

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R4.03 : Analyse de sensibilité**  
**Document : R4.03.04**

# Calcul de sensibilité en dynamique

**Résumé**

L'obtention des sensibilités est importante en dynamique où de petites perturbations des paramètres peuvent avoir une grande influence sur les grandeurs d'intérêt. L'objectif du document est d'explicitier le calcul des sensibilités (i.e. dérivées) des principales grandeurs : modes et fréquences propres, réponses dynamiques en fréquentiel et temporel, en linéaire et non linéaire). Pour chacune des grandeurs, le "problème dérivé", c'est-à-dire le problème dont la dérivée est solution, est écrit (sous forme variationnelle et/ou matricielle). Les algorithmes numériques de calcul de ces dérivées sont ensuite détaillés et discutés. Toutes les implantations informatiques correspondantes dans *Code\_Aster* n'ont pas été réalisées. Un tableau donne donc l'état actuel des développements..

La dérivation par rapport aux paramètres des matrices de masse, de raideur, d'amortissement, du chargement et également le cas particulier de la dérivation par rapport à une variation de domaine sont présentés. Les calculs par la méthode des éléments finis, qui sont spécifiques aux dérivées, sont explicités au niveau des calculs élémentaires.

## Table des matières

|   |    |
|---|----|
| 1 Introduction .....  | 3  |
| 2 Dérivées de réponses dynamiques .....   | 4  |
| 2.1 Problème standard .....   | 4  |
| 2.2 Dérivées d'une réponse dynamique harmonique .....                               | 5  |
| 2.2.1 Méthode directe .....   | 5  |
| 2.2.2 Méthode modale simple .....   | 5  |
| 2.2.3 Méthode modale double.....  | 6  |
| 2.2.4 Implantation par la méthode des éléments finis .....                          | 7  |
| 2.3 Dérivée d'une réponse dynamique temporelle en linéaire.....                     | 8  |
| 2.3.1 Méthode directe .....   | 8  |
| 2.3.2 Méthode modale .....  | 9  |
| 2.3.3 Implantation par la méthode des éléments finis .....                          | 10 |
| 2.4 Dérivées d'un réponse dynamique temporelle en non linéaire.....                 | 10 |
| 3 Dérivées des fréquences et modes propres de vibration.....                        | 11 |
| 3.1 Problème standard .....   | 11 |
| 3.2 Dérivées des fréquences propres .....   | 12 |
| 3.2.1 Le cas des valeurs propres simples.....                                       | 12 |
| 3.2.2 Le cas des valeurs propres multiples.....                                     | 12 |
| 3.2.3 Implantation par la méthode des éléments finis .....                          | 15 |
| 3.3 Dérivées des modes propres de vibration .....                                   | 16 |
| 3.3.1 Le cas des valeurs propres simples.....                                       | 16 |
| 3.3.2 Le cas des valeurs propres multiples.....                                     | 17 |
| 3.3.3 Implantation par la méthode des éléments finis .....                          | 18 |
| 4 Dérivées par rapport à une variation de domaine .....                             | 18 |
| 4.1 Formulation variationnelle du problème standard.....                            | 18 |
| 4.2 Description de la variation de domaine et formulaire de dérivation .....        | 19 |
| 4.3 Dérivation de la formulation variationnelle .....                               | 20 |
| 4.3.1 Dérivation de l'opérateur de raideur élastique .....                          | 20 |
| 4.3.2 Dérivation de l'opérateur de raideur géométrique .....                        | 21 |
| 4.3.3 Dérivation de l'opérateur de masse .....                                      | 22 |
| 4.3.4 Dérivation de la formulation variationnelle du problème d'analyse modale..... | 23 |
| 4.3.5 Obtention de la dérivée des fréquences propres et des modes propres.....      | 23 |
| 4.3.6 Implantation par la méthode des éléments finis .....                          | 23 |
| 5 Implantation effective dans <i>Code_Aster</i> .....                               | 24 |
| 6 Bibliographie .....   | 25 |

## 1 Introduction

Dans un contexte de calcul mécanique sur un modèle de structure, on entend par "sensibilités" les dérivées d'une grandeur résultat du modèle par rapport à des paramètres d'entrée dudit modèle. En dynamique, de petites perturbations des paramètres peuvent avoir une grande influence sur les grandeurs dynamiques et vibratoires [bib1]. Le calcul des sensibilités s'avère ainsi primordial, car il permet d'effectuer des analyses d'influences des paramètres, des analyses probabilistes, de l'identification de paramètres (ou recalage), de l'optimisation ...

Cette documentation développe l'obtention des sensibilités des grandeurs dynamiques par rapport aux paramètres mécaniques, aux conditions aux limites, au chargement, et à une variation de domaine. Les grandeurs dynamiques traitées sont les réponses dynamiques en déplacement, les fréquences propres et les modes propres. Les sensibilités des autres grandeurs dynamiques (contraintes, efforts...) qui sont en général calculées par post-traitement peuvent s'en déduire a posteriori par les calculs ad hoc.

La méthode générale de calcul retenue est une méthode de différentiation directe exacte (par opposition aux méthodes de l'état adjoint, aux méthodes de différences finies ou autres méthodes semi-analytiques (le calcul des dérivées par une méthode semi-analytique consiste à calculer les dérivées des matrices élémentaires par différences finies et ensuite à calculer analytiquement les dérivées des grandeurs résultats. Cette méthode est plus facile à implanter que la méthode analytique complète et a été retenue dans Nastran ou Abaqus par exemple (cf.[ bib2])).

Cette méthode a comme principal avantage d'être exacte. On évite ainsi les problèmes de convergence des algorithmes d'optimisation basé sur le gradient ou les problèmes de précisions des différences finies (lorsque les résultats sont issus d'un algorithme itératif, les différences finies peuvent être particulièrement imprécises). Elle est également plus générale que la méthode de l'état adjoint où une fonctionnelle à dériver doit être précisée avant le calcul (elle permet ainsi par exemple d'obtenir directement un champs dérivé).

Cette méthode peut être très économique en temps de calcul si les algorithmes de résolution des problèmes dérivés - c'est-à-dire les problèmes dont les dérivées sont solutions - sont bien choisis et si la programmation est soignée. Dans les cas les plus favorables, le temps de calcul d'une dérivée ne représente qu'un très faible pourcentage du temps de calcul de la grandeur standard.

Son principal inconvénient est l'ampleur des développements informatiques nécessaires à son implantation (d'autant plus que l'architecture de *Code\_Aster* ne permet pas d'utiliser la différentiation automatique).

Le document s'attache à présenter les différents "problèmes dérivés". Ils sont écrits sous forme variationnelle et/ou matricielle selon la nécessité. Ces problèmes dérivés ont souvent de très bonnes propriétés. Par exemple, en dynamique linéaire, les premiers membres des systèmes à résoudre sont conservés. En dynamique non linéaire, le problème dérivé est un problème linéaire.

Les méthodes de résolution qui répondent *a priori* le plus aux besoins des utilisateurs de *Code\_Aster* sont présentées. Afin de minimiser le temps de calcul, l'algorithme de calcul des dérivées doit exploiter le plus possible les résultats intermédiaires de la résolution du problème standard. Par ailleurs, l'efficacité de certains algorithmes dépend des propriétés des matrices des problèmes à résoudre, du nombre de paramètres par rapport auquel il faut dériver, et de la précision recherchée.

## 2 Dérivées de réponses dynamiques

### 2.1 Problème standard

Dans le domaine fréquentiel, les équations de la dynamique linéarisée et la dualisation des conditions aux limites conduisent à l'équation matricielle suivante (c'est la discrétisation par la méthode des éléments finis de la formulation variationnelle qui permet d'obtenir cette équation. Au cours du document, les formulations variationnelles et à la méthode des éléments sont explicitées lorsque nécessaire) :

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M}(p) + i\omega \mathbf{C}(p) + \mathbf{K}(p)\right) \mathbf{X}(\omega, p) = \mathbf{F}(\omega, p) \quad \text{éq 2.1-1}$$

où :

- $\mathbf{X}(\omega, p) \in R^{n'}$  ( $n' = n + 2v$ ) est, pour la pulsation  $\omega$ , le vecteur composé des  $n$  ddl physiques de la structure discrétisée et des  $2v$  multiplicateurs de Lagrange [R3.03.01],
- $p$  est un paramètre scalaire de propriété mécanique, du chargement ou de géométrie qui intervient directement de façon explicite dans les matrices de masse, de raideur ou d'amortissement, ou bien dans le chargement. Remarquons que cela peut être un paramètre de géométrie pour les éléments de structure (par exemple une épaisseur de coque) mais pas un paramètre géométrique du maillage pour lequel le domaine d'intégration est modifié et pour lequel donc il faut revenir à une formulation variationnelle du problème et établir un paramétrage du domaine (cf. [§4]),
- $\mathbf{M}(p)$ ,  $\mathbf{C}(p)$  et  $\mathbf{K}(p)$  sont les matrices symétriques réelles de masse, d'amortissement et de raideur "généralisées" (donc non nécessairement définies positives),
- $\mathbf{F}(\omega, p)$  est le vecteur des forces externes.

