

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R7.07 : Analyse limite**  
**Document R7.07.01**

# Calcul de charge limite par la méthode de Norton-Hoff-Friaâ

---

## Résumé :

L'analyse limite permet de déterminer les chargements admissibles d'une structure, de géométrie fixe donnée, constituée d'un matériau ayant un critère de résistance. On considère le cas de chargements constitués de la somme d'une charge permanente et d'une autre paramétrée par le facteur de charge.

Après un rappel de la formulation théorique, on présente l'approche cinématique régularisée appliquée au critère de résistance de Von Mises (méthode de Norton-Hoff-Friaâ) et mise en œuvre dans le *Code\_Aster*. On pourra se reporter à [bib4] pour les diverses méthodes de régularisation possibles proposées dans la littérature. On expose ensuite le calcul des solutions de ce problème non linéaire et le post-traitement fournissant une estimation par valeur supérieure de la charge limite.

---

## Table des matières

---

1 Formulation théorique de l'analyse limite .....	3
1.1 Définition de la charge limite .....	3
1.2 Calcul de la charge limite par une approche cinématique.....	3
1.3 Régularisation de l'approche cinématique par la méthode de Norton-Hoff-Friaâ .....	5
2 Aspects numériques du calcul de la charge limite .....	7
2.1 Implantation dans le <i>Code_Aster</i> .....	7
2.2 Relation de comportement de Norton-Hoff dans STAT_NON_LINE .....	8
2.3 Post-traitement du calcul de la charge limite.....	10
3 Un exemple de validation.....	12
3.1 Problème de référence.....	12
3.2 Cas plan .....	12
3.2.1 Solution en analyse limite.....	12
3.2.2 Solution en analyse limite régularisée .....	13
3.3 Cas axisymétrique.....	13
3.3.1 Solution en analyse limite.....	14
3.3.2 Solution en analyse limite régularisée .....	14
3.4 Cas tridimensionnel.....	15
3.4.1 Solution en analyse limite.....	15
3.4.2 Solution en analyse limite régularisée .....	15
4 Bibliographie .....	16

# 1 Formulation théorique de l'analyse limite

## 1.1 Définition de la charge limite

On considère un solide occupant un domaine  $\Omega$  borné soumis à des chargements surfaciques  $\lambda \mathbf{F} + \mathbf{F}_0$  sur le bord  $\Gamma_f$  et des chargements de volume  $\lambda \mathbf{f} + \mathbf{f}_0$  sur  $\Omega$ . On distingue le chargement  $(\mathbf{F}, \mathbf{f})$ , paramétré par le réel positif  $\lambda$ , et le chargement permanent  $(\mathbf{F}_0, \mathbf{f}_0)$ . Les conditions de Dirichlet homogènes sont appliquées sur le bord complémentaire  $\Gamma_u$  de  $\partial\Omega$  (un déplacement imposé ou une déformation anélastique initiale - thermique, plastique...- n'ont pas d'effet sur le domaine des charges admissibles). On peut trouver en [bib5] plusieurs autres propriétés utiles.

Le matériau constitutif du solide possède un critère de résistance exprimé par une fonction scalaire des contraintes, négative pour les contraintes admissibles. Le critère utilisé pour un matériau du type élasto-plastique parfait à seuil de von Mises et retenu ici est :

$$g(\sigma) = J(\sigma) - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\sigma^D \cdot \sigma^D} - \sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} - \sigma_y$$

$\sigma^D$  est le déviateur du tenseur des contraintes,

$\sigma_y$  est le seuil de résistance en traction simple (comme une limite d'élasticité), éventuellement variable selon les zones du solide considéré.

$\sigma_i$  étant les contraintes principales de  $\sigma$ .

Etant donné ce critère de résistance on cherche à calculer la valeur limite de  $\lambda$ , appelée charge limite  $\lambda_{lim}$ , pour laquelle la structure peut supporter les chargements  $\lambda_{lim} \mathbf{F} + \mathbf{F}_0$  et  $\lambda_{lim} \mathbf{f} + \mathbf{f}_0$ .

Strictement parlant, la valeur  $\lambda_{lim}$  désigne la limite des chargements supportables, mais pour les matériaux obéissant au Principe du Travail Plastique Maximal, cette valeur est la limite des chargements supportés.

## 1.2 Calcul de la charge limite par une approche cinématique

En calcul à la rupture deux approches sont possibles : l'approche statique (en variables de contraintes) et l'approche cinématique (en variables de vitesses). Ces approches fournissent des bornes de la charge limite : minorant pour l'approche statique et majorant pour l'approche cinématique. Quand les deux fournissent le même résultat, la charge limite obtenue est exacte.

L'approche cinématique est celle utilisée dans le Code\_Aster à l'aide d'éléments finis en déplacements. Pour le chargement donné  $(\mathbf{F}, \mathbf{f})$ , on définit l'espace des vitesses cinématiquement admissibles et normalisées par :

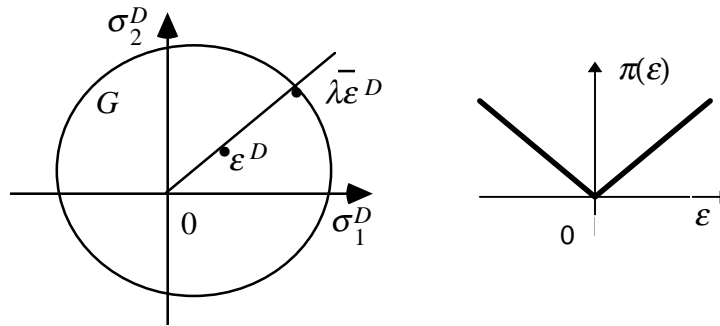
$$V_a^1 = \left\{ \mathbf{v} \text{ admissibles, } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u, \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds = 1 \right\}$$

La puissance du chargement permanent  $(\mathbf{F}_0, \mathbf{f}_0)$  est notée :  $L_0(\mathbf{v})$ .

