

**Manuel de Référence  
Fascicule R7.05 : Instabilités  
Document : R7.05.01**

# Critères de stabilité structurale

---

**Résumé :**

Ce document présente les différents critères de stabilité, au sens flambage de structure, disponibles dans le *Code\_Aster*. On peut les classer suivant deux catégories :

- critère d'Euler sur problème linéarisé,
- critères non linéaires.

Ces critères permettent de détecter la perte d'unicité en solution du problème quasistatique. Ils sont directement transposables au cadre de la dynamique, mais comme ils ne tiennent pas compte ni de la matrice de masse ni de celle d'amortissement, on ne peut parler de critère de stabilité dynamique au sens classique (par exemple, d'amortissement devenant négatif ou nul).

Le choix de critères non linéaires répond aux exigences de :

- polyvalence (méthode générale pour toute relation de comportement et pouvant accepter tout tenseur de déformation disponible dans le code),
- minimisation du coût CPU et de l'encombrement mémoire supplémentaire.

Le critère présenté est une généralisation du critère d'Euler, basé sur l'analyse de la matrice de raideur globale réactualisée. Il est appelé au sein de l'opérateur `STAT_NON_LINE`, pour pouvoir être évalué à chaque pas de la résolution incrémentale quasi-statique non linéaire.

## Table des matières

1	Introduction .....	3
2	Etude de la stabilité d'une structure.....	3
2.1	Notion générale de flambage.....	3
2.2	Ecriture du problème mécanique.....	5
2.3	Etude de stabilité du système.....	6
2.3.1	Ecriture du problème non linéaire géométrique élastique.....	7
2.3.2	Etude de stabilité en non linéaire géométrique .....	10
2.3.2.1	Condition de stabilité d'un équilibre élastique non linéaire .....	11
2.3.2.2	Cas des petits déplacements : charge d'Euler.....	11
2.3.2.3	Cas des forces imposées dépendant de la géométrie.....	12
2.3.2.4	Vibrations sous précontrainte.....	13
2.3.2.5	Traitement du comportement élastoplastique (flambement plastique).....	13
3	Implantation dans le code .....	15
3.1	Critère d'Euler .....	15
3.2	Critère non linéaire .....	16
3.2.1	Impact sur l'opérateur STAT_NON_LINE.....	16
3.2.1.1	Algorithme de STAT_NON_LINE .....	16
3.2.1.2	Impact sur la structure de donnée résultat de STAT_NON_LINE.....	17
3.2.2	Particularités liées au tenseur de déformation .....	18
3.2.2.1	En déformations linéarisées : PETIT et PETIT_REAC.....	19
3.2.2.2	En grands déplacements : GREEN, GREEN_GR et SIMO_MIEHE.....	19
3.2.2.3	Cas des modélisations mixtes.....	20
3.2.3	Amélioration des performances du critère.....	20
3.3	Généralisation à la dynamique .....	21
3.4	Syntaxe d'appel du critère .....	21
3.5	Validation des développements.....	22
4	Conclusions .....	22
5	Bibliographie .....	23

## 1 Introduction

Le *Code\_Aster* permet la recherche des modes de flambement linéaire, qualifiée de méthode d'Euler. Il suffit de résoudre un problème généralisé aux valeurs propres (grâce aux opérateurs `MODE_ITER_INV` ou `MODE_ITER_SIMULT` et le mot clé `TYPE_RESU='MODE_FLAMB'`). Les deux matrices arguments du problème généralisé sont la matrice de rigidité et la matrice de rigidité géométrique, issues d'un calcul préalable élastique linéaire (opérateur `MECA_STATIQUE`).

Dans tous les cas où l'on ne peut négliger les non linéarités, qu'elles soient géométriques ou comportementales, l'approche Euler n'est plus valide.

Nous proposons donc un critère *ad hoc*, que l'on peut considérer comme une généralisation du critère d'Euler sur configuration réactualisée. Ce critère se construit sur la matrice de raideur tangente assemblée, qui est calculée dans l'algorithme de type Newton pour résoudre les problèmes quasi-statiques non linéaires (opérateur `STAT_NON_LINE`).

Ce critère, en non linéaire, permet de traiter rigoureusement les relations de comportement élastiques non linéaires. En revanche, les lois qui présentent un aspect dissipatif ne sont traitées rigoureusement que si le chargement, en tout point de la structure, suit une évolution monotone (cela correspond à l'hypothèse de Hill [bib4]).

## 2 Etude de la stabilité d'une structure

### 2.1 Notion générale de flambage

Le flambage est un phénomène d'instabilité [bib6]. Son apparition peut être observée en particulier sur des éléments élancés de faible raideur de flexion. Au-delà d'un certain niveau de chargement, la structure subit un important changement de configuration (qui peut se manifester par l'apparition soudaine d'ondulations, par exemple).

On distingue deux types de flambage : le flambage par bifurcation et le flambage par point limite ([bib1], [bib7], [bib8]). Pour décrire le comportement de ces deux types de flambage, on considère une structure dont le paramètre  $\mu$  est caractéristique du chargement et dont le paramètre  $\delta$  est caractéristique du déplacement.

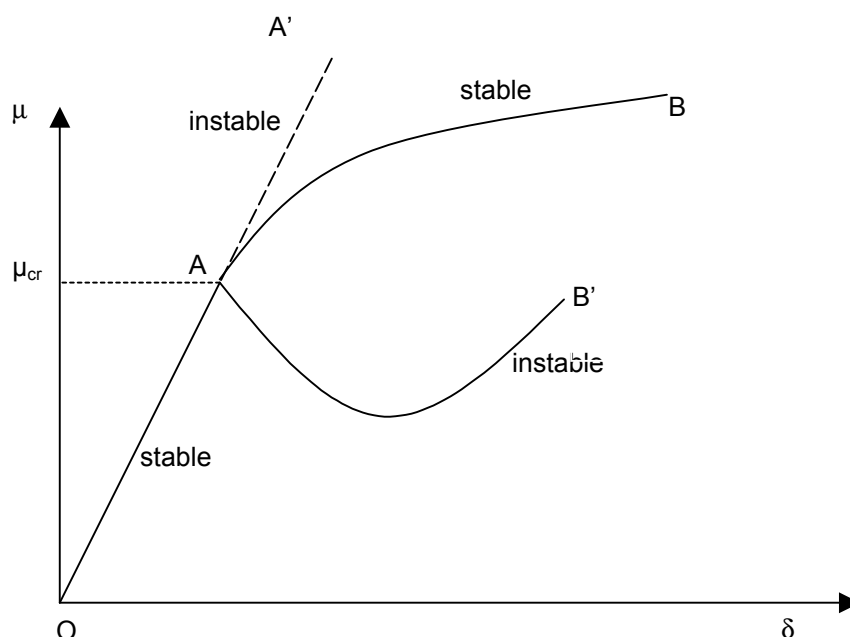


Figure 2.1-a : Flambage par bifurcation

Entre le point O et le point A, la structure admet une seule famille de courbe  $(\mu, \delta)$ , il peut, par exemple s'agir de l'élasticité linéaire classique ou de l'élastoplasticité, où si le problème est bien posé (cf. [§ 2.2]), on a le résultat classique d'existence et d'unicité de la solution.

Par contre, au-delà du point A, plusieurs familles de courbes sont solution du problème d'équilibre. Cette perte d'unicité s'accompagne d'une instabilité de la branche initiale (dite fondamentale). La branche secondaire peut être stable (courbe AB) ou instable (courbe AB'). La charge au-delà de laquelle il y a bifurcation s'appelle la charge critique  $\mu_{cr}$ .

Le flambage par bifurcation se caractérise par le fait que le mode (ou direction de flambement), qui initie la branche secondaire, n'engendre pas de travail supplémentaire dans le chargement appliqué : le mode de flambement lui étant orthogonal.

Un exemple de flambement par bifurcation avec instabilité de la branche secondaire se trouve dans le cas d'une coque cylindrique circulaire sous compression axiale [bib10]. Des exemples de flambement par bifurcation avec stabilité de la branche secondaire se trouvent dans des poutres élastiques en compression axiale, des anneaux circulaires en compression radiale et des plaques rectangulaires en compression longitudinale.