Le *Code\_Aster* résout une équation plus générale pour les systèmes fluides-structures [R5.05.03]. L'écriture du problème dérivé et sa résolution n'en sont pas fondamentalement modifiées. Pour plus de clarté et de concision, on se limite donc dans la suite de cette doc. à l'équation [éq 2.1-1].

Dans *Code\_Aster*, la résolution de [éq 2.1-1] est effectuée par les méthodes directes multifrontale et "LDL<sup>T</sup>" [R6.02.02]. Ces deux méthodes procèdent en trois étapes :

- renumérotation des inconnues,
- factorisation de la matrice,
- descente/remontée (résolution de deux systèmes triangulaires).

Dans le cas où plusieurs systèmes linéaires, de même matrice, sont à résoudre, seules les descentes/remontées sont à effectuer plusieurs fois. De même si plusieurs matrices de même structure sont à factoriser, la renumérotation des inconnues ne sera pas à refaire (cette phase préliminaire a un coût non négligeable, même si son poids relatif en temps de calcul diminue avec la taille des matrices à factoriser). Ces deux propriétés sont très importantes et vont permettre de calculer les dérivées à moindre coût numérique.

## 2.2 Dérivées d'une réponse dynamique harmonique

### 2.2.1 Méthode directe

La dérivation de [éq 2.1-1] donne (après manipulations pour exhiber un "bon" second membre) :

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p} = \frac{\partial \mathbf{F}(\omega)}{\partial p} - \left(-\omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + i\omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p}\right) \mathbf{X}(\omega) \quad \text{éq 2.2.1-1}$$

La résolution du système linéaire [éq 2.2.1-1] donne la grandeur  $\frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p}$  recherchée.

On peut observer que le système [éq 2.2.1-1] possède la même matrice coefficient que [éq 2.1-1], et un second membre différent mais que l'on peut obtenir sans inversion à partir de calculs élémentaires. Ce second membre est appelé dans la littérature "pseudo-charge" donnant à la méthode directe le nom également de "méthode des pseudo-charges".

Il y a autant de résolutions de [éq 2.2.1-1] que de paramètres par rapport auxquels on dérive. Pour effectuer ces résolutions en minimisant le temps de calcul, on utilise les propriétés des méthodes directes multifrontale et "LDL<sup>T</sup>" rappelées en [§2.1]. La renumérotation des inconnues et la factorisation de la matrice sont ainsi effectuées une seule fois pour toutes les résolutions.

Remarquons également que la plupart des termes du second membre sont nuls. En effet, si  $p$  est une force nodale seul reste le terme  $\frac{\partial \mathbf{F}(\omega)}{\partial p}$ , si  $p$  est une masse volumique seul reste le terme  $\omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{X}(\omega)$ , etc ... Cette remarque demeure valable dans toute la suite de la doc., pour tous les termes contenant des dérivées.

### 2.2.2 Méthode modale simple

Pour accélérer les résolutions de [éq 2.1-1] fréquence par fréquence, il est habituel de projeter l'opérateur sur une base modale tronquée  $[\Phi_L] = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_L]$  où  $\Phi_i$  est le  $i$ -ième vecteur propre (cf. [§3.1]) et avec  $L < n'$  [R5.06.01]. Le nouveau système à résoudre devient :

$$\left([\Phi]_L^T \left(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) [\Phi]_L\right) \boldsymbol{\eta}(\omega) = [\Phi]_L^T \mathbf{F}(\omega) \quad \text{éq 2.2.2-1}$$

avec la projection de  $\mathbf{X}(\omega)$  sur la base modale incomplète qui s'écrit  $\mathbf{X}_L = [\Phi]_L \boldsymbol{\eta}(\omega)$ .

La dérivation de [éq 2.2.2-1] donne :

$$\begin{aligned} & \left( [\Phi]_L^T \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) [\Phi]_L \right) \frac{\partial \eta(\omega)}{\partial p} = \frac{\partial [\Phi]_L^T}{\partial p} \mathbf{F}(\omega) + [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{F}(\omega)}{\partial p} \\ & - \left( [\Phi]_L^T \left( -\omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + i\omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) [\Phi]_L \right) \\ & + \frac{\partial [\Phi]_L^T}{\partial p} \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) [\Phi]_L + [\Phi]_L^T \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \frac{\partial [\Phi]_L}{\partial p} \eta(\omega) \end{aligned} \quad \text{éq 2.2.2-2}$$

La résolution de [éq 2.2.2-2] fournit  $\frac{\partial \eta(\omega)}{\partial p}$ . On obtient ensuite la dérivée de la projection sur la base modale de  $\mathbf{X}(\omega)$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial \mathbf{X}_L}{\partial p}$  par :

$$\frac{\partial \mathbf{X}_L}{\partial p} = \frac{\partial [\Phi]_L}{\partial p} \eta(\omega) + [\Phi]_L \frac{\partial \eta(\omega)}{\partial p} \quad \text{éq 2.2.2-3}$$

La remarque faite pour la méthode directe est valable pour la méthode modale simple : les pré-traitements de la matrice coefficient dans le système linéaire [éq 2.2.2-1] (factorisation essentiellement) peuvent être avantageusement réutilisés pour la résolution de [éq 2.2.2-2].

Dans cette méthode, la seule troncature effectuée est celle de la projection de  $\mathbf{X}(\omega)$  sur la base modale incomplète. Le calcul de la dérivée est ensuite effectuée sans autre approximation. En contrepartie, la résolution de [éq 2.2.2-2] et le calcul de [éq 2.2.2-3] nécessitent au préalable le calcul de  $\frac{\partial [\Phi]_L}{\partial p}$ , par exemple par l'une des méthodes présentées au chapitre [§3.3].

## 2.2.3 Méthode modale double

De la même façon que  $\mathbf{X}(\omega)$  est projetée sur base modale tronquée,  $\frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p}$  peut être projetée sur cette même base. Appliquant cette projection à [éq 2.2.1-1], on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( [\Phi]_L^T \left( -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) [\Phi]_L \right) \mu(\omega) = \\ & = [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{F}(\omega)}{\partial p} - [\Phi]_L^T \left( -\omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + i\omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \mathbf{X}(\omega) \end{aligned} \quad \text{éq 2.2.3-1}$$

avec la projection sur la base modale de  $\frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p}$  qui s'écrit  $[\Phi]_L \mu(\omega)$ .

En pratique, dans [éq 2.2.3-1],  $\mathbf{X}(\omega)$  n'est connu qu'après la première projection modale. La méthode par double projection consiste donc à effectuer successivement les deux projections, et ainsi à écrire (substitution de  $\mathbf{X}(\omega)$  par  $\mathbf{X}_L$  dans [éq 2.2.3-1]) :

$$\begin{aligned} ([\Phi]_L^T (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) [\Phi]_L) \hat{\mathbf{u}}(\omega) = \\ = [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{F}(\omega)}{\partial p} - [\Phi]_L^T \left( -\omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + i\omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \mathbf{X}_L(\omega) \end{aligned}$$

**éq 2.2.3-2**

Il faut bien voir que la résolution de [éq 2.2.3-2] donne une approximation de  $\frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p}$  après une double troncature. La première troncature est la troncature habituelle effectuée pour obtenir la projection de  $\mathbf{X}(\omega)$ . La seconde troncature est de même nature mais concerne  $\frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p}$ .

Des techniques d'accélération de la convergence de la série donnant  $\frac{\partial \mathbf{X}(\omega)}{\partial p}$  ont été proposées dans la littérature à [bib3]. L'utilisateur de *Code\_Aster* utilisera préférentiellement la méthode modale simple pour obtenir plus de précision dans les résultats.

## 2.2.4 Implantation par la méthode des éléments finis

Pour le calcul des seconds membres de [éq 2.2.1-1], [éq 2.2.2-2] et [éq 2.2.3-2], plusieurs choix sont possibles selon que les produits matriciels sont calculés à un niveau élémentaire ou non.

