}(pg)\frac{v_i}{r}\right] div(\boldsymbol{\theta})(pg).\omega_{pg}$$

$$I_{1,i,pg,z} = -\left[\sigma_{rz}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial r} + \sigma_{zz}(pg)\frac{\partial v_i}{\partial z}\right] div(\boldsymbol{\theta})(pg).\omega_{pg}$$

La deuxième intégrale se décompose en :

$$\int_\Omega \sigma_{rr}\left(\frac{\partial \dot{v}_r}{\partial r}\right) + \sigma_{zz}\left(\frac{\partial \dot{v}_z}{\partial z}\right) + \sigma_{\theta\theta}\left(\frac{\dot{v}_r}{r}\right) + \sigma_{rz}\left(\frac{\partial \dot{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial r}\right)$$

En annexe 2, nous avons établi les expressions de chacune des dérivées lagrangiennes. Il suffit de les reporter ici, en les triant par type de composante :

$$\begin{aligned} I_{2,i,pg,r} = -\Bigg[&\left[\sigma_{rr}\frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \sigma_{rz}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}\right]\frac{\partial v_i}{\partial r} + \left[\sigma_{rr}\frac{\partial \theta_z}{\partial r} + \sigma_{rz}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}\right]\frac{\partial v_i}{\partial z} \\ &+ \sigma_{\theta\theta}\frac{\theta_r}{r^2}v_r\Bigg]\text{Poids} \end{aligned}$$

$$I_{2,i,pg,z} = -\left[\left[\sigma_{zz}\frac{\partial \theta_r}{\partial z} + \sigma_{rz}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}\right]\frac{\partial v_i}{\partial r} + \left[\sigma_{zz}\frac{\partial \theta_z}{\partial z} + \sigma_{rz}\frac{\partial \theta_z}{\partial r}\right]\frac{\partial v_i}{\partial z}\right]\omega_{pg}$$

La troisième intégrale vaut :

$$\int_\Omega \dot{\sigma}_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \dot{\sigma}_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}\frac{v_r}{r} + \dot{\sigma}_{rz}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

Dans le cas élastique isotrope, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \Lambda_1\frac{\partial u_r}{\partial r} + \Lambda_2\frac{\partial u_z}{\partial z} + \Lambda_2\frac{u_r}{r} + k\left(T - T_{ref}\right) \\ \sigma_{zz} &= \Lambda_2\frac{\partial u_r}{\partial r} + \Lambda_1\frac{\partial u_z}{\partial z} + \Lambda_2\frac{u_r}{r} + k\left(T - T_{ref}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \Lambda_2\frac{\partial u_r}{\partial r} + \Lambda_2\frac{\partial u_z}{\partial z} + \Lambda_1\frac{u_r}{r} + k\left(T - T_{ref}\right) \\ \sigma_{rz} &= \frac{1}{2}\Lambda_3\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \end{aligned}$$

où $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ valent comme précédemment.

Le détail du calcul de $\dot{\sigma}_{rr}$ donne :

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{rr} &= \Lambda_1\left(\frac{\partial \overset{\bullet}{u}_r}{\partial r}\right)+\Lambda_2\left(\frac{\partial \overset{\bullet}{u}_r}{\partial z}\right)+\Lambda_2\left(\frac{\overset{\bullet}{u}_r}{r}\right)+k\dot{T}\\
&= \Lambda_1\left(\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}\right)+\Lambda_2\left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\right)+\Lambda_2\left(\frac{\dot{u}_r}{r}\right)+k\dot{T}\\
&-\Lambda_1\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r}\right]-\Lambda_2\left[\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}+\frac{u_r\theta_r}{r^2}\right]
\end{aligned}$$

En reprenant l'équivalent axisymétrique de LAGUGT :

$$\begin{aligned}
\mathrm{LAGUGT}(1) &= \Lambda_1\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r}\right]+\Lambda_2\left[\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}+\frac{u_r\theta_r}{r^2}\right]\\
\mathrm{LAGUGT}(2) &= \Lambda_2\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r}+\frac{u_r\theta_r}{r^2}\right]+\Lambda_1\left[\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}\right]\\
\mathrm{LAGUGT}(3) &= \Lambda_2\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}\right]+\Lambda_1\left[\frac{u_r\theta_r}{r^2}\right]\\
\mathrm{LAGUGT}(4) &= \frac{1}{2}\Lambda_3\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial z}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial \theta_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial \theta_z}{\partial r}\right]
\end{aligned}$$

nous avons la même expression symbolique :

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{rr} &= \Lambda_1\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}+\Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}+\Lambda_2\frac{\dot{u}_r}{r}-\mathrm{LAGUGT}(1)+k\dot{T}\\
\dot{\sigma}_{zz} &= \Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}+\Lambda_1\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}+\Lambda_2\frac{\dot{u}_r}{r}-\mathrm{LAGUGT}(2)+k\dot{T}\\
\dot{\sigma}_{\theta\theta} &= \Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}+\Lambda_2\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}+\Lambda_1\frac{\dot{u}_r}{r}-\mathrm{LAGUGT}(3)+k\dot{T}\\
\dot{\sigma}_{rz} &= \frac{1}{2}\Lambda_3\left[\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial z}+\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial r}\right]-\mathrm{LAGUGT}(4)
\end{aligned}$$