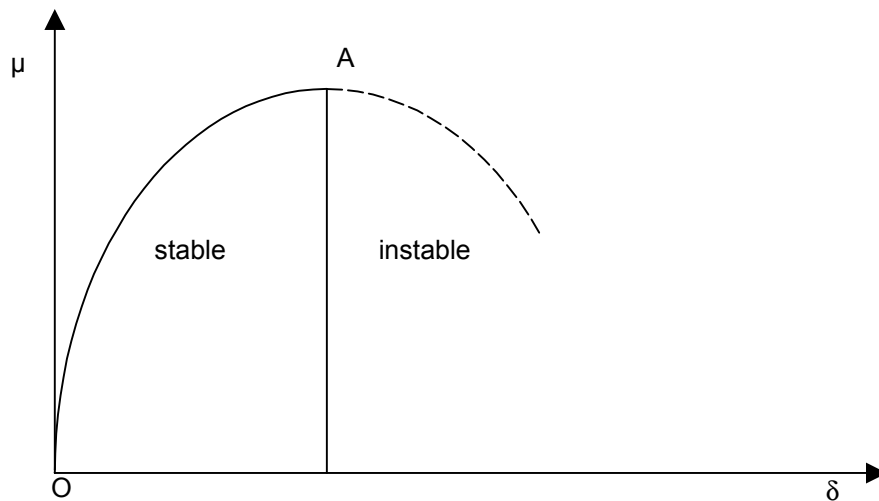


Figure 2.1-b : Flambage par point limite

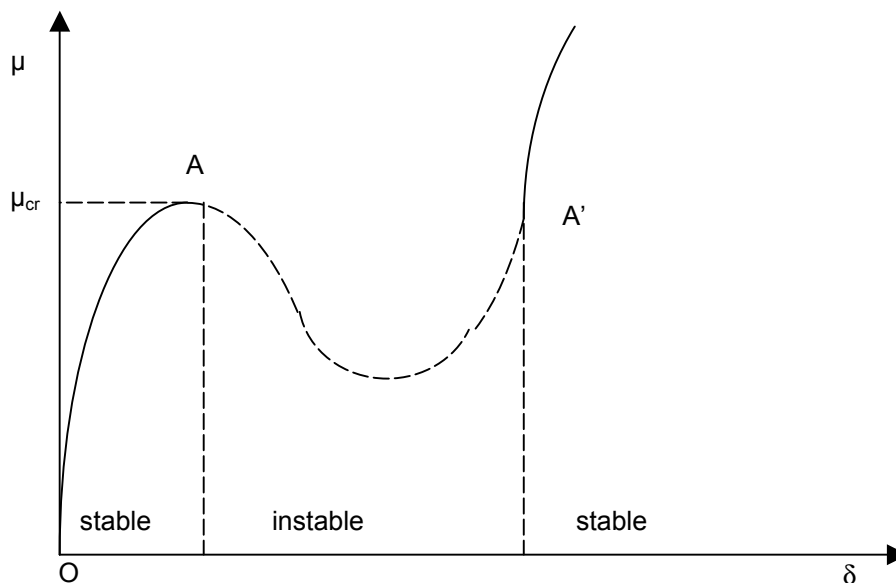


Figure 2.1-c : Flambage par point limite avec claquage

Sur les figures [Figure 2.1-b] et [Figure 2.1-c], qui illustrent le flambage par point limite, la structure n'admet qu'une seule famille  $(\mu, \delta)$  de solution des équations d'équilibre. Au point A, il y a perte de stabilité de la solution avec perte totale de rigidité dans le cas de la figure [Figure 2.1-b] et avec un phénomène de claquage dans le cas de la figure [Figure 2.1-c] (la solution redevient stable après une discontinuité de déplacement ; cas d'une calotte sphérique sous pression externe). Le point A est alors appelé point limite.

Le problème revient donc dans tous les cas à chercher la charge à partir de laquelle la branche fondamentale d'équilibre devient instable ou de stabilité incertaine. Cela mobilise généralement les grands déplacements.

On peut enfin avoir le cas de la ruine par écoulement plastique qui s'apparente au point limite [Figure 2.1-b].

## 2.2 Ecriture du problème mécanique

Ce chapitre a pour objectif d'introduire le formalisme général de calcul de structure adapté au problème mécanique non linéaire que nous souhaitons aborder.

Pour commencer, nous allons donc brièvement rappeler la mise en équation d'un problème type de calcul de structure. Pour simplifier, nous nous plaçons, tout du moins au début, dans le cadre des petites perturbations.

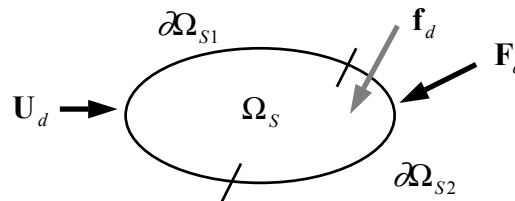


Figure 2.2-a : Représentation d'un problème de calcul de structure

La structure  $\Omega_S$  est soumise à des efforts volumiques imposés  $\mathbf{f}_d$ , des efforts surfaciques  $\mathbf{F}_d$  sur le bord  $\partial\Omega_{S2}$  et des déplacements imposés  $\mathbf{U}_d$  sur le reste du bord de  $\Omega_S$ , noté  $\partial\Omega_{S1}$ .

Les inconnues du problème de référence sur le solide sont le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le champ de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ . La solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  du problème structure où les effets thermiques sont négligés se définit comme :

Trouver  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \times \mathbf{L}^2(\Omega_S)$  qui vérifie :

- Equations de liaisons :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_{S1}} = \mathbf{U}_d \quad \text{éq 2.2-1}$$

- Relation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{ avec } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ qui est le tenseur de déformation} \quad \text{éq 2.2-2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \text{ en hypothèse de petites perturbations} \quad \text{éq 2.2-3}$$

Si on suppose un comportement élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 2.2-4}$$

- Equations d'équilibre :

$$\begin{cases} \rho \gamma = \nabla \cdot \sigma + f_d \text{ avec } \gamma = \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \sigma \cdot n|_{\partial \Omega_{S2}} = F_d \end{cases} \quad \text{éq 2.2-5}$$

## 2.3 Etude de stabilité du système

L'objet de ce chapitre est de présenter les méthodes permettant de déterminer la stabilité de l'équilibre quasi-statique non linéaire d'une structure. Pour commencer, nous nous intéressons uniquement à la détection d'instabilité, ou plus exactement à la perte d'unicité de la solution [bib6]. Parmi les travaux de synthèse récents, on peut citer [bib9] ou [bib7] et [bib8] qui présentent des papiers très complets sur l'analyse de stabilité non linéaire des structures.

Le calcul de la solution post-critique ne sera pas abordé.

Pour faire l'analyse de stabilité, nous introduisons une configuration initiale de référence  $\Omega_{S0}$ , une configuration actuelle  $\Omega_S$  et une configuration perturbée  $\Omega_{S1}$  :

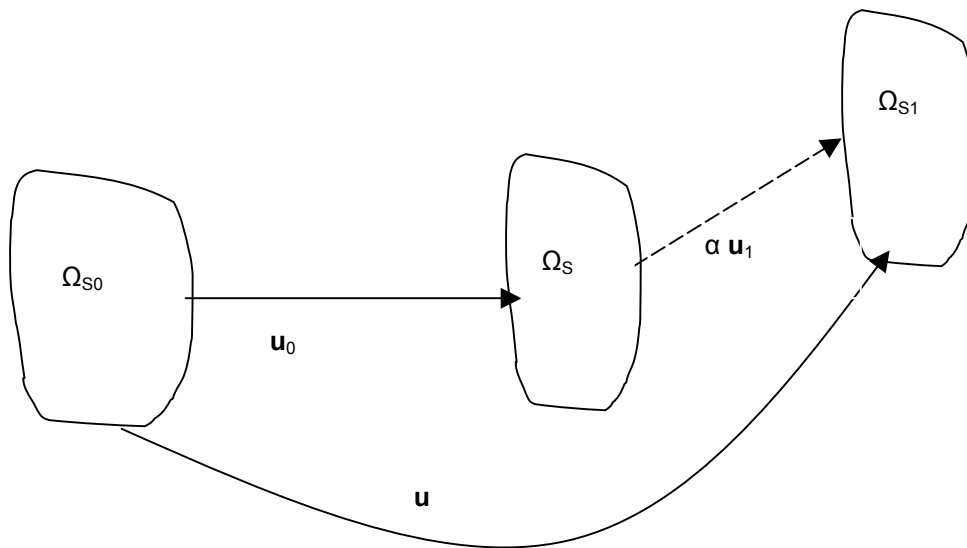


Figure 2.3-a : Définition des différentes configurations

Soit  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement des points de la structure. Le comportement est supposé, pour le moment, linéaire élastique isotrope. La structure soumise aux déplacements et efforts imposés va se déformer et devenir la structure repérée par la configuration actuelle  $\Omega_S$ . Nous cherchons à déterminer un état d'équilibre caractérisé par le champ de déplacement entre la configuration initiale  $\Omega_{S0}$  et la configuration courante  $\Omega_S$ , ainsi qu'un champ de contrainte de Cauchy, noté  $\boldsymbol{\sigma}$ , ou de Piola-Kirchhoff II, noté  $\boldsymbol{\pi}$  :