A partir du critère de résistance en contraintes  $g(\sigma)$ , on définit :

- l'ensemble des contraintes admissibles par :  $G_{(x)} = \{ \sigma(x) , g(\sigma(x)) \leq 0 \}$   
(  $G_{(x)}$  est convexe pour le critère  $g$  )
- la fonction indicatrice :  $\Psi_G(\sigma(x)) = \begin{cases} 0 , & \text{si } \sigma(x) \in G_{(x)} \\ +\infty , & \text{si } \sigma(x) \notin G_{(x)} \end{cases}$
- la fonction d'appui :  $\pi(\varepsilon) = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^6} [\sigma \cdot \varepsilon - \Psi_G(\sigma)]$

Le Sup dans  $\pi(\varepsilon)$  ne peut être atteint que si  $\sigma$  est choisi dans  $G_{(x)}$ , tel que :  $\sigma = \lambda \varepsilon^D + \mu \text{Id}$   
(ce qui assure  $\sigma // \varepsilon^D$ ). L'optimum correspond à  $g(\bar{\sigma}) = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \sigma_y \sqrt{2/3} \cdot (\varepsilon^D \cdot \varepsilon^D)^{-1/2}$



**Figure 1.2-**Erreur! Argument de commutateur inconnu. : Optimum  $\bar{\sigma}$  et graphe de la fonction  $\pi(\varepsilon)$  en 1D

D'où la fonction d'appui :  $\pi(\varepsilon(\mathbf{v})) = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v})} + \sup_{\mu \in \mathbb{R}} (\mu \cdot \text{div } \mathbf{v})$ . On observe que la fonction  $\pi(\varepsilon)$  n'est pas différentiable en  $\mathbf{0}$ .

On ne traite pas à ce jour dans le Code\_Aster les éventuelles surfaces internes de discontinuité au sein du solide  $\Omega$  [bib 4].

L'approche cinématique est définie à l'aide de la fonctionnelle convexe  $S_e(\mathbf{v})$ , positivement homogène de degré un, pour  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_a^1$  défini sur le domaine entier :

$$S_e(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \pi(\varepsilon(\mathbf{v})) d\Omega - L_0(\mathbf{v})$$

Cette fonctionnelle est l'intégrale sur le domaine de la fonction d'appui  $\pi$  du convexe  $G_{(x)}$ , calculée en  $\varepsilon(\mathbf{v})$  et s'interprète comme la puissance résistante maximale dans le champ de vitesses  $\mathbf{v}$  (la contribution de résistance d'interface sur des surfaces de discontinuité est supposée nulle). La fonction d'appui  $\pi$  est positivement homogène de degré 1, et donc la fonctionnelle  $S_e(\mathbf{v})$  aussi par conséquence.

Avec le critère de Von Mises la fonctionnelle de puissance  $S_e(\mathbf{v})$  est :

$$S_e(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[ \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})} + \sup_{q \in R} (q \cdot \text{div } \mathbf{v}) \right] d\Omega - L_0(\mathbf{v}) \quad \text{éq 1.2-1}$$

où l'on constate que seuls les champs  $\mathbf{v}$  appartenant à  $C = \left\{ \mathbf{v} \in V_a^1, \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$  fournissent des valeurs finies. Les champs  $\mathbf{v}$  doivent donc vérifier la condition dite d'incompressibilité  $\text{div } \mathbf{v} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = 0$ . C'est pourquoi il faut utiliser les éléments incompressibles pour un calcul de charge limite avec le critère de Von Mises. Le traitement de l'incompressibilité est détaillé dans [R3.06.05].

La charge limite  $\lambda_{\text{lim}}$  donnée par l'approche cinématique est :

$$\lambda_{\text{lim}} = \inf_{\mathbf{v} \in V_a^1} S_e(\mathbf{v}) = \inf_{\substack{\mathbf{v} \in V_a^1 \\ L(\mathbf{v}) > 0}} \frac{S_e(\mathbf{v})}{L(\mathbf{v})} = \sup_{\lambda > 0} \inf_{\mathbf{v} \in V_a^1} (S_e(\mathbf{v}) - \lambda(L(\mathbf{v}) - 1))$$

A l'optimum on obtient une solution  $\mathbf{u}$  et la charge limite  $\lambda_{\text{lim}}$  (non unicité de  $\mathbf{u}$  mais unicité de  $\lambda_{\text{lim}}$ ). Ainsi, tout chargement  $L_0(\mathbf{v}) + \lambda L(\mathbf{v})$  avec  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{lim}}$  est supportable. Au-delà de  $\lambda_{\text{lim}}$ , le problème d'équilibre n'a pas de solution.

**Remarque :**

Il existe des situations où, même si  $L_0(\mathbf{v})$  n'est pas supportable seul, la combinaison  $L_0(\mathbf{v}) + \lambda L(\mathbf{v})$ , pour  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ , le devient sur un certain intervalle, et pas uniquement pour deux chargements parallèles.

**Remarque :**

La charge limite calculée pour un problème bidimensionnel, en déformations planes, est nécessairement supérieure à celle obtenue pour ce problème modélisé en contraintes planes. Ce résultat fournit donc un majorant. Si l'on souhaite traiter le problème en contraintes planes, il est nécessaire alors de faire l'approche cinématique sur une modélisation tridimensionnelle.