Pour des raisons de performance, il a été choisi d'effectuer les produits matriciels du second membre de [éq 2.2.1-1] à un niveau élémentaire. Dans *Code\_Aster*, le second membre de [éq 2.2.1-1] est donc calculé directement par l'assemblage des matrices élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\xi_g)}{\partial p} - \omega_g \omega^2 \frac{\partial}{\partial p} (\rho(\xi_g)) \mathbf{N}^e(\xi_g)^T \mathbf{N}^e(\xi_g) \mathbf{X}^e + \omega_g i\omega \frac{\partial}{\partial p} (c_a(\xi_g)) \mathbf{N}^e(\xi_g)^T \mathbf{N}^e(\xi_g) \mathbf{X}^e \\ + \omega_g (\mathbf{B}^e(\xi_g))^T \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{H}^e(\xi_g)) (\mathbf{B}^e(\xi_g) \mathbf{X}^e) \end{aligned}$$

**éq 2.2.4-1**

où :

- les mêmes schémas d'intégration (mêmes fonctions de formes, points de Gauss, ...) qui ont permis d'obtenir le système linéaire standard sont utilisés,
- $\xi_g$  sont les coordonnées paramétriques du point de Gauss de poids  $\omega_g$ ,
- $\mathbf{N}^e(\xi_g)$  est la matrice des fonctions de forme de l'élément  $e$ ,
- $\mathbf{B}^e(\xi_g)$  est la matrice reliant les déformations aux variables nodales pour l'élément  $e$ .

Ainsi, le vecteur assemblé  $\left( -\omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + i\omega \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \mathbf{X}(\omega)$  est obtenu sans le calcul et l'assemblage préalables des matrices  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p}$  et  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p}$ . Cette procédure est donc économique en assemblage et stockage de matrices assemblées. Elle possède en revanche l'inconvénient de nécessiter le calcul des matrices élémentaires dérivées à chaque fréquence puisque le produit par  $\mathbf{X}(\omega)$  est effectué à un niveau élémentaire et empêche donc le stockage de ces matrices élémentaires dérivées (du moins avec l'architecture de *Code\_Aster*).

Les seconds membres de [éq 2.2.2-2] et [éq 2.2.3-2] résulteront eux d'un panaché entre opérations élémentaires et opérations matricielles.

Une fois encore, on peut remarquer que de nombreux termes de [éq 2.2.4-1] sont nuls. Par exemple si  $p$  est le module d'Young de certains éléments, seul reste le terme  $\omega_g \left( \mathbf{B}^e(\xi_g) \right)^T \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{H}^e(\xi_g)) \left( \mathbf{B}^e(\xi_g) \mathbf{X}(\xi_g) \right)$  pour ces éléments et [éq 2.2.4-1] est nul partout ailleurs.

## 2.3 Dérivée d'une réponse dynamique temporelle en linéaire

On se limite dans ce chapitre et dans le suivant au cas où l'on ne dérive pas par rapport à des paramètres intervenant dans les conditions initiales. Ce cas pose des difficultés théoriques et pratiques hors du champ de cette doc.

### 2.3.1 Méthode directe

Partons de l'équation différentielle de la dynamique sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}(p)\ddot{\mathbf{X}}(t, p) + \mathbf{C}(p)\dot{\mathbf{X}}(t, p) + \mathbf{K}(t, p)\mathbf{X}(t, p) = \mathbf{F}(t, p) \quad \text{éq 2.3.1-1}$$

où :

- $\mathbf{X}(t) \in R^{n'}$  ( $n' = n + 2v$ ) est, à l'instant  $t$ , le vecteur composé des  $n$  ddl physiques de la structures discrétisée et des  $2v$  multiplicateurs de Lagrange [R3.03.01],
- $\mathbf{F}(t, p)$  est le vecteur des forces externes, avec, pour calculer la réponse en transitoire linéaire dans *Code\_Aster* [U4.53.02], le chargement qui doit s'écrire sous la forme  $\mathbf{F} = \sum_i \alpha_i(t) \mathbf{F}_i(\mathbf{x})$ .

L'équation différentielle régissant la dérivée par rapport à  $p$  du vecteur déplacement  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p}$ , est obtenue en dérivant directement [éq 2.3.1-1] par rapport à  $p$ . Après changement de l'ordre de dérivation par rapport au temps et à  $p$  (on suppose la régularité suffisante), et après réarrangement des termes, on obtient :

$$\mathbf{M}(p)\ddot{\mathbf{Y}}(t, p) + \mathbf{C}(p)\dot{\mathbf{Y}}(t, p) + \mathbf{K}(p)\mathbf{Y}(t, p) = \frac{\partial \mathbf{F}(t, p)}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{M}(p)}{\partial p} \ddot{\mathbf{X}}(t, p) - \frac{\partial \mathbf{C}(p)}{\partial p} \dot{\mathbf{X}}(t, p) - \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} \mathbf{X}(t, p) \quad \text{éq 2.3.1-2}$$



Le vecteur des déplacements et ses dérivés sont obtenus en résolvant successivement [éq 2.3.1-1] puis [éq 2.3.1-2]. Pour cela, on utilise un schéma d'intégration numérique (implicite ou explicite dans Code\_Aster). Sur le même principe que celui de la dérivation d'une réponse harmonique, on exploite les résultats intermédiaires de la résolution du problème standard afin de minimiser les calculs liés à la résolution des problèmes dérivés.

Précisons ceci dans le cas d'un schéma implicite, le principe restant identique dans le cas d'un schéma explicite : Pour le problème standard, les vecteurs accélérations et vitesses, au pas d'intégration  $t_{n+1}$ , sont obtenus par les approximations linéaires de la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} = L_1(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{X}_n, \dot{\mathbf{X}}_n, \ddot{\mathbf{X}}_n) \quad \text{éq 2.3.1-3}$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{n+1} = L_2(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{X}_n, \dot{\mathbf{X}}_n, \ddot{\mathbf{X}}_n) \quad \text{éq 2.3.1-4}$$

On résout alors le problème standard, i.e. on obtient  $\mathbf{X}_{n+1}$ , par la substitution de [éq 2.3.1-3] et [éq 2.3.1-4] dans [éq 2.3.1-1]. Ceci donne un système linéaire à résoudre.

L'idée pour les problèmes dérivées est d'utiliser le même schéma d'intégration :

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1} = L_1(\mathbf{Y}_{n+1}, \mathbf{Y}_n, \dot{\mathbf{Y}}_n, \ddot{\mathbf{Y}}_n) \quad \text{éq 2.3.1-5}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = L_2(\mathbf{Y}_{n+1}, \mathbf{Y}_n, \dot{\mathbf{Y}}_n, \ddot{\mathbf{Y}}_n) \quad \text{éq 2.3.1-6}$$

Ainsi, la factorisation utilisée pour résoudre le système peut être également utilisée pour obtenir  $\mathbf{Y}_{n+1}$ . En effet, puisque les matrices coefficient de [éq 2.3.1-1] et [éq 2.3.1-2] sont identiques, et si l'on utilise le même schéma d'intégration pour le calcul de  $\mathbf{X}_{n+1}$  et  $\mathbf{Y}_{n+1}$ , alors la matrice coefficient est la même dans les deux systèmes linéaires à résoudre après substitution de [éq 2.3.1-3] et [éq 2.3.1-4] dans [éq 2.3.1-1] et de [éq 2.3.1-5] et [éq 2.3.1-6] dans [éq 2.3.1-2].

Le temps de calcul des dérivées peut alors être négligeable par rapport au temps de calcul associé au problème standard. Il faut cependant noter que, dans le cas d'une résolution par schéma explicite, chaque calcul de dérivée peut être aussi coûteux que le calcul standard. En effet, dans ce cas, l'essentiel du temps CPU pour le problème standard est associé à l'étape du calcul du second membre à chaque pas de temps ; et il faut également effectuer cette étape pour les dérivées (calcul du second membre de [éq 2.3.1-2]).

## 2.3.2 Méthode modale

Les deux méthodes modales simple et double pour le calcul de la dérivée d'une réponse dynamique fréquentielle ([§2.2.2] et [§2.2.3]) sont aisément transposables au calcul de la réponse dynamique en temporel. On obtient un système linéaire du même type que [éq 2.3.1-2] avec des seconds membres différents suivant que l'on utilise la méthode modale simple ou double. Dans le cas, de la méthode modale double, on obtient :

$$\begin{aligned} & [\Phi]_L^T \mathbf{M}[\Phi]_L(p) \hat{\mathbf{Y}}(t, p) + [\Phi]_L^T \mathbf{C}(p) [\Phi]_L \hat{\mathbf{Y}}(t, p) + [\Phi]_L \mathbf{K}(p) [\Phi]_L \hat{\mathbf{Y}}(t, p) = \\ & [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{F}(t, p)}{\partial p} - [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{M}(p)}{\partial p} \ddot{\mathbf{X}}_L(t, p) - [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{C}(p)}{\partial p} \dot{\mathbf{X}}_L(t, p) - [\Phi]_L^T \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} \mathbf{X}_L(t, p) \end{aligned} \quad \text{éq 2.3.2-1}$$

La réponse en coordonnées généralisées est obtenue en résolvant ce système par un schéma d'intégration numérique du même type que [éq 2.3.1-3] et [éq 2.3.1-4]. Et de la même façon, les factorisations utilisées pour le calcul de la réponse peuvent être utilisées pour le calcul des dérivées.