$$\boldsymbol{\pi} = \det \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\pi}_I \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} : \text{tenseur gradient de la transformation} \\ \det \mathbf{F} = \frac{\rho_0}{\rho} \\ \boldsymbol{\pi}_I : \text{tenseur de Piola - Kirchhoff I} \end{cases} \quad \text{éq 2.3-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\pi} = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Dans cette expression, on voit apparaître le rapport entre la masse volumique initiale  $\rho_0$  et la masse volumique courante  $\rho$ .

L'étape suivante est la prédiction de la stabilité de cet équilibre.

Dans ce but, nous allons chercher un critère permettant de déterminer s'il existe un seul champ de déplacement équilibrant les efforts appliqués. Nous supposons que les efforts augmentent progressivement et nous allons chercher à trouver à partir de quel moment il existe deux configurations  $\Omega_S$  et  $\Omega_{S1}$  qui respectent les équations du problème : nous cherchons un point de bifurcation, c'est-à-dire une perte d'unicité de la solution. Cet instant sera qualifié d'instant de flambage.

## 2.3.1 Ecriture du problème non linéaire géométrique élastique

La solution  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}$  du problème structure sans effets thermiques vérifie ([bib1], [bib7], [bib2]) :

- Equations de liaisons :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_{S10}} = \mathbf{U}_d \quad \text{éq 2.3.1-1}$$

- Relation de comportement élastique :

$$\boldsymbol{\pi} = \varphi_{,\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{ avec } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ qui est le tenseur de déformation} \quad \text{éq 2.3.1-2}$$

Si on suppose un comportement élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 2.3.1-3}$$

- Equations d'équilibre :

$$\begin{cases} \rho \underline{\gamma} = \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + \mathbf{f}_d \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \\ \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{n}_0|_{\partial\Omega_{S20}} = \mathbf{F}_d \end{cases} \quad \text{éq 2.3.1-4}$$

Le tenseur de déformation associé est celui de Green-Lagrange (référéncé à la configuration initiale) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \text{ avec } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad \text{éq 2.3.1-5}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) : \text{partie linéaire} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} : \text{partie quadratique} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant écrire le Principe des Puissances Virtuelles en élasticité non linéaire géométrique et en quasi-statique :

$$\begin{aligned}P^{int} - P^{ext} &= 0, \forall \mathbf{u}^* \text{ CA } 0 \\ \text{Avec : } \begin{cases} P^{int} = \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr}(\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\varepsilon}^*) d\Omega = \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr} \left[ \left( \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \right) \right] d\Omega \\ P^{ext} = \int_{\partial\Omega_{S0}} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega_{S0}} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \end{cases}\end{aligned}\quad \text{éq 2.3.1-6}$$

En vue d'obtenir une formulation discrétisée, on peut réécrire le tenseur de déformation :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \left[ \mathbf{B}^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}) \right] \cdot \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\pi} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ avec } \boldsymbol{\pi} \text{ qui est le tenseur de Piola - Kirchhoff II} \end{cases}\quad \text{éq 2.3.1-7}$$

La puissance des efforts internes devient :

$$\mathbf{P}^{int} = \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr} \left[ \boldsymbol{\pi} \cdot \left[ \mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}) \right]^T \mathbf{u}^* \right] d\Omega \quad \text{éq 2.3.1-8}$$

En tenant compte de la relation de comportement [éq 2.3.1-3] :

$$\mathbf{P}^{int} = \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr} \left[ \left[ \mathbf{B}^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}) \right]^T \mathbf{C} \left[ \mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}) \right] \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \right] d\Omega \quad \text{éq 2.3.1-9}$$

Après discrétisation par les éléments finis, on peut mettre cette équation sous forme matricielle :

$$\mathbf{u}^* \cdot \left[ \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) \right] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P}^{ext} \quad \text{éq 2.3.1-10}$$



La matrice  $\mathbf{K}^L$  est symétrique et on a les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 = \int_{\Omega_{S0}} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{C} \mathbf{B}^L d\Omega \\ \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_{S0}} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{LT} \mathbf{C} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}) \right] d\Omega \\ \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{S0}} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u}) d\Omega \end{cases} \quad \text{éq 2.3.1-11}$$

On obtient directement de ce qui précède l'écriture sous forme matricielle de l'équilibre :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext} \quad \text{éq 2.3.1-12}$$

Soit encore, de manière équivalente :

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{F}^{ext} \text{ avec } \mathbf{F}^{int} = \int_{\Omega_{S0}} [\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{u})]^T \boldsymbol{\pi} d\Omega \quad \text{éq 2.3.1-13}$$

Nous pouvons tout aussi bien formuler le Principe des Puissances Virtuelles à partir de l'état de contrainte de Cauchy et du tenseur de déformation d'Almansi (donc sur la configuration courante). On obtient alors :

$$\int_{\Omega_S} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*)) d\Omega = \int_{\partial\Omega_S} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \quad \text{éq 2.3.1-14}$$

Que l'on peut aussi mettre sous la forme, après discrétisation :

$$\int_{\Omega_S} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{F}^{int} = \mathbf{F}^{ext} \quad \text{éq 2.3.1-15}$$

Soit encore, en supposant la relation de comportement élastique :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext} \text{ avec } \mathbf{K} = \int_{\Omega_S} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad \text{éq 2.3.1-16}$$

Les intégrales de ces équations sont calculées sur le volume courant  $\Omega_S$  qui dépend, bien entendu, du champ de déplacement solution  $\mathbf{u}$ . De même, l'opérateur  $\mathbf{B}$  doit être calculé sur la configuration actuelle  $\Omega_S$  et non sur la configuration initiale  $\Omega_{S0}$ , comme c'était le cas précédemment.

## 2.3.2 Etude de stabilité en non linéaire géométrique

On va chercher s'il existe un deuxième champ de déplacement cinématiquement admissible qui vérifie les équations d'équilibre : on cherche donc à savoir si on aura bifurcation.

Ce deuxième champ sera écrit comme la somme d'une perturbation ajoutée à la première solution, soit :  $\mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}_1$ , avec  $\alpha$  qui est un réel très petit et que l'on va faire tendre vers 0. Le champ  $\mathbf{u}_1$  est choisi cinématiquement admissible à 0.

Le Principe des Puissances Virtuelles sera ensuite écrit pour ce nouveau champ.

Le champ de déformation se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \alpha \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}_1) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})) \right] + \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \quad \text{éq 2.3.2-1}$$

Les déformations virtuelles sont données par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^* = \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}^*) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}^*) \quad \text{éq 2.3.2-2}$$

De même, si nous choisissons  $\Omega_{S0}$  comme configuration de référence, les contraintes deviennent :

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi} + \alpha \mathbf{C} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}_1) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})) \right] + \frac{\alpha^2}{2} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \quad \text{éq 2.3.2-3}$$

Nous pouvons maintenant exprimer le Principe des Puissances Virtuelles pour le champ de déplacement perturbé. Prenons comme hypothèses que les forces imposées ne dépendent pas du déplacement et que la configuration initiale est choisie comme référence.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1^{int} = P^{int} \\ + \alpha \left[ \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr}(\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}^*)) d\Omega + \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \mathbf{C} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}_1) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})) \right) \right] d\Omega \right] + o(\alpha) \\ P_1^{ext} = P^{ext} \\ P_1^{int} - P_1^{ext} = 0 \end{array} \right. \quad \text{éq 2.3.2-4}$$

Pour  $\alpha$  suffisamment petit, il suffira que le terme proportionnel à  $\alpha$  dans l'expression [éq 2.3.2-4] soit nul pour que le Principe des Puissances Virtuelles soit vérifié pour le champ  $\mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}_1$ . Dans ce cas, il n'y aura donc plus unicité de la solution, ce qui traduira la perte de stabilité du système.

