

Manuel de Référence
Fascicule R3.01 : Références générales
Document : R3.01.00

Éléments isoparamétriques

Résumé :

Ce document présente les fondements des éléments isoparamétriques introduits dans le *Code_Aster* pour la modélisation des milieux continus 2D et 3D. On rappelle tout d'abord le passage d'une formulation forte à une formulation variationnelle, puis on détaille la discrétisation par éléments finis : utilisation d'un élément de référence, calcul des fonctions de forme et évaluation des termes élémentaires. On décrit également brièvement le principe de l'assemblage de ces termes et de l'imposition des conditions aux limites, et on évoque les méthodes de résolution matricielle utilisées. Enfin sont exposées les principales étapes d'un calcul par éléments finis tel qu'il est conçu et implanté dans le *Code_Aster*.

Table des matières

1 Principe de la méthode des éléments finis.....	4
2 Obtention d'une formulation variationnelle	4
2.1 Formulation forte	4
2.2 Formulation faible.....	5
2.2.1 Fonctions tests.....	5
2.2.2 Formule de GREEN	5
2.2.3 Formulation variationnelle	6
2.3 Méthode de résolution	7
3 Discrétisation	9
3.1 Découpage en éléments finis.....	9
3.2 Choix des fonctions tests	9
3.3 Représentation de la géométrie	10
3.3.1 Élément de référence.....	11
3.3.2 Fonctions d'interpolation géométrique	11
3.3.3 Matrice jacobienne de la transformation	12
3.4 Représentation des inconnues.....	12
3.4.1 Base polynomiale.....	12
3.4.2 Fonctions de forme	13
3.4.3 Élément isoparamétrique	14
3.4.4 Correspondance entre base polynomiale et fonctions de forme	14
3.5 Calcul des termes élémentaires.....	15
3.5.1 Transformation des dérivées	15
3.5.2 Changement de domaine d'intégration	15
3.5.3 Intégration numérique : points de GAUSS.....	15
3.6 Exemple	16
3.6.1 Formulation variationnelle.....	17
3.6.2 Fonctions de forme	18
3.6.3 Calcul des termes élémentaires.....	19
4 Système matriciel	20
4.1 Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires.....	20
4.2 Imposition des conditions aux limites cinématiques.....	20
4.3 Résolution du système matriciel.....	20
4.4 Estimation d'erreur et amélioration de la précision des calculs	21
5 Organisation d'un calcul par éléments finis dans le <i>Code_Aster</i>	21
5.1 Notion d'élément fini dans le <i>Code_Aster</i>	21
5.2 Initialisations des éléments	22
5.3 Calcul des termes élémentaires.....	23
5.4 Résolution globale.....	23

6 Bibliographie.....	23
----------------------	----

1 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est employée dans de nombreux domaines scientifiques pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Elle permet de construire une approximation simple des inconnues pour transformer ces équations continues en un système d'équations de dimension finie, que l'on peut écrire schématiquement sous la forme $\mathbf{AU} = \mathbf{L}$, où \mathbf{U} est le vecteur des inconnues, \mathbf{A} une matrice et \mathbf{L} un vecteur.

Dans un premier temps, on transforme les équations aux dérivées partielles (ou formulation forte du problème) en une formulation variationnelle (ou formulation faible). La solution approchée est cherchée comme combinaison linéaire de fonctions données. Ces fonctions doivent être simples mais assez générales pour pouvoir "bien" approcher la solution. Elles doivent notamment permettre de générer un espace de dimension finie qui soit aussi proche que l'on veut de l'espace de fonctions dans lequel se trouve la solution. A partir de cette idée ancienne (méthode des résidus pondérés), les diverses façons de choisir ces fonctions donnent lieu à différentes méthodes numériques (collocation, méthodes spectrales, éléments finis).

L'originalité de la méthode des éléments finis est de prendre comme fonctions d'approximation des polynômes qui sont nuls sur presque tout le domaine, et participent donc au calcul seulement au voisinage d'un point particulier. Ainsi, la matrice \mathbf{A} est très creuse, ne contenant que les termes d'interaction entre "points voisins", ce qui réduit le temps de calcul et la place mémoire nécessaire au stockage. De plus, la matrice \mathbf{A} et le vecteur \mathbf{L} peuvent être construits par assemblage de matrices et vecteurs élémentaires, calculés localement.

2 Obtention d'une formulation variationnelle

On peut obtenir la formulation variationnelle d'un problème à partir des équations aux dérivées partielles, en multipliant celles-ci par des fonctions tests et en intégrant par parties. En mécanique des solides, la formulation faible alors obtenue est identique à celle donnée par le Principe des Travaux Virtuels ou dans certains cas la minimisation de l'énergie potentielle totale de la structure. Notons cependant que pour certains problèmes, les équations du modèle sont plus faciles à établir dans le cadre variationnel (cas des plaques et des coques par exemple).

2.1 Formulation forte

Prenons un exemple issu de la mécanique des solides. Les équations locales d'équilibre statique d'une structure Ω , soumise à des forces de volume \mathbf{f} , des déplacements imposés \mathbf{u}^D sur une partie de sa frontière Γ_D et des forces imposées \mathbf{g} sur une partie Γ_N de sa frontière, s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^D & \text{sur } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes et \mathbf{n} la normale sortante sur la frontière Γ . Les relations qui lient le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ aux déplacements \mathbf{u} s'appellent relations de comportement.

Les conditions aux limites s'appliquant aux inconnues primales (les déplacements ici) sont appelées conditions aux limites de DIRICHLET, ou encore "essentiels". Les conditions aux limites portant sur les forces (ou les flux en thermique) sont appelées conditions aux limites de NEUMANN, ou "naturelles".