### 2.3.3 Implantation par la méthode des éléments finis

De façon analogue aux cas précédents [§2.2.4], le second membre de [éq 2.3.1-2] peut être calculé après assemblage des matrices  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p}$  et  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p}$ , ou de manière plus performante directement à un niveau élémentaire.

L'intégration temporelle de  $\mathbf{X}$  au pas  $t_{n+1}$  est effectuée préalablement à l'intégration temporelle de sa dérivée  $\mathbf{Y}$ . Au pas d'intégration  $t_{n+1}$  de  $\mathbf{Y}$ , les termes  $\mathbf{X}(t_{n+1}, p)$ ,  $\dot{\mathbf{X}}(t_{n+1}, p)$ , et  $\ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}, p)$  sont donc connus (les deux derniers termes sont calculables par [éq 2.3.1-3] et [éq 2.3.1-4] par exemple).

Au pas d'intégration  $t_{n+1}$  de  $\mathbf{Y}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{M}(p)}{\partial p} \ddot{\mathbf{X}}(t_{n+1}, p) + \frac{\partial \mathbf{C}(p)}{\partial p} \dot{\mathbf{X}}(t_{n+1}, p) + \frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p} \mathbf{X}(t_{n+1}, p)$  résulte ainsi de l'assemblage des matrices élémentaires suivantes (cf. [§3.2.3] pour les autres notations) :

$$\begin{aligned} \omega_g \frac{\partial}{\partial p} (\rho(\xi_g)) \mathbf{N}^e(\xi_g)^T \mathbf{N}(\xi_g) \ddot{\mathbf{X}}^e(t_{n+1}) + \omega_g \frac{\partial}{\partial p} (c_a(\xi_g)) \mathbf{N}^e(\xi_g)^T \mathbf{N}(\xi_g) \dot{\mathbf{X}}(\xi_g, t_{n+1}) \\ + \omega_g \mathbf{B}^e(\xi_g)^T \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{H}^e(\xi_g)) \mathbf{B}^e(\xi_g)^T \dot{\mathbf{X}}^e(t_{n+1}) \end{aligned} \quad \text{éq 2.3.3-1}$$

## 2.4 Dérivées d'un réponse dynamique temporelle en non linéaire

Considérons la classe des problèmes de dynamique non linéaire dont l'équation discrétisée du mouvement est de la forme :

$$\mathbf{M}(p) \ddot{\mathbf{X}}(t, p) + \mathbf{C}(p) \dot{\mathbf{X}}(t, p) + \mathbf{G}[\mathbf{X}(t, p), p] = \mathbf{F}(t, p) \quad \text{éq 2.4-1}$$

où  $\mathbf{G}[\mathbf{X}(t, p), p]$  est une fonction (non linéaire) de  $\mathbf{X}(t, p)$  et de  $p$ . Elle représente les forces internes du système et toutes les autres forces qui sont dépendantes de  $\mathbf{X}(t)$ .

Notant la matrice tangente  $\mathbf{K}(\mathbf{X}(t, p), p) = \frac{\partial \mathbf{G}[\mathbf{X}(t, p), p]}{\partial \mathbf{X}}$ , l'équation de la dérivée par rapport à  $p$  du vecteur déplacement s'obtient de :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(p) \ddot{\mathbf{Y}}(t, p) + \mathbf{C}(p) \dot{\mathbf{Y}}(t, p) + \mathbf{K}(\mathbf{X}(t, p), p) \mathbf{Y}(t, p) = \\ \frac{\partial \mathbf{F}(t, p)}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{M}(p)}{\partial p} \ddot{\mathbf{X}}(t, p) - \frac{\partial \mathbf{C}(p)}{\partial p} \dot{\mathbf{X}}(t, p) - \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X}(t, p), p)}{\partial p} \Big|_{\mathbf{X} \text{ fixé}} \end{aligned} \quad \text{éq 2.4-2}$$

A part le terme  $\left. \frac{\partial \mathbf{G}(p)}{\partial p} \right|_{\mathbf{X} \text{ fixé}}$ , tous les termes dérivés de [éq 2.4-2] se calculent de façon classique

(i.e. par assemblage des matrices ou vecteurs élémentaires dérivés). Le terme  $\left. \frac{\partial \mathbf{G}(p)}{\partial p} \right|_{\mathbf{X} \text{ fixé}}$  peut

nécessiter un traitement particulier. En effet, dans [éq 2.4-1], la dépendance entre  $\mathbf{G}$  et la valeur de  $\mathbf{X}(t, p)$  est explicite à l'instant  $t$  ; cependant  $\mathbf{G}$  dépend également de l'historique en plasticité. Cette

dépendance complique nettement les calculs de  $\left. \frac{\partial \mathbf{G}(p)}{\partial p} \right|_{\mathbf{X} \text{ fixé}}$  que nous n'aborderons pas ici.

Ce qui est remarquable, c'est que les problèmes dérivés [éq 2.4-2] sont des problèmes linéaires alors que le problème standard est non linéaire. Cette propriété permet un calcul des dérivées réellement très économiques par rapport au coût calcul du problème standard. Ceci est d'autant plus vrai que, pour la résolution de [éq 2.4-1] et [éq 2.4-2], les factorisations de matrices utilisées pour le calcul du vecteur déplacement peuvent être réutilisées pour le calcul du vecteur dérivé ; comme c'est le cas dans le cas d'un problème standard linéaire. En effet, la résolution de [éq 2.4-1] par un algorithme de type Newton nécessite la résolution d'un système linéaire dont la matrice coefficient est la même que dans [éq 2.4-2]. Une fois que l'algorithme de type Newton a convergé pour obtenir  $\mathbf{X}(t_{n+1})$ , le vecteur gradient  $\mathbf{Y}(t_{n+1})$  peut donc être obtenu directement par une simple résolution de deux systèmes triangulaires sans convergence d'un algorithme itératif.

## 3 Dérivées des fréquences et modes propres de vibration

### 3.1 Problème standard

Le problème aux valeurs propres (problème dit quadratique) associé à [éq 2.1-1] ou [éq 2.3.1-1] s'écrit :

$$\left( \lambda(p)^2 \mathbf{M}(p) + \lambda(p) \mathbf{C}(p) + \mathbf{K}(p) \right) \Phi(p) = 0 \quad \text{éq 3.1-1}$$

où  $\lambda(p)$  et  $\Phi(p)$  sont des valeurs et vecteurs propres complexes.

Dans la suite, pour gagner en compacité des équations, nous omettrons la dépendance des grandeurs par rapport au paramètre  $p$  et/ou par rapport au temps  $t$ , sauf quand l'explicitation de cette dépendance pourra éviter des ambiguïtés.

La réduction du problème quadratique [éq 3.1-1] en un problème généralisé équivalent [R5.01.02] donne le système de taille  $N \times N = (2n') \times (2n')$  suivant :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \lambda \Phi \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \lambda \Phi \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.1-2}$$

On peut normaliser les vecteurs propres pour qu'ils vérifient :

$$\begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \lambda \Phi_j \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \lambda \Phi_j \end{Bmatrix} = \lambda_j \quad \text{éq 3.1-3}$$

$$\begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \lambda \Phi_j \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \lambda \Phi_j \end{Bmatrix} = 1 \quad \text{éq 3.1-4}$$

## 3.2 Dérivées des fréquences propres

Les valeurs propres multiples ne sont pas différentiables au sens courant des dérivées (i.e. au sens de Fréchet). Nous devons donc distinguer le cas des valeurs propres simples du cas des valeurs propres multiples pour lequel quelques précautions doivent être prises.

### 3.2.1 Le cas des valeurs propres simples

La dérivation de l'équation [éq 3.1-1] écrite pour le  $j^{\text{ème}}$  mode par rapport à un paramètre scalaire  $p$  donne :

$$\left( \lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p} = -(2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \Phi_j \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

En multipliant à gauche par  $\Phi_j^T$  les deux membres de [éq 3.2.1-1] et en utilisant [éq 3.1-1] et [éq 3.1-4], la dérivée de la valeur propre peut être obtenue de :

$$\boxed{\frac{\partial \lambda_j}{\partial p} = -\Phi_j^T \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \Phi_j} \quad \text{éq 3.2.1-2}$$

L'équation [éq 3.2.1-2] ci-dessus requiert le calcul du vecteur propre  $\Phi_j$  associé à  $\lambda_j$ . On ne peut donc pas se dispenser du calcul des vecteurs propres pour le calcul de dérivées de valeurs propres.