Lorsque les efforts imposés ne dépendent pas de la configuration géométrique, l'étude de stabilité s'énonce donc comme :

Connaissant l'état actuel, i.e. le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  cinématiquement admissible et le champ de contrainte  $\boldsymbol{\pi}$ , s'il existe un champ de déplacement  $\mathbf{u}_1$  cinématiquement admissible à 0 et tel que, pour tout déplacement  $\mathbf{u}^*$  cinématiquement admissible à 0, on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr}(\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}^*)) d\Omega \\ & + \int_{\Omega_{S0}} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}^*) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}^*) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)] d\Omega \\ & = 0 \end{aligned} \quad \text{éq 2.3.2-5}$$

Alors le problème considéré est instable.

On peut exprimer cette condition de bifurcation sous forme matricielle en introduisant, de plus, la matrice de raideur géométrique  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\pi})$  qui en discrétise le premier terme :

$$\begin{aligned} & \forall \mathbf{u}^* \text{ CA } 0, \mathbf{u}^{*T} \mathbf{K}_T \mathbf{u}_1 = 0 \\ & \text{Avec } \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\pi}) \text{ qui est la raideur tangente} \end{aligned} \quad \text{éq 2.3.2-6}$$

Si l'on écrit la condition de bifurcation sur la configuration courante  $\Omega_S$ , alors on a :

$$\forall \mathbf{u}^* \text{ CA } 0, \mathbf{u}^{*T} [\mathbf{K} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{éq 2.3.2-7}$$

La contrainte à considérer est alors la contrainte de Cauchy et toutes les intégrales sont évaluées sur le domaine courant  $\Omega_S$ .

### 2.3.2.1 Condition de stabilité d'un équilibre élastique non linéaire

Il vient immédiatement, que s'il existe un état tel que la matrice tangente  $\mathbf{K}_T$  définie ci-dessus soit singulière, nous aurons bien exhibé un champ de déplacement  $\mathbf{u}_1$  non nul qui démontre la perte d'unicité de la solution du problème mécanique. Ce champ de déplacement est le mode de flambage. On peut remarquer que la condition de bifurcation est bien vérifiée, quels que soient la norme et le signe de  $\mathbf{u}_1$  : en ce sens, on parle donc de mode de flambage, comme d'une direction, car on s'est limité dans [éq 2.3.2-4] au premier ordre en  $\alpha$ .

### 2.3.2.2 Cas des petits déplacements : charge d'Euler

Lorsque les déplacements peuvent être qualifiés de petits avant flambage, on peut confondre la configuration initiale avec la géométrie courante. Les matrices  $\mathbf{K}^L$  et  $\mathbf{K}^Q$  peuvent alors être négligées. De plus, la contrainte  $\boldsymbol{\pi}$  peut être confondue avec la contrainte usuelle  $\boldsymbol{\sigma}$  ; les équations de flambage s'écrivent alors :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{éq 2.3.2.2-1}$$

Il convient de remarquer que la matrice  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$  est proportionnelle à  $\boldsymbol{\sigma}$  et donc au chargement appliqué à la structure. Si on multiplie la contrainte par  $\lambda$ , on obtient :

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{éq 2.3.2.2-2}$$

Cette équation fait immédiatement penser à un problème généralisé aux valeurs propres, du même type que dans le cas de la recherche des modes de vibration, qui s'écrit :

$$[\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{éq 2.3.2.2-3}$$

La matrice  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$  est remplacée par la matrice de masse  $\mathbf{M}$ , et l'on voit apparaître la pulsation propre  $\omega$ , alors que  $\mathbf{v}_1$  est le mode de vibration associé.

Si l'on souhaite étudier le flambement sous d'un chargement dont seule une partie est pilotée (partie variable du chargement), par un principe de superposition, la contribution, constante, du chargement non pilotée doit être additionnée au terme  $\mathbf{K}_0$  et seule la contrainte générée par le chargement pilotée sera dans le terme en  $\lambda$ . Formellement, on pose donc le problème suivant :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}_{cte}) + \lambda \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}_{var})] \mathbf{u}_1 = 0$$

Avec :  $\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{cte} : \text{contrainte générée par le chargement non piloté} \\ \boldsymbol{\sigma}_{var} : \text{contrainte générée par le chargement piloté} \end{cases} \quad \text{éq 2.3.2.2-4}$

Les deux champs de contraintes sont obtenus par résolution de deux problèmes linéaires, l'un pour le chargement non piloté, l'autre pour la partie pilotée du chargement total. La documentation [U2.08.04] [bib17].

### 2.3.2.3 Cas des forces imposées dépendant de la géométrie

#### Exemple des pressions suiveuses :

Lorsque les forces extérieures dépendent de la configuration, cela entraîne que le travail des forces extérieures intervient dans la condition de stabilité. Prenons l'exemple d'une pression appliquée sur la structure. Cette pression sera supposée constante pendant le flambement : autrement dit, la valeur de pression ne change pas pendant le déplacement.

Cette hypothèse correspond à deux types de problèmes réels. Le premier type est celui où le volume du fluide imposant la pression sur la structure est très grand devant les variations de volume engendrées par le déplacement du solide. Les problèmes de réservoirs sous pression internes où les déplacements de parois sont non négligeables par rapport aux dimensions de la structure elle-même ne rentrent donc pas dans ce cadre.

Le deuxième cas correspond à l'existence d'une source de fluide qui permet de maintenir la pression à une valeur constante. Il n'est alors plus nécessaire de se soucier de l'amplitude du déplacement du solide.

La valeur de pression étant prise fixe, la variation de la normale au cours du temps sont à prendre en compte. Cette variation est due au champ de déplacement qui modifie la surface de la structure. De même, si on raisonne en termes de résultante et donc d'intégrale, l'élément de surface peut aussi changer d'aire. Par conséquent, la résultante des forces de pression va varier et il convient d'en tenir compte.

Nous voyons rapidement que la puissance des efforts, exprimée sur la configuration actuelle, associés à une pression est donnée par l'équation suivante (voir par exemple [bib11]) :

$$P_{pression}^{ext} = \int_{\partial\Omega_{sp}} p \left[ \mathbf{n} + \alpha \frac{dS_1}{dS} \mathbf{n}_1 \right] \cdot \mathbf{u}^* dS \quad \text{éq 2.3.2.3-1}$$

Dans cette équation, nous remarquons que la puissance des efforts extérieurs est modifiée dans le déplacement  $\alpha \mathbf{u}_1$ . Nous aurons alors :

$$P_1^{ext} = P^{ext} + \int_{\partial\Omega_{SP}} p \alpha \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}^* dS_1 \quad \text{éq 2.3.2.3-2}$$

Finalement, la matrice  $\mathbf{K}_T$  est enrichie d'un terme supplémentaire, fonction de la pression :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) + \mathbf{K}(\pi) + \mathbf{K}(p) \quad \text{éq 2.3.2.3-3}$$

Si on écrit les opérateurs sur la géométrie actuelle, on aboutit à :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{K}(\sigma) + \mathbf{K}(p) \quad \text{éq 2.3.2.3-4}$$

Lorsque nous serons en présence de forces suiveuses de pression, les mêmes méthodes que celles présentées précédemment pourront s'appliquer pour calculer les charges de flambage : il suffira de compléter la matrice  $\mathbf{K}_T$  avec le nouveau terme  $\mathbf{K}(p)$ . On peut montrer que la matrice  $\mathbf{K}(p)$  est symétrique si les forces de pression ne travaillent pas sur le « bord » du modèle.

## 2.3.2.4 Vibrations sous précontrainte

La même méthodologie peut aussi s'appliquer à l'étude des vibrations de la structure dans la configuration courante  $\Omega_S$ . Cette structure est précontrainte et déformée. Il suffit d'écrire le Principe des Puissances Virtuelles non linéaire géométrique [éq 2.3.1-6] en tenant compte des effets d'inertie et en y injectant l'hypothèse que les déplacements sont des fonctions périodiques du type :

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 \sin(\omega t) \quad \text{éq 2.3.2.4-1}$$

Il en découle :

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L(\mathbf{u}) + \mathbf{K}^Q(\mathbf{u}) + \mathbf{K}(\pi) + \mathbf{K}(p) - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{éq 2.3.2.4-2}$$

Intéressons nous à cette équation.