2.2 Formulation faible

2.2.1 Fonctions tests

Soit un espace V de fonctions appelées fonctions tests, "suffisamment" régulières et s'annulant sur Γ_D . En mécanique, cet espace s'appelle l'espace des déplacements virtuels cinématiquement admissibles. En multipliant les équations locales par une fonction test \mathbf{v} appartenant à l'espace V et en intégrant sur le domaine Ω , on obtient une forme variationnelle du problème, rigoureusement équivalente à la forme précédente, dite aussi opérationnelle :

$$\begin{aligned} V^D &= \left\{ \mathbf{v} \text{ "régulière", } \mathbf{v} = \mathbf{u}^D \text{ sur } \Gamma_D \right\} \\ V &= \left\{ \mathbf{v} \text{ "régulière", } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V^D \text{ tel que : } \begin{cases} \forall \mathbf{v} \in V : \int_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad \text{éq 2.2.1-1}$$

Dans ce qui suit, on supposera pour simplifier que les conditions de DIRICHLET sont homogènes, c'est-à-dire que $\mathbf{u}^D = 0$; ainsi, les espaces V^D et V sont confondus. Le traitement des conditions aux limites de DIRICHLET non homogènes est exposé dans le document [R3.03.01].

Remarque :

On ne discutera pas dans ce document des espaces fonctionnels auxquels doivent appartenir les fonctions tests (cf. [bib1]).

2.2.2 Formule de GREEN

L'analogie de l'intégration par parties pour un domaine quelconque Ω de frontière Γ s'appelle la formule de GREEN et s'énonce comme suit, dans sa forme la plus simple :

$$\int_{\Omega} \partial_i \varphi \, d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi n_i \, d\Gamma,$$

où ∂_i désigne la dérivée par rapport à la direction i , et \mathbf{n} la normale sortante au domaine.

Lorsque $\varphi = \alpha \mathbf{q}$, où \mathbf{q} est un vecteur et α un scalaire, elle s'exprime de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \alpha \partial_i q_i d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha q_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \partial_i \alpha q_i d\Omega ,$$

soit, en utilisant des notations vectorielles (le \bullet désigne le produit scalaire) :

$$\int_{\Omega} \alpha \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{grad}(\alpha) \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma$$

2.2.3 Formulation variationnelle

En appliquant la formule de GREEN à l'intégrale [éq 2.2.1-1] et en tenant compte de la condition aux limites de NEUMANN $\sigma_{ij} n_j = g_i$ sur Γ_N et de la condition $\mathbf{v} = 0$ sur Γ_D , on obtient la forme dite variationnelle du problème :

Trouver $\mathbf{u} \in V^D$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_i v_i d\Gamma$$

Comme le tenseur des contraintes σ est symétrique, l'équation peut également s'écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_i v_i d\Gamma ,$$

où

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

est le tenseur des déformations linéarisées. On retrouve donc exactement l'expression donnée par le Principe des Travaux Virtuels en petits déplacements. La relation entre le tenseur des contraintes de CAUCHY σ et les déplacements \mathbf{u} sera donnée par une relation de comportement, et est indépendante de l'écriture de la formulation variationnelle (dans le cas élastique, on a par exemple $\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \Lambda_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})$).

Un des avantages de la formulation variationnelle est qu'elle intègre toutes les conditions aux limites : les conditions de DIRICHLET sont prises en compte dans la définition de l'espace V des fonctions tests, tandis que les conditions de NEUMANN apparaissent naturellement après intégration par parties. Cette intégration par parties permet également d'abaisser l'ordre de dérivation sur les inconnues. De plus, dans un certain nombre de cas, elle symétrise le problème en \mathbf{u} et \mathbf{v} .

Deux choses restent à faire lorsque l'on a écrit la formulation variationnelle (ou le Principe des Travaux Virtuels) : prendre en compte la relation de comportement et mettre en place l'algorithmique de résolution. Pour ce dernier point, donnons quelques exemples : écriture d'un algorithme de résolution de système non linéaire (méthode de NEWTON par exemple) pour les problèmes non linéaires, écriture d'un schéma d'intégration en temps pour les problèmes d'évolution en dynamique (méthode de NEWMARK par exemple)... Dès lors, la plupart des problèmes variationnels se ramènent à trouver $\mathbf{u} \in V^D$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}),$$

où $a(\bullet, \bullet)$ est une forme bilinéaire, symétrique ou non, et $l(\bullet)$ une forme linéaire. Dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique et positive, le problème posé est équivalent à un problème de minimisation d'une fonctionnelle, qui en mécanique statique des solides est l'énergie potentielle totale de la structure.

2.3 Méthode de résolution

Dans ce document, on présente uniquement la méthode d'éléments finis en déplacements, où les inconnues sont, comme son nom l'indique, les variables dites primales (déplacements en mécanique), par opposition aux méthodes en contraintes, ou aux méthodes mixtes. L'espace V est représenté par un espace discret V^h . Pour les méthodes d'éléments finis conformes auxquelles nous nous restreignons ici, l'espace V^h est inclus dans V : la solution approchée est donc "plus rigide" que la solution exacte (elle surestime l'énergie).

On rappelle que l'on se place ici dans le cas où les conditions aux limites de DIRICHLET sont homogènes. D'autre part, on se cantonne aux éléments finis de LAGRANGE pour lesquels les variables sont les valeurs des champs inconnus.

Pour la méthode des éléments finis de GALERKIN décrite dans ce document, les inconnues et les fonctions tests sont représentées de la même façon, en définissant une base de fonctions $\{w_i(\mathbf{x})\}$ de l'espace V^h .

On appelle nœuds les points du domaine où les inconnues sont calculées, et variables nodales ou degrés de liberté les inconnues scalaires aux nœuds (composantes du déplacement par exemple). Le nombre de fonctions de base nécessaires est égal au nombre de variables nodales : pour un problème tridimensionnel où les inconnues sont les trois composantes du vecteur déplacement, la dimension de la base est trois fois le nombre de nœuds.

On utilisera les indices I, J, \dots pour désigner les numéros des nœuds (N au total), et les indices α, β, \dots pour désigner les numéros des inconnues (M inconnues par nœud). Ainsi, le vecteur déplacement discrétisé V^h s'écrit : $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} u_{\alpha}^h(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha}$, où les vecteurs \mathbf{e}_{α} sont les vecteurs de la base cartésienne. **Par la suite, on omettra l'indice h des écritures.**

La fonction de base associée au nœud I pour l'inconnue numéro α sera notée $w_{I\alpha}(\mathbf{x})$. Dans cette base $\{w_{I\alpha}(\mathbf{x})\}_{\substack{1 \leq I \leq N \\ 1 \leq \alpha \leq M}}$, le champ inconnu s'écrit :

$$u_{\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N u_{\alpha}^I w_{I\alpha}(\mathbf{x}).$$

où u_{α}^I sont les variables nodales.