### 3.2.2 Le cas des valeurs propres multiples

Dans un sous-espace propre dont la valeur propre associée est multiple d'ordre  $m$ , toute combinaison linéaire de vecteurs est vecteur propre. On ne peut cependant pas appliquer directement la formule [éq 3.2.1-2] avec n'importe lequel de ces vecteurs, car le sous-espace propre peut se scinder en  $m$  sous-espaces propres distincts lorsque un paramètre  $p$  varie.

Sur le plan théorique, les valeurs propres multiples ne sont pas différentiables en tant que fonction à plusieurs variables, seules des dérivées directionnelles existent (ceci peut poser des problèmes de convergence à de nombreux algorithmes d'optimisation qui sont basés sur la différentiabilité de la fonction objective en tant que fonction à plusieurs variables). A titre d'exemple, considérons les valeurs propres de la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4+2y & x \\ x & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 4 + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \lambda_2 &= 4 + y - \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Pour  $(x, y) = (0, 0)$ , la valeur propre de  $\mathbf{A}$  est multiple. Et, on a :

$$\left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right|_{(0^-, 0)} = -1, \quad \left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right|_{(0^+, 0)} = 1, \quad \left. \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right|_{(0^-, 0)} = 1, \quad \left. \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right|_{(0^+, 0)} = -1.$$

Il est possible de "raccorder",  $\lambda_1$  pour  $x < 0$  avec  $\lambda_2$  pour  $x > 0$ , et de "raccorder"  $\lambda_2$  pour  $x < 0$  avec  $\lambda_1$  pour  $x > 0$  (prenons par exemple  $y = 0$ . Alors, "la plus petite valeur propre de  $\mathbf{A}$ "  $(2 - |x|)$  n'est pas différentiable en 0, et "la plus grande non plus"  $(2 + |x|)$ ). Par contre, "la valeur propre de  $\mathbf{A}$  correspondante au vecteur propre  $(1, 1)^T$ "  $(2 + x)$  et "la valeur propre de  $\mathbf{A}$  correspondante au vecteur propre  $(1, -1)^T$ "  $(2 - x)$  sont différentiables en 0). Si l'on ne considère pas indépendamment les deux fréquences propres de  $\mathbf{A}$ , on pourrait donc écrire  $\partial \lambda / \partial x = \pm 1$ . (On peut procéder de même avec la dérivée en  $y$  et écrire  $\partial \lambda / \partial y = 0$  ou  $2$ ). Cependant, les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  ne sont donc pas différentiables en tant que fonctions à deux variables (i.e. on ne peut pas écrire  $d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy$ ), et ne possèdent que des dérivées directionnelles. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que :

$$\left. \frac{\partial \lambda(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\lambda(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \lambda(0, 0)}{\rho} = \sin \theta \pm 1$$

Sur le plan pratique, pour le calcul de ces dérivées directionnelles, le choix du vecteur propre  $\Phi_j$  associé à  $\lambda_j$  dans [éq 3.2.1-2] est ambigu lorsque la valeur propre est multiple. Ce choix doit donc être précisé.

Dans le cas d'une valeur propre  $\lambda_m$  d'ordre de multiplicité  $m$ , le problème aux valeurs propres [éq 3.1-1] peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}[\Phi_m] \Lambda_m^2 + \mathbf{C}[\Phi_m] \Lambda_m + \mathbf{K}[\Phi_m] = 0 \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

avec  $\Lambda_m = \lambda_m \mathbf{I}_m$  et  $[\Phi_m] = [\Phi_{i+1}, \Phi_{i+2}, \dots, \Phi_{i+m}]$  où les  $\Phi_{i+k}$  sont les vecteurs propres associés à  $\lambda_m$ .

## Remarque :

*En toute rigueur et dans le cas général, les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  n'étant pas définies positives (à cause de la dualisation des conditions aux limites), il n'existe pas forcément  $m$  vecteurs propres engendrant un sous-espace propre de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre. Ce point n'est jamais abordé dans la littérature. Par commodité, nous n'aborderons pas non plus ce point pathologique qui devient délicat lorsqu'il s'agit de calcul de dérivées.*

Les conditions d'orthogonalité des vecteurs propres s'écrivent avec les notations matricielles ci-dessus :

$$[\Phi_m]^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) [\Phi_m] = \mathbf{I}_m \quad \text{éq 3.2.2-2}$$

Notons  $[\mathbf{X}]$  les  $m$  vecteurs propres d'un même sous-espace propre multiple qui deviennent  $m$  vecteurs propres  $[\mathbf{X}(p)]$  de  $m$  sous-espaces deux à deux distincts lorsque lorsqu'un paramètre  $p$  varie. Lorsque  $p$  tend vers sa valeur nominale  $p_o$ ,  $[\mathbf{X}(p)]$  tend vers  $[\mathbf{X}]$  et les  $m$  valeurs propres distinctes tendent vers la valeur propre multiple  $\lambda_m$ . Dans la littérature, de tels vecteurs propres sont appelés vecteurs propres "adjacents". Il faut noter que ces vecteurs dépendent du paramètre qui varie c'est-à-dire du paramètre par rapport auquel on dérive. Autrement dit, si l'on change de paramètre, il faut alors changer de vecteurs adjacents.

Les vecteurs adjacents  $[\mathbf{X}]$  peuvent être reliés à  $[\Phi_m]$  par une transformation orthogonale  $\mathbf{T}$  ( $[\mathbf{X}]$  et  $[\Phi_m]$  constituent deux bases du même sous-espace propre) :

$$[\mathbf{X}] = [\Phi_m] \mathbf{T} \quad \text{éq 3.2.2-3}$$

avec  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}_m$ .

La procédure consiste à trouver la transformation  $\mathbf{T}$  pour ensuite en déduire  $[\mathbf{X}]$  et  $\frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$ . C'est ce que nous développons ci-dessous.

Les vecteurs adjacents vérifient le problème aux valeurs propres [éq 3.2.2-1] :

$$\mathbf{M}[\mathbf{X}] \Lambda_m^2 + \mathbf{C}[\mathbf{X}] \Lambda_m + \mathbf{K}[\mathbf{X}] = 0 \quad \text{éq 3.2.2-4}$$

La dérivation de [éq 3.2.2-4] par rapport à  $p$  donne :

$$(\lambda_m^2 \mathbf{M} + \lambda_m \mathbf{C} + \mathbf{K}) \frac{\partial [\mathbf{X}]}{\partial p} = - (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) [\mathbf{X}] \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} - \left( \lambda_m^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_m \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) [\mathbf{X}] \quad \text{éq 3.2.2-5}$$

En multipliant [éq 3.2.2-5] à gauche par  $[\Phi_m]^T$ , utilisant [éq 3.2.2-2] et substituant  $[X] = [\Phi_m]T$ , on obtient le nouveau problème aux valeurs propres :

$$DT = T \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$$

éq 3.2.2-6

avec  $D = [\Phi_m]^T \left( \lambda_m^2 \frac{\partial M}{\partial p} + \lambda_m \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p} \right) [\Phi_m]$ .

La résolution du problème au valeur propre [éq 3.2.2-6] donne les dérivées  $\frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$  des valeurs propres et la matrice de transformation orthogonale  $T$ .  
Il faut souligner qu'il y aura un sous-problème aux valeurs propres de taille  $m$  à résoudre pour chaque valeur propre de multiplicité  $m$  à dériver et pour chaque paramètre.

### 3.2.3 Implantation par la méthode des éléments finis

De façon classique, plusieurs choix sont possibles pour le calcul du second membre de [éq 3.2.1-2] et de la matrice  $D$  de [éq 3.2.2-6] selon que les produits matriciels sont calculés à un niveau élémentaire ou non.

Le calcul du second membre de [éq 3.2.1-2] à un niveau élémentaire est *a priori* le plus performant.

$\Phi^T \left( \lambda^2 \frac{\partial M}{\partial p} + \lambda \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p} \right) \Phi$  peut s'écrire directement à un niveau élémentaire par le scalaire :

$$\begin{aligned} \omega_g \lambda^2 \frac{\partial}{\partial p} (\rho(\xi_g)) (\Phi(\xi_g))^T (\Phi(\xi_g)) + \omega_g \lambda \frac{\partial}{\partial p} (c_a^e(\xi_g)) (\Phi(\xi_g))^T (\Phi(\xi_g)) \\ + \omega_g (\mathbf{B}^e(\xi_g) \Phi(\xi_g))^T \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{H}^e(\xi_g)) (\mathbf{B}^e(\xi_g) \Phi(\xi_g)) \end{aligned}$$

éq 3.2.3-1

En particulier, une procédure pour ne déclencher le calcul de chacun des termes élémentaires de [éq 3.2.3-1] que si les quantités  $\frac{\partial}{\partial p}(\rho)$ ,  $\frac{\partial}{\partial p}(\mathbf{H}^e(\xi_g))$  et  $\frac{\partial}{\partial p}(c_a(\xi_g))$  sont non nulles permet de minimiser le temps CPU.

De façon analogue au cas des valeurs propres simples, la matrice  $D$  du système [éq 3.2.3-1] peut être calculée directement à un niveau élémentaire ou bien après assemblage effectif des matrices

$$\frac{\partial M}{\partial p}, \frac{\partial K}{\partial p} \text{ et } \frac{\partial C}{\partial p}.$$

## 3.3 Dérivées des modes propres de vibration

### 3.3.1 Le cas des valeurs propres simples

On ne peut pas obtenir directement les dérivées des vecteurs propres en résolvant le système linéaire [éq 3.2.1-1] car c'est un système non inversible puisque  $(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K})$  est singulière (par définition de  $\lambda_j$ ).

De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour résoudre ou contourner cette difficulté. Parmi elles, deux types de méthodes émergent : les méthodes de projection sur base modale incomplète [bib4], [bib5] et les méthodes algébriques [bib6], chacune d'elles avec leurs variantes. Ces méthodes sont présentées dans [bib1]. Les méthodes algébriques sont des méthodes exactes qui, de plus, ne requièrent pas les autres vecteurs propres pour calculer la dérivée d'un vecteur propre donné. On ne présente ici qu'une méthode algébrique consistant à rajouter une équation à [éq 3.2.1-1] pour obtenir un système régulier et symétrique à résoudre [bib6].

La réécriture de la condition d'orthonormalité [éq 3.1-4] donne :

$$\Phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_j = 1 \quad \text{éq 3.3.1-1}$$

La dérivation de cette équation par rapport au paramètre  $p$  aboutit à :

$$\Phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p} + \frac{1}{2} \Phi_j^T \left( 2 \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \mathbf{M} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right) \Phi_j = 0 \quad \text{éq 3.3.1-2}$$

Les équations [éq 3.2.1-1] et [éq 3.3.1-2] peuvent être réécrites ensemble :

$$\begin{bmatrix} (\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) & (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_j \\ \Phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} - \left( \lambda_j^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \Phi_j \\ -\frac{1}{2} \Phi_j^T \left( 2 \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial p} \mathbf{M} + \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right) \Phi_j \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.3.1-3}$$

La résolution du système [éq 3.3.1-3] est l'idée clé de la méthode algébrique. Il peut être montré que ce système est toujours régulier. Les dérivées  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial p}$  des vecteurs propres peuvent être obtenues directement en résolvant ce système de dimensions  $(n' + 1) \times (n' + 1)$  avec une factorisation  $\mathbf{LDL}^T$  par exemple.



La méthode algébrique conserve la structure en bande et la symétrie des matrices. En outre, pour calculer la dérivée d'un vecteur propre, seule la connaissance de ce vecteur propre et de la valeur propre correspondante est nécessaire. En effet, [éq 3.3.1-3] ne fait pas intervenir les autres vecteurs propres que celui à dériver.

Cependant, la méthode algébrique nécessite la résolution d'un système de taille  $(n' + 1) \times (n' + 1)$  différent pour chaque vecteur propre à dériver et chaque paramètre.

### 3.3.2 Le cas des valeurs propres multiples

Reprenant les notations du paragraphe [§3.2.2], les dérivées  $\frac{\partial[\mathbf{X}]}{\partial p}$  des vecteurs propres "adjacents"

$[\mathbf{X}] = [\Phi_m]^T$  sont solutions de l'équation [éq 3.2.2-5].

La matrice  $(\lambda_m^2 \mathbf{M} + \lambda_m \mathbf{C} + \mathbf{K})$  étant singulière, on ne peut pas résoudre [éq 3.2.2-5] directement.

L'idée, encore, est de rajouter une équation supplémentaire pour  $\frac{\partial[\mathbf{X}]}{\partial p}$ .

La condition de normalisation de  $[\mathbf{X}]$  s'écrit :

$$\Phi_j^T (2\lambda_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \Phi_j = 1 \quad \text{éq 3.3.2-1}$$

La dérivée de [éq 3.3.2-1] donne l'équation supplémentaire cherchée :

$$[\mathbf{X}]^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) \frac{\partial[\mathbf{X}]}{\partial p} = -[\mathbf{X}]^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} [\mathbf{X}] \Lambda_m - [\mathbf{X}]^T \mathbf{M} [\mathbf{X}] \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} - \frac{1}{2} [\mathbf{X}]^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} [\mathbf{X}] \quad \text{éq 3.3.2-2}$$

[éq 3.2.2-5] et [éq 3.3.2-2] forment le système suivant à résoudre :

$$\begin{bmatrix} (\lambda_m^2 \mathbf{M} + \lambda_m \mathbf{C} + \mathbf{K}) & (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C})[\mathbf{X}] \\ [\mathbf{X}]^T (2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial[\mathbf{X}]}{\partial p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\lambda_m \mathbf{M} + \mathbf{C})[\mathbf{X}] \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} - \left( \lambda_m^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda_m \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) [\mathbf{X}] \\ -[\mathbf{X}]^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} [\mathbf{X}] \Lambda_m - [\mathbf{X}]^T \mathbf{M} [\mathbf{X}] \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} - \frac{1}{2} [\mathbf{X}]^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} [\mathbf{X}] \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.3.2-3}$$

Le système [éq 3.3.2-3] à résoudre est de dimension  $(n' + m) \times (n' + m)$ . Pour calculer la dérivée d'un vecteur propre, la connaissance des vecteurs propres associés à la valeur propre est nécessaire.

Comme pour le cas des valeurs propres non multiples, la structure en bande et la symétrie des matrices sont conservées et il peut être montré que le système à résoudre est toujours régulier. De plus, le système doit être résolu pour chaque vecteur propre à dériver et chaque paramètre.

### 3.3.3 Implantation par la méthode des éléments finis

Dans les équations [éq 3.3.1-3] et [éq 3.3.2-3], les seconds membres peuvent être calculés soit en assemblant d'abord les matrices  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p}$  et  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p}$  puis en effectuant des opérations matricielles, soit en calculant directement les différents termes à un niveau élémentaire.

Un calcul direct au niveau élémentaire étant plus performant,  $\left( \lambda^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \lambda \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \Phi$ , par exemple, sera calculé à un niveau élémentaire par (cf. [§3.2.3] pour les notations) :

$$\begin{aligned} & \omega_g \lambda^2 \frac{\partial}{\partial p} (\rho(\xi_g)) \mathbf{N}^e(\xi_g)^T \Phi(\xi_g) + \omega_g \lambda \frac{\partial}{\partial p} (c_a(\xi_g)) \mathbf{N}^e(\xi_g)^T \Phi(\xi_g) \\ & + \omega_g \left( \mathbf{B}^e(\xi_g) \right)^T \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{H}^e(\xi_g)) \left( \mathbf{B}^e(\xi_g) \Phi(\xi_g) \right) \end{aligned} \quad \text{éq 3.3.3-1}$$

## 4 Dérivées par rapport à une variation de domaine

L'équation matricielle [éq 3.1-1] utilise une dépendance explicite des matrices de masse, d'amortissement, et de raideur par rapport au paramètre variable  $p$ . Lorsqu'il s'agit de dériver par rapport à une variation de domaine, on ne peut pas dans le cas général écrire cette dépendance directement. Dans ce cas, l'obtention des dérivées des grandeurs dynamiques nécessite un travail préalable. Il faut d'une part décrire la variation de domaine sous une forme mathématique que l'on peut manipuler, et d'autre part revenir à la formulation variationnelle des équations de la dynamique que l'on dérive directement.

Ce chapitre traite ces différents points. On donne en particulier les dérivées des différents opérateurs de masse, raideur nécessaires aux calculs des dérivés de toutes les grandeurs dynamiques. On se limite ensuite au calcul des dérivées des fréquences propres et vecteurs propres. On se borne au problème conservatif et donc aux modes propres réels.

### 4.1 Formulation variationnelle du problème standard

On considère un solide élastique sur un domaine  $\Omega$ , soumis à des chargements statiques surfaciques  $\mathbf{f}$  et volumiques  $\mathbf{F}$ . Sous forme variationnelle, le problème d'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}_0 \text{ tel que :} \\ & \int_{\Omega} \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad \text{éq 4.1-1}$$

où  $\mathbf{A}$  est le tenseur d'élasticité,  $\varepsilon(\mathbf{u})$  le tenseur classique des déformations linéarisé et  $\mathcal{V}_0$  l'espace de Sobolev de  $\left( H^1(\Omega) \right)^3$  des déplacements cinématiquement admissible.

Les modes propres autour de cet équilibre s'obtiennent par la résolution du problème spectral suivant :

Trouver la fréquence propre réelle  $\omega > 0$  et le mode  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  non nul tels que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{w}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \quad \text{éq 4.1-2}$$

(notation : si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux tenseurs d'ordre 2,  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  est le produit contracté de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ )

où  $\lambda$  est un paramètre d'amplification éventuelle de la solution de [éq 4.1-1] pour les chargements statiques ci-dessus,  $\sigma$  est le tenseur des contraintes donné par  $\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{u})$  et  $\rho$  la masse volumique du matériau considéré.

Ce problème peut être réécrit en utilisant les opérateurs multi-linéaires classiques suivants :

- opérateur de raideur élastique  $a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{w}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega$
- opérateur de raideur géométrique  $b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} d\Omega$   
 $= \int_{\Omega} \sigma_{ik}(\mathbf{u}) w_{l,i} \cdot \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) d\Omega$
- opérateur de masse  $c(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} d\Omega$

sous la forme :

Trouver le réel  $\omega > 0$  et  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  non nul tels que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \lambda b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) - \omega^2 c(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \\ c(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 1 \end{cases} \quad \text{éq 4.1-3}$$

## 4.2 Description de la variation de domaine et formulaire de dérivation

On considère maintenant que le domaine  $\Omega$  est susceptible de changer de forme, par une variation de son bord (non compris le bord où sont appliqués les déplacements imposés). Pour décrire cette variation, on utilise une transformation bijective faisant correspondre le domaine de référence (celui que l'on maille) avec le domaine modifié (représentation dite Lagrangienne de variation de domaine, cf. [R7.02.04]).

Le bord du domaine  $\Omega(\eta)$  est piloté par le scalaire  $\eta$  (tel que  $\Omega(0) = \Omega$ ), selon le champ de vecteurs  $\theta$ .

La dérivée d'un champ de vecteur  $\mathbf{X}$  par rapport à une variation de domaine peut maintenant s'écrire comme la dérivée lagrangienne, que l'on va noter avec un point (cf. [R4.03.01]) :

$$\dot{\mathbf{X}} = \left. \frac{d\mathbf{X}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} + \nabla \mathbf{X} \otimes \theta \quad \text{éq 4.2-1}$$

Et, la dérivée du gradient de  $\mathbf{X}$  s'écrit :

$$\frac{d(\nabla \mathbf{X})}{d\eta} = \nabla \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\eta} \right) - \nabla \mathbf{X} \otimes \nabla \theta \quad \text{éq 4.2-2}$$

La dérivation des opérateurs de masse et de raideurs [§4.1] nécessite la dérivation de grandeurs intégrales dont le domaine d'intégration dépend du scalaire  $\eta$ . Ces grandeurs intégrales sont de la forme :

$$I(\mathbf{u}(\eta)) = \int_{\Omega(\eta)} e(\varepsilon(\mathbf{u}(\eta))) d\Omega \quad \text{éq 4.2-3}$$

où  $\mathbf{u}(\eta)$  est la solution du problème d'équilibre [éq 4.1-1] sur le domaine  $\Omega(\eta)$ .

Cette intégrale a pour dérivée (théorème de Reynolds) :

$$\left. \frac{dI}{d\eta} \right|_{\eta=0}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( e(\varepsilon(\mathbf{u})) \operatorname{div} \theta + \left. \frac{de(\varepsilon(\mathbf{u}(\eta)))}{d\eta} \right|_{\eta=0} \right) d\Omega \quad \text{éq 4.2-4}$$

La dérivée intervenant dans l'intégrande s'exprime :

$$\frac{de(\varepsilon(\mathbf{u}(\eta)))}{d\eta} = \frac{\partial e}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon(\mathbf{u}(\eta))}{d\eta}$$

avec

$$\frac{d\varepsilon(\mathbf{u}(\eta))}{d\eta} = \varepsilon \left( \frac{d\mathbf{u}(\eta)}{d\eta} \right) - \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \theta - \nabla \theta^T \otimes \nabla \mathbf{u}^T \quad \text{éq 4.2-5}$$

**Remarque :**

| Implicitement, dans la suite les dérivées seront prises en  $\eta = 0$ .

## 4.3 Dérivation de la formulation variationnelle

### 4.3.1 Dérivation de l'opérateur de raideur élastique

Utilisant la symétrie du tenseur d'élasticité,  $a(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  s'écrit aussi :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w}) : \nabla(\mathbf{v}) d\Omega \quad \text{éq 4.3.1-1}$$

La dérivation de cette expression et l'utilisation de [éq 4.2-4] donne :

$$\frac{d}{d\eta}(a(\mathbf{w}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \left( \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w}) : \nabla(\mathbf{v}) \operatorname{div} \theta + \frac{d\mathbf{A} \nabla(\mathbf{w})}{d\eta} : \nabla(\mathbf{v}) + \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w}) : \frac{d\nabla(\mathbf{v})}{d\eta} \right) d\Omega \quad \text{éq 4.3.1-2}$$

Par [éq 4.2-5], et sachant  $\frac{\partial \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w})}{\partial \eta} = \mathbf{A} \frac{\partial \nabla(\mathbf{w})}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} = 0$ , [éq 4.3.1-2] devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta}(a(\mathbf{w}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} & \left( \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w}) : \nabla(\mathbf{v}) \operatorname{div} \theta + \mathbf{A} \nabla \left( \frac{d\mathbf{w}}{d\eta} \right) : \nabla(\mathbf{v}) - \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w}) \otimes \theta : \nabla(\mathbf{v}) \right. \\ & \left. - \mathbf{A} \nabla(\mathbf{w}) : (\nabla \mathbf{v} \otimes \nabla \theta) \right) d\Omega \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.1-3}$$

que l'on peut réécrire, en utilisant entre autre de nouveau la symétrie du tenseur d'élasticité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta}(a(\mathbf{w}, \mathbf{v})) &= a\left(\frac{d\mathbf{w}}{d\eta}, \mathbf{v}\right) + \hat{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ \text{avec } \hat{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{w}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \operatorname{div} \theta - \sigma(\mathbf{w}) \otimes \nabla \theta : \nabla \mathbf{v} - \sigma(\mathbf{w}) : \nabla \mathbf{v} \otimes \nabla \theta) d\Omega \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.1-4}$$

## 4.3.2 Dérivation de l'opérateur de raideur géométrique

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} & \left( (\nabla \mathbf{w} \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}) \operatorname{div} \theta + \nabla \left( \frac{d\mathbf{w}}{d\eta} \right) \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{w} \otimes \nabla \theta \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \right. \\ & \left. + \nabla \mathbf{w} \otimes \mathbf{A} \nabla \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} \right) : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{w} \otimes \mathbf{A} \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \theta : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{w} \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \otimes \nabla \theta \right) d\Omega \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-1}$$

que l'on peut réécrire :

$$\frac{d}{d\eta} b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = b\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\eta}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\right) + b\left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{w}}{d\eta}, \mathbf{v}\right) + \hat{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{éq 4.3.2-2}$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} & \left( (\nabla \mathbf{w} \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}) \operatorname{div} \theta - \nabla \mathbf{w} \otimes \nabla \theta \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{w} \otimes \mathbf{A} \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \theta : \nabla \mathbf{v} \right. \\ & \left. - \nabla \mathbf{w} \otimes \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \otimes \nabla \theta \right) d\Omega \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.2-3}$$

Dans [éq 4.3.2-2], on voit que le calcul de la dérivée de l'opérateur de raideur géométrique nécessite au préalable la dérivée  $\frac{d\mathbf{u}}{d\eta}$  de la solution du problème de précontrainte [éq 4.1-1].

Ce problème de précontrainte, qui est donc à dériver, s'écrit :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ tel que : } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}'_0 \quad \text{éq 4.3.2-4}$$

La dérivation de cette équation variationnelle donne :

$$a\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\eta}, \mathbf{v}\right) = \frac{d}{d\eta} f(\mathbf{v}) - \hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{éq 4.3.2-5}$$

avec, en supposant que les forces  $\mathbf{f}, \mathbf{F}$  sont indépendantes de  $\eta$  et  $\theta$  :

$$\frac{d}{d\eta} f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \cdot (\text{div } \theta) + (\nabla \mathbf{f} \cdot \theta) \cdot \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot (\text{div } \theta - \theta_{,n} \cdot \mathbf{n}) + (\nabla \mathbf{F} \cdot \theta) \cdot \mathbf{v}) dS \quad \text{éq 4.3.2-6}$$

(La formule de dérivation de l'intégrale surfacique est donnée par la proposition 4 de l'annexe 2 de [R4.03.01]).

La résolution du système linéaire associé à [éq 4.3.2-5] donnant  $\frac{d\mathbf{u}}{d\eta}$  possède la même matrice de rigidité que le problème de précontrainte standard, seul le second membre change. *Code\_Aster* résout ce problème en déformations planes et 2D-axisymétrique, cf. [R4.03.01].

### 4.3.3 Dérivation de l'opérateur de masse

La dérivation de l'opérateur de masse donne :

$$\frac{d}{d\eta} c(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left( \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \text{div } \theta + \nabla \rho \cdot \theta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{d\eta} \right) \right) d\Omega$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (c(\mathbf{w}, \mathbf{v})) &= c\left(\frac{d\mathbf{w}}{d\eta}, \mathbf{v}\right) + \hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ \text{avec } \hat{c}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \text{div } \theta + \nabla \rho \cdot \theta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})) d\Omega \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.3-1}$$

## 4.3.4 Dérivation de la formulation variationnelle du problème d'analyse modale

La dérivation en  $\eta = 0$  du problème [éq 4.1-3] de calcul des modes propres sur  $\Omega(\eta)$ , ramené sur  $\Omega(0) = \Omega$ , le paramètre de chargement initial  $\lambda$  étant fixé, donne maintenant :

Trouver le réel  $\dot{\omega}$  et  $\dot{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$  tels que :

$$\begin{cases} a(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \hat{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \lambda(b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \hat{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})) \\ \quad - \omega(2\dot{\omega}c(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \omega(c(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{v}))) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \\ 2c(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}) + \hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0 \end{cases} \quad \text{éq 4.3.4-1}$$

## 4.3.5 Obtention de la dérivée des fréquences propres et des modes propres

Dans un souci de simplification, nous supposons ici que la valeur propre du mode que l'on dérive est simple. Le cas d'une valeur propre multiple se déduit de l'adaptation des développements des paragraphes [§3.2.2] et [§3.3.2].

En utilisant  $\begin{cases} a(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) + \lambda b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) - \omega^2 c(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = 0 \\ c(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 1 \end{cases}$  et en prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  dans [éq 4.3.4-1], on

obtient l'expression suivante de la dérivée de la pulsation propre :

$$\dot{\omega} = \frac{\hat{a}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \lambda(b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) + \hat{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w})) - \omega^2 \hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{2\omega} \quad \text{éq 4.3.5-1}$$

L'obtention de [éq 4.3.5-1] est à rapprocher de celle de [éq 3.2.1-2], à la normalisation près. Dans le cas de valeurs propres multiples, le choix  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  conditionne la dérivée directionnelle calculée. [éq 4.3.4-1] donne le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} a(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \lambda b(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) - \omega^2 c(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) &= -\hat{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - \lambda(b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \hat{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})) \\ &\quad + \omega(2\dot{\omega}c(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{v})) \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.5-2}$$

Ce système est de la même forme que le système [éq 3.2.1-1]. Il doit être résolu de la même manière, par exemple en utilisant l'adjonction de l'égalité  $c(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}) = -\frac{1}{2}\hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ .

## 4.3.6 Implantation par la méthode des éléments finis

De façon analogue aux chapitres précédents, les termes des seconds membres [éq 4.3.5-1] et [éq 4.3.5-2] peuvent être calculés, soit directement à un niveau élémentaire, soit après assemblage des matrices de masse, raideur et amortissement.

Par ailleurs, de nouvelles procédures de calculs élémentaires doivent être développées pour les calculs de  $\hat{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  (ce terme a déjà était développé en déformations planes et 2D-axisymétrique,

cf. [R4.03.01]),  $\hat{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ ,  $\hat{c}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ , et  $\frac{d}{d\eta} f(\mathbf{v})$ .

## 5 Implantation effective dans Code\_Aster

Le calcul numérique des dérivées des modes propres ou des réponses dynamiques se déroule en deux étapes principales :

- étape 1 : calcul des termes élémentaires constituant les nouveaux termes (souvent en second membre) associés au calcul des dérivées,
- étape 2 : résolution du problème dérivé. Le calcul des dérivées des modes propres nécessite l'utilisation d'algorithmes spécifiques différents de ceux utilisés pour résoudre le problème standard. Le calcul des dérivées des autres grandeurs, c'est-à-dire les fréquences propres et les réponses dynamiques, réutilise l'algorithme standard en modifiant quelques termes (en général les seconds membres des systèmes à résoudre).

Les sensibilités des autres grandeurs dynamiques (contraintes, efforts ...) nécessitent une troisième étape qui consiste en la dérivation des calculs de "post-traitement". Nous ne traitons pas ces grandeurs dans le présent document.

Le tableau suivant récapitule les dérivées disponibles dans Code\_Aster. Il est mis à jour au fur et à mesure des développements des dérivés.

| Grandeurs et méthodes  | Opérateurs, et opérandes particuliers ( i.e. Implantée données nécessaires à la méthode de calcul) |     |
|--|--|-----|
| <b>Dérivée d'une réponse dynamique harmonique</b>                |  |     |
| Méthode directe  | DYNA_LINE_HARM   | OUI |
| Méthode modale simple  | DYNA_LINE_HARM<br>vecteurs propres et vecteurs propres dérivés                                     | NON |
| Méthode modale double  | DYNA_LINE_HARM<br>vecteurs propres   | NON |
| <b>Dérivée d'une réponse dynamique temporelle en linéaire</b>    |  |     |
| Méthode directe  | DYNA_LINE_TRAN   | OUI |
| Méthode modale simple  | DYNA_TRAN_MODAL<br>vecteurs propres et vecteurs propres dérivés                                    | NON |
| Méthode modale double  | DYNA_TRAN_MODAL<br>vecteurs propres  | NON |
| <b>Dérivée d'un réponse dynamique temporelle en non linéaire</b> | chargement type Dirichlet  | NON |
|  | DYNA_NON_LINE<br>pour quelques lois de comportement  | OUI |
| <b>Dérivée d'une fréquence propre</b>                            | modes simples  | OUI |
|  | MODE_ITER_SIMULT, MODE_ITER_INV<br>modes multiples   | NON |
| <b>Dérivée d'un mode propre</b>                                  | modes simples  | OUI |
|  | MODE_ITER_SIMULT, MODE_ITER_INV<br>modes multiples   | NON |
| <b>Dérivées par rapport à une variation de domaine</b>           | *  | NON |



## 6 Bibliographie

- [1] R.A. IBRAHIM : Structural dynamics with parameter uncertainties, Applied Mechanics Reviews, Vol. 40, no. 3, pp.309-328, 1987.
- [2] S. CAMBIER : Sensibilités de grandeurs vibratoires. Théorie et algorithmes en vue d'une implantation dans le Code\_Aster. Note HT-62/01/011.
- [3] Z.Q. QU : Accurate methods for frequency responses and their sensitivities of proportionally damped systems, Computers & Structures, Vol. 79, pp.87-96, 2001.
- [4] M. YU, Z.S. LIU, D.J WANG : Comparison of several approximate modal methods for computing mode shape derivatives, Computers & Structures, Vol. 62, No.2, pp.381-393, 1996.
- [5] S. ADHIKARI, M. I. FRISWELL : Eigenderivative analysis of asymmetric non-conservative systems, Int. J. Numer. Meth. Engng; Vol. 51, pp. 709-733, 2001.
- [6] I.W. LEE, D.-O. KIM, G.-H. JUNG : Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems : Part I, distinct natural frequencies, Journal of Sound and Vibration 223(3), pp. 399-412 (1999). Part II, multiple natural frequencies, Journal of Sound and Vibration 223(3), pp. 313-424, (1999).
- [7] I. VAUTIER : Éléments isoparamétriques [R3.01.00].
- [8] J. PELLET : Dualisation des conditions aux limites [R3.03.01].
- [9] G NICOLAS : Sensibilité des champs thermo-mécaniques à une variation du domaine [R4.03.01].
- [10] D. SELIGMANN, R. MICHEL : Algorithmes de résolution pour le problème quadratique aux valeurs propres [R5.01.02].
- [11] O. BOITEAU : Algorithme de résolution pour le problème généralisé [R5.01.01].
- [12] G. JACQUART : Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non-linéaire [R5.06.01].
- [13] G. DEBRUYNE : Représentation Lagrangienne de variation de domaine [R7.02.04].
- [14] D. GIRARDOT : Opérateur DYNA\_LINE\_TRAN [U4.53.02].

Page laissée intentionnellement blanche.