La contribution au second membre est donc :

$$\begin{aligned}
I_{3,i,pg,r} &= \left[\left[\mathrm{LAGUGT}(1)-k\dot{T}\right]\frac{\partial v_i}{\partial r}+\left[\mathrm{LAGUGT}(3)-k\dot{T}\right]\frac{v_i}{r}\right.\\
&\qquad\left.+\,LAGUGT(4)\frac{\partial v_i}{\partial z}\right]\omega_{pg}\\
I_{3,i,pg,z} &= \left[\mathrm{LAGUGT}(4)\frac{\partial v_i}{\partial r}+\left[\mathrm{LAGUGT}(2)-k\dot{T}\right]\frac{\partial v_i}{\partial z}\right]\omega_{pg}
\end{aligned}$$

Terme du chargement en pression

$$I_1=\int_{\Gamma_3}\left[\nabla p.\boldsymbol{\theta}\right]\mathbf{v}+p\,div_s\boldsymbol{\theta}\,\mathbf{v}$$

Le chargement en pression est supposé connu, donc le tenseur qui exprime son gradient est calculable facilement :

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x} & \frac{\partial p_x}{\partial y} \\ \frac{\partial p_y}{\partial x} & \frac{\partial p_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla p.\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial x}\theta x + & \frac{\partial p_x}{\partial y}\theta y \\ \frac{\partial p_y}{\partial x}\theta x + & \frac{\partial p_y}{\partial y}\theta y \end{pmatrix}$$

$$[\nabla p.\theta]\mathbf{v} = \left(\frac{\partial p_x}{\partial x}\theta x + \frac{\partial p_x}{\partial y}\theta y\right)\mathbf{v}_x + \left(\frac{\partial p_y}{\partial x}\theta x + \frac{\partial p_y}{\partial y}\theta y\right)\mathbf{v}_y$$

Le calcul du terme $div_s\theta$ se fait comme dans le cas de la thermique. D'où les contributions :

$$I_{1,i,pg,x} = \left[\frac{\partial p_x}{\partial x}(pg)\theta x(pg) + \frac{\partial p_x}{\partial y}(pg)\theta y(pg) + p_x(pg) div_s \boldsymbol{\theta}(pg)\right] ui \;\; \omega_{pg}$$

$$I_{1,i,pg,y} = \left[\frac{\partial p_y}{\partial x}(pg)\theta x(pg) + \frac{\partial p_y}{\partial y}(pg)\theta y(pg) + p_y(pg) div_s \boldsymbol{\theta}(pg)\right] ui \;\; \omega_{pg}$$

En 2D axisymétrique, le gradient de P comporte un terme complémentaire en Pr / r. Cette composante serait à multiplier par la composante orthoradiale du champ $\boldsymbol{\theta}$. Celle-là étant nulle, il n'y a pas de contribution particulière et nous utilisons donc formellement la même expression qu'en 2D cartésien.

A4.2.4 Passage au gradient des contraintes

Connaissant la dérivée lagrangienne du champ de déplacement $\mathbf{u}$ et de la température, nous calculons la dérivée lagrangienne du tenseur des contraintes par (cf. [§4]).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left[\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^t\right] - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}\left(\mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{FT}(\nabla\mathbf{u},\nabla\boldsymbol{\theta})^t\right) + k\dot{T}\ \mathbf{Id}$$

Les expressions analytiques des différentes composantes du tenseur $\dot{\sigma}$ ont été vues au paragraphe précédent. Il suffit de les appliquer en post-traitement.

A4.2.5 Calcul de la dérivée eulérienne des contraintes

La dernière étape du traitement est la conversion lagrangien/eulérien pour la dérivée du tenseur des contraintes. Il suffit d'appliquer la formule :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\eta} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla\boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\theta}$$

Comme le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ n'a pas de composante orthoradiale, l'expression du produit $\nabla\boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\theta}$ est la même en 2D plan ou 2D axisymétrique. Nous avons ainsi :

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\eta}\right)_{i,j} = \dot{\sigma}_{i,j} - \frac{\partial\sigma_{i,j}}{\partial x}\theta x + \frac{\partial\sigma_{i,j}}{\partial y}\theta y$$

6 Bibliographie

[1] P. MIALON : "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta", EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n_3, 1998, pp. 1-28.

[2] I. EYMARD, A.M. DONORE : "Etude déterministe 2D axisymétrique de la cuve pour couplage mécano-fiabiliste en thermo-élasticité", Rapport EDF HI-74/98/001/0, 26 février 1998

[3] V. VENTURINI : "Etude probabiliste de la cuve par un couplage mécano-fiabiliste", Fiche projet P1-97-04

Page laissée intentionnellement blanche.