Tout d'abord, nous remarquons que lorsque nous avons un état critique alors la fréquence propre de vibration de la structure correspondant au mode de flambage est nulle.

De plus, nous observons que les fréquences propres de la structure chargée sont différentes de celles de la structure initiale pour deux raisons :

La pulsation propre  $\omega$  est modifiée par la précontrainte  $p$  : c'est l'effet principal qui est utilisé, par exemple, pour accorder un violon. La tension de la corde joue sur la hauteur de la note correspondante, donc sur sa fréquence propre.

Un deuxième effet est la variation de la fréquence par modification de la géométrie : la matrice de raideur géométrique de départ  $\mathbf{K}_0$  est remplacée par la matrice de raideur sur la géométrie actuelle :

$\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^Q$ . Ce qui a pour effet de modifier les équations vibratoires.

## 2.3.2.5 Traitement du comportement élastoplastique (flambement plastique)

Loin de toute exhaustivité, nous ne présenterons ici que les approches les plus simples, en vue de leur implantation aisée dans le code.

Lorsque la structure fonctionne dans un régime élastoplastique, le flambement est affecté par la perte de résistance due à la plasticité [bib2]. La modification vient de la relation de comportement pendant le déplacement supplémentaire  $\alpha \mathbf{u}_1$ .

La contrainte devient, sous forme incrémentale :

$$\Delta \pi_1 = \Delta \pi + \alpha C_T [\Delta \epsilon^L(\mathbf{u}) + \Delta \epsilon^Q(\mathbf{u}, \mathbf{u})] + \frac{\alpha^2}{2} C_T \Delta \epsilon^Q(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \quad \text{2.3.2.5-1}$$

Dans cette expression, la matrice de comportement est la matrice tangente  $\mathbf{C}_T$ . Le choix de cette matrice n'est pas immédiat : en effet, la matrice dépend de  $\alpha \mathbf{u}_1$  et n'est donc pas connue tant que le mode est inconnu. On peut, par exemple, décharger pendant le flambement si le mode se développe dans un sens et charger s'il se développe dans le sens opposé. Il est donc nécessaire de faire une hypothèse pour le comportement pendant le flambage plastique. Pour commencer, nous allons appliquer l'hypothèse de Hill [bib4] qui part du principe que la structure continue à charger plastiquement pendant le flambage.

Considérons une loi élastoplastique de type Von Mises. Nous définissons les trois modules :  $E$  qui est le module d'Young,  $E_T$  le module tangent, et  $E_S$  le module sécant. Ces modules sont rappelés sur la figure suivante :

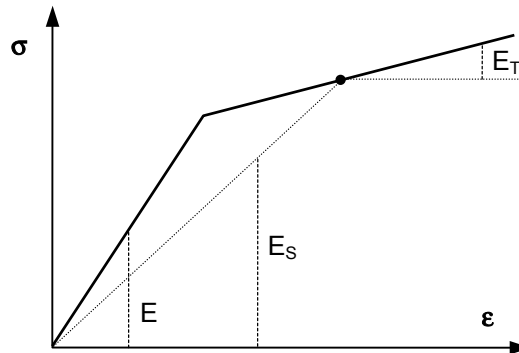


Figure 2.3.2.5-a : Représentation des divers modules sur une courbe de traction 1D

Puis nous proposons trois méthodologies possibles.

L'hypothèse du module tangent consiste simplement à remplacer le module d'Young par le module tangent dans la relation de comportement. On obtient alors :

$$\mathbf{C}_T = \frac{E}{E_T} \mathbf{C} \quad 2.3.2.5-2$$

Cette méthode est très rudimentaire, mais elle est toujours pessimiste, ce qui peut constituer un avantage, si l'on se place du point de vue du dimensionnement.

La méthode utilisée habituellement consiste à employer la matrice tangente du calcul incrémental (opérateur STAT\_NON\_LINE [bib14]). Nous avons donc l'équation suivante dans le cas de la plasticité de Von Mises [bib15] :

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{C} \left[ \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A} [\boldsymbol{\sigma}^D \otimes \boldsymbol{\sigma}^{D^T}] \mathbf{A} \mathbf{C}}{h + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{D^T} \mathbf{A} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}^D}{\|\boldsymbol{\sigma}^D\|_{VM}}} \right] \quad 2.3.2.5-3$$

Avec

- $\boldsymbol{\sigma}^D$  : vecteur déviateur des contraintes
- $\mathbf{A}$  : matrice intervenant dans la norme de Von Mises  $\left( \|\boldsymbol{\sigma}^D\|_{VM} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{D^T} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}^D} \right)$
- $h$  : pente plastique définie par :  $h = \frac{E \cdot E_T}{E - E_T}$

Cette méthode n'est parfaitement rigoureuse qu'en élasticité non linéaire ou si l'on respecte l'hypothèse de Hill : elle ne permet pas de prédire les bifurcations dans les trajets de chargement. Dès que la relation de comportement est dissipative, les charges critiques calculées ne seront exactes que si l'on peut vérifier que le chargement est monotone, en tout point de la structure (Hill [bib4]).

La méthode la plus réaliste consiste à utiliser la théorie finie de la déformation uniquement pour calculer la charge de flambement plastique. La matrice de comportement tangente est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\mathbf{C}_T = \left[ \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_S} \right) \frac{\mathbf{A} [\boldsymbol{\sigma}^D \otimes \boldsymbol{\sigma}^{D^T}] \mathbf{A}}{\|\boldsymbol{\sigma}^D\|_{VM}} + \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{1}{E_S} - \frac{1}{E} \right) \mathbf{A} \right]^{-1} \quad \mathbf{2.3.2.5-4}$$

Comparé à la méthode basée sur la matrice de raideur tangente [éq 2.3.2.5-3], ce critère nécessite la construction et l'assemblage d'une matrice globale spécifique. Cette opération coûteuse vient alourdir la résolution incrémentale.

Pour des considérations de généralité et de minimisation du coût de développement et du coût de calcul (CPU et mémoire), nous choisissons donc le critère basé sur le module tangent [éq 2.3.2.5-3].

### 3 Implantation dans le code

En toute rigueur, afin de s'assurer l'analyse de stabilité d'un calcul quasi-statique non linéaire, il faut utiliser le critère de stabilité *ad hoc* à chaque pas du calcul incrémental. Tout critère de stabilité non linéaire doit donc être intrinsèquement le moins coûteux possible en temps CPU et en place mémoire. Algorithmiquement parlant, il paraît judicieux d'implanter l'appel au critère à l'intérieur même de la routine correspondant à l'opérateur `STAT_NON_LINE` [bib14]. En effet, le principe d'appel à chaque pas s'accommode mal d'un fonctionnement totalement externalisé de la méthode incrémentale de résolution du problème mécanique non linéaire.

#### 3.1 Critère d'Euler

Ce critère (cf. [§2.3.2.2]) ne nécessite que la résolution d'un problème statique linéaire, puis la construction et l'assemblage de la matrice de raideur géométrique. Celle-ci et la matrice de raideur assemblée sont alors à passer comme argument d'un solveur [bib12] pour le problème aux valeurs propres [éq 2.3.2.2-2].

En sortie on récupère donc les modes de flambement et les charges critiques correspondantes. Pour plus de détails, l'utilisateur pourra utilement consulter le document [U2.08.04] [bib17].

## 3.2 Critère non linéaire

### 3.2.1 Impact sur l'opérateur STAT\_NON\_LINE

Commençons par rappeler brièvement le fonctionnement de la méthode incrémentale de résolution des problèmes de structure non linéaires [bib14].