Ainsi, le problème revient à trouver $\mathbf{u} \in V^D$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \sum_{I=1}^N \sum_{\alpha=1}^M a(w_{I\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{v}) u_{\alpha}^I = l(\mathbf{v}).$$

Chaque choix de \mathbf{v} permet d'obtenir une équation. Dans la méthode des éléments finis, on prend comme fonction test \mathbf{v} successivement chacune des fonctions $w_{j\beta} \mathbf{e}_{\beta}$ (lorsque $V^D = V$). Grâce à la linéarité de $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$, on peut écrire le problème discret comme :

$$\forall J, \forall \beta, \quad \sum_{I=1}^N \sum_{\alpha=1}^M a(w_{I\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, w_{J\beta} \mathbf{e}_{\beta}) u_{\alpha}^I = l(w_{J\beta} \mathbf{e}_{\beta}),$$

d'où le système matriciel à résoudre : $\mathbf{AU} = \mathbf{L}$,

avec :

$$A_{J\beta I\alpha} = a(w_{I\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, w_{J\beta} \mathbf{e}_{\beta}), L_{J\beta} = l(w_{J\beta} \mathbf{e}_{\beta}), \text{ et } \mathbf{U} = \left\{ u_1^1 \dots u_M^1 \dots u_1^I \dots u_{\alpha}^I \dots u_M^I \dots u_1^N \dots u_M^N \right\}^T,$$

où N est le nombre de nœuds et M le nombre d'inconnues scalaires par nœud (3 pour des déplacements en 3D).

En fait, on "condense" les indices deux par deux : chaque nouvel indice i contient à la fois l'information sur le numéro du nœud I et sur le numéro local de l'inconnue α (l'indice condensé i s'appelle le numéro de degré de liberté). Un terme A_{ij}^e de la matrice contient donc l'information sur l'interaction entre les degrés de liberté i et j (par exemple, i représente le déplacement selon y au nœud 12 et j le déplacement selon z au nœud 23).

Dans de nombreux cas, les fonctions de base utilisées pour les diverses inconnues en un nœud donné sont les mêmes : $w_{I\alpha} = w_{I\beta}$. On appelle alors la fonction de base commune la fonction associée au nœud I , et on la note w_I . Dans toute la suite, on supposera pour simplifier les écritures qu'il n'y a qu'une seule fonction de base scalaire associée à chaque nœud.

N.B. :

Notons que certains auteurs, de culture anglo-saxonne pour la plupart, décrivent pour des raisons historiques la méthode des éléments finis comme une méthode de RITZ par morceaux.

3 Discrétisation

La discrétisation consiste à choisir une base de l'espace V^h et à calculer numériquement les termes de la matrice \mathbf{A} et du vecteur \mathbf{L} . Pour cela, on exprime la forme bilinéaire $a(\bullet, \bullet)$ et la forme linéaire $l(\bullet)$ comme une somme sur des éléments, définis par découpage du domaine de base. Si l'on reprend le problème mécanique présenté dans le paragraphe [§1.2], cela donne :

$$\begin{cases} a(w_i, w_j) = \sum_{\text{éléments } \Omega_e} \int_{\Omega_e} \sigma_{kl}(w_i) \varepsilon_{kl}(w_j) \\ l(w_i) = \sum_{\text{éléments } \Omega_e} \int_{\Omega_e} f_i w_i + \int_{\partial\Omega_e} g_i w_i \end{cases}$$

Les termes A_{ij} , qui représentent l'interaction entre deux degrés de liberté i et j sont construits en "assemblant" les contributions provenant de chacun des éléments qui contiennent les nœuds correspondants ; on procède de la même façon pour construire le vecteur \mathbf{L} . Ces contributions, appelées termes élémentaires, sont calculées lors d'une boucle sur les éléments et ne dépendent que des seules variables de l'élément Ω_e .

3.1 Découpage en éléments finis

La structure est découpée en "morceaux" appelés éléments. La donnée des coordonnées des nœuds des éléments et des connectivités (liste des sommets de chaque élément) constitue un maillage. Le découpage doit respecter un certain nombre de règles : en particulier, il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou.

Rappelons que l'on appelle nœuds les points où sont calculées les inconnues. Les nœuds peuvent être des sommets du maillage ou non (milieux des côtés par exemple). Le nombre d'inconnues scalaires (ou variables nodales) dans un élément est appelé le nombre de degrés de liberté de l'élément.

3.2 Choix des fonctions tests

Les fonctions tests (ou fonctions de la base $\{w_i(\mathbf{x})\}$) doivent être denses dans l'espace V des fonctions inconnues, être continues d'un élément à l'autre, permettre de calculer simplement les termes élémentaires A_{ij} et L_i , et générer une matrice \mathbf{A} creuse et bien conditionnée. Les trois premières conditions sont remplies en particulier par le choix de fonctions polynomiales. De plus, pour avoir une matrice \mathbf{A} creuse, on va faire en sorte que les supports de deux fonctions de base associées à deux nœuds "éloignés" soient disjoints : ainsi, les termes correspondants de la matrice seront nuls.

On rappelle que l'on se place pour simplifier les écritures dans le cas où l'on utilise une seule fonction de base par nœud I pour toutes les inconnues. Dans ce cas : $w_i = w_{I\alpha} = w_I \quad \forall \alpha$, où i est le numéro condensé de degré de liberté pour l'inconnue α du nœud I .

Le choix des fonctions de base est alors le suivant : on associe à chaque nœud I une fonction de base w_I qui est un polynôme par morceaux s'annulant sur tous les éléments ne contenant pas le nœud I [Figure 3.2-a]. De ce fait, $w_I(x_i, x_j) = 0$ si les ddl de numéros i et j sont portés par des nœuds I et J qui n'appartiennent pas à un même élément. On impose de plus à ce polynôme de valoir 1 au nœud I , et 0 en tous les autres nœuds. En d'autres termes, $w_I(x^J) = \delta_I^J$. Ainsi, les valeurs nodales des inconnues seront les valeurs prises aux nœuds par la solution exacte : $u(x^J) = u^J$.

