

Manuel de Référence**Fascicule R5.05 : Dynamique transitoire ou harmonique****Document : R5.05.05**

Algorithme non-linéaire dynamique du Code_Aster (opérateur DYNA_NON_LINE)

Résumé :

L'opérateur DYNA_NON_LINE [U4.53.01] du Code_Aster s'emploie pour l'analyse dynamique non-linéaire des structures par une intégration directe en temps. Les non-linéarités peuvent provenir du comportement du matériau, des liaisons (contact-frottement), ou de grandes transformations géométriques (grands déplacements et grandes rotations).

L'organisation de DYNA_NON_LINE s'apparente fortement à celle de l'opérateur quasi-statique non-linéaire STAT_NON_LINE [R5.03.01]. *A priori*, toutes les relations de comportement développées dans le cadre de STAT_NON_LINE fonctionnent dans celui de DYNA_NON_LINE.

On présente ici la formulation générale du problème dynamique non-linéaire afin de préciser les articulations entre les aspects purement dynamiques et ceux déjà traités dans d'autres opérateurs ou formulations disponibles dans Code_Aster : gestion des conditions aux limites, des couplages fluide-structure, de l'amortissement, du calcul en repère relatif, puis les propriétés du schéma d'intégration numérique temporel, qui s'élabore indépendamment de toute relation de comportement. On expose comment celui-ci s'articule avec l'algorithme de Newton pour traiter les non-linéarités matérielles et géométriques. Code_Aster propose deux schémas implicites en temps efficaces en terme de précision et stabilité : celui de Newmark et la méthode « d'accélération moyenne modifiée » (dite « HHT » dans la commande DYNA_NON_LINE). On donne quelques conseils et choix pour un bon usage.

Table des matières

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Notations | 3 |
| 2 | Dynamique non-linéaire : discrétisation spatiale du problème continu | 4 |
| 2.1 | Discrétisation du problème de dynamique linéaire | 4 |
| 2.2 | Discrétisation du problème de dynamique non-linéaire | 5 |
| 2.2.1 | Amortissement | 6 |
| 2.2.2 | Inertie | 7 |
| 2.2.3 | Liaisons | 7 |
| 2.2.4 | Problème dynamique discrétisé | 8 |
| 2.2.5 | Conditions initiales | 9 |
| 2.2.6 | Pilotage temporel implicite de chargements extérieurs | 9 |
| 2.3 | Prise en compte d'un état initial précontraint | 10 |
| 2.4 | Problèmes couplés fluide-structure vibro-acoustique | 11 |
| 2.5 | Prise en compte de lois de comportement visqueux et amortissement | 14 |
| 2.6 | Equations en mouvement « relatif » [R4.05.01] | 14 |
| 3 | Schéma d'intégration temporelle : schéma de NEWMARK et méthode de NEWTON | 21 |
| 3.1 | Schéma de NEWMARK | 21 |
| 3.2 | Phase de prédiction | 24 |
| 3.2.1 | Pas de temps général | 24 |
| 3.2.2 | Premier pas de temps | 26 |
| 3.3 | Phase de correction par la méthode de NEWTON | 27 |
| 3.4 | Mise à jour | 29 |
| 3.5 | Critère d'arrêt | 29 |
| 4 | Qualités et défauts du schéma de NEWMARK | 30 |
| 4.1 | Propriétés du schéma de NEWMARK | 30 |
| 4.2 | Point de vue énergétique | 33 |
| 4.3 | Propriétés du schéma de NEWMARK pour les problèmes non-linéaires | 34 |
| 4.4 | Choix des pas de temps | 34 |
| 5 | Une variante du schéma de NEWMARK : le schéma d'accélération moyenne modifiée | 35 |
| 5.1 | Motivation | 35 |
| 5.2 | Schéma HHT et méthode d'accélération moyenne modifiée | 36 |
| 5.3 | Propriétés du schéma d'accélération moyenne modifiée | 37 |
| 6 | Exemple | 40 |
| 7 | Conclusion | 42 |
| 8 | Bibliographie | 43 |

1 Notations

| | |
|---|--|
| u | champ de déplacement absolu continu |
| K , K_iⁿ | matrice de rigidité, matrice tangente |
| M | matrice d'inertie |
| R | vecteur des forces intérieures |
| L | vecteur second membre de chargements (forme linéaire) |
| L^{abso} , L^{iner}_{GR} , L^{anél} | seconds membres respectivement dus à une frontière absorbante, aux termes inertiels non-linéaires en grandes rotations de poutre, à des chaînages anélastiques (provenant de variables de commande : température...) |
| C | matrice d'amortissement |
| Q | matrice de déformation assemblée |
| ^t V ... | transposé d'un vecteur V : forme linéaire duale... |
| <i>t</i> ; Δt | temps ; pas de temps |
| α | paramètre du schéma d'intégration temporelle méthode α (HHT) |
| β, γ | paramètres du schéma d'intégration temporelle de NEWMARK |
| Δ | incrément de grandeurs diverses au cours du pas de temps |
| δ | variation virtuelle d'un champ ; incrément de grandeurs diverses au cours des itérations de correction |
| <i>i</i> ; <i>n</i> ; <i>j</i> | indice du pas de temps ; indice de l'itération de NEWTON ; indice de composante |
| λ, μ | paramètres de LAGRANGE : réactions de liaison, réactions de contact |
| U , Ũ , Ü | vecteur ddl déplacement et dérivées successives par rapport au temps |
| P | vecteur ddl de perturbations de pression fluide barotrope |
| ϕ | vecteur ddl potentiel de perturbations de déplacement fluide barotrope |
| Φ | configuration : vecteur position : <i>x, y, z</i> et éventuellement vecteur rotation, et autres champs paramétrant le système |
| $\dot{\Phi}$ | dérivée temporelle de la configuration Φ par rapport au temps : vitesse de translation et éventuellement vitesse angulaire |
| $\ddot{\Phi}$ | dérivée temporelle de $\dot{\Phi}$ par rapport au temps : accélération de translation et éventuellement accélération angulaire |
| Convention des indices répétés : $U_d^k(t)\Psi_k = \sum_k U_d^k(t)\Psi_k$ | |

2 Dynamique non-linéaire : discrétisation spatiale du problème continu

Résoudre un problème de dynamique non-linéaire nécessite de décrire tout d'abord les équations du problème continu, puis de présenter leur discrétisation spatiale, ici en éléments finis, et enfin de décrire la méthode d'intégration temporelle, associée au traitement des non-linéarités matérielles et géométriques.

2.1 Discrétisation du problème de dynamique linéaire

On note \mathbf{u} le champ de déplacements absolus par rapport à la configuration de référence, et paramétré par l'instant t , appartenant à l'espace affine des champs admissibles \mathcal{V}_{adm} .

La méthode directe consiste à résoudre le problème issu de la discrétisation par éléments finis de la formulation en déplacement.

La discrétisation de la variation virtuelle de l'énergie cinétique donne le travail virtuel des forces d'inertie, dans un champ $\delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{adm}^0$, l'espace vectoriel directeur de \mathcal{V}_{adm} :

$$\delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{u}})^2 d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega = {}^t \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}$$

La discrétisation de la variation virtuelle du travail dissipé en viscosité (amortissement apporté par une dépendance des contraintes en fonction des vitesses de déformation) est :

$$\delta \int_{\Omega} c \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} c \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega = {}^t \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}$$

On précise au [§2.2.1] comment l'opérateur d'amortissement \mathbf{C} est construit dans DYNANONLINE.

La discrétisation de la variation de l'énergie élastique en linéaire donne le travail virtuel des efforts intérieurs :

$$\delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}) d\Omega = {}^t \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

Enfin, \mathbf{L} désigne le second membre issu de la discrétisation du travail virtuel des forces extérieures.

En élasticité linéaire, cela aboutit donc à considérer le système différentio-algébrique hyperbolique suivant, pour les ddl \mathbf{U} , avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n : \\ &\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{L} \\ \mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0 \\ \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \end{cases} \end{aligned}$$

accompagnées de conditions aux limites.

Les conditions initiales sont fournies à l'algorithme par le mot-clé ETAT_INIT (opérandes DEPL et VITE).

Si l'état initial résulte d'une simulation en statique linéaire ou non-linéaire, on ne prend pas en compte de vitesse initiale, et le déplacement, ainsi que les variables d'état (contraintes, variables internes), sont extraits du résultat de cette simulation à l'instant de départ considéré.

Le système d'équilibre dynamique devient instable si on peut trouver une pulsation ω complexe qui ne soit pas réelle positive pour laquelle on peut annuler le déterminant de : $-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}$.

2.2 Discrétisation du problème de dynamique non-linéaire

On se place maintenant dans un cadre mécanique non-linéaire.

On note le travail virtuel $\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \cdot \varepsilon(\delta \mathbf{v}) d\Omega$ de déformation (dit aussi des forces internes) du problème de mécanique non-linéaire, qui s'écrit après discrétisation :

$${}^t \delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}) = {}^t \delta \mathbf{V} \cdot ({}^t \mathbf{Q}(\mathbf{U}) \cdot \sigma(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}})$$

où l'on a volontairement distingué les forces visqueuses linéaires (opérateur \mathbf{C}) des autres forces internes. Dans le cas des petits déplacements, l'opérateur de déformation assemblé ${}^t \mathbf{Q}$ est constant (et défini sur la configuration initiale confondue avec la déformée).

Le bilan d'énergie mécanique s'écrit :

$$\mathbf{L} \cdot \delta \mathbf{v} = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \cdot \varepsilon(\delta \mathbf{v}) d\Omega$$

Le champ de contraintes σ à l'instant t s'écrit de façon générale $\sigma(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{Z}, t, \mathbf{H})$, si l'on note \mathbf{Z} le champ de variables de commande, comme par exemple T le champ de températures, et \mathbf{H} l'histoire passée de la structure jusqu'à l'instant t . Pour les comportements incrémentaux, l'histoire est l'ensemble des états (champs de déplacements, contraintes et variables internes) à l'instant précédent.