## 1.3 Régularisation de l'approche cinématique par la méthode de Norton-Hoff-Friaâ

La mise en œuvre numérique de l'approche cinématique nécessite la minimisation de la fonctionnelle non-différentiable  $S_e(\mathbf{v})$ . De nombreuses techniques de régularisation existent [bib4]. La méthode de Norton-Hoff-Friaâ est utilisée ici [bib2], [bib7]. Elle repose sur des travaux précurseurs de Casciaro en 1971. Elle consiste à remplacer la fonction d'appui  $\pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  par la fonction d'appui régularisée et différentiable  $\pi^{NH}(\boldsymbol{\varepsilon})$ . Elle est réglable par un paramètre de régularisation  $m$  ( $1 \leq m \leq 2$ ), dont la valeur limite  $m \rightarrow 1^+$  conduit à la convergence vers la fonction d'appui  $\pi(\boldsymbol{\varepsilon})$  :

$$\pi^{NH}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{k^{1-m}}{m} (\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))^m$$

Dans le Code\_Aster on utilise le paramètre de régularisation  $n$  avec  $n = \frac{1}{(m-1)}$  et on choisit  $k = \frac{\sigma_y^2}{3\mu}$  pour retrouver le problème élastique incompressible quand  $m=2$  soit  $n=1$  ( $2\mu$  étant le coefficient de rigidité de cisaillement).

On note l'espace des vitesses admissibles adapté au problème d'écoulement visqueux pour la loi de Norton-Hoff d'ordre  $m$  :

$$V_a^{m1} = \left\{ \mathbf{v} \in L^m(\Omega), \text{ et } \varepsilon(\mathbf{v}) \in L^m(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u, \quad L(\mathbf{v}) = 1 \right\}$$

On définit sur cet espace la fonctionnelle régularisée  $S_e^m(\mathbf{v})$  :

$$S_e^m(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{k^{1-m}}{m} \pi(\varepsilon(\mathbf{v}))^m d\Omega - L_0(\mathbf{v})$$

Le problème de minimisation  $\inf_{\mathbf{v} \in V_a^{m1}} [S_e^m(\mathbf{v})]$  est bien posé grâce aux propriétés des espaces  $L^m(\Omega)$  et a une solution  $\mathbf{u}_m$ , pour laquelle la valeur de l'Inf atteint est :  $\lambda_m$ . On montre que ce problème peut également s'écrire sous la forme de la recherche du point-selle  $(\lambda_m, \mathbf{u}_m, p_m)$  du lagrangien suivant :

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} \inf_{\mathbf{v} \in V_a} \sup_{q \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{A(m)}{m} \cdot (\sqrt{\varepsilon(\mathbf{v})} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}))^m d\Omega + \int_{\Omega} q \cdot \text{div } \mathbf{v} d\Omega - L_0(\mathbf{v}) - \lambda(L(\mathbf{v}) - 1)$$

éq 1.3-1

avec :  $A(m) = k^{1-m} \left(\frac{2}{3}\right)^{m/2} \sigma_y^m = \sigma_y^{2-m} (3\mu)^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{m/2}$ . En pratique on prend la suite :

$m = 1 + 10^{-i}$	2	1,1	1,01	1,001	...	1
$n = \frac{1}{m-1}$	1	10	100	1000	...	$\infty$
$A(m)$	$2\mu$				...	$\sigma_y \sqrt{\frac{2}{3}}$

On remarque que  $A(m)$  est croissant avec  $m$  (si  $E \geq \sigma_y$ ) et homogène à une contrainte, et reste borné quand  $n \rightarrow +\infty$ . Si on choisit  $E = \sigma_y$  alors  $A(m) = \sigma_y \left(\frac{2}{3}\right)^{m/2}$ . Ce lagrangien permet d'imposer directement dans l'opérateur la condition d'incompressibilité et la normalisation à 1 de la puissance des chargements. On construit alors une suite décroissante de  $\lambda_m$  et la charge limite  $\lambda_{\text{lim}}$  est la limite de cette suite quand  $m \rightarrow 1^+$  (soit  $n \rightarrow +\infty$ ) :

$$\lambda_{\text{lim}} = \lim_{m \rightarrow 1} \left( \inf_{\mathbf{v} \in V_a^{m1}} [S_e^m(\mathbf{v})] \right) = \lim_{m \rightarrow 1} (S_e^m(\mathbf{u}_m))$$

éq 1.3-2

Pour la démonstration on se reportera à [bib4] et [bib7]. On montre aussi la propriété suivante des solutions de [éq 1.3-1]. Ainsi si on amplifie le chargement  $\mathbb{L} \rightarrow \beta \mathbb{L}$ , quand  $\mathbb{L}_0 = 0$ , les solutions ont la dépendance suivante en fonction de  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(\beta) &= \beta^{-1} \mathbf{u}_m(1) & ; & & p_m(\beta) &= \beta^{1-m} p_m(1) \\ \sigma^D(\mathbf{u}_m(\beta)) &= \beta^{1-m} \sigma^D(\mathbf{u}_m(1)) & ; & & S_e^m(\mathbf{u}_m(\beta)) &= \beta^{-m} S_e^m(\mathbf{u}_m(1)) \end{aligned}$$