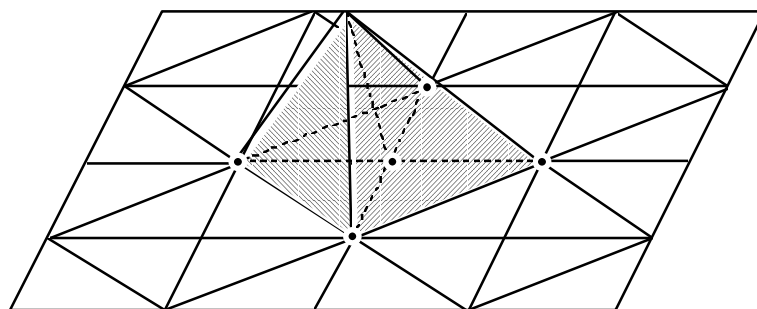


Figure 3.2-a : Fonction de base associée à un nœud

Dans la suite, on appellera fonction de forme associée au nœud I la trace (ou restriction) sur l'élément considéré de la fonction de base w_I , et on la notera N_I .

3.3 Représentation de la géométrie

Le calcul des fonctions de forme pour un élément quelconque peut être assez compliqué. Dans le cas des triangles, on peut par exemple utiliser la notion de coordonnées barycentriques d'un point par rapport aux trois sommets. Cependant, dans le cas des quadrangles, une telle notion est moins courante et les calculs peuvent être délicats à mener analytiquement. C'est pourquoi on préfère souvent se ramener à un élément dit de référence, de forme simple, et à partir duquel on peut générer tous les éléments d'une même famille par une transformation géométrique. Les fonctions de forme sont alors calculées sur cet élément générique noté Ω_r , et le transport des grandeurs sur l'élément réel Ω_e est effectué grâce à la connaissance de la transformation géométrique. Notons cependant que le code de thermo-hydraulique N3S utilise pour des raisons de performance des formules analytiques explicites et non pas la notion d'élément de référence.

3.3.1 Éléments de référence

Notons x_α les coordonnées d'un point \mathbf{x} dans le repère absolu. Les points de l'élément de référence seront décrits en termes de coordonnées dites paramétriques ξ_α . La figure [Figure 3.3.1-a] donne pour un élément triangulaire en 2D l'élément de référence et l'élément réel. La transformation τ doit être bijective et transformer les sommets et côtés de l'élément de référence en sommets et côtés de l'élément réel.

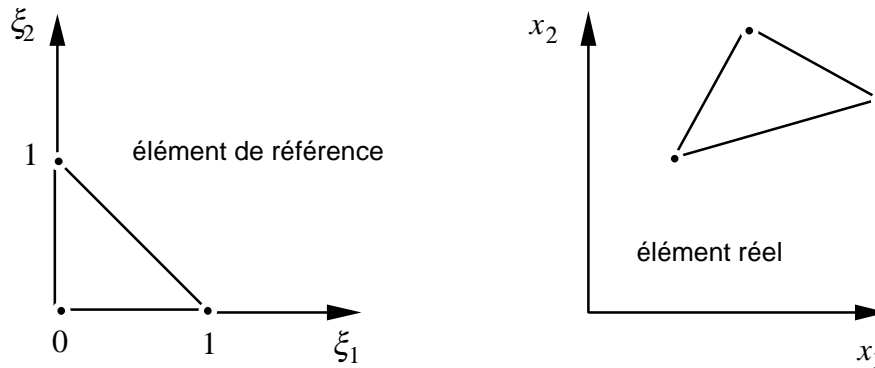


Figure 3.3.1-a : Transformation géométrique

3.3.2 Fonctions d'interpolation géométrique

La géométrie de l'élément va être approchée par le biais de fonctions dites d'interpolation géométrique : ainsi par exemple, les lignes courbes de l'élément réel peuvent être représentées par des segments sur l'élément de référence.

Ces fonctions notées $\bar{N}(\xi)$ sont définies sur l'élément de référence ; elles permettent de connaître les coordonnées x_α d'un point quelconque de l'élément réel à partir de ses coordonnées ξ_α de son antécédent dans l'élément de référence et des coordonnées x_α^I des nœuds (de numéro local I) de l'élément réel :

$$x_\alpha = \sum_{I=1}^n \bar{N}_I(\xi) x_\alpha^I ,$$

où n est le nombre de nœuds de l'élément, et I le numéro de chaque nœud localement à l'élément.

3.3.3 Matrice jacobienne de la transformation

La jacobienne de la transformation est la matrice des dérivées partielles des coordonnées réelles x_α par rapport aux coordonnées ξ_α dans l'élément de référence :

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\beta}.$$

En tenant compte de la définition des coordonnées x_α en fonction des coordonnées x_α^I des nœuds, on obtient une expression équivalente de la matrice jacobienne :

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{I=1}^n \frac{\partial \bar{N}_I}{\partial \xi_\beta} x_\alpha^I,$$

où $\frac{\partial \bar{N}_I}{\partial \xi_\beta}$ sont les termes du tenseur $\left[\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \right]^T$, dont le nombre de lignes est le nombre de directions de l'espace, et le nombre de colonnes le nombre de nœuds de l'élément.

Notons que le tenseur $\left[\frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \right]^T$ ne dépend que de la définition de l'élément de référence et non de celle de l'élément réel.

Le déterminant de la matrice jacobienne, utile dans les calculs qui vont suivre, s'appelle le jacobien de la transformation géométrique. Il est non nul lorsque la transformation τ qui fait passer de l'élément de référence à l'élément réel est bijective, et positif lorsque τ respecte l'orientation de l'espace.

3.4 Représentation des inconnues

Il y a deux façons équivalentes de représenter les inconnues (composantes du déplacement dans l'exemple mécanique) dans un élément : par les coefficients de leur approximation polynomiale, ou par leurs valeurs nodales. Ces deux possibilités correspondent aux deux manières complémentaires de définir un élément : par la donnée d'une base de monômes, ou par la donnée des fonctions de forme associées aux nœuds. Par ailleurs, notons qu'un élément est dit isoparamétrique lorsque ses fonctions de forme sont identiques à ses fonctions d'interpolation géométrique. Dans le *Code_Aster*, tous les éléments finis de milieu continu (2D et 3D) sont isoparamétriques.