Dans le cas linéaire (cf. [§ 2.1]), on aboutit à $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}$, où \mathbf{K} est la matrice de rigidité élastique de la structure et \mathbf{C} la matrice d'amortissement.

2.2.1 Amortissement

Il est loisible d'utiliser des éléments discrets sur lesquels on fait porter un comportement d'amortissement via une matrice agissant sur les ddl, cf. [U4.42.01], mais l'amortissement peut aussi concerner les modèles massifs ou de structures. L'opérateur d'amortissement **C** de ces derniers peut être dans Code_Aster défini de deux façons dans DYNANONLINE, cf. aussi [R5.05.04], [U2.06.03] :

- 1) **une façon globale sur une base de modes propres** (Φ_k) établie au préalable sur la structure élastique, exprimés sur la base « physique » de la modélisation par éléments finis. On définit ainsi un coefficient par mode choisi. Le mot-clé : AMOR_MODAL de l'opérateur DYNANONLINE permet de lui fournir la base de modes et les coefficients d'amortissement réduit (selon l'hypothèse de BASILE). En effet, les amortissements sont déterminés expérimentalement par analyse modale sur les résonances.

Les déplacements **U** sont donc projetés sur les modes pour obtenir leurs coordonnées généralisées : $\eta^k = {}^t\Phi_k \cdot \mathbf{U}$. La matrice d'amortissement modal est :

$$\mathbf{C} = (\mathbf{K}\Phi_k) \cdot \mathbf{C}_{modal}^k \cdot {}^t(\mathbf{K}\Phi_k) \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}_{modal}^k = 2 \frac{\xi_k}{\omega_k \cdot {}^t\Phi_k \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi_k} \quad \text{où } \xi_k \text{ est le facteur}$$

d'amortissement modal à la pulsation ω_k et $k_k = {}^t\Phi_k \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi_k$ est la raideur généralisée du mode k . Malheureusement cette matrice peut avoir un profil très plein et rendre onéreuse (les matrices **C** et **K** n'ayant pas le même profil), comme on va le voir au [§ 3.1], son intégration dans le premier membre : on choisira alors de traiter ces forces d'amortissement modal $-\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}(t)$ au second membre par un schéma explicite.

- 2) **une façon globale/locale dite amortissement visqueux proportionnel** (selon l'hypothèse de RAYLEIGH) à partir des matrices de raideur élastique **K** et de masse **M**. Les paramètres sont donnés par le matériau sur les éléments finis du modèle (mots-clé AMOR_ALPHA/AMOR_BETA de la commande DEFI_MATERIAU). La matrice d'amortissement visqueux est $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}$. Elle est diagonalisable sur la base des modes propres réels, ce qui rend possible de faire un calcul transitoire sur base modale en découplant les modes : voir [R5.06.04]. Cette formulation, en linéaire, conduit à un facteur d'amortissement lié à la fréquence f : $\xi = \alpha \pi f + \beta / (4 \pi f)$. Dans le cas non-linéaire, cette évaluation n'a plus cours.

On ajuste en pratique les coefficients α, β de telle sorte que l'amortissement ξ soit quasiment uniforme dans la plage $[f_1, f_2]$ de fréquence d'intérêt pour la structure étudiée. D'où ainsi de manière raisonnable :

$$\alpha = \frac{\xi}{2\pi(f_1 + f_2)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\xi \cdot 2\pi \cdot f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}$$

Si la loi de comportement du matériau est non-linéaire dissipative, le choix des paramètres d'amortissement ξ concerne la plage où la structure reste quasiment élastique.

De plus, il faut noter que, au cours de l'intégration des non-linéarités (cf. [§ 3.2] et [§ 3.3]), Code_Aster produit des matrices tangentes et l'amortissement visqueux proportionnel devient :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K}^T + \beta \mathbf{M}$$

la matrice de masse **M** initiale étant, quant à elle, conservée. Ceci rend délicat l'interprétation de l'effet de l'amortissement proportionnel. Notamment en cas d'apparition de valeurs propres négatives de la matrice \mathbf{K}^T (par exemple en cas d'endommagement du matériau), l'amortissement peut devenir négatif et renforcer les instabilités !

2.2.2 Inertie

On note ${}^t\delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}})$ après discrétisation, le travail virtuel $\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega$ des forces d'inertie du système.

On note \mathbf{M} la matrice de masse du système en petites transformations. En grandes rotations de structure (comme par exemple les poutres, cf. [R5.03.40]), ce travail virtuel est une fonction non-linéaire de $\mathbf{U}(t)$ et de ses dérivées temporelles (spécifiquement des degrés de liberté de rotation) ; on fait donc apparaître le terme d'accélération habituel avec une correction non-linéaire : $\mathbf{M}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{M}(\mathbf{U}) \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}})$. Dans les autres cas, $\mathbf{M}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{M}(\mathbf{U}) \cdot \ddot{\mathbf{U}}$, qui peut varier si on réactualise la géométrie, ou qui est constante en petits déplacements.

2.2.3 Liaisons

En pratique, on peut avoir des conditions de liaison bilatérales ou unilatérales, ou des liaisons de type « impédance » ou « absorbantes », cf. [R4.02.05].

Liaisons bilatérales

Les liaisons bilatérales s'écrivent sous forme de la relation suivante : $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^d(t)$. Les champs de déplacements virtuels cinématiquement admissibles vérifient : $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$. L'opérateur $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ peut dépendre de la configuration en présence de grands déplacements par réactualisation à chaque pas de temps.

Elles sont parfaites : elles ne dissipent pas d'énergie. Ce sont des liaisons « holonomes », où la vitesse $\dot{\mathbf{U}}$ n'intervient pas. Ces liaisons sont en général dualisées par Code_Aster, cf. [R3.03.01].

Liaisons unilatérales

Le système mécanique objet de la simulation par éléments finis peut entrer en contact (liaisons unilatérales) avec un « obstacle », qui est un solide dont on connaît a priori le mouvement, d'où la définition d'un jeu $\mathbf{d}_0(t)$. Les liaisons unilatérales (par exemple le contact unilatéral) s'écrivent sur la configuration à tout instant t : $\mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{d}_0(t)$ (non-pénétration ou vérification que le jeu effectif reste positif ou nul dans toute configuration). L'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ peut dépendre de la configuration en présence de grands déplacements par réactualisation à chaque pas de temps.

On ne considérera que des liaisons « holonomes », du type $\mathbf{A}(\mathbf{U}, t) = 0$, qui ne font intervenir que les valeurs des degrés de liberté $\mathbf{U}(t)$ et le temps explicitement si l'obstacle est mobile. On ne considérera pas de liaisons « non-holonomes », par exemple du type roulement sans glissement, qui font intervenir la vitesse explicitement et s'écrivent $\mathbf{A}_1(\mathbf{U}, t) \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{A}_2(\mathbf{U}, t) = 0$, \mathbf{A}_2 et la dépendance directe en temps n'étant présente que s'il y a un obstacle mobile.

Si l'obstacle est immobile, la liaison en tant que telle sera explicitement indépendante du temps (on dit aussi « scléronome »).

Ces « charges de contact » sont définies par l'opérateur AFFE_CHAR_MECA. La présence de liaisons unilatérales exige de définir les vitesses du solide dans un espace fonctionnel particulier afin d'assurer l'existence de solutions du système de la dynamique. En effet, lors des instants (dénombrables) d'impact, les vitesses $\dot{\mathbf{U}}(t^-)$ et $\dot{\mathbf{U}}(t^+)$ peuvent ne pas coïncider. Il est nécessaire pour garantir ce résultat que les données (chargement, équations de liaisons) vérifient une propriété d'analyticité, qui est acquise en pratique avec la discrétisation par éléments finis choisie (voir [bib6]).

On n'introduit pas *a priori* de relation constitutive des impacts (comportement dissipatif en rebond simple, exprimé à l'aide d'un coefficient de restitution normale $e \in [0,1]$), exprimée sur les différentiels de vitesses des deux points en impact :

$$\dot{\mathbf{U}}_{2_norm}^+(t) = \dot{\mathbf{U}}_{1_norm}^+(t) - e(\dot{\mathbf{U}}_{2_norm}^-(t) - \dot{\mathbf{U}}_{1_norm}^-(t))$$

Ce type de comportement est introduit d'habitude en effet pour traiter le contact-impact de corps rigides, alors que la modélisation numérique avec solides déformables permet de représenter directement le comportement vibratoire sous le choc et les non-linéarités matérielles. Mais il est possible d'ajouter dans la modélisation des éléments discrets de contact-choc placés sur l'interface en contact, munis de la loi `DIS_CHOC`, qui apportent une dissipation d'amortissement (à condition de supposer de petits mouvements...).

On peut adjoindre aux liaisons unilatérales un comportement de frottement (critère de COULOMB), qui dissipe de l'énergie en glissement relatif des surfaces en contact.

On fait parfois référence au fait que le coefficient de frottement dynamique est plus faible que celui mesuré en quasi-statique (adhérence). Cela provient du fait qu'en dynamique des vibrations de haute fréquence sur la réaction normale apparaissent et affaiblissent la valeur du seuil de frottement de COULOMB. On n'aurait donc pas besoin de fournir deux valeurs de coefficients au *Code_Aster*, puisqu'on modélise les solides déformables en contact-frottement (à condition de pouvoir simuler ces vibrations haute fréquence...).

On sait que la dissipation est une condition nécessaire pour l'existence de solutions théoriques au problème de dynamique avec impact. L'emploi du schéma HHT, voir [§ 5], qui introduit de la dissipation numérique peut s'avérer nécessaire.