L'un des atouts essentiels de cette méthode de régularisation réside dans les propriétés d'emboîtement des espaces  $L^m(\Omega)$ , ce qui permet d'avoir des propriétés intéressantes pour la suite des  $\lambda_m$ , voir le paragraphe 2.3. Ainsi on démontre les propriétés suivantes [bib7], pour un domaine borné  $\Omega$ , en appelant  $|\Omega| = \int_{\Omega} d\Omega$  et  $\|\Omega\|_m = \int_{\Omega} A(m) d\Omega$  :

Pour tous  $1 \leq m$  et  $1 \leq r \leq s$  et toute fonction  $\mathbf{u}$  de  $V_a^m$ , on a :

$$\int_{\Omega} A(m) \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})} d\Omega \leq \|\Omega\|_m^{1-\frac{1}{r}} \left( \int_{\Omega} A(m) (\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}))^{r/2} d\Omega \right)^{\frac{1}{r}} \leq \|\Omega\|_m^{1-\frac{1}{s}} \left( \int_{\Omega} A(m) (\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}))^{s/2} d\Omega \right)^{\frac{1}{s}} \quad \text{éq 1.3-3}$$

$$\int_{\Omega} \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})} d\Omega \leq |\Omega|^{1-\frac{1}{m}} \left( \int_{\Omega} \sigma_y^m \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})} \right)^m d\Omega \right)^{\frac{1}{m}} \quad \forall \mathbf{u} \quad \text{éq 1.3-4}$$

Ces propriétés sont intéressantes car applicables dans le cas où le matériau est hétérogène, et on peut considérer la limite de résistance soit comme mesure (masse volumique) soit comme faisant partie de l'énergie de déformation.

## 2 Aspects numériques du calcul de la charge limite

### 2.1 Implantation dans le Code\_Aster

Pour réaliser un calcul dans le Code\_Aster en analyse limite avec la méthode de régularisation de Norton-Hoff-Friaâ avec le critère de résistance de Von Mises, il faut :

- définir le modèle 2D (plan ou axis) ou 3D avec les éléments finis incompressibles,
- définir les caractéristiques des matériaux (module d'Young  $E \geq \sigma_y$ , coefficient de Poisson  $\nu$  proche de 0,5 pour assurer le fonctionnement des éléments finis incompressibles [R3.06.03], limite de résistance  $\sigma_y$  et coefficient de Norton-Hoff  $n$ ), le coefficient de cisaillement est déduit :  $2\mu = 2E/3$ . Il faut noter que la charge limite est indépendante de  $E$  et  $\nu$ ,
- définir le chargement permanent et celui qui est paramétré par  $\lambda$ ,
- définir la normalisation de la puissance du chargement paramétré (mot clé LIAISON\_CHAMNO de la commande AFFE\_CHAR\_MECA),
- réaliser un calcul non-linéaire avec la relation de comportement de Norton-Hoff avec la commande STAT\_NON\_LINE [U4.32.01],
- post-traiter le calcul pour obtenir la charge limite avec la commande POST\_ELEM [U4.61.04].

## 2.2 Relation de comportement de Norton-Hoff dans STAT\_NON\_LINE

Le problème s'écrit sous forme variationnelle de la façon suivante :

Pour un  $n = 1 / (m - 1)$  donné, trouver  $(\lambda_m, \mathbf{u}_m, p_m) \in \mathbb{R} \times V_a \times L^2(\Omega)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} A(m) \cdot \left( \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}_m) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_m)} \right)^{m-2} \varepsilon(\mathbf{u}_m) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} p_m \cdot \text{div } \mathbf{v} d\Omega - \lambda_m L(\mathbf{v}) = L_0(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_a \\ \int_{\Omega} q \cdot \text{div } \mathbf{u}_m d\Omega = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \\ L(\mathbf{u}_m) = 1 \end{array} \right.$$

éq 2.2-1

Ce problème admet une solution unique pour tout  $n \geq 1$  (voir [bib4]). Pour  $m=2$  ou  $n=1$  le problème est de type élasticité linéaire incompressible.

On obtient donc une estimation de la charge limite par valeur supérieure, le champ  $\mathbf{u}_m$  donnant une idée d'un mode de ruine.

Pour le traitement de l'incompressibilité, on se reportera au document [R3.06.05]. L'équation traitée est en fait :

$$\int_{\Omega} q \cdot \text{div } \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{q \cdot p}{\xi} d\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad \text{le terme } \int_{\Omega} \frac{q \cdot p}{\xi} d\Omega \text{ permettant d'éviter de mettre}$$

en défaut le solveur employé et correspondant à un choix du coefficient de Poisson  $\nu = 0.4999...$  Les solutions ne sont donc que quasi-incompressibles.

Le principe de fonctionnement de l'algorithme général de STAT\_NON\_LINE est décrit précisément dans [R5.03.01]. On aboutit au problème incrémental suivant :

Trouver  $(\Delta\lambda, \Delta\mathbf{u}, \Delta p) \in \mathbb{R} \times V_0 \times Q$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega + \mathbf{B}(\mathbf{v}, p + \Delta p) - (\lambda + \Delta\lambda) L_1(\mathbf{v}) = (L_0 + \Delta L_0)(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, q) = \mathbf{D} + \Delta\mathbf{D} \quad \forall q \in Q \\ L_1(\mathbf{v}) = 1 \end{array} \right.$$

- $\mathbf{B}$  est un opérateur linéaire qui contient les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, l'incompressibilité,
- $\mathbf{D}$  décrit les données imposées à la solution (conditions aux limites de Dirichlet, incompressibilité),
- $L_0$  est le chargement permanent et  $L_1$  le chargement piloté par le paramètre  $\lambda$ ,
- $V_0$  et  $Q$  sont les espaces de fonctions discrétisées sur la base d'éléments finis, et sont donc définis par un vecteur  $(\mathbf{U}, \mathbf{P})$  de degrés de liberté.