3.4.1 Base polynomiale

La façon la plus simple de définir un élément est de choisir une base polynomiale composée d'un certain nombre de monômes indépendants. Pour une inconnue donnée, le nombre de monômes utilisés doit être égal au nombre de variables nodales, c'est-à-dire au nombre de nœuds utilisés pour représenter l'inconnue. Dans le cas d'un élément fini triangulaire où l'on souhaite avoir les déplacements linéaires et la pression constante dans chaque élément, les bases polynomiales utilisées sont respectivement $\{1, x_1, x_2\}$ et $\{1\}$. Par conséquent, on peut choisir de calculer les déplacements aux 3 nœuds sommets et la pression au nœud central.

On définit généralement la base polynomiale sur l'élément de référence ; elle contient des monômes de la forme $\xi_1^\gamma \xi_2^\delta \xi_3^\varepsilon$, où γ , δ et ε sont des exposants entiers positifs ou nuls. Le degré d'un tel monôme est l'entier $\gamma + \delta + \varepsilon$. La base est dite complète de degré n lorsque tous les monômes de degré n sont présents. Dans certains cas, on emploie des bases incomplètes. Par exemple, pour le quadrangle Q_1 en 2D, les déplacements sont linéaires par rapport à chacune des directions : la base utilisée est $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \xi_2\}$. Les composantes u_1 et u_2 du déplacement s'écrivent donc :

$$\begin{cases} u_1(\xi_1, \xi_2) = a_1 + a_2 \xi_1 + a_3 \xi_2 + a_4 \xi_1 \xi_2 \\ u_2(\xi_1, \xi_2) = b_1 + b_2 \xi_1 + b_3 \xi_2 + b_4 \xi_1 \xi_2 \end{cases}$$

On note $P_i(\xi)$ le $i^{\text{ème}}$ monôme de la base (qui en comprend m). Les composantes du vecteur déplacement $\mathbf{u}(\xi)$ dans l'élément sont alors données par la formule :

$$u_\alpha(\xi) = \sum_{i=1}^m a_\alpha^i P_i(\xi)$$

On notera Π la matrice donnant les valeurs prises par les monômes de la base polynomiale sur les nœuds de l'élément de référence :

$$\Pi_{Ii} = P_i(\xi^I),$$

où i est le numéro d'ordre du monôme dans la base, I le numéro du nœud localement à l'élément et ξ^I les coordonnées du nœud I dans l'élément de référence. Cette matrice est carrée, sa dimension est le carré du nombre de nœuds de l'élément.

3.4.2 Fonctions de forme

Une façon équivalente de définir un élément fini est de donner, pour chaque inconnue, l'expression des fonctions de forme de l'élément. Pour une inconnue scalaire donnée (composante du déplacement selon y par exemple), il y en a autant que de nœuds où l'inconnue doit être calculée. Dans beaucoup de cas, on utilise les mêmes fonctions de forme pour toutes les composantes d'un vecteur inconnu, mais ce n'est pas obligatoire. Dans ce qui suit, on supposera cependant pour simplifier les écritures que c'est le cas.

Les fonctions de forme peuvent être définies sur l'élément réel Ω_e : on les note alors $N^e(\mathbf{x})$, elles dépendent de la géométrie de l'élément réel, et sont donc différentes d'un élément à l'autre. Il est plus simple de les exprimer sur l'élément de référence, ce qui donne les fonctions $N(\xi)$ indépendantes de la géométrie de l'élément réel. Rappelons que ces fonctions sont polynomiales sur l'élément, et que la fonction de forme associée à un nœud donné y prend la valeur 1, alors qu'elle s'annule en tous les autres nœuds de l'élément.

Les inconnues s'expriment alors comme combinaison linéaire des fonctions de forme, les coefficients u_α^I de la combinaison étant appelés les variables nodales :

$$u_\alpha(\xi) = \sum_{I=1}^n N_I(\xi) u_\alpha^I.$$

ou bien $u_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n N_I(\tau^{-1}(\mathbf{x})) u_\alpha^I$

3.4.3 Élément isoparamétrique

Deux types d'interpolation interviennent donc dans la construction d'un élément fini : l'interpolation géométrique (à l'aide des fonctions $\bar{N}(\xi)$) et l'interpolation des inconnues (à l'aide des fonctions $N(\xi)$). Un élément est dit isoparamétrique lorsqu'il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et ses inconnues : $\bar{N}(\xi) = N(\xi)$.

3.4.4 Correspondance entre base polynomiale et fonctions de forme

On a les relations :

$$u_\alpha(\xi) = \sum_i a_\alpha^i P_i(\xi) \quad \text{et} \quad u_\alpha(\xi) = \sum_I N_I(\xi) u_\alpha^I.$$

De plus, il est clair que l'on a : $u_\alpha^I = \sum_{i=1}^m a_\alpha^i P_i(\xi^I) = \Pi_{Ii} a_\alpha^i$. On en déduit la relation suivante entre la base polynomiale et les fonctions de forme : $\Pi_{Ii} N_I(\xi) = P_i(\xi)$.

Exemple : triangle P_1 en 2D

On notera $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ les coordonnées paramétriques dans l'élément de référence.

$$P_1(\xi) = 1, \quad P_2(\xi) = \xi_1, \quad P_3(\xi) = \xi_2,$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où les fonctions de forme :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ N_2(\xi) = \xi_1 \\ N_3(\xi) = \xi_2 \end{cases}$$

On vérifie bien que $N_I(\xi^J) = \delta_I^J$.

3.5 Calcul des termes élémentaires

Les termes élémentaires à calculer sont de la forme :

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}, \dots) d\mathbf{x}.$$

Trois types d'opérations sont à effectuer : la transformation des dérivées par rapport à \mathbf{x} en dérivées par rapport à ξ , le passage d'une intégration sur l'élément réel à une intégration sur l'élément de référence, et la réalisation numérique de cette intégration qui est généralement faite par une formule de quadrature.

3.5.1 Transformation des dérivées

La transformation des dérivées s'effectue grâce à la matrice jacobienne \mathbf{J} , d'après la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \right]^T \mathbf{u}_\alpha^{nod}$$

où \mathbf{u}_α^{nod} est le vecteur des valeurs nodales de la composante α du déplacement.

Les dérivées d'ordre supérieur s'obtiennent également en utilisant cette règle, même si cela donne lieu à des expressions plus complexes que nous n'explicitons pas ici.