#### 3.2.1.1 Algorithme de STAT\_NON\_LINE

On utilisera l'indice  $i$  (comme "instant") pour noter le numéro d'un incrément de charge et l'exposant  $n$  (comme "Newton") pour noter le numéro de l'itération de Newton en cours. L'algorithme utilisé dans l'opérateur STAT\_NON\_LINE peut alors s'écrire schématiquement de la façon suivante :

$(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$  et  $\sigma_0$  connus

Boucle sur des instants  $t_i$  (ou incréments de charge) : chargement  $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}(t_i)$

- $(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1})$  connus
- Prédiction : calcul de  $\Delta \mathbf{u}_i^0$  et  $\Delta \lambda_i^0$
- Boucle sur des itérations de Newton : calcul d'une suite  $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \lambda_i^n)$ 
  - $(\mathbf{u}_i^n, \lambda_i^n)$  et  $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \lambda_i^n)$  connus
  - Calcul des matrices et vecteurs associés aux charges suivies
  - Expression de la relation de comportement
    - calcul des contraintes  $\sigma_i^n$  et des variables internes  $\alpha_i^n$  à partir des valeurs  $\sigma_{i-1}$  et  $\alpha_{i-1}$  à l'équilibre précédent ( $t_{i-1}$ ) et de l'incrément de déplacement  $\Delta \mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}$  depuis cet équilibre
    - calcul des "forces nodales" :  $\mathbf{Q}^T \sigma_i^n + \mathbf{B}^T \lambda_i^n$
    - calcul éventuel de la matrice de raideur tangente :  $\mathbf{K}_i^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i^n)$
  - Calcul de la direction de recherche  $(\Delta \mathbf{u}_i^{n+1}, \Delta \lambda_i^{n+1})$  par résolution d'un système linéaire
  - Itérations de recherche linéaire :  $\rho$
  - Actualisation des variables et de leurs incréments :
$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \rho \delta \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n + \rho \delta \lambda_i^{n+1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta \mathbf{u}_i^{n+1} = \Delta \mathbf{u}_i^n + \rho \delta \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \Delta \lambda_i^{n+1} = \Delta \lambda_i^n + \rho \delta \lambda_i^{n+1} \end{cases}$$
  - Test de convergence
- Archivage des résultats à l'instant  $t_i$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i \\ \lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda_i \\ \sigma_i \\ \alpha_i \end{cases}$$

On remarque qu'il y a trois niveaux de boucles imbriquées : une boucle extérieure sur les pas de temps, une boucle d'itérations (qualifiées de globales) de Newton et des sous-boucles éventuelles pour la recherche linéaire (si elle est demandée par l'utilisateur) et certaines relations de comportement nécessitant des itérations (dites internes), par exemple pour l'élasto-plasticité en contraintes planes.

Si l'on choisit le critère basé sur la matrice tangente assemblée [eq 2.3.2.5-3], il faut disposer de cette matrice réactualisée à chaque pas où l'on veut faire l'analyse de stabilité.



C'est le cas lorsque l'on utilise une méthode de type Newton, et non pas une méthode de type Newton modifiée.

On aboutit alors à l'algorithme suivant :

$(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$  et  $\sigma_0$  connus

Boucle sur des instants  $t_i$  (ou incréments de charge) : chargement  $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}(t_i)$

- $(\mathbf{u}_{i-1}, \lambda_{i-1})$  connus
- Prédiction : calcul de  $\Delta \mathbf{u}_i^0$  et  $\Delta \lambda_i^0$
- Boucle sur des itérations de Newton : calcul d'une suite  $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \lambda_i^n)$ 
  - $(\mathbf{u}_i^n, \lambda_i^n)$  et  $(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta \lambda_i^n)$  connus
  - Calcul des matrices et vecteurs associés aux charges suiveuses
  - Expression de la relation de comportement
    - calcul des contraintes  $\sigma_i^n$  et des variables internes  $\alpha_i^n$  à partir des valeurs  $\sigma_{i-1}$  et  $\alpha_{i-1}$  à l'équilibre précédent ( $t_{i-1}$ ) et de l'incrément de déplacement  $\Delta \mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}$  depuis cet équilibre
    - calcul des "forces nodales" :  $\mathbf{Q}^T \sigma_i^n + \mathbf{B}^T \lambda_i^n$
    - calcul éventuel de la matrice de raideur tangente :  $\mathbf{K}_i^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i^n)$
  - Calcul de la direction de recherche  $(\Delta \mathbf{u}_i^{n+1}, \Delta \lambda_i^{n+1})$  par résolution d'un système linéaire
  - Itérations de recherche linéaire :  $\rho$
  - Actualisation des variables et de leurs incréments :
$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \rho \delta \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n + \rho \delta \lambda_i^{n+1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta \mathbf{u}_i^{n+1} = \Delta \mathbf{u}_i^n + \rho \delta \mathbf{u}_i^{n+1} \\ \Delta \lambda_i^{n+1} = \Delta \lambda_i^n + \rho \delta \lambda_i^{n+1} \end{cases}$$
  - Test de convergence
- Archivage des résultats à l'instant  $t_i$ 

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i \\ \lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta \lambda_i \\ \sigma_i \\ \alpha_i \end{cases}$$
- Critère de stabilité, fonction de la raideur tangente réactualisée :  $\mathbf{K}_i^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_i^n)$

Le critère est calculé à la fin du pas, juste après l'archivage. Il a donc comme arguments les quantités convergées au pas courant. De plus, ce choix de position d'appel permet de tenir compte correctement des chargements suiveurs, puisque leur calcul se fait lors des itérations de Newton. Le critère ne saurait donc être appelé avant la fin de ces itérations.

### 3.2.1.2 Impact sur la structure de donnée résultat de STAT\_NON\_LINE

L'appel du critère de stabilité non linéaire va induire la résolution d'un problème aux valeurs propres. Le résultat de ce calcul sera donc un ensemble de couples charge critique / mode de flambage. Les charges critique sont des scalaires et les modes associés sont des champs de déplacement, qui viendront enrichir la structure de donnée résultat de STAT\_NON\_LINE.

### 3.2.2 Particularités liées au tenseur de déformation

Dans le code, il convient de distinguer deux grandes familles de description des déformations.

D'une part le tenseur linéarisé correspond au cas des petites perturbations (argument `PETIT` du mot clé `DEFORMATION`), mais aussi au cas des petites perturbations réactualisées (lagrangien réactualisé à chaque pas du calcul incrémental : argument `PETIT_REAC` du mot clé `DEFORMATION`).

Le tenseur de déformation s'écrit alors (comme [éq 2.2-3]) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

L'utilisation de `PETIT_REAC` implique une résolution de l'équilibre de la structure sur sa géométrie actuelle avec un tenseur de déformations linéarisé. On calcule donc l'incrément de déformation par rapport à la position  $\mathbf{X}$ , au déplacement  $\mathbf{u}$  et à l'incrément de déplacement  $\Delta \mathbf{u}$  de la façon suivante :

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial (X + u)_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial (X + u)_i} \right) \quad \text{éq 3.2.2-2}$$

D'autre part, le code offre des tenseurs de déformation de type Green-Lagrange (`GREEN` ou `GREEN_GR`) pour le traitement des grands déplacements (et des rotations finies pour certains éléments de structure) mais sous hypothèse de petites déformations. Le tenseur utilisé est le tenseur classique suivant [éq 2.3.1-5] :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad \text{éq 3.2.2-3}$$

Le mot-clé `GREEN` correspond à des modélisations en 3D alors que le mot-clé `GREEN_GR` s'applique à des modélisations poutre ou coque.

Enfin, le cadre de modélisation en grandes transformations le plus complet accessible dans le *Code\_Aster* est issu de la théorie de Simo et correspond au mot-clé `SIMO_MIEHE`. Il prend en compte les grandes rotations et les grandes déformations puisque la loi de comportement est écrite en grandes déformations. Pour plus de précisions sur les différences fondamentales entre les différents types de déformations, la documentation [bib16] de *Code\_Aster* présente en détail la modélisation `SIMO_MIEHE`.

Le *Code\_Aster* ne permet pas les calculs en configuration eulerienne : comme avec le tenseur d'Almansi, par exemple. Tous les tenseurs de déformation disponibles sont de type lagrangien.

La différence fondamentale, quant à l'écriture du critère, se situe entre les déformations linéarisées (`PETIT` et `PETIT_REAC`) et les déformations `GREEN`, `GREEN_GR` et `SIMO_MIEHE`.