Le tenseur des contraintes  $\sigma(\mathbf{u})$  vérifie la relation de comportement de Norton-Hoff. Le déviateur des contraintes associé à la vitesse de déformation est :

$$\sigma^D(\mathbf{u}) = A(m) \cdot \left( \sqrt{\varepsilon^D(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon^D(\mathbf{u})} \right)^{m-2} \cdot \varepsilon^D(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \sigma^D(\mathbf{u}) = A(m)^n \cdot \left( \sqrt{\sigma^D \cdot \sigma^D} \right)^{1-n} \cdot \varepsilon^D(\mathbf{u})$$

**éq 2.2-2**

Le problème est résolu par la méthode de Newton, après discrétisation implicite directe des relations de comportement [R5.03.02].

La phase de prédiction consiste à résoudre le système suivant, à partir de l'état actuel  $(\mathbf{u}, p)$  pour obtenir le premier itéré :  $(\Delta \mathbf{u}_0, \Delta p_0)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon(\mathbf{u})} \cdot \varepsilon(\Delta \mathbf{u}_0) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \Delta p_0) - \Delta \lambda L_1(\mathbf{v}) = \Delta L_0(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_o \\ \mathbf{B}(\Delta \mathbf{u}_0, q) = \Delta \mathbf{D} \quad \forall q \in Q \\ L_1(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_0) = 1 \end{array} \right.$$

L'option RIGI\_MECA\_TANG fournit l'opérateur tangent  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon(\mathbf{u})}$ .

On utilise la rigidité tangente, appliquée à un tenseur déviatorique  $\mathbf{e}$  :

$$\frac{d\sigma^D}{d\varepsilon^D} \cdot \mathbf{e} = A(r) \cdot \left( \sqrt{\varepsilon^D(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon^D(\mathbf{u})} \right)^{r-2} \cdot \left( \mathbf{e} + (r-2) \frac{\varepsilon^D(\mathbf{u}) \otimes \varepsilon^D(\mathbf{u})}{\varepsilon^D(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon^D(\mathbf{u})} \cdot \mathbf{e} \right)$$

Puis on traite la phase de correction, pour l'itération  $i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_i)} \cdot \varepsilon(\Delta \mathbf{u}_{i+1} - \Delta \mathbf{u}_i) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \Delta p_{i+1}) - (\lambda + \Delta \lambda) L_1(\mathbf{v}) = (L_0 + \Delta L_0)(\mathbf{v}) \\ \quad - \left[ \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_i) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega + \mathbf{B}(\mathbf{v}, p) \right] \quad \forall \mathbf{v} \in V_o \\ \mathbf{B}(\Delta \mathbf{u}_{i+1}, q) = \mathbf{D} + \Delta \mathbf{D} - \mathbf{B}(\mathbf{u}, q) \quad \forall q \in Q \\ L_1(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_{i+1}) = 1 \end{array} \right.$$

L'option RAPH\_MECA fournit le second membre  $\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_i) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega$ . Celui-ci est construit par appel au sous-programme du Code\_Aster de type NICOMP, qui calcule le champ de contraintes propre à la loi de comportement utilisée. L'option FULL\_MECA fournit en plus l'opérateur tangent  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_i)}$ . On

peut décider de l'actualisation de cet opérateur à certaines itérations  $i$  seulement, pour éviter un assemblage coûteux trop fréquent.

Dans notre cas, la résolution peut se faire de façon directe non incrémentale, mais on a intérêt à réactualiser la rigidité tangente de temps à autre pour accélérer la convergence. Le solveur à employer est : 'LDLT', en ayant pris soin d'avoir précisé que la normalisation soit placée à la fin du système (mot clé : NUME\_LAGR : 'APRES' dans LIAISON\_CHAMNO).

On peut décider aussi de faire des reprises, à partir d'une solution  $(\mathbf{u}, p)$  obtenue précédemment, même provenant d'une résolution pour un autre paramètre  $n$  (calculs moins coûteux et meilleure convergence).

Dans tous les cas, il est conseillé de commencer de faire un calcul sur un maillage grossier pour évaluer l'effet du paramètre  $n$  sur  $\lambda_m$ .

## 2.3 Post-traitement du calcul de la charge limite

Ayant obtenu la solution  $(\lambda_m, \mathbf{u}_m, p_m)$ , pour un  $n$  donné, il reste à utiliser la suite des  $\lambda_m$  pour construire l'approximation de la charge limite. Pour cela on exploite les propriétés [éq 1.3-2], [éq 1.3-3], le fait que  $A(m)$  est croissante et la propriété issue de la minimisation [éq 1.3-1] (voir [bib7]).