3.5.2 Changement de domaine d'intégration

Le passage à l'intégration sur l'élément de référence s'effectue en multipliant l'intégrande par le déterminant de la matrice jacobienne, appelé jacobien :

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}, \dots) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_r} f(\mathbf{u}(\xi), \frac{\partial \mathbf{u}(\xi)}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\xi)}{\partial \xi^2}, \dots) \det(\mathbf{J}(\xi)) d\xi.$$

3.5.3 Intégration numérique : points de GAUSS

Dans certains cas particuliers, on peut calculer analytiquement les intégrales. Par exemple, pour un triangle en 2D, le Jacobien est constant sur le triangle, et les intégrandes se ramènent à des monômes que l'on sait intégrer exactement :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 2)!}.$$

Cependant, ces cas particuliers sont rares, et on préfère évaluer numériquement les intégrales en faisant appel à des formules de quadrature. Celles-ci donnent une approximation de l'intégrale sous forme d'une somme pondérée des valeurs de l'intégrande en un certain nombre de points de l'élément appelés points d'intégration :

$$\int_{\Omega_r} g(\xi) d\xi \approx \sum_{g=1}^r \bar{\omega}_g g(\xi_g).$$

Les scalaires $\bar{\omega}_g$ sont appelés les poids d'intégration, et les coordonnées ξ_g sont les coordonnées des r points d'intégration dans l'élément de référence.

Dans les méthodes d'intégration de GAUSS, les points et poids d'intégration sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre donné. C'est ce type de méthode que l'on utilise dans le *Code_Aster*, les points d'intégration s'appellent alors des points de GAUSS.

Remarque :

Le nombre de points de GAUSS choisi permet d'intégrer exactement dans l'élément de référence. En fait, à cause de la non-linéarité éventuelle de la transformation géométrique ou de la dépendance spatiale des coefficients, l'intégration n'est pas exacte dans l'élément réel. Cependant, il est démontré que l'erreur commise est d'un ordre inférieur à l'erreur de discrétisation induite par la méthode des éléments finis.

Pour illustrer l'utilisation des points de GAUSS, prenons comme exemple le cas 3D, où l'on suppose que l'on utilise r_1 points dans la direction ξ_1 , r_2 dans la direction ξ_2 et r_3 dans la direction ξ_3 , soit un total de $r = r_1 r_2 r_3$ points de GAUSS. On montre alors que l'expression :

$$\int_{\Omega_r} g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j \bar{\omega}_k g(\xi_1^i, \xi_2^j, \xi_3^k)$$

permet d'intégrer exactement des monômes du type $(\xi_1)^\alpha (\xi_2)^\beta (\xi_3)^\gamma$, avec $\alpha \leq 2r_1 - 1$, $\beta \leq 2r_2 - 1$, et $\gamma \leq 2r_3 - 1$.

3.6 Exemple

On se propose de détailler le calcul de la formulation variationnelle, des fonctions de forme, de la matrice élémentaire de rigidité thermique et du vecteur élémentaire chargement dans le cas de l'équation de la chaleur (Laplacien) en 2D, pour des éléments de type quadrangle Q_1 .

3.6.1 Formulation variationnelle

Si l'on appelle k le coefficient de conduction, et T la température, les équations locales d'équilibre sont :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k \operatorname{grad}(T)) = f & \text{dans } \Omega \\ T = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ -k \operatorname{grad}(T) \cdot \mathbf{n} = \Phi & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

où $-k \operatorname{grad}(T)$ est le flux de chaleur et \mathbf{n} la normale sortante au domaine. On impose une température $T_0 = 0$ sur le bord Γ_0 du domaine, et un flux de chaleur Φ sur le bord Γ_1 .

Soit θ la variable virtuelle associée à la température. En multipliant l'équation d'équilibre par θ , en intégrant par parties et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} k \operatorname{grad}(T) \operatorname{grad}(\theta) d\Omega = \int_{\Omega} f \theta d\Omega - \int_{\Gamma_1} \Phi \theta d\Gamma$$

Les termes élémentaires que l'on va devoir calculer seront donc :

- la matrice de rigidité thermique élémentaire : $A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} k \operatorname{grad}(N_i) \operatorname{grad}(N_j) d\Omega$
- le vecteur élémentaire de chargement surfacique : $L_{s_i}^e = \int_{\Omega_e} f N_i d\Omega$
- le vecteur élémentaire de chargement linéique : $L_{l_i}^e = \int_{\Gamma_1 \cap \partial\Omega_e} \Phi N_i d\Gamma$

En fait, le terme correspondant au chargement linéique $L_{l_i}^e$ est calculé dans le *Code_Aster* sur un élément de bord particulier et non sur le bord de l'élément Ω_e . On utilise donc les fonctions de forme de l'élément de bord (qui sont les traces sur le bord des fonctions de forme de l'élément surfacique). **Il faut donc toujours utiliser 2 éléments lorsqu'on souhaite imposer un chargement ou une condition aux limites : un élément de "volume" (pour Ω_e) et un élément de bord (pour $\partial\Omega_e$).**

3.6.2 Fonctions de forme

On va utiliser des quadrangles Q_1 , où les inconnues sont représentés sur la base polynomiale $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \xi_2\}$. L'élément de référence est le carré représenté sur la figure [Figure 3.6.2-a] :

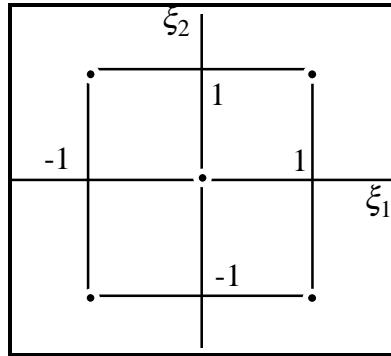


Figure 3.6.2-a : Carré de référence

On a donc :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et en utilisant la relation $\Pi_{Ii} N_I(\xi) = P_i(\xi)$, on obtient les expressions des quatre fonctions de forme associées aux sommets :

$$\begin{cases} N_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ N_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\ N_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ N_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \end{cases}$$