En effet, le *Code\_Aster* a besoin pour faire sa recherche d'équilibre de la matrice tangente. Celle-ci s'écrit d'après l'équation ([§2.2.2.1] de la documentation sur `STAT_NON_LINE` [bib14]) :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{Q}^T : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{éq 3.2.2-4}$$

Or,  $\mathbf{Q}^T : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}}$  correspond au terme classique de la rigidité matérielle et  $\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma}$  correspond au terme de rigidité géométrique qui n'est présent qu'en grands déplacements. Ainsi lorsqu'on veut appliquer un critère de flambement du type (formellement assimilable à [éq 2.3.2.2-2]) :  $(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}))\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .  
 Ce critère n'est valable qu'en petites déformations puisque le terme de rigidité géométrique est considéré comme négligeable dans la matrice tangente.  
 On peut donc, avec raison, faire une recherche classique des valeurs propres et vecteurs propres de type flambement d'Euler.

Par contre en grandes transformations, l'évaluation de ce critère par la même méthode est problématique pour deux raisons. D'une part, dans la matrice tangente, le terme de rigidité géométrique est déjà calculé et, d'autre part, la matrice  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$  qu'il faudrait éventuellement ajouter est obtenue sous Code\_Aster en petites déformations. Pour ces raisons, il est nécessaire d'évaluer de manière différente le critère selon le type de tenseur de déformation demandé par l'utilisateur.

Si l'on faisait le choix d'une description eulerienne, le développement d'un critère du type Euler réactualisé serait facilité au niveau du calcul du terme  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$ , quel que soit le tenseur de déformation.

### 3.2.2.1 En déformations linéarisées : PETIT et PETIT\_REAC

Comme nous l'avons dit précédemment, ce cas de figure ne pose pas de problème majeur. Il suffit de calculer la matrice de rigidité géométrique et de faire une recherche classique de modes et de valeurs propres, de type Euler [éq 2.3.2.2-2] :

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}))\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{éq 3.2.2.1-1}$$

$\mathbf{K}$  est la matrice tangente réactualisée à la fin du pas de temps.

Dans ce cas, on peut donc effectivement parler de critère de type Euler réactualisé.

Comme on est en petites déformations, la matrice des rigidités géométriques est proportionnelle au chargement. Donc, lorsque l'on obtient le coefficient critique  $\lambda$ , il suffit de le multiplier par la charge réelle au pas de temps actuel pour obtenir la charge critique de flambage. Le cas  $\lambda = 1$  correspond donc à la perte de stabilité.

### 3.2.2.2 En grands déplacements : GREEN, GREEN\_GR et SIMO\_MIEHE

La méthode classique ne s'applique plus dans ce cas-là. En effet, le Code\_Aster calcule comme matrice tangente la matrice de rigidité matérielle plus la matrice de rigidité géométrique (et éventuellement, la contribution due aux pressions suiventes).

Une des manières de vérifier alors le flambement est de faire une recherche des valeurs propres de la matrice tangente seule. Si une des valeurs propres est négative, c'est que la matrice est devenue singulière et qu'une instabilité est survenue entre le moment où toutes ses valeurs propres étaient positives et le moment où l'une d'elle est devenue négative.

Le problème à traiter est donc légèrement différent puisque dans le cas des petites déformations (PETIT et PETIT\_REAC), on a le système suivant à résoudre [éq 3.2.2.1-1] :  $(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}))\mathbf{v} = \mathbf{0}$  alors que dans le cas GREEN, GREEN\_GR et SIMO\_MIEHE il faut résoudre :

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{éq 3.2.2.2-1}$$

Avec  $\mathbf{I}$  qui est la matrice identité et  $\lambda$  est, cette fois, de dimension physique équivalente à  $\mathbf{K}$ , alors que dans le cas des petites déformations, la valeur propre  $\lambda$  est adimensionnelle (d'où son interprétation directe en tant que coefficient multiplicateur du chargement).

L'un des défauts inhérents à cette méthode par rapport à la recherche plus classique expliquée plus haut [§2.3.2] est que l'on ne peut avoir de prévisions de flambage que lorsqu'on s'approche « près » de la charge critique, voire lorsqu'on la dépasse. Loin de cette charge, la première valeur propre trouvée n'a pas réellement de signification physique puisque des non linéarités peuvent apparaître entre le pas courant et la charge critique calculée. Le rapport coefficient critique sur charge à l'instant  $i$  est donc différent de celui à l'instant  $i+1$  alors qu'en petites déformations ce rapport reste constant. De plus, pour tous les pas de temps, toutes les valeurs propres et vecteurs propres hormis la plus basse n'ont aucune signification physique puisque, pour un couple vecteur propre valeur propre  $(V_i, \lambda_i)$ , on a :

$$(K(u) + K(\sigma))V_i = \lambda_i V_i \quad \text{éq 3.2.2.2-2}$$

Ceci n'a de sens clair qu'à partir du moment où  $\lambda_i \rightarrow 0$ , auquel cas on retrouve la charge critique et le vecteur propre critique associé.

Toujours comparé au critère d'Euler (réactualisé [éq 3.2.2.1-1] ou non [éq 2.3.2.2-2]), on remarque que la valeur propre du problème [éq 3.2.2.2-1] :  $(K + \lambda I)v = 0$  n'est pas adimensionnée. Il en découle une plus grande difficulté d'interprétation quant à savoir si la valeur est « petite » ou non. Autrement dit, quand peut-on dire que l'on est proche d'une bifurcation ?

Pour définir un intervalle pertinent et d'usage général, afin de borner le voisinage d'une instabilité, il serait intéressant d'adimensionner les valeurs propres.

### 3.2.2.3 Cas des modélisations mixtes

Comme le *Code\_Aster* permet d'affecter plusieurs types de déformations à la même structure, il faut considérer le cas où l'on utilise plusieurs types de tenseurs de déformation dans le même calcul.

La différenciation des différentes matrices élémentaires n'étant d'aucune utilité, il convient de se résoudre à trancher au niveau global entre une méthode ou l'autre. On a choisi d'extraire les valeurs et vecteurs propres de la matrice tangente sans rajouter de matrices de raideurs géométriques. Tout se passe comme si la structure était en déformation de type Green-Lagrange du point de vue du critère. En effet, considérons un solide quelconque composé de deux parties I et II. Sur la partie I, le tenseur de déformation qui a été adopté est le tenseur linéarisé PETIT et sur la partie II celui de Green-Lagrange. La matrice tangente issue de l'assemblage des deux sous-matrices devient :

$$\begin{bmatrix} K_I & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & K_{II} + K_{II}(\sigma) \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.2.2.3-1}$$

Les termes étoilés représentent les nœuds communs aux deux parties et sont donc une combinaison linéaire des valeurs des deux matrices. Dans cette configuration, il apparaît qu'aucune des solutions n'est satisfaisante mais que la moins pénalisante est de faire une recherche de « type Green-Lagrange » [§3.2.2.2] c'est-à-dire d'utiliser  $(K + \lambda I)v = 0$  [éq 3.2.2.2-1].

Cette solution n'étant pas exacte mais néanmoins la seule capable d'être réalisée simplement, il est prévu d'ajouter un message d'alarme informant l'utilisateur que les résultats obtenus ne sont pas garantis dus à la juxtaposition de plusieurs types de tenseurs de déformations.

### 3.2.3 Amélioration des performances du critère

Durant la résolution incrémentale d'un problème quasi-statique non linéaire, dans l'idéal et si l'on admet que la discrétisation en temps est suffisamment fine, il faudrait faire une analyse de stabilité à chaque pas de calcul. A chaque pas, cela induit la résolution d'un problème aux valeurs propres, certes limité à la recherche de quelques modes. L'analyse de stabilité apporte donc un surcoût CPU important, à un calcul non linéaire pouvant déjà être long.

L'idée est de ne faire appel à la résolution d'un problème aux valeurs propres que quand c'est réellement nécessaire, donc quand la configuration courante est « proche » d'une instabilité. Si l'on peut définir ce voisinage par un intervalle prédéfini, alors on peut faire appel à un test de Sturm [bib12]. Ce test permet de savoir si il existe au moins une valeur propre sur l'intervalle de recherche. Dans l'affirmative, on pourra alors effectuer la recherche modale. Dans le cas contraire, on continue la résolution incrémentale quasi-statique, sans résoudre de problème aux valeurs propres.

Le coût d'un test de Sturm est notablement inférieur au coût de recherche des charges critiques.

L'intervalle de recherche pour le test de Sturm peut, soit être donné par l'utilisateur, soit avoir une valeur par défaut dans le code.

Dans le cas d'un critère d'Euler réactualisé (cas des petites déformations [§3.2.2.1]), où le problème à résoudre s'écrit :  $(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}(\sigma))\mathbf{v} = \mathbf{0}$  [éq 3.2.2.1-1], l'intervalle de recherche doit être centré sur la valeur propre  $\lambda = 1$  (qui correspond à la valeur -1 pour l'algorithme de MODE\_ITER\_SIMULT, car il résout en fait un problème du type :  $\mathbf{K}\mathbf{v} = \mu \mathbf{K}(\sigma)\mathbf{v}$ )).

Les bornes de l'intervalle sont les bornes du coefficient multiplicateur du chargement, donc des quantités adimensionnelles, qui sont fonction des coefficients de sécurité et de l'évaluation des incertitudes pour le problème donné. Le test de Sturm est mis en œuvre dans ce cadre.

Dans le cas spécifique adapté aux tenseur de Green-Lagrange [§3.2.2.2], où l'on résout :  $(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  [éq 3.2.2.2-1], l'intervalle est centré sur 0. De plus, les bornes de l'intervalle de test sont, contrairement au cas précédent, non adimensionnées [§3.2.2.2]. Il est donc plus difficile d'identifier des valeurs pertinentes et générales (pour le cas des valeurs par défauts). Le test de Sturm n'est pas implanté actuellement pour ce cas.

### 3.3 Généralisation à la dynamique

Nous n'aborderons pas ici le cadre des critères d'instabilité dynamique (amortissement négatif...). Il s'agit juste de signaler que le critère non linéaire présenté ici peut tout à fait s'appliquer directement en dynamique non linéaire. Il détectera alors tout flambage potentiel de la structure, au sens de la singularité de la matrice globale de raideur tangente réactualisée.

Afin d'être exhaustif en termes d'analyse de stabilité sur une étude dynamique non linéaire, l'utilisateur devrait utiliser deux critères :

- un critère de flambage (critère sur la raideur),
- un critère dynamique (critère sur l'amortissement ou sur le problème linéarisé quadratique global [bib13], par exemple).

Pour l'instant, le critère n'est pas disponible dans DYNA\_NON\_LINE.

### 3.4 Syntaxe d'appel du critère

Dans l'opérateur STAT\_NON\_LINE, l'appel au critère se fait de la manière suivante :

```
CRIT_FLAMB = _F(      CHAR_CRIT = ( -1.1 , 0. ) ,
                     NB_FREQ = 3 . ) ,
```

Le mot clé CHAR\_CRIT définit le domaine sur lequel on va faire le test de Sturm, en petites déformations linéarisées. Si on trouve au moins une valeur propre sur l'intervalle, alors, on mène la résolution du problème aux valeurs propres correspondant, sinon, on ne fait rien et le calcul incrémental peut continuer.

Si l'on utilise les modélisations GREEN, GREEN\_GR ou SIMO\_MIEHE, la résolution modale a forcément lieu, et on recherche les valeurs propres les plus petites.

Le mot clé NB\_FREQ permet de spécifier le nombre de modes que l'on recherche (valeur par défaut : 3). Il peut être utile de rechercher plus d'un mode, principalement pour pouvoir détecter les cas « pathologiques » tels que modes multiples ou très proches.

Le mode de flambage correspondant à la plus petite valeur propre (en valeur absolue) est stocké dans la structure de donnée RESULTAT (valeurs propres  $\lambda$  nommé CHAR\_CRIT, champs de déplacement nommé MODE\_FLAMB, que l'on peut visualiser via IMPR\_RESU).

### 3.5 Validation des développements

Les cas tests de validation sont : SSNL126 et SSLL105D.

Plus précisément, les cas tests SSNL126 traitent le cas d'une poutre encastree à une extrémité et soumise à une compression à l'autre extrémité. La modélisation est tridimensionnelle, avec relation de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire. Deux représentations cinématiques sont présentées :

- modélisation a : déformations linéarisées,
- modélisation b : déformations de Green-lagrange.

Le cas test SSLL105D se base sur un problème de poutre en L, dont on étudie le flambement élastique. Les éléments finis sont de type poutre.

## 4 Conclusions

Le *Code\_Aster* offre deux critères de stabilité, au sens du flambage, pour les calculs de structure.

D'une part, dans les cas où une approche linéarisée suffit, on peut appliquer un critère de type Euler ([bib12] et [bib17]), par appel à un opérateur de résolution du problème aux valeurs propres généralisé (par exemple `MODE_ITER_SIMULT` avec le mot clé `TYPE_RESU='MODE_FLAMB'`).

D'autre part, pour tous les cas où il est indispensable de tenir compte des non linéarités, qu'elles soient dues à la relation de comportement ou aux grandes transformations, l'utilisateur peut employer un critère adapté, de type Euler généralisé. L'appel de ce critère se fait au cours de la résolution incrémentale du problème quasi-statique (opérateur `STAT_NON_LINE` [bib14]).

A chaque pas de temps, le critère est basé sur la résolution d'un problème aux valeurs propres [bib12] sur les matrices de raideurs globales actualisées.

Ce critère, qui se décline sous deux formes différentes, suivant le tenseur de déformation choisi, se base sur une linéarisation autour du pas de calcul courant. Il accepte tout type de tenseur de déformation, ainsi que tout type de relation de comportement pour laquelle on est capable de construire la matrice de raideur globale, à chaque instant. De plus, le critère choisi est parfaitement rigoureux dans le cas des relations de comportement élastiques non linéaires, et dans le cas de l'élastoplasticité associée à l'hypothèse de Hill [§2.3.2.5].

## 5 Bibliographie

- [1] C. CHAVANT, A. COMBESURE, J. DEVOS, A. HOFFMANN, Y. MEZIERE : "Flambage élastique et plastique des coques minces", Cours IPSI, 1982.
- [2] S. DURANT, A. COMBESURE : "Analyse de bifurcation en grandes déformations élasto-plastiques : formulation et validation élémentaires", Rapport interne n°190, LMT-Cachan, 1997.
- [3] N. GREFFET : "Simulation couplée fluide-structure appliquée aux problèmes d'instabilité non linéaire sous écoulement", Thèse de doctorat, LMT, ENS-Cachan, 2001.
- [4] R. HILL : "A general theory for uniqueness and stability in elastic-plastic solids", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, 236-249, 1958.
- [5] T.J.R. HUGHES, W.K. LIU, I. LEVIT : "Nonlinear dynamic finite element analysis of shells, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", W. Wunderlich, E. Stein & K.J. Bathe editors, Berlin, Springer, 151-168, 1981.
- [6] G. LOOSS : "Elementary stability and bifurcation theory", Springer-Verlag, 1990.
- [7] A. LEGER, A. COMBESURE, M. POTIER-FERRY : "Bifurcation, flambage, stabilité en Mécanique des structures", Cours IPSI, 1998.
- [8] A. LEGER : "Bifurcation, flambage, stabilité en mécanique des structures", Note EDF-DER HI-74/98/024/0.
- [9] J. SHI : "Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by finite element method", Computer & Structures, Vol. 58, n°1, 203-220, 1996.
- [10] J.C. WOHLEVER, T.J. HEALEY : "A group theoretic approach to the global bifurcation analysis of an axially compressed cylindrical shell", Comp. Meth. In Applied Mech. And Engrg., Vol. 122, 315-349, 1995.
- [11] E. LORENTZ : "Efforts extérieurs de pression en grands déplacements", Manuel de référence du *Code\_Aster* [R3.03.04].
- [12] O. BOITEAU : "Algorithme de résolution pour le problème généralisé", Manuel de référence du *Code\_Aster* [R5.01.01].
- [13] D. SELIGMANN, R. MICHEL : "Algorithme de calcul du problème quadratiques de valeurs propres", Manuel de référence du *Code\_Aster* [R5.01.02].
- [14] N. TARDIEU, I. VAUTIER, E. LORENTZ : "Algorithme non linéaire quasi-statique (opérateur STAT\_NON\_LINE)", Manuel de référence du *Code\_Aster* [R5.03.01].
- [15] J.M. PROIX, E. LORENTZ, P. MIALON : "Intégration des relations élasto-plastiques", Manuel de référence du *Code\_Aster* [R5.03.02].
- [16] V. CANO, E. LORENTZ : "Modèle de Rousselier en grandes déformations", Manuel de référence du *Code\_Aster* [R5.03.06].
- [17] N. GREFFET : "Notice de calcul au flambage", Manuel d'utilisation du *Code\_Aster* [U2.08.04].

Page laissée intentionnellement blanche.