De ces deux dernières, avec  $1 \leq r \leq s$ , on déduit que pour  $\mathbf{u}_r$  et  $\mathbf{u}_s$  solutions respectives (vérifiant aussi la condition d'incompressibilité et de normalisation) de [éq 1.3-1] pour  $m = r$  et  $m = s$  :

$$\left( \int_{\Omega} A(r) (\varepsilon(\mathbf{u}_r) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_r))^{r/2} d\Omega \right) \leq \left( \int_{\Omega} A(s) (\varepsilon(\mathbf{u}_s) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_s))^{s/2} d\Omega \right)$$

Associée à la propriété [éq 1.3-2], on tire pour  $1 \leq r \leq s$  :

$$\int_{\Omega} A(r) \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}_r) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_r)} d\Omega \leq \|\Omega\|_r^{1-\frac{1}{r}} \left( \int_{\Omega} A(r) (\varepsilon(\mathbf{u}_r) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_r))^{r/2} d\Omega \right)^{\frac{1}{r}} \leq \|\Omega\|_s^{1-\frac{1}{s}} \left( \int_{\Omega} A(s) (\varepsilon(\mathbf{u}_s) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_s))^{s/2} d\Omega \right)^{\frac{1}{s}}$$

**éq 2.3-1**

On note les termes  $\tilde{\lambda}_m$  de la suite, que l'on calcule en pratique par post-traitement à l'aide de  $\mathbf{u}_m$  (la puissance extérieure étant unitaire) :

$$\tilde{\lambda}_m = \|\Omega\|_m^{1-\frac{1}{m}} \left( \int_{\Omega} A(m) (\varepsilon(\mathbf{u}_m) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_m))^{m/2} d\Omega \right)^{\frac{1}{m}} - L_0(\mathbf{u}_m)$$

**éq 2.3-2**

Cette suite  $\tilde{\lambda}_m$  est donc décroissante pour  $n \rightarrow +\infty$  et on montre [bib7] qu'elle converge vers  $\lambda_{\lim}$ , ce qui permet un bon contrôle. Comme on peut minorer (sachant que  $A(1) = \sigma_y \sqrt{\frac{2}{3}}$ ) le premier terme de [éq 2.3-1] :

$$\lambda_{\lim} \leq \int_{\Omega} \sigma_y \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon(\mathbf{u}_m) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_m) d\Omega - L_0(\mathbf{u}_m) \leq \tilde{\lambda}_m$$

on calcule donc la suite  $\hat{\lambda}_m$  décroissante pour  $n \rightarrow +\infty$  (paramètre 'CHAR\_LIMI\_SUP' de la table issue de POST\_ELEM [U4.61.04]) et convergeant aussi vers  $\lambda_{\lim}$ ,

$$\lambda_{\lim} \leq \hat{\lambda}_m = \int_{\Omega} \sigma_y \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon(\mathbf{u}_m) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_m) d\Omega - L_0(\mathbf{u}_m) \quad \text{éq 2.3-3}$$

On juge de la qualité de l'approximation de la charge limite  $\lambda_{\lim}$  par comparaison des différentes valeurs de  $\hat{\lambda}_m$  qui convergent vers  $\lambda_{\lim}$  par excès (en  $n \rightarrow +\infty$ ). Ces termes sont calculés par intégration numérique aux points de Gauss des éléments finis.

Une autre interprétation de l'intérêt que cette suite apporte réside dans le fait qu'elle exploite directement l'expression de la fonction d'appui du convexe de résistance, c'est-à-dire la puissance dissipable dans les modes de ruine potentielle, appliquée aux solutions incompressibles et normalisées calculées  $\mathbf{u}_m$ .

Dans le cas où le chargement permanent (paramètre 'PUIS\_PERMANENTE') est nul :  $L_0 = 0$ , on peut facilement exploiter le champ de contraintes (quasiment statiquement admissible) calculé avec la solution  $\mathbf{u}_m$  et obtenir une valeur par estimation de la charge limite, qui serait lui serait nécessairement inférieure si l'équilibre était vérifié exactement (voir [bib4]). On calcule donc la suite  $\underline{\lambda}_m$  (paramètre 'CHAR\_LIMI\_ESTIMEE' de la table issue de POST\_ELEM [U4.61.04]), qui n'a en revanche pas de propriétés de monotonie :

$$\underline{\lambda}_m = \int_{\Omega} \frac{A(m)}{m} \cdot \left( \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}_m) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_m)} \right)^m d\Omega \cdot \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \sigma^D(\mathbf{u}_m) \cdot \sigma^D(\mathbf{u}_m)}{\sigma_y} \right) \right)^{-1} \leq \hat{\lambda}_m \quad \text{éq 2.3-4}$$

Cette maximisation (de la fonction appelée jauge du convexe de résistance) n'est calculée qu'aux points de Gauss des éléments finis. Aussi la valeur obtenue, pour chaque  $m$ , inférieure à  $\hat{\lambda}_m$  [bib4], ne peut être considérée que comme une indication.

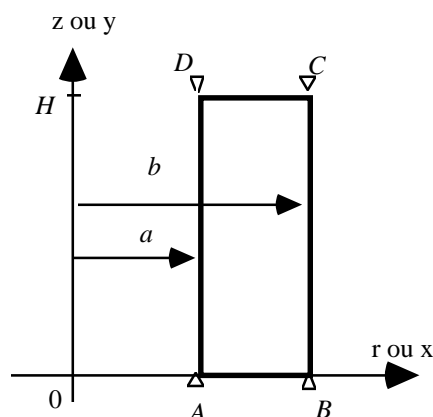
## 3 Un exemple de validation

### 3.1 Problème de référence

On considère une plaque rectangulaire ou un hexaèdre ou un cylindre axisymétrique. Le critère de résistance du matériau constitutif homogène vérifie le critère de von Mises (avec pour seuil  $\sigma_y$ ). La structure est soumise à des pressions sur le bord horizontal  $-\alpha f$  et sur le bord vertical  $-(1-\alpha)f$  avec  $\alpha \geq 0.5$ . Sur ce problème très simple, un calcul analytique permet d'obtenir la charge limite exacte dans la direction du chargement, ainsi que les estimations produites par la méthode de régularisation. Pour plus de détails on se reportera à [bib4] et [bib5]. Cet exemple de validation correspond au test SSNV124 [V6.04.124].