La matrice des dérivées des fonctions de forme dans l'élément de référence est :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \right]^T = \begin{pmatrix} N_{1,\xi_1} & N_{2,\xi_1} & N_{3,\xi_1} & N_{4,\xi_1} \\ N_{1,\xi_2} & N_{2,\xi_2} & N_{3,\xi_2} & N_{4,\xi_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 + \xi_2 & 1 - \xi_2 & 1 + \xi_2 & -1 - \xi_2 \\ -1 + \xi_1 & -1 - \xi_1 & 1 + \xi_1 & 1 - \xi_1 \end{pmatrix},$$

d'où la matrice jacobienne \mathbf{J} qui permet de passer de l'élément de référence à un élément réel dont les sommets ont les coordonnées (x_i, y_i) , obtenue grâce à la relation $J_{\alpha\beta} = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial \bar{N}_I}{\partial \xi_\beta} x_\alpha^I$:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi_2)(x_2-x_1) + (1+\xi_2)(x_3-x_4) & (1-\xi_2)(y_2-y_1) + (1+\xi_2)(y_3-y_4) \\ (1-\xi_1)(x_4-x_1) + (1+\xi_1)(x_3-x_2) & (1-\xi_1)(y_4-y_1) + (1+\xi_1)(y_3-y_2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice d'ordre 2 pourra être calculée aux points de GAUSS lorsqu'on en aura besoin et facilement inversée.

3.6.3 Calcul des termes élémentaires

La matrice élémentaire $A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} k \text{grad}_{\mathbf{x}}(N_i) \text{grad}_{\mathbf{x}}(N_j) d\Omega$ comprend $4 \times 4 = 16$ termes, mais comme elle est symétrique, seuls 10 sont à calculer. Il est nécessaire d'effectuer trois opérations pour évaluer chaque terme de la matrice élémentaire :

- somme pondérée sur les points de GAUSS,
- transformation des dérivées : $\text{grad}_{\mathbf{x}}(N_i) = \mathbf{J}^{-1} \text{grad}_{\boldsymbol{\xi}}(N_i)$,
- intégration sur l'élément de référence en multipliant par le jacobien (déterminant de \mathbf{J}).

On note ici $\text{grad}_{\mathbf{x}}$ le gradient dont les composantes sont les dérivées des fonctions par rapport aux coordonnées \mathbf{x} , et $\text{grad}_{\boldsymbol{\xi}}$ le gradient dont les composantes sont les dérivées des fonctions par rapport aux coordonnées $\boldsymbol{\xi}$ (ce sont les colonnes de la matrice $\left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T$).

On en déduit l'expression finale du terme élémentaire A_{ij}^e :

$$A_{ij}^e = \sum_{g=1}^{NPG} k \varpi_g \mathbf{J}^{-1} \text{grad}_{\boldsymbol{\xi}}(N_i(\boldsymbol{\xi}_g)) \mathbf{J}^{-1} \text{grad}_{\boldsymbol{\xi}}(N_j(\boldsymbol{\xi}_g)) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_g)),$$

où NPG désigne le nombre de points de GAUSS. Une des familles de points de GAUSS possibles (car elle intègre exactement les éléments Q_1) pour le carré de référence $[-1, 1] \times [-1, 1]$ est celle où les points de GAUSS ont pour coordonnées $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ et où les poids d'intégration valent 1.

Les composantes du vecteur élémentaire correspondant au chargement surfacique $L_{s_i}^e$ sont calculées de façon encore plus simple :

$$L_{s_i}^e = \sum_{g=1}^{NPG} \varpi_g f(\boldsymbol{\xi}_g) N_i(\boldsymbol{\xi}_g) \det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}_g)),$$

où le chargement surfacique f est interpolé aux points de GAUSS de coordonnées paramétriques $\boldsymbol{\xi}_g$.

4 Système matriciel

Pour chaque élément Ω_e , on a su calculer les termes dits élémentaires : matrice élémentaire \mathbf{A}^e et vecteur élémentaire \mathbf{L}^e . La matrice \mathbf{A} et le vecteur \mathbf{L} sont obtenus par une procédure que l'on appelle l'assemblage des termes élémentaires, décrite ci-dessous. On expose ensuite le principe de l'imposition des conditions aux limites, puis on donne une liste de méthodes utilisables pour résoudre le système matriciel obtenu. Ces deux derniers points sont évoqués très brièvement car ils sont traités dans d'autres fascicules de la documentation de référence [notamment R6].

4.1 Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires

L'assemblage consiste à reporter les termes A_{ij}^e et L_i^e de chaque matrice élémentaire \mathbf{A}^e et de chaque vecteur élémentaire \mathbf{L}^e dans les cases correspondantes A_{IJ} et L_I de la matrice \mathbf{A} et du vecteur \mathbf{L} . La correspondance entre les numéros locaux i et j des degrés de liberté, et leurs numéros globaux I et J est donnée par la table des connectivités faisant partie du maillage.

En effet, la table des connectivités donne, pour chaque élément, les numéros absolus de ses nœuds (sommets ou non). L'ordre dans lequel sont décrits les nœuds de l'élément donne leurs numéros locaux dans l'élément de référence (le $k^{\text{ième}}$ nœud décrit aura le numéro k localement). D'autre part, on connaît pour chaque nœud l'ordre des degrés de liberté : par exemple, le déplacement selon x , puis le déplacement selon y , puis la pression. Cela permet de numérotter les degrés de liberté localement dans chaque élément. Quant aux numéros des degrés de liberté du système global, ils sont obtenus après renumérotation des inconnues [R2.02.03]. On sait donc, pour un élément donné, associer aux numéros i et j des degrés de liberté locaux les numéros I et J des degrés de liberté globaux.

Pour réaliser l'assemblage, on effectue une boucle sur les éléments. Pour chaque élément, on détermine les nœuds qu'il comporte et donc les numéros globaux des degrés de liberté considérés, et on ajoute au terme A_{IJ} le terme A_{ij}^e lui correspondant.

4.2 Imposition des conditions aux limites cinématiques

Le traitement des conditions aux limites cinématiques du type $\mathbf{u} = \mathbf{u}^D$ est décrit en détail dans le fascicule [R3.03.01]. Elles sont imposées par une méthode de dualité, en introduisant un vecteur de multiplicateurs (ou paramètres) de LAGRANGE $\boldsymbol{\lambda}$, ce qui conduit au système matriciel mixte :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L} \\ \mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{U}^D \end{cases}$$

4.3 Résolution du système matriciel

Le système linéaire précédent peut être résolu par un certain nombre de méthodes numériques. Les méthodes utilisées dans le *Code_Aster* sont la factorisation LDL^T par blocs [R6.02.01], la méthode multifrontale [R6.02.02], et le gradient conjugué préconditionné [R6.01.01].