Liaisons dissipatives locales

Des relations spécifiques (comme `DIS_CONTACT`, `DIS_CHOC`) sont conçues pour traiter certains types de liaisons ponctuelles dissipatives, agissant directement sur les ddls d'éléments discrets du système, voir [R5.03.17]. Elles constituent une loi de comportement en forces généralisées fonction de déplacements généralisés intégrée comme l'ensemble des forces internes $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t)$ des structures étudiées.

Liaisons absorbantes

Les liaisons de type « absorbantes », cf. [R4.02.05], permettent de simuler le « filtrage » d'une partie de la réponse dynamique, en empêchant la sortie d'ondes diffractées, au profit d'un champ « incident » sur une frontière du modèle : voir le [§ 2.6]. Elles introduisent des termes amortissants du type $\mathbf{A}_{abso}(\dot{\mathbf{u}})$ sur une frontière du solide considéré.

2.2.4 Problème dynamique discrétisé

La dualisation des conditions aux limites de DIRICHLET $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^d(t)$ et des conditions unilatérales conduit après discrétisation à définir les inconnues à tout instant t : $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, où $\boldsymbol{\lambda}$ représente les « multiplicateurs de LAGRANGE » des conditions aux limites de DIRICHLET [R3.03.01], et $\boldsymbol{\mu}$ représente les « multiplicateurs de LAGRANGE » des conditions unilatérales.

Le problème dynamique non-linéaire s'écrit, avec les conditions initiales [R3.03.01], [R5.03.50] :

Trouver la trajectoire $\mathbf{U}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda} + {}^t\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}(t) \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^d(t) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \leq \mathbf{d}_0(t) \\ \forall j, \quad \mu_j \geq 0 \\ \forall j, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{d}_0)_j \cdot \mu_j = 0 \\ \mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0 \\ \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \end{array} \right. \quad \text{éq 2.2.4-1}$$

\mathbf{L} représente le vecteur des forces externes (chargements mécaniques). Ces forces peuvent dépendre du temps et de l'espace. On suppose que, comme les liaisons, elles dépendent de façon régulière des paramètres, ce qui assure l'existence de la solution du problème (théorème de CAUCHY). On peut considérer des forces « suiveuses » $\mathbf{L}(\mathbf{U}, t)$, par exemple la pression, si on prend en compte les changements de géométrie.

Le vecteur ${}^t\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ s'interprète comme l'opposé des réactions d'appui aux nœuds correspondants (\mathbf{B} est l'opérateur linéaire exprimant le passage aux degrés de liberté des appuis). Le vecteur ${}^t\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}$ s'interprète comme les forces nodales dues au contact (\mathbf{A} est l'opérateur linéaire exprimant le passage aux degrés de liberté des zones en contact).

L'analyse de stabilité du système d'équilibre dynamique [éq 2.2.4-1] est plus complexe qu'en linéaire, mais une condition suffisante de perte de stabilité est la possibilité de trouver une pulsation ω pour laquelle on peut annuler le déterminant de : $-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C}^T + \mathbf{K}^T$, défini sur les opérateurs tangents, à l'instant considéré.

2.2.5 Conditions initiales

Les conditions initiales $\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0$ sont fournies au code par le mot-clé ETAT_INIT (opérandes DEPL et VITE).

Si l'état initial résulte d'une simulation en statique linéaire ou non-linéaire, le déplacement, ainsi que les variables d'état (contraintes, variables internes), sont extraits du résultat de cette simulation, et la vitesse initiale est par défaut supposée nulle.

2.2.6 Pilotage temporel implicite de chargements extérieurs

En général, les charges, définies dans AFFE_CHAR_MECA ou AFFE_CHAR_MECA_F, sont de type « FIXE_CSTE » si leur intensité et direction sont connues a priori.

On peut aussi considérer qu'une part des sollicitations extérieures est pilotée (type « FIXE_PILO »), c'est-à-dire que son intensité est paramétrée : $\eta \mathbf{F}_{imp}^{pilo}$ et/ou $\eta \mathbf{U}_{imp}^{pilo}$, et contrôlée par une relation scalaire, exprimée sur un nœud (ou groupe de nœuds), sur la solution : $P(\mathbf{u}) = t = \tilde{P}(\eta)$, cette dernière étant implicite. Comme on le voit, cette équation fait référence au temps, qui contrairement à la statique où il ne sert qu'à donner une chronologie sur les incréments de charge, a un rôle physique en dynamique. On devra s'assurer donc de la signification précise du pilotage temporel.

On ajoute donc dans le système non-linéaire [éq 3.1-7] cette dernière équation qui sera résolue avec les autres par la méthode itérative de NEWTON. On ne peut pas piloter les forces de pesanteur, de force centrifuge, de LAPLACE, les déformations thermiques ou anélastiques.

On pourra utilement se reporter à [R5.03.80].

2.3 Prise en compte d'un état initial précontraint

Si le problème dynamique à résoudre « suit » un état mécanique initial, deux principales situations s'offrent à nous :

- $\{1\}$ on souhaite calculer les déplacements \mathbf{u} et les contraintes dynamiques à partir de l'état « vierge » nul initial,
- $\{2\}$ on souhaite calculer les déplacements \mathbf{u} et les contraintes dynamiques en « différentiel » à partir d'un état pré-chargé.

Dans la première situation $\{1\}$, il convient de faire au préalable le calcul de l'état statique, éventuellement non-linéaire (matériau, grandes transformations), préalable à la dynamique.

Ainsi, si la structure a un comportement non-linéaire, on doit procéder directement en dynamique non-linéaire, après avoir évalué l'état initial par simulation en statique, éventuellement non-linéaire (avec l'opérateur `STAT_NON_LINE`), et le champ de déplacement est évalué depuis le début de l'historique. Il peut être nécessaire de prendre en compte les variations de géométrie. Les informations nécessaires pour décrire l'état initial (résultats d'une simulation précédente via le concept résultat `EVOL_NOLI` ou champs mécaniques nécessaires : `DEPL`, `SIGM`, `VARI`) sont fournies par le mot-clé `ETAT_INIT`, par exemple si on se trouve dans le cadre d'un comportement incrémental (`COMP_INCR`), voir [U4.51.03].

L'état initial peut être obtenu aussi par une simulation en dynamique « très lente », en ayant soin de mettre une rampe « lente » de dépendance au temps sur les efforts statiques appliqués, ainsi qu'un fort amortissement (physique, cf. [§ 2.2.1] ou/et numérique cf. [§ 5]). Cette manière de procéder a l'avantage d'injecter tant dans l'opérateur de la phase de prédiction [éq 3.2.1-4] de l'algorithme de NEWTON, que dans celui de la phase de correction [éq 3.3-1] des termes $\hat{\mathbf{K}}$ venant de la matrice de masse et de celle d'amortissement, pour établir l'état mécanique statique. Cela est précieux dans des situations de contact-frottement, d'endommagement... pour améliorer la convergence.

La seconde situation $\{2\}$ concerne le cas d'une structure qui a subi un pré-chargement thermo-mécanique « ordinaire », conduisant à un état d'équilibre élastique linéaire. Si l'on mesure par \mathbf{u} le déplacement à partir de cet état pré-chargé, qui a engendré un état de contraintes σ_1 , alors l'énergie de déformation élastique est complétée par un terme de raideur géométrique :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\delta \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_1 \cdot \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla(\delta \mathbf{v}) d\Omega = {}^t \delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{U}$$

On assemble alors simplement les matrices \mathbf{K} et \mathbf{K}_g , et on effectue la résolution en dynamique linéaire, comme au [§ 2.1]. Ça peut être par exemple le cas d'une étude sismique sur un barrage voûte. Avec `DYNA_NON_LINE`, il est nécessaire de fournir par le mot-clé `ETAT_INIT`, le champ de contraintes `SIGM` résultat de l'état pré-chargé et de préciser au mot-clé `DEFORMATION` sous `COMP_INCR` la prise en compte des termes non-linéaires de déformation.

Il est fréquent que la contribution de \mathbf{K}_g soit négligeable : on peut alors se contenter d'une analyse dynamique sur la base d'un état initial totalement vierge. On notera aussi que le calcul de la matrice \mathbf{K}_g n'est pas disponible pour tous les éléments finis proposés par *Code_Aster*.

2.4 Problèmes couplés fluide-structure vibro-acoustique

On pourra pour plus de détails se reporter aux documents [R4.02.02], [R4.02.04], [R4.02.05].

On considère les petits mouvements en approche eulérienne d'un fluide parfait compressible, éventuellement baignant une paroi d'une structure solide. Le fluide est dit barotrope :

- on considère de petites perturbations irrotationnelles autour de l'état initial (hydrostatique) : $\vec{u}_f = \vec{u}_f^0 + \vec{u}_f$, $P = P_0 + p$ et $\rho_f = \rho_0 + \rho$, l'indice 0 désigne la partie permanente des champs),
- la loi de comportement du fluide donne les contraintes « fluctuantes » : $\sigma = -p\mathbf{Id} = -\rho c_0^2 \mathbf{Id} = \rho_0 c_0^2 (\text{div } \vec{u}_f) \mathbf{Id}$,
- les vitesses fluides dérivent d'un potentiel $\vec{v}_f = \vec{u}_f = \vec{\nabla} \phi$ et sont modélisées à l'aide des champs (p, ϕ) : pression fluctuante et potentiel de déplacement, qui ne sont pas indépendants car : $\dot{p} = -\rho_0 c_0^2 \Delta \phi$ (en combinant équation de continuité et loi de comportement).

On admet que l'on ne considère pas de forces fluctuantes de volume \vec{f} s'exerçant sur le fluide. L'équilibre dynamique du fluide s'écrit : $\vec{\nabla} p + \rho_f \ddot{\vec{u}}_f = \vec{0}$ (équation d'Euler linéarisée), qui est valable pour un fluide non-pesant compressible ou pesant incompressible ; par contre pour un fluide pesant compressible les approches eulérienne et lagrangienne ne coïncident pas même en petits mouvements : ce cas n'est pas traité par Code_Aster.

L'équilibre dynamique du fluide va être écrit sous forme variationnelle sous l'action d'une pression fluctuante p_{imp} imposée sur une partie de la frontière. En régime harmonique, l'équilibre dynamique du fluide se traduit par la formulation variationnelle de l'équation de Helmholtz.

Code_Aster possède une formulation symétrisée, voir [R4.02.02], avec des éléments (\mathbf{P}, ϕ) notant le vecteur des ddl de pression et de potentiel fluctuant pour décrire les perturbations dans le fluide, sachant que $\vec{\nabla} p + \rho_0 \vec{\nabla} \ddot{\phi} = \vec{0}$. Une équation en \mathbf{P} résout l'équilibre dynamique dans le domaine fluide, celle en ϕ traduisant l'équation de continuité dérivée combinée à la loi de comportement fluide. Des conditions aux limites en \mathbf{P} et ϕ complètent le système d'équations pour décrire les évolutions du fluide. Ainsi, sur une frontière $\partial\Omega_{f-p}$ du domaine fluide, une pression fluctuante peut être appliquée : $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{imp}(t)$, cependant à cause de la formulation (\mathbf{P}, ϕ) , on doit aussi y imposer une condition sur ϕ : $\phi(t) = \phi_{imp}(t)$, vérifiant $\rho_0 \ddot{\phi}_{imp}(t) = \mathbf{P}_{imp}(t)$.

Comme on envisage une **frontière commune fluide-structure** $\partial\Omega_{FS}$, où on définit la normale \vec{n} sortante du domaine structure vers le fluide, le chargement de paroi du fluide est couplé avec le déplacement de la structure. Les déplacements normaux sont continus : $(\vec{u}_f + \vec{u}_f^0) \cdot \vec{n} = \vec{u}_{st} \cdot \vec{n}$ sur $\partial\Omega_{FS}$, \vec{u}_f^0 désignant la partie permanente du déplacement fluide. En utilisant le potentiel fluide, on a : $\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} = \vec{u}_{st} \cdot \vec{n}$ sur $\partial\Omega_{FS}$. De manière duale, les vecteurs contraintes sont continus : $-p\vec{n} = \sigma \cdot \vec{n}$ sur $\partial\Omega_{FS}$. La structure reçoit ainsi le chargement fluctuant du fluide : $\int_{\partial\Omega_{FS}} p \delta \vec{v} \cdot (-\vec{n}) dS$.

Si on envisage une **surface libre** (soumise à une pression constante), traitée aussi en description eulérienne, voir [R4.02.04], on note par z (et \mathbf{Z} les ddl associés après discrétisation) l'altitude fluctuante (petite) de la surface libre $\partial\Omega_{SL}$ et la fluctuation de pression eulérienne dans le fluide vérifie : $\int_{\partial\Omega_{SL}} (p - \rho_0 g z) \delta z dS = 0$, dans toute altitude virtuelle δz . C'est la seule conséquence de la pesanteur que l'on puisse prendre ne compte dans cette formulation.

Par ailleurs, on peut avoir besoin de prendre en compte une frontière artificielle avec un milieu infini (qui doit traiter la condition de radiation à l'infini) : *Code_Aster* propose des éléments finis de frontière absorbante (éléments paraxiaux ou anéchoïques), voir [R4.02.05]. Comme ils apportent a priori un terme en dérivée troisième du temps, à cause de l'introduction du champ ϕ , on préfère le traiter à l'aide d'une transformation en un terme non-symétrique en $\dot{\mathbf{P}}$ qui sera reporté au second membre, de manière explicite.

Au total on obtient les équations semi-discrètes différentio-algébriques du problème couplé :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{FS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{fl} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{M}_{FS} & {}^t\mathbf{M}_{fl} & \mathbf{H}_{fl} & \mathbf{M}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t\mathbf{M}_z & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{fa} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{fl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \phi \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{st} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{structure} \\ \text{fluide} \\ \text{fluide} \\ \text{surf. libre} \end{matrix}$$

éq 2.4-1

accompagné des conditions initiales :

$$\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0, \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0, \quad \phi(t_0) = \phi_0 \text{ et } \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{0},$$

et des conditions aux limites : $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_{imp}$ sur le bord $\partial\Omega_{S_u}$ de la structure, des éventuelles conditions unilatérales, et $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{imp}(t)$ avec $\phi(t) = \phi_{imp}(t)$, vérifiant $\rho_0 \ddot{\phi}_{imp}(t) = \mathbf{P}_{imp}(t)$ sur le bord $\partial\Omega_{f_p}$ du fluide.

Remarque :

On note que dans le cas non-linéaire, on remplace dans [éq 2.4-1] le terme $\mathbf{K}.\mathbf{U}$ par les forces internes non-linéaires $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{Z}, t)$.

Les différents opérateurs sont :

- les matrices \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{C} définies plus haut pour la structure solide,
- \mathbf{Q}_{fl} est la matrice construite à partir de $\int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p.q d\Omega$, qui a le sens physique d'une énergie élastique du fluide,
- \mathbf{H}_{fl} est construite à partir de $\int_{\Omega_f} -\rho_0 \vec{\nabla} \phi . \vec{\nabla} \psi d\Omega$, et décrit le transport de masse fluide,
- \mathbf{M}_{fl} est construite à partir de $\int_{\Omega_f} \frac{1}{c_0^2} \phi.q d\Omega$, et décrit l'inertie du fluide,
- \mathbf{M}_{FS} est construite à partir de $\int_{\partial\Omega_{FS}} \rho_0 \phi . \delta \vec{v} . (-\vec{n}) dS$ (\vec{n} est la normale du domaine structure vers le fluide), et décrit le débit massique eulérien à l'interface fluide-structure,

- \mathbf{A}_{fa} est construite à partir de $\int_{\Omega_f} \rho_0 p \cdot \psi d\Omega$, et désigne l'opérateur frontière absorbante, agissant sur $\dot{\mathbf{P}}$, modifiant l'équation en ϕ de la paroi absorbante : les éléments (modèle 3D_FLUI_ABSO) absorbants dé-symétrisent le système issu de la formulation (\mathbf{P}, ϕ) et on va reporter ce terme au second membre, qui sera noté \mathbf{L}^{abso} , par discrétisation temporelle explicite à chaque itération, voir le § 3,
- \mathbf{K}_z est la « raideur » de surface libre, construite à partir de $\int_{\partial\Omega_{SL}} \rho_0 g z \cdot \delta z dS$,
- \mathbf{M}_z provient du travail de la pression fluctuante en surface libre, construite à partir de $\int_{\partial\Omega_{SL}} \rho_0 z \cdot \psi dS$,
- le terme \mathbf{L}_{st} contient, entre autres chargements, l'effet de la pression hydrostatique exercée par le fluide sur la structure.

En résumé, la prise en compte d'un domaine fluide en évolution fluctuante barotrope, interagissant avec la structure conduit à considérer dans le système dynamique non-linéaire [éq 2.2.4-1] enrichi sur des ddls particuliers (\mathbf{P}, ϕ) et \mathbf{Z} :

- un opérateur de forces d'inertie $\mathbf{M}(\mathbf{U}) \cdot \ddot{\mathbf{U}}$ enrichi par :

$$\mathbf{M}^{fs} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{FS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{fl} & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{M}_{FS} & {}^t\mathbf{M}_{fl} & \mathbf{H}_{fl} & \mathbf{M}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t\mathbf{M}_z & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\mathbf{Z}} \end{pmatrix};$$

- un opérateur de forces intérieures $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ enrichi par :

$$\mathbf{K}^{fs} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \phi \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{fl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \phi \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix};$$

- un second membre enrichi par le report au second membre par discrétisation temporelle explicite de $-\mathbf{A}_{fa} \dot{\mathbf{P}}$ sur les ddls ϕ .

Le fluide doit rester en petits mouvements (hypothèse de base de cette modélisation), mais on peut considérer des grands mouvements de la structure, baignée par le fluide, via une réactualisation de la géométrie $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \Delta\mathbf{U}$ (via le mot-clé COMP_INCR, opérande DEFORMATION : 'PETIT_REAC', valable si on considère de petites rotations) des frontières $\partial\Omega_{FS}$, ce qui fait recalculer le terme \mathbf{M}_{FS} mais aussi tous les autres puisque le domaine Ω_f a évolué ; les champs scalaires (\mathbf{P}, ϕ) sont alors simplement transportés à l'identique sur la géométrie réactualisée. Voir aussi le cas-test FDNV100 [V8.03.100].

2.5 Prise en compte de lois de comportement visqueux et amortissement

Une loi de comportement visqueux, voir [R5.03.08], se traduit comme une loi élastoplastique par une évolution du travail des forces intérieures $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t)$. Ainsi, tout en amenant un amortissement « physique » dans l'équilibre dynamique, elle ne produit pas de contribution directe au terme d'amortissement $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}$ de l'équation d'équilibre dynamique, mais cependant de manière indirecte si on a choisi un amortissement de Rayleigh (cf. [§ 2.2.1]) via la matrice de raideur tangente du schéma d'intégration.

En effet avec une loi de comportement visqueux, le tenseur des déformations comporte une partie élastique, une partie thermique, une partie anélastique (connue) et une partie visqueuse, déviatorique (déviateur des contraintes noté $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$), par exemple vérifiant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{tot} &= \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_v \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{A}(T) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= g(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda, T) \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}}\end{aligned}$$

Pour la relation de comportement visqueux LEMAITRE, la fonction g est explicite, mais ce n'est pas toujours le cas. Après discrétisation implicite en temps, l'écoulement visqueux est :

$$\frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\Delta t} = \frac{3}{2} g\left(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda^- + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v)_{eq}, T\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}}$$

On peut adopter aussi un schéma semi-implicite, qui semble donner de meilleurs résultats :

$$\frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v}{\Delta t} = \frac{3}{2} g\left(\left(\boldsymbol{\sigma}^- + \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2}\right) \frac{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + \frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\right)}{\left(\boldsymbol{\sigma}^- + \frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)_{eq}}$$

Après résolution d'une équation non-linéaire locale par élimination de $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v$ pour calculer $\boldsymbol{\sigma}_{eq} = \left(\boldsymbol{\sigma}^- + \Delta \boldsymbol{\sigma}\right)_{eq}$, on obtient ainsi la contrainte à la fin du pas de temps courant $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^- + \Delta \boldsymbol{\sigma}$.

2.6 Equations en mouvement « relatif » [R4.05.01]

Dans plusieurs applications, notamment en séisme, on souhaite calculer directement le champ de déplacement de la structure déduit du mouvement d'« entraînement » provenant des déplacements imposés $\mathbf{U}^d(t)$ des supports de la structure.

On note alors \mathbf{u}_a le déplacement absolu de la structure : $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_{ent} + \mathbf{u}$, \mathbf{u}_{ent} étant le déplacement d'entraînement (par exemple, \mathbf{u}_{ent} peut être un champ incident : il est appelé alors « déplacement pseudo-statique ») ; il peut être de corps rigide (cas MONO_APPUI), mais pas nécessairement (cas MULTI_APPUI).

Et on appelle \mathbf{u} le déplacement « relatif » (appelé ainsi par abus de langage si \mathbf{u}_{ent} n'est pas de corps rigide).

En effet la codification (RCC-M, ASME...) introduit la distinction entre « contraintes primaires » dues au mouvement vibratoire « relatif » et « contraintes secondaires » dues au mouvement vibratoire d'« entraînement ». La pertinence de cette distinction disparaît *a priori* évidemment dès qu'on envisage un comportement non-linéaire du matériau.

Si l'on traite le problème d'interaction avec le sol (qui est un demi-espace infini) en séisme par exemple, le champ de déplacement relatif \mathbf{u} vérifie : $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$: seul le champ incident \mathbf{u}_{ent} est

perceptible à l'infini – c'est la donnée de chargement sismique. On utilise pour définir ce chargement de déplacement imposé la commande AFFE_CHAR_MECA et le mot clé facteur ONDE_PLANE, sur une frontière donnée du maillage considéré.

Dans ce cas de problème d'interaction avec le sol, on ne connaît pas *a priori* le déplacement d'« entraînement » directement appliqué à la structure, puisqu'il résulte de la réponse totale couplée : aussi le cas MULTI_APPUI n'a-t-il pas de sens.

Par contre, ne pouvant pas simuler en éléments finis avec Code_Aster le champ dans tout le demi-espace infini (le sol), on est conduit à placer des frontières « absorbantes », cf. [R4.02.05], au bord du maillage de sol. Le travail virtuel associé à ces frontières absorbantes, de normale sortante \mathbf{n} , est traité comme un second membre (pour les éléments finis absorbants paraxiaux d'ordre 0), car il est intégré de façon explicite dans le schéma d'intégration temporelle (cf. [§3]) de DYNA_NON_LINE. La forme linéaire associée vaut :

$$\mathbf{L}^{abso}(\mathbf{u}_{ent}, \dot{\mathbf{u}}_{ent}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{V} = \int_{\partial \Omega_{abso}} (\mathbf{A}_{abso}(\dot{\mathbf{u}}) + \sigma(\mathbf{u}_{ent}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{A}_{abso}(\dot{\mathbf{u}}_{ent})) \cdot \delta \mathbf{V} dS \quad \text{éq 2.6-1}$$

Après discrétisation, on déduit le second membre :

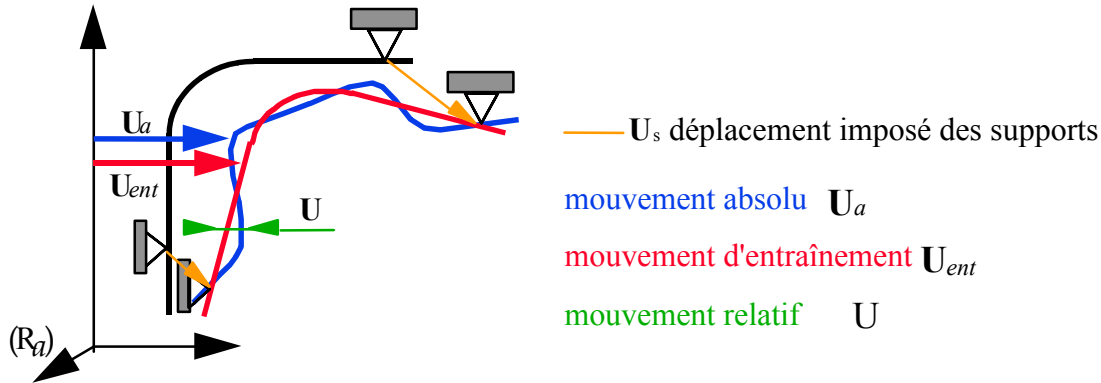
$${}^t \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}^{abso}(\mathbf{U}_{ent}, \dot{\mathbf{U}}_{ent}, \dot{\mathbf{U}}) = {}^t \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_{abso} \cdot \dot{\mathbf{U}} + {}^t \delta \mathbf{V} \cdot \Sigma(\dot{\mathbf{U}}_{ent}) - {}^t \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_{abso} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{ent} \quad \text{éq 2.6-2}$$

Remarque : cas d'un problème avec interaction fluide-structure :

Pour une structure subissant des déplacements imposés, en présence d'interaction fluide-structure, où le domaine fluide n'est pas directement lié au « support » imposant le signal d'entraînement, il est possible de résoudre le système d'équilibre dynamique en terme de déplacement « relatif » \mathbf{U} de la structure et de variables fluides (\mathbf{P}, ϕ) « absolues » et de cote de surface libre du fluide \mathbf{Z} « absolue », cf. [§ 2.4]. En effet, on peut montrer que $(\mathbf{P}_{ent}, \phi_{ent}) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{Z}_{ent} = \mathbf{0}$, sur la base de [eq 2.4-1]. On pourra se reporter à [R4.02.05].

On ne pourra pas considérer un tel type de décomposition champ d'« entraînement » – champ « relatif » en cas de chargements de type pression imposée fluctuante sur une paroi du domaine fluide.

On cherche à exploiter cette distinction dans le système dynamique non-linéaire discret [éq 2.2.4-1] pour simplifier la prise en compte des déplacements imposés $\mathbf{U}^d(t)$.



Toutes les conditions de liaison, voir [éq 2.2.4-1], ne sont pas nécessairement des conditions d'« entraînement » par les supports : $\mathbf{B}_s \cdot \mathbf{U}_a = \mathbf{U}^d(t)$; on note par $\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{U}_a = \mathbf{0}$ les conditions de liaisons que l'on souhaite imposer directement au déplacement \mathbf{U}_a de la structure (par exemple des liaisons internes comme « 3D_POU »...) et λ_L les paramètres de LAGRANGE associés. On envisage donc par la suite ces deux familles : \mathbf{B}_s pour les mouvements d'« entraînement » par les supports et \mathbf{B}_L pour les liaisons bilatérales « ordinaires ».

Si les supports sont en nombre fini (ce qui sera le cas après discrétisation de toute manière), on note \mathcal{V}_e l'espace vectoriel des champs de déplacements de la structure « entraînée » \mathbf{u}_{ent} , de dimension finie N_s , que l'on va définir ci-après. On décompose les conditions de DIRICHLET $\mathbf{U}^d(t)$, sur une base (\mathbf{X}_{ks}) de déplacements des supports : $\mathbf{U}^d(t) = U_d^k(t) \mathbf{X}_{ks}$, $k = 1 \rightarrow N_s$ parcourant tous les « degrés de liberté entraînés » par les supports.

On construit un « relèvement élastostatique », c'est-à-dire une base de \mathcal{V}_e à partir des solutions statiques élastiques linéaires de la structure sous les seuls déplacements imposés de base (\mathbf{X}_{ks}) des supports (aucun chargement en force imposée). Après discrétisation par éléments finis, cela revient à résoudre $k = 1 \rightarrow N_s$ problèmes d'élastostatique (matrice de raideur \mathbf{K}) :

Trouver $(\Psi_k, \lambda_{s\Psi_k}, \lambda_{L\Psi_k})$ tels que

$$\begin{cases} \mathbf{K} \cdot \Psi_k + {}^t \mathbf{B}_s \cdot \lambda_{s\Psi_k} + {}^t \mathbf{B}_L \cdot \lambda_{L\Psi_k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_s \cdot \Psi_k = \mathbf{X}_{ks} \\ \mathbf{B}_L \cdot \Psi_k = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{éq 2.6-3}$$

On appelle « modes statiques » ces N_s solutions Ψ_k (renseignés via l'opérande « MODE_STAT » de DYNA_NON_LINE). Ils sont calculés au préalable par l'opérateur MODE_STATIQUE [U4.52.04] avec l'option MODE_STAT.

On a nécessairement avec [éq 2.6-3] : ${}^t \Psi_\ell \cdot \mathbf{K} \cdot \Psi_k + {}^t \mathbf{X}_{\ell s} \cdot \lambda_{s\Psi_k} = 0$, $\forall \ell, k = 1 \rightarrow N_s$.

Le champ de déplacements de la structure « entraînée » \mathbf{u}_{ent} , après discrétisation par éléments finis, est donc décrit par les $\mathbf{U}_{ent} = U_{ent}^k(t) \Psi_k$, vérifiant notamment $\mathbf{B}_s \cdot \mathbf{U}_{ent} = U_d^k(t) \mathbf{X}_{ks}$ sur les supports, parcourant le sous-espace discret \mathcal{V}_e , des « degrés de liberté entraînés » par les supports.

Le sous-espace discret \mathcal{V}_e est donc engendré par la base (Ψ_k) . On a nécessairement :

$$U_e^k(t) = U_d^k(t), \forall k$$

Les degrés de liberté de déplacements de la structure « entraînée » sont donc directement donnés par la valeur des $U^d(t)$.

Ayant caractérisé le sous-espace discret \mathcal{V}_e à partir des modes statiques, après discrétisation, étudions un champ de déplacement \mathbf{W} de la structure, cinématiquement admissible quelconque, mais nul sur les supports : $\mathbf{B}_s \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$ et vérifiant les liaisons « ordinaires » $\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$. En vertu de [Éq 2.6-3], on a nécessairement :

$$\begin{cases} {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{K} \cdot \Psi_k + {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{B}_s \cdot \lambda_{s\Psi_k} + {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{B}_L \cdot \lambda_{L\Psi_k} = 0 \\ {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{B}_s \cdot \Psi_k = {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}_{ks} \\ {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{B}_L \cdot \Psi_k = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{W}, \text{ tel que } \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

D'où simplement :

$$\begin{cases} {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{K} \cdot \Psi_k = 0 \\ {}^t\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}_{ks} = 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{W}, \text{ tel que } \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{éq 2.6-4}$$

L'opérateur de raideur élastique \mathbf{K} étant défini positif (ayant éliminé les modes de corps rigides), on constate que tout champ de déplacement absolu \mathbf{W}_a cinématiquement admissible de la structure, après discrétisation, peut s'écrire par décomposition unique :

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W} + \mathbf{W}_e \text{ sur la somme des sous-espaces supplémentaires } \mathcal{V}_a = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}_e \quad \text{éq 2.6-5}$$

avec \mathcal{V}_e engendré à partir des modes statiques (Ψ_k) , et \mathcal{V} contenant les champs dits « ddl actifs » tels que $\mathbf{B}_s \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$ (nuls sur les supports). On appelle \mathcal{V} le sous-espace discret des « degrés de liberté actifs ».

Pour un chargement de type MONO_APPUI, les modes statiques sont les modes de corps rigides de la structure : $\mathbf{K} \cdot \Psi_k = \mathbf{0}$, vérifiant les liaisons « ordinaires » $\mathbf{B}_L \cdot \Psi_k = \mathbf{0}$.

Si le chargement est MULTI_APPUI, les modes statiques (Ψ_k) sont quelconques.

Cette décomposition sur deux sous-espaces supplémentaires $\mathcal{V}_a = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}_e$ de tout champ cinématiquement admissible bâtie à l'aide de l'opérateur d'élasticité \mathbf{K} est applicable dans toute évolution non-linéaire de la structure, y compris avec des chocs..., à condition que les liaisons bilatérales restent les mêmes au cours de l'historique.

Exploitions cette décomposition et projetons maintenant le problème dynamique non-linéaire [éq 2.2.4-1] séparément sur le sous-espace \mathcal{V} puis sur le sous-espace \mathcal{V}_e , en exploitant [éq 2.6-3]. Le résultat se simplifie (un peu seulement) car $\mathbf{B}_s \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$ (d'où les « ddls actifs » ne travaillent pas dans les réactions des appuis supports \mathbf{B}_s), $\mathbf{B}_L \cdot \Psi_k = \mathbf{0}$ (d'où les modes statiques ne travaillent pas dans les réactions de liaison \mathbf{B}_L), $\mathbf{B}_s \cdot \Psi_k = \mathbf{X}_{ks}$:

Trouver $\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_e + \mathbf{U}$, λ_s , λ_L , μ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_e = U_d^\ell(t) \Psi_\ell \\ {}^t \mathbf{W} \cdot \mathbf{M} (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e, \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e, \ddot{\mathbf{U}} + \ddot{\mathbf{U}}_e) + {}^t \mathbf{W} \cdot \mathbf{C} (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e) + {}^t \mathbf{W} \cdot \mathbf{R} (\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e, t) = \\ \quad {}^t \mathbf{W} \cdot (\mathbf{L}(t) + \mathbf{L}^{abs}(\mathbf{U}_e, \dot{\mathbf{U}}_e, \dot{\mathbf{U}})) - {}^t \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}_L \cdot \lambda_L - {}^t \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} \cdot \mu \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{V} \\ {}^t \Psi_k \cdot \mathbf{M} (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e, \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e, \ddot{\mathbf{U}} + \ddot{\mathbf{U}}_e) + {}^t \Psi_k \cdot \mathbf{C} (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e) + {}^t \Psi_k \cdot \mathbf{R} (\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e, t) = \\ \quad {}^t \Psi_k \cdot (\mathbf{L}(t) + \mathbf{L}^{abs}(\mathbf{U}_e, \dot{\mathbf{U}}_e, \dot{\mathbf{U}})) - {}^t \mathbf{X}_{ks} \cdot \lambda_s - {}^t \Psi_k \cdot \mathbf{A} \cdot \mu \quad \forall k \\ \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e) \leq \mathbf{d}_0(t) \\ \mu \geq 0 \\ \forall j, (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e) - \mathbf{d}_0)_j \cdot \mu_j = 0 \\ (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e)(t_0) = \mathbf{U}_0 \\ (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e)(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \end{array} \right.$$

éq 2.6-6

On constate que cela est assez compliqué.

Restreignons-nous d'abord au problème dynamique où les opérateurs d'inertie \mathbf{M} et de forces intérieures \mathbf{R} sont linéaires, et en absence de frontières absorbantes : $\mathbf{L}^{abs}(\mathbf{U}_e, \dot{\mathbf{U}}_e, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}$.

On fait l'hypothèse dans *Code_Aster* que : $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_e = \mathbf{0}$, y compris en multi-appui (alors que cela n'est exact qu'en mono-appui, où les modes statiques sont les modes rigides $\mathbf{K} \cdot \Psi_k = \mathbf{0}$ sans déformation). Cela revient à négliger la contribution des déplacements d'entraînement de la structure à l'amortissement visqueux.

Les modes statiques Ψ_k vérifiant [éq 2.6-3], le système [éq 2.6-6] se restreint à :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{W}.\mathbf{C}.\dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{W}.\mathbf{K}.\mathbf{U} = {}^t\mathbf{W}.\mathbf{L}(t) - {}^t\mathbf{W}.\mathbf{B}_L.\boldsymbol{\lambda}_L - {}^t\mathbf{W}.\mathbf{A}.\boldsymbol{\mu} - {}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}}_e \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{V} \\ {}^t\Psi_k.\mathbf{M}.\left(\ddot{\mathbf{U}} + \ddot{\mathbf{U}}_d^\ell(t)\Psi_\ell\right) + {}^t\Psi_k.\mathbf{C}.\dot{\mathbf{U}} + U_d^\ell(t){}^t\Psi_k.\mathbf{K}.\Psi_\ell = {}^t\Psi_k.\mathbf{L}(t) - \mathbf{X}_{ks}.\boldsymbol{\lambda}_s - {}^t\Psi_k.\mathbf{A}.\boldsymbol{\mu} \quad \forall k \\ \mathbf{U}_e = U_d^k(t)\Psi_k \\ \mathbf{B}_s.\mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_L.\mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}.\left(\mathbf{U} + U_d^k(t)\Psi_k\right) \leq \mathbf{d}_0(t) \\ \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \\ \forall j, \left(\mathbf{A}.\left(\mathbf{U} + U_d^k(t)\Psi_k\right) - \mathbf{d}_0\right)_j.\boldsymbol{\mu}_j = 0 \\ (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e)(t_0) = \mathbf{U}_0 \\ (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e)(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \end{array} \right.$$

éq 2.6-7

On constate sur la première de ces équations [éq 2.6-7], que grâce aux hypothèses faites, on peut se restreindre à résoudre un problème dynamique sur le champ de déplacement « relatif » \mathbf{U} , ayant bloqué les degrés de liberté sur les supports ($\mathbf{B}_s.\mathbf{U} = \mathbf{0}$), à condition de fournir au préalable le terme ${}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}}_e$, ainsi que les modes statiques (Ψ_k).

L'objet de l'opérateur CALC_CHAR_SEISME [U4.63.01] est justement de calculer le terme $-{}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}}_e$, transformé en un concept de type « charge », à l'aide de l'opérateur AFFE_CHAR_MECA [U4.25.01]. On peut aussi simplement introduire une charge de « pesanteur » unitaire dans la direction voulue, et amplifiée par le signal temporel d'accélération. L'avantage est d'exploiter directement la donnée en accélérogramme (par exemple produit à partir d'un spectre), sans avoir à l'intégrer deux fois en temps avec les incertitudes que cette opération engendre. On peut produire directement les contraintes dites « primaires » induites par la dynamique en « mouvement relatif ».

Cet avantage est perdu si des liaisons unilatérales sont présentes, puisque la condition $\mathbf{A}.\left(\mathbf{U} + U_d^k(t)\Psi_k\right) \leq \mathbf{d}_0(t)$ demande la valeur de $U_d^k(t)$ pour être exprimée correctement, excepté si on a la chance que le mouvement d'entraînement n'ait pas de composante sur l'interface où le jeu de la liaison unilatérale est calculé !

La seconde équation de [éq 2.6-7] fournit les réactions sur les supports $\boldsymbol{\lambda}_s$ (le reste étant déterminé par la résolution du problème en déplacement « relatif » \mathbf{U}) ; mais on constate là aussi qu'il est nécessaire de connaître $U_d^k(t)$.

C'est la même chose si l'on veut reconstituer la solution complète pour le post-traitement en contraintes avec leur contribution dite « secondaire », liée à $\mathbf{U}_e = U_d^k(t)\Psi_k$.

Maintenant on considère le problème dynamique d'une structure interagissant avec un sol (milieu « infini »), source d'une onde sismique incidente, cf. [R4.05.01] et [R4.02.05]. On est nécessairement dans un cadre « MONO_APPUI », où les modes statiques sont les modes rigides de la structure, d'où :

$\mathbf{K}.\Psi_k = \mathbf{0}$ et ${}^t\Psi_k.\mathbf{C}.\dot{\mathbf{U}} = 0$. On utilise donc des éléments de frontière absorbante, et le terme $\mathbf{L}_{abso}(\mathbf{U}_e, \dot{\mathbf{U}}_e, \ddot{\mathbf{U}})$ est présent dans [éq 2.6-7]. L'onde incidente est fournie directement par le signal

$\mathbf{U}_d(\bar{x}, t)$. On construit donc les termes de [éq 2.6-2], ainsi que le terme ${}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}}_e$. Le système [éq 2.6-7] devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{W}.\mathbf{C}.\dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{W}.\mathbf{K}.\mathbf{U} = \\ \quad {}^t\mathbf{W}.\mathbf{L}(t) + {}^t\mathbf{W}.\mathbf{A}_0^{abso} . (\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}_e) + {}^t\mathbf{W}.\Sigma(\dot{\mathbf{U}}_e) - {}^t\mathbf{W}.\mathbf{B}_L.\boldsymbol{\lambda}_L - {}^t\mathbf{W}.\mathbf{A}.\boldsymbol{\mu} - {}^t\mathbf{W}.\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{U}}_e \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{V} \\ {}^t\Psi_k.\mathbf{M} . (\ddot{\mathbf{U}} + \ddot{\mathbf{U}}_d^\ell(t)\Psi_\ell) = {}^t\Psi_k.\mathbf{L}(t) + {}^t\Psi_k.\mathbf{A}_0^{abso} . (\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}_e) + {}^t\Psi_k.\Sigma(\dot{\mathbf{U}}_e) - {}^t\mathbf{X}_{ks}.\boldsymbol{\lambda}_s - {}^t\Psi_k.\mathbf{A}.\boldsymbol{\mu} \quad \forall k \\ \mathbf{U}_e = \mathbf{U}_d^k(t)\Psi_k \\ \mathbf{B}_s.\mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_L.\mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} . (\mathbf{U} + \mathbf{U}_d^k(t)\Psi_k) \leq \mathbf{d}_0(t) \\ \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \\ \forall j, \left(\mathbf{A} . (\mathbf{U} + \mathbf{U}_d^k(t)\Psi_k) - \mathbf{d}_0 \right)_j . \boldsymbol{\mu}_j = 0 \\ (\mathbf{U} + \mathbf{U}_e)(t_0) = \mathbf{U}_0 \\ (\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_e)(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \end{array} \right.$$

éq 2.6-8

Revenons maintenant au problème général non-linéaire [éq 2.6-6]. On constate que la première équation sur les degrés de liberté « actifs » comporte nécessairement un couplage avec le champ $\mathbf{U}_e = \mathbf{U}_d^k(t)\Psi_k$ dans l'opérateur d'inertie comme dans celui de forces internes. On doit donc, conformément au schéma d'intégration temporelle et de résolution non-linéaire, développé au [§ 3], reconstituer à chaque instant de calcul la valeur de déplacement absolu $\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_e + \mathbf{U}$, les contraintes...

En conclusion, on peut traiter le problème dynamique en mouvement relatif (en admettant que les forces d'amortissement ne dépendent que de lui) :

- si on est en MONO_APPUI ou MULTI_APPUI, à condition que le comportement soit linéaire en petites transformations, sans frontière absorbante, avec des conditions unilatérales telles que les jeux ne soient pas modifiés par le mouvement d'entraînement, que le domaine fluide ne soit pas directement chargé, et avec un chargement d'accélération imposée, cf. [éq 2.6-7] ;
- si on est en MONO_APPUI, avec un comportement quelconque et avec frontière absorbante, avec des conditions unilatérales telles que les jeux ne soient pas modifiés par le mouvement d'entraînement, et avec un chargement d'accélération imposée.

Sinon, on ne peut que traiter le problème dynamique en mouvement absolu.

3 Schéma d'intégration temporelle : schéma de NEWMARK et méthode de NEWTON

Le problème mécanique à analyser étant modélisé en éléments finis, selon la démarche décrite au [§ 2], on calcule les champs de déplacements, vitesses et accélérations aux nœuds en une suite discrète d'instants de calcul $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_N : \{t_i\}_{1 \leq i \leq N}$.

L'utilisateur de DYNA_NON_LINE peut actuellement choisir entre deux schémas temporels implicites à deux pas : celui de NEWMARK (1959) ou sa variante dite « accélération moyenne modifiée », de HILBER-HUGUES-TAYLOR (HHT, 1977) : voir le paragraphe [§5]. L'état de la structure étant connu à l'instant t_{i-1} , on en déduit son état à l'instant t_i par une méthode de prédiction-correction.

Remarque :

On doit noter que Code_Aster ne propose pas de méthode multi-domaine en temps et espace, qui permettrait de définir un schéma par zone dans le solide étudié.

3.1 Schéma de NEWMARK

On présente ici ce schéma sous sa forme classique ([bib1] et [bib2]) relative à un mouvement de translation ou de petite rotation. Pour les grandes rotations d'éléments de structure [bib3], les formules sont plus compliquées, mais elles permettent de la même façon d'actualiser la vitesse et l'accélération angulaires en fonction de l'accroissement de déplacement, qui est dans ce cas le vecteur-rotation.

On note ci-après par Φ la configuration, c'est-à-dire le paramétrage du système par les ddl des éléments finis : déplacements et rotations \mathbf{U} , pression \mathbf{P} , potentiel ϕ ...

Le schéma de NEWMARK repose sur les développements suivants du vecteur configuration fonction du temps, où β et γ sont deux paramètres :

$$\Phi(t+\Delta t) \approx \Phi(t) + \Delta t \dot{\Phi}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} ((1-2\beta)\ddot{\Phi}(t) + 2\beta\ddot{\Phi}(t+\Delta t)) \quad \text{éq 3.1-1}$$

$$\dot{\Phi}(t+\Delta t) \approx \dot{\Phi}(t) + \Delta t ((1-\gamma)\ddot{\Phi}(t) + \gamma\ddot{\Phi}(t+\Delta t)) \quad \text{éq 3.1-2}$$

L'équation [éq 3.1-1] s'écrit aussi avec [éq 3.1-2] :

$$\Phi(t+\Delta t) \approx \Phi(t) + \frac{\Delta t}{\gamma} ((\gamma-\beta)\dot{\Phi}(t) + \beta\dot{\Phi}(t+\Delta t)) + \frac{\Delta t^2}{2\gamma} (\gamma-2\beta)\ddot{\Phi}(t)$$

Ces paramètres β et γ sont fournis respectivement via les opérandes ALPHA et DELTA du mot-clé NEWMARK de DYNA_NON_LINE.

Voir le [§ 4] pour les caractéristiques du schéma en fonction des valeurs de ces paramètres.

Les crochets aux seconds membres des équations [éq 3.1-1] et [éq 3.1-2] sont des moyennes pondérées de $\ddot{\Phi}(t)$ et de $\ddot{\Phi}(t+\Delta t)$.

En pratique ces expressions ne sont pas utilisables car on va devoir exprimer les valeurs à l'instant $t + \Delta t$ à partir de celles à l'instant t .

L'équation [éq 3.1-1] donne :

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}(t + \Delta t) &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)] - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\Phi}(t) + \frac{2\beta - 1}{2\beta} \ddot{\Phi}(t) \\ \Leftrightarrow \Delta \ddot{\Phi} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \Phi - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\Phi}(t) - \frac{1}{2\beta} \ddot{\Phi}(t)\end{aligned}\quad \text{éq 3.1-3}$$

Et, d'après [éq 3.1-2] :

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t + \Delta t) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)] + \frac{\beta - \gamma}{\beta} \dot{\Phi}(t) + \frac{(2\beta - \gamma)\Delta t}{2\beta} \ddot{\Phi}(t) \\ \Leftrightarrow \Delta \dot{\Phi} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \Phi - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\Phi}(t) + \frac{(2\beta - \gamma)\Delta t}{2\beta} \ddot{\Phi}(t)\end{aligned}\quad \text{éq 3.1-4}$$

On remarque qu'on ne peut avoir $\beta = 0$, ni $\gamma = 0$. Au premier pas de calcul on exploite directement les conditions initiales : $\Phi(0)$ et $\dot{\Phi}(0)$. Il faut aussi $\ddot{\Phi}(0)$, sauf si $\gamma = 1$: voir la remarque faite au [§ 3.2].

Dans le cas des grandes rotations d'éléments de structure les expressions homologues à [éq 3.1-3] et [éq 3.1-4] sont plus complexes [bib5], mais les relations qui suivent sont assez aisément transposables.

Au cours d'un pas de temps (de t à $t + \Delta t$), où les valeurs à l'instant t sont figées, les équations [éq 3.1-4] et [éq 3.1-3] définissent les accroissements de vitesse $\delta \dot{\Phi}$ et d'accélération $\delta \ddot{\Phi}$ correspondant à un accroissement de déplacement arbitraire $\delta \Phi$ à partir de la position à l'instant t , dont on aura besoin lors des itérations de correction de NEWTON (au sein du pas de temps, voir le [§ 3.3]) :

$$\delta \dot{\Phi} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta \Phi \quad \text{éq 3.1-5}$$

$$\delta \ddot{\Phi} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \Phi \quad \text{éq 3.1-6}$$

Plaçons-nous à l'instant $t = t_{i-1}$, et on écrit l'équilibre [éq 2.2.4-1] après discrétisation spatiale à l'instant $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, éventuellement avec les éléments complémentaires apportés en [éq 2.2-6]. On note $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}(t_i)$ les degrés de liberté au nouvel instant t_i et en exploitant les termes du schéma temporel [éq 3.1-4] et [éq 3.1-3], on aboutit au système non-linéaire d'équilibre dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U}_i + \mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, t) + {}^t \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_i + {}^t \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}_i = \hat{\mathbf{L}}(t_i) - \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, \ddot{\mathbf{U}}_i) \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_i = \mathbf{U}^d(t_i) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i \leq \mathbf{d}_0(t_i) \\ \forall j, \quad \boldsymbol{\mu}_j \geq 0 \\ \forall j, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i - \mathbf{d}_0)_j \cdot \boldsymbol{\mu}_j = 0 \end{array} \right. \quad \text{éq 3.1-7}$$

avec :

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^{fs} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^{fs}) + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad \text{éq 3.1-8}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}(t_i) = & \mathbf{L}(t_i) + \mathbf{L}^{abso}(t_{i-1}) + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^{fs}) \left(\mathbf{U}_{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \Delta t^2 \left(\frac{1-2\beta}{2} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{i-1} \right) \\ & + \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \left(\gamma \mathbf{U}_{i-1} + \Delta t (\gamma - \beta) \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \Delta t^2 \left(\frac{\gamma - 2\beta}{2} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{i-1} \right) \end{aligned} \quad \text{éq 3.1-9}$$

Remarque :

On constate que la matrice $\hat{\mathbf{K}}$ contribuant à la raideur généralisée du système à résoudre est enrichie de termes provenant de la matrice de masse \mathbf{M} du système (à condition que l'on ait affecté une masse volumique sur tous les éléments finis du modèle) et de la matrice d'amortissement \mathbf{C} . On verra plus loin que la linéarisation des forces internes $\mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, t)$ contribue aussi à $\hat{\mathbf{K}}$. Ainsi, même si le système mécanique considéré comporte des modes rigides, par exemple dans une étude où un solide est en chute libre, la matrice de masse vient « éviter » que la matrice de « raideur » $\hat{\mathbf{K}}$ ne soit pas factorisable. En quelque sorte, ce sont les forces d'inertie du corps solide (dans ses modes rigides) qui assurent l'équilibre avec les forces extérieures, ce qui ne pourrait se faire en quasi-statique. Cependant, on observe que le pas de temps Δt apparaît aussi. S'il est trop grand, les termes de masse ne seront pas assez importants face à ceux de raideur, et la matrice risque d'être quasi non-factorisable (« pivots quasi-nuls »).

Remarque :

Les termes avec l'exposant fs apparaissent si le système contient des domaines fluides (voir [§ 2.4] et les termes venant du domaine fluide dans [éq 2.4-1]) ; on rappelle qu'il n'est pas prévu de chargement fluide \mathbf{L}^{fl} .

Remarque :

Contrairement au cas d'amortissement de Rayleigh (voir [§ 2.2.1]), la matrice d'amortissement \mathbf{C} n'apparaît pas dans la matrice $\hat{\mathbf{K}}$ en présence d'amortissement modal (mot-clé `AMOR_MODAL`), car dans ce cas, la force $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{i-1}$ est construite directement sans stockage de la matrice \mathbf{C} , et est reportée au second membre $\hat{\mathbf{L}}(t_i)$.

Le terme \mathbf{L}^{abso} dans le second membre apparaît en présence de frontières absorbantes, voir le [§ 2.6]. Il est traité selon un schéma explicite en fonction des champs solutions à t_{i-1} .

Remarque :

Contrairement au θ -schéma utilisé en thermique, cf. [R5.02.01], où les dérivées sont écrites de manière explicite, tandis que l'équation de conservation est écrite à un instant fictif résultant d'une combinaison avec le paramètre θ des valeurs aux instants t_{i-1} et t_i , les équilibres dynamiques sont vérifiés sur les instants t_{i-1} et t_i , tandis que les dérivées sont des combinaisons déterminées par le schéma [éq 3.1-1] et [éq 3.1-2].

Il reste encore à traiter les termes non-linéaires : les forces internes $\mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, t)$ et la contribution non-linéaire des forces d'inertie en grandes rotations de structures $\mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, \ddot{\mathbf{U}}_i)$ (cf. [§ 2.2.2]).

Au premier instant t_1 , on voit dans [éq 3.1-9] que l'on a besoin de $\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0$, fournis par les conditions initiales, mais aussi, à cause du schéma de NEWMARK, de $\ddot{\mathbf{U}}_0$: voir la remarque faite au [§ 3.2].

3.2 Phase de prédiction

Le système [éq 3.1-7] est non-linéaire et est intégré, après une prédiction d'EULER par linéarisation, à l'aide d'une méthode itérative de NEWTON, comme en statique non-linéaire [R5.03.01]. Le calcul de cette prédiction peut être légèrement erroné, tant que la phase de correction par itérations de NEWTON [§ 3.3] est capable de corriger à convergence...

3.2.1 Pas de temps général

À la phase de prédiction, on exploite la solution au pas précédent ou les valeurs de l'état initial, et on note la matrice de raideur tangente initiale du pas :

$$\mathbf{K}_{i-1} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \bigg|_{(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1})} = \frac{d^t \mathbf{Q}}{d\mathbf{U}} \bigg|_{(\mathbf{U}_{i-1})} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1}) + {}^t \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i-1}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{U}} \bigg|_{(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1})} \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

Ces termes (cf. [§ 2.2]) sont évalués sur le pas précédent, le premier terme du second membre de [éq 3.2.1-1] n'apparaissant qu'en grands déplacements (\mathbf{Q} n'étant alors pas constant).

Si le comportement est linéaire, la matrice \mathbf{K}_{i-1} est simplement la matrice de rigidité élastique \mathbf{K} de la structure.

On peut aussi décider pour économiser du temps calcul de ne pas réactualiser cette matrice, et de prendre la matrice de rigidité élastique, voir [U4.51.03], mot-clé NEWTON, opérande PREDICTION, valeur 'ELASTIQUE', plutôt que 'TANGENTE'. Si on ne spécifie rien, le choix par défaut fait par Code_Aster est cohérent avec celui fait sur les itérations de correction de NEWTON décrites ci-après au [§3.3].

Par ailleurs, en présence de grandes rotations (éléments de structure : poutres...), on doit aussi dériver le terme non-linéaire d'inertie $\mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, \ddot{\mathbf{U}}_i)$:

$$\mathbf{K}_{i-1}^{\mathbf{M1}} = \frac{\partial \mathbf{L}_{GR}^{iner}}{\partial \mathbf{U}} \bigg|_{(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, \ddot{\mathbf{U}}_{i-1})} \quad \text{éq 3.2.1-2}$$

La matrice $\hat{\mathbf{K}}$ ayant été établie par [éq 3.1-8], cette nouvelle matrice $\mathbf{K}_{i-1}^{\mathbf{M1}}$ est combinée à la matrice $\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{i-1}$, voir ci-dessous [éq 3.2.1-4].

On définit aussi les accroissements de chargement $\Delta\hat{\mathbf{L}}(t_i)$ à partir de [éq 3.1-9], de conditions imposées $\Delta\mathbf{U}^d(t_i)$, et on regroupe dans $\Delta\mathbf{L}^{anel}(t_i)$ les dépendances des contraintes en fonction des divers paramètres ou « variables de commande » \mathbf{Z} de la loi de comportement du matériau constitutif : tels que la température... :

$$\Delta\mathbf{L}^{anel}(t_i) = -{}^t\mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i-1}) \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\mathbf{Z}} \bigg|_{(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, \ddot{\mathbf{U}}_{i-1}, \mathbf{Z})} \cdot \Delta\mathbf{Z}$$

En présence d'amortissement modal les forces d'amortissement sont reportées au second membre. On ajoute alors à $\Delta\hat{\mathbf{L}}(t_i)$ le terme correspondant : $-\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{i-1}$.

Le terme $\Delta\mathbf{L}^{abso}(t_i) = -\mathbf{A}_{fa} \Delta\dot{\mathbf{P}}(t_{i-1}) + \Delta\mathbf{L}^{abso}(\mathbf{U}_{ent i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{ent i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1})$ désigne la contribution intégrée en explicite (pour simplifier) d'une frontière fluide absorbante et d'une frontière élastique absorbante, cf. [éq 2.4-1] et [éq 2.6-2].

On note l'accroissement $\Delta\hat{\mathbf{L}}(t_i)$, $\hat{\mathbf{L}}$ étant défini avec [éq 3.1-9] :

$$\Delta\hat{\mathbf{L}}(t_i) = \hat{\mathbf{L}}(t_i) - \hat{\mathbf{L}}(t_{i-1}) \quad \text{éq 3.2.1-3}$$

On calcule alors des valeurs prédictives pour le pas de temps en cours $(\Delta\mathbf{U}_i^0, \Delta\boldsymbol{\lambda}_i^0, \Delta\boldsymbol{\mu}_i^0)$:

Prédiction

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{i-1} + \mathbf{K}_{i-1}^{\mathbf{M1}}) \Delta\mathbf{U}_i^0 + {}^t\mathbf{B} \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda}_i^0 + {}^t\mathbf{A} \cdot \Delta\boldsymbol{\mu}_i^0 = \Delta\hat{\mathbf{L}}(t_i) + \Delta\mathbf{L}^{anel}(t_i) \\ \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{U}_i^0 = \Delta\mathbf{U}^d(t_i) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{U}_i^0) \leq \mathbf{d}_0(t_i) \\ \forall j, \quad \boldsymbol{\mu}_{i,j}^0 \geq 0 \\ \forall j, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i^0 - \mathbf{d}_{0i})_j \cdot \boldsymbol{\mu}_{i,j}^0 = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.2.1-4}$$

où on définit la prédiction $\mathbf{U}_i^0 = \mathbf{U}_{i-1} + \Delta\mathbf{U}_i^0$ pour le nouvel instant $t_i = t_{i-1} + \Delta t$.

Si on a choisi MATRICE = 'ELASTIQUE' dans le mot-clé NEWTON, on ne réévalue pas à chaque pas de temps $\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{i-1} + \mathbf{K}_{i-1}^{\mathbf{M1}} = \hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0^{\mathbf{M1}}$, ce qui évite le coût de ré-assemblage et d'inversion, mais augmente le nombre d'itérations de correction.

Après l'établissement d'un candidat solution de [éq 