La géométrie est définie par :

- Rayon intérieur :  $a = 1\text{mm}$ ,
- Rayon extérieur :  $b = 2\text{mm}$ , épaisseur  $b - a = 1\text{mm}$ ,
- Hauteur :  $H = 4\text{mm}$ .



### 3.2 Cas plan

La structure est soumise à des pressions sur les bords horizontal :  $-\alpha f$  et vertical :  $-(1-\alpha)f$ , avec :  $\alpha \geq 1/2$ , et on exerce un blocage en  $z$ . On considère deux façons de contrôler le chargement :

- cas1 : les deux pressions horizontale et verticale sont paramétrées par  $\lambda$ ,
- cas2 : la pression horizontale est paramétrée par  $\lambda$ , tandis que la pression verticale est constante  $-(1-\alpha)f_0$ , avec  $f_0 = \lambda_0 f$ .

#### 3.2.1 Solution en analyse limite

La solution est homogène (contraintes biaxées  $\sigma$  :  $\sigma_{xx} = \alpha f$ ,  $\sigma_{yy} = (1-\alpha)f$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ , déformations planes  $\varepsilon$ ). On obtient [bib4] la charge limite dans ces directions de chargement, pour le critère de von Mises, en déformations planes, avec le seuil  $\sigma_y$ :

$$\text{cas1 : } \lambda_{\text{lim}} \cdot f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3|2\alpha - 1|} \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

$$\text{cas2 : } \lambda_{\text{lim}} \cdot f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3|\alpha|} + \frac{1-\alpha}{|\alpha|} \lambda_0 \cdot f \quad \text{éq 3.2.1-2}$$

On vérifie que si l'on prend  $\lambda_0 = \lambda_{\text{lim}}$  dans le cas2, on retrouve alors le cas1.

### 3.2.2 Solution en analyse limite régularisée

La solution est homogène. Les déformations planes sont nécessairement de la forme :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})} = |\gamma| \sqrt{2} \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

Par la loi de Norton-Hoff, on obtient les contraintes déviatoriques :

$$\sigma^D = A(m) \sqrt{2}^{m-2} |\gamma|^{m-2} \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\sigma^D\|_{VM} = A(m) \sqrt{2}^{m-2} |\gamma|^{m-1} \sqrt{3} \quad \text{éq 3.2.2-2}$$

La normalisation du chargement conduit à :

$$\text{cas1 : } \mathcal{F} = \frac{1}{H(b-a)(2\alpha-1)} \quad \text{éq 3.2.2-3}$$

$$\text{cas2 : } \mathcal{F} = \frac{1}{H(b-a)\alpha} \quad \text{éq 3.2.2-4}$$

Les termes de la suite  $\hat{\lambda}_m$  de charge limite dans ces deux paramétrages du chargement sont alors :

$$\text{cas1 : } \hat{\lambda}_m \cdot f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3|2\alpha-1|} \quad \forall m \quad \text{éq 3.2.2-5}$$

$$\text{cas2 : } \hat{\lambda}_m \cdot f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3|\alpha|} + \frac{1-\alpha}{|\alpha|} \lambda_0 \cdot f \quad \forall m \quad \text{éq 3.2.2-6}$$

L'invariance en fonction de  $m$  observée ici (ce qui est un cas particulier) résulte du fait qu'on se trouve dans une situation isostatique. Dans le cas1, on peut aussi exploiter la suite des  $\underline{\lambda}_m$  :

$$\text{cas1 : } \underline{\lambda}_m \cdot f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3m|2\alpha-1|} \quad \text{éq 3.2.2-7}$$

On obtient donc la charge limite  $\lambda_{\text{lim}}$  exacte quand  $m \rightarrow 1^+$ .

### 3.3 Cas axisymétrique

En 2D axisymétrique on considère la même géométrie, mais le solide, auquel on impose un blocage axial complet, est uniquement soumis à une pression sur la paroi interne :  $\alpha f$  paramétrée par  $\lambda$ .

### 3.3.1 Solution en analyse limite

On obtient [bib5] la charge limite dans cette direction de chargement, pour le critère de von Mises, en axisymétrie et déformations axiales nulles, avec le seuil  $\sigma_y$  :

$$\lambda_{\text{lim}} \cdot \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_y \ln \frac{b}{a} \quad \text{éq 3.3.1-1}$$

### 3.3.2 Solution en analyse limite régularisée

La solution est homogène. Le déplacement n'étant que radial, les déformations isochores sont nécessairement de la forme :

$$u_r(r) = \frac{\gamma}{r} ; \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\gamma}{r^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})} = \frac{|\gamma|}{r^2} \sqrt{2} \quad \text{éq 3.3.2-1}$$

Par la loi de Norton-Hoff, on obtient les contraintes déviatoriques :

$$\sigma^D = A(m) \sqrt{2}^{m-2} |\gamma|^{m-2} \gamma \cdot r^{-2m+2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \|\sigma^D\|_{VM} = A(m) \sqrt{2}^{m-2} |\gamma|^{m-1} \cdot r^{-2m+2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{éq 3.3.2-2}$$

Les équations d'équilibres axial et radial conduisent à déterminer la contrainte moyenne :

$$\text{tr} \sigma(r) = 3A(m) \sqrt{2}^{m-2} \cdot \gamma \cdot |\gamma|^{m-2} \cdot r^{-2m+2} \cdot \frac{2-m}{1-m} + 3\tau \quad \text{éq 3.3.2-3}$$

où  $\tau$  est une constante, qui est calculée à partir de la condition aux limites de pression nulle en paroi externe. On obtient alors les composantes des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \beta (b^{-2m+2} - r^{-2m+2}) \\ \sigma_{zz}(r) = \beta (b^{-2m+2} - (2-m)r^{-2m+2}) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \beta (b^{-2m+2} - (3-2m)r^{-2m+2}) \end{cases} \quad \text{avec: } \beta = \frac{A(m) \sqrt{2}^{m-2}}{(m-1)(\alpha f H)^{m-1}} \quad \text{éq 3.3.2-4}$$

La normalisation du chargement conduit à :  $\alpha f \gamma = \frac{1}{H}$ .