4.4 Estimation d'erreur et amélioration de la précision des calculs

Après avoir effectué un calcul par éléments finis, il est possible de faire un post-traitement permettant d'estimer l'erreur commise : voir à ce sujet les documents [R4.10.01] et [R4.10.02].

Pour améliorer la précision des résultats, deux tactiques sont possibles :

- raffiner le maillage
- utiliser une approximation d'ordre plus élevé
 - soit en augmentant le nombre de nœuds d'interpolation (famille des éléments de LAGRANGE) ;
 - soit en augmentant le nombre de variables nodales, en rajoutant par exemple les dérivées des inconnues (famille des éléments de HERMITE) ; cette méthode n'est pas utilisée dans le *Code_Aster*.

5 Organisation d'un calcul par éléments finis dans le *Code_Aster*

On décrit très brièvement comment et à quel endroit les aspects évoqués dans ce document sont implantés dans le *Code_Aster*.

5.1 Notion d'élément fini dans le *Code_Aster*

Un type d'élément fini est défini par :

- un type de maille
- une liste de nœuds
- des fonctions de forme
- des options de calcul

Un élément dans le maillage est défini par un type de maille, une géométrie (coordonnées des nœuds) et une topologie (liste ordonnée des nœuds). C'est le type de modélisation choisi dans le fichier de commande qui permet d'affecter à chaque maille du maillage un type d'élément fini. La commande `AFFE_MODELE` [U4.22.01] affecte à chaque maille un type d'élément fini correspondant à la modélisation spécifiée pour cette maille. Lorsque la même modélisation est retenue pour tout le maillage, l'utilisation d'`AFFE_MODELE` est simple grâce à l'utilisation du mot-clé `TOUT : 'OUI'`.

Remarque importante :

Dans le cas contraire, il ne faut pas oublier d'affecter des éléments finis aux mailles de bord dont on a besoin pour imposer les conditions aux limites et chargements, et qu'on aura pris soin de créer lors de la fabrication du maillage.

L'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01], qui affecte conditions aux limites et chargements, va également créer des éléments finis, par exemple les éléments finis qui porteront les degrés de liberté de LAGRANGE utilisés dans la dualisation des conditions aux limites [R3.03.01].

L'opérateur `AFFE_CARA_ELEM` [U4.24.01] permet de définir des caractéristiques supplémentaires pour certains types d'éléments : par exemple, l'épaisseur des coques, l'orientation des poutres, les matrices de masse et de rigidité des éléments discrets.

Une option de calcul indique le type de calcul élémentaire que l'élément est capable de calculer. Par exemple `RIGI_MECA` concerne le calcul de la matrice élémentaire de rigidité mécanique :

$$A_{\alpha\beta}^e = \int_{\Omega_r} \Lambda_{ijkl} \varepsilon_{ij} \left(N_{\alpha}^e(\mathbf{x}) \right) \varepsilon_{kl} \left(N_{\beta}^e(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x},$$

Les "données" de cette option sont la géométrie (Ω_r) et le matériau (Λ) , complétées par la température si le matériau en dépend.

L'option `CHAR_MECA` se rapporte au calcul du vecteur élémentaire pour un chargement mécanique imposé sur la frontière :

$$L_{\alpha}^e = \int_{\Gamma_r} g N_{\alpha}^e(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Rappelons que pour appliquer les chargements de frontière, on utilise des éléments finis de bord particuliers, et non pas les frontières des éléments finis de volume (3D) ou de surface (2D).

Remarque :

Un développeur peut parfois avoir le choix entre créer un nouvel élément fini ou ajouter une option de calcul à un élément existant ; le choix entre ces deux solutions tient en général compte de critères de facilité informatique (ex. éléments sous-intégrés).

5.2 Initialisations des éléments

L'utilisation d'éléments de référence permet d'effectuer un certain nombre de calculs une fois pour toutes au début de l'exécution. Ces calculs sont réalisés dans les routines `INI....` appelées routines d'initialisation des éléments. On définit, pour chaque type d'élément de référence :

- le nombre de nœuds et leurs coordonnées ;
- le nombre de familles de points de GAUSS ;
- le nombre de points de GAUSS ;
- les poids d'intégration ϖ_g ;
- les valeurs des fonctions de forme aux points de GAUSS $N_i(\xi_g)$;
- les valeurs des dérivées des fonctions de forme aux points de GAUSS $\frac{\partial N_i(\xi_g)}{\partial \xi}$.

Pour un élément donné, on n'intègre pas forcément tous les termes élémentaires avec le même nombre de points de GAUSS : par exemple, on utilise en général plus de points de GAUSS pour la matrice de masse que pour la matrice de rigidité, car les produits de fonctions de forme sont de degré plus élevé que les produits de leurs dérivées. Un autre exemple est la sous-intégration utilisée dans certains cas. On appelle famille de points de GAUSS chaque ensemble de points de GAUSS susceptible d'être utilisé.

5.3 Calcul des termes élémentaires

Lors du calcul des termes élémentaires (dans les routines TE....), on effectue pour chaque point de GAUSS les opérations suivantes :

- calcul des dérivées des fonctions de forme $N_{,x}^e$ sur l'élément réel à partir des coordonnées des nœuds de l'élément et des dérivées des fonctions de forme $N_{,\xi}$ sur l'élément de référence ;
- calcul de la matrice jacobienne ;
- récupération du poids d'intégration multiplié par le Jacobien au point de GAUSS considéré ;
- évaluation de l'intégrande (selon l'option calculée).

Le terme élémentaire est calculée par somme sur les points de Gauss en pondérant par les poids d'intégration.

5.4 Résolution globale

La résolution globale a lieu dans les routines OP.... de haut niveau correspondant aux commandes utilisateur (MECA_STATIQUE [U4.31.01], STAT_NON_LINE [U4.32.01], THER_LINEAIRE [U4.33.02], etc.).

6 Bibliographie

- [1] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", Studies in Applied Mathematics, North Holland, 1978.
- [2] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Tome 2, Masson, 1985.
- [3] G. DHATT, G. TOUZOT, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A., Paris, 1984.

Page laissée intentionnellement blanche.