Organisme(s) : EDF-R&D/AMA

Manuel de Référence
Fascicule R3.06 : Eléments mécaniques et thermiques pour les milieux continus
Document : R3.06.09

Eléments finis de joint en 2D plan

Résumé :

Description de l'élément fini de joint 2D plan permettant de modéliser la création d'une fissure le long d'un chemin prédéterminé.
Présentation de la géométrie, définition du saut de déplacement dans l'élément, changement de repère : local à l'élément / global, calcul des efforts intérieurs ainsi que de la matrice tangente.

1 Géométrie

L'élément de joint est un quadrangle à quatre nœuds (QUAD4) avec deux petits côtés et deux grands ce qui permet de définir un repère local à l'élément : $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal à un grand côté et $\mathbf{t}$ un vecteur tangent à celui-ci.
La numérotation locale des nœuds doit se faire obligatoirement comme sur la [Figure 1-a], le côté [1,2] doit correspondre à un grand côté.
L'option MODI_MAILLAGE mots clé ORIE_CONTACT initialement développé pour les éléments de contacts permet d'imposer cette numérotation.

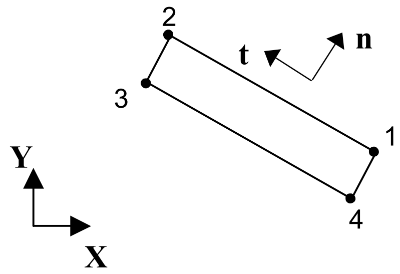

Figure 1-a : Elément de joint

L'élément de joint possède deux points de Gauss positionnés comme sur le SEG2 de référence :
Le premier PG1 en $-\sqrt{3}/3$ et le second PG2 en $\sqrt{3}/3$ sur le segment [-1,1] avec pour poids 1 chacun.

2 Changement de repère

Pour pouvoir passer du repère global $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ au repère local à l'élément $(\mathbf{n},\mathbf{t})$ nous introduisons la matrice de rotation $\mathbf{R}$. Cette matrice appliquée à un vecteur exprimé dans le repère global donne son expression dans le repère local.

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$$ où α est l'angle entre les deux repères.

on a $\cos\alpha=\frac{y_2-y_1}{l}$ et $\sin\alpha=-\frac{x_2-x_1}{l}$

avec $l=\left\|\overrightarrow{\mathbf{12}}\right\|$ et (x_1,y_1) et (x_2,y_2) les coordonnées des nœuds 1 et 2.

3 Saut de déplacement dans l'élément

Notons $\mathbf{U}_i = (u_i , v_i)$ et $\mathbf{U}_i^{loc} = (u_i^{loc} , v_i^{loc})$ les déplacements au nœud i respectivement dans le repère global $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et dans le repère local $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$.

Avec le changement de repère on a : $\mathbf{U}_i^{loc} = \mathbf{R}\mathbf{U}_i$

On défini les sauts de déplacement normal et tangent dans l'élément sur chacun des points de Gauss à partir des composantes du déplacement des quatre nœuds dans le repère local :

$$\begin{cases} [U]_n^g = C_g \left(u_1^{loc} - u_4^{loc}\right) + \left(1 - C_g\right)\left(u_2^{loc} - u_3^{loc}\right) \\ [U]_t^g = C_g \left(v_1^{loc} - v_4^{loc}\right) + \left(1 - C_g\right)\left(v_2^{loc} - v_3^{loc}\right) \end{cases}$$

avec g=1,2 la liste des points de Gauss et C_1 et C_2 les coefficients :

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad , \quad C_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

On peut réécrire le saut sous forme matricielle :

$$[\mathbf{U}]^g = \begin{pmatrix} [U]_n^g \\ [U]_t^g \end{pmatrix} = \mathbf{B}_g \mathbf{D}^{loc} \qquad \text{éq 3-1}$$

avec $\mathbf{D}^{loc} = (u_1^{loc}, v_1^{loc}, \ldots, u_4^{loc}, v_4^{loc})^T$

et $\mathbf{B}_g = \begin{pmatrix} C_g & 0 & 1-C_g & 0 & C_g - 1 & 0 & -C_g & 0 \\ 0 & C_g & 0 & 1-C_g & 0 & C_g - 1 & 0 & -C_g \end{pmatrix}$

4 Efforts intérieurs

Soit $\widetilde{\mathbf{R}}$ la matrice 8×8 qui permet d'exprimer les composantes du déplacement aux quatre nœuds dans le repère local : $\mathbf{D}^{loc} = (u_1^{loc}, v_1^{loc}, \ldots, u_4^{loc}, v_4^{loc})^T$ à partir des composantes du déplacement aux quatre nœuds dans le repère global : $\mathbf{D} = (u_1, v_1, \ldots, u_4, v_4)^T$.

On a $\mathbf{D}^{loc} = \widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{D}$ avec $\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{R} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{R} \end{pmatrix}$

où $\mathbf{R}$ est la matrice 2×2 de changement de repère définie en 2) et $\mathbf{O}$ la matrice 2×2 nulle.

Les efforts intérieurs dans l'élément de joint sont définis par un vecteur à huit composantes noté $\mathbf{F}_{\text{int}}$ et vérifiant la relation :

$$\delta E_S = \delta \mathbf{D}.\mathbf{F}_{\text{int}}$$

où $E_S = \int_{[1,2]} \mathrm{K}(\|[\mathbf{U}]\|)dl$ est l'énergie dans l'élément de joint.
(voir doc. de la loi de comportement Barenblatt [R7.02.11]).

on a :

$$\delta E_S = \int_{[1,2]} \frac{\partial \mathrm{K}(\|[\mathbf{U}]\|)}{\partial [\mathbf{U}]} [\mathbf{U}]\, dl$$

$= \int_{[1,2]} \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{B}\,\delta\,\mathbf{D}^{loc} dl$ d'après la définition de $\boldsymbol{\sigma}$ (doc. [R7.02.11]) et d'après [éq 3-1].

$= \int_{[1,2]} \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{R}}\,\delta\,\mathbf{D}\; dl$ puisque $\mathbf{D}^{loc} = \widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{D}$

$= \int_{[1,2]} \widetilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\; \delta\,\mathbf{D}\; dl$

On en déduit les efforts intérieurs :

$$F_{\text{int}} = \int_{[1,2]} \widetilde{R}^T B^T \sigma dl \qquad \textbf{éq 4-1}$$

on peut évaluer cette intégrale :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \sum_{g=1,2} \omega_g \widetilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\sigma}_g$$ avec les poids des points de Gauss $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{l}{2}$.

5 Matrice tangente

Le terme qu'il faut calculer dans la matrice tangente est la dérivée des efforts intérieurs par rapport aux déplacements (matrice 8×8).

Les efforts intérieurs sont donnés par : $\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{[1,2]} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dl$

D'où $\dfrac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} = \int_{[1,2]} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}^T \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial [\mathbf{U}]} \dfrac{\partial [\mathbf{U}]}{\partial \mathbf{D}} dl$

comme $[\mathbf{U}] = \mathbf{B}\mathbf{D}^{loc} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D}$ alors $\dfrac{\partial [\mathbf{U}]}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}$

et on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} = \int_{[1,2]} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial [\mathbf{U}]} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}} \, dl \qquad \text{éq 5-1}$$

que l'on peut évaluer : $\dfrac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} = \sum_{g=1,2} \omega_g \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}_g^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial [\mathbf{U}]} \right)_g \mathbf{B}_g \tilde{\mathbf{R}}$

avec les poids des points de Gauss $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{l}{2}$.

Page laissée intentionnellement blanche.