Les termes de la suite  $\hat{\lambda}_m$  de charge limite pour ce chargement sont alors :

$$\hat{\lambda}_m \cdot \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_y H \int_a^b \frac{|\gamma|}{r^2} r dr = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_y \ln \frac{b}{a} \quad \forall m \quad \text{éq 3.3.2-5}$$

Les termes de la suite  $\underline{\lambda}_m$  de charge limite pour ce chargement sont :

$$\underline{\lambda}_m \cdot \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3m} \sigma_y \int_a^b r^{-2m} r dr \cdot \left( \text{Max}_{[a,b]}(r^{-2m+2}) \right)^{-1} = \frac{\sigma_y \sqrt{3}}{3m(1-m)} \frac{b^{-2m+2} - a^{-2m+2}}{a^{-2m+2}} \quad \text{éq 3.3.2-6}$$

En  $m \rightarrow 1^+$ , on trouve :  $\underline{\lambda}_{1^+} \cdot \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_y \ln \frac{b}{a}$ , c'est-à-dire la même valeur que  $\hat{\lambda}_m$  et  $\lambda_{\text{lim}}$ .

## 3.4 Cas tridimensionnel

En 3D on considère la même géométrie, mais le solide, d'épaisseur unitaire, est libre dans la direction antipiane  $z$ . Le solide est soumis à des pressions sur les parois horizontale :  $-\alpha f$  et verticale :  $-(1-\alpha)f$ , avec :  $\alpha \geq 1/2$ . Les deux pressions horizontale et verticale sont paramétrées par  $\lambda$ .

### 3.4.1 Solution en analyse limite

La solution est homogène (contraintes biaxées  $\sigma$  :  $\sigma_{xx} = \alpha f$ ,  $\sigma_{yy} = (1-\alpha)f$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\sigma_{zz} = 0$ , déformations  $\varepsilon$ ). On obtient la charge limite dans cette direction de chargement [bib5], pour le critère de von Mises, avec le seuil  $\sigma_y$  :

$$\lambda_{\text{lim}} \cdot f = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3\alpha^2 - 3\alpha + 1}} \quad \text{éq 3.4.1-1}$$

### 3.4.2 Solution en analyse limite régularisée

La solution est homogène. Les déformations isochores sont nécessairement de la forme :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -1-\delta \end{pmatrix} ; \quad \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})} = |\gamma| \sqrt{2(1+\delta+\delta^2)} \quad \text{éq 3.4.2-1}$$

Par la loi de Norton-Hoff, on obtient les contraintes déviatoriques :

$$\sigma^D = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -1-\delta \end{pmatrix} ; \quad \|\sigma^D\|_{VM} = |\beta| \sqrt{3(1+\delta+\delta^2)} \quad \text{avec : } \beta = A(m) \sqrt{2(1+\delta+\delta^2)}^{m-2} |\gamma|^{m-2} \gamma \quad \text{éq 3.4.2-2}$$

On déduit de  $\sigma_{zz} = 0$  :  $\text{tr } \sigma = -3\beta(1+\delta)$ . D'où les contraintes :  $\sigma = \beta \cdot \begin{pmatrix} 2+\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

L'équilibre du solide impose que  $\sigma_{xx} \cdot (1-\alpha) = \sigma_{yy} \cdot \alpha$ . On en déduit le paramètre  $\delta = \frac{3\alpha-2}{1-3\alpha}$ .

La normalisation du chargement conduit à :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{H(b-a)(\alpha+\delta(1-\alpha))} \quad \text{éq 3.4.2-3}$$

Les termes de la suite  $\hat{\lambda}_m$  de charge limite dans ce cas de chargement sont ainsi identiques à :

$$\hat{\lambda}_m \cdot f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3} \cdot \frac{\sqrt{2(1+\delta+\delta^2)}}{\alpha+\delta(1-\alpha)} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3\alpha^2 - 3\alpha + 1}} \quad \text{éq 3.4.2-4}$$

---

## 4 Bibliographie

---

- [1] ANGLES J., VOLDOIRE F., Modélisation et calcul de la charge limite d'un composant fissuré, CR-MMN 1522-07, sept. 96.
- [2] FRIAA A., Loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité, Thèse de doctorat, 1979.
- [3] FRIAA A., FREMOND M., Les méthodes statique et cinématique en calcul à la rupture et en analyse limite, Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 11, No 5, 881-905, 1982.
- [4] VOLDOIRE F., Calcul à la rupture et analyse limite des structures, note EDF HI-74/93/082.
- [5] VOLDOIRE F., Analyse limite des structures fissurées et critères de résistance, note EDF/DER HI-74/95/026.
- [6] VISSE E., VOLDOIRE F., Eléments finis incompressibles, note EDF/DER HI-75/95/019.
- [7] VOLDOIRE F., Mise en œuvre de la méthode de régularisation de Norton-Hoff-Friaâ pour l'analyse limite des structures, note EDF/DER HI-74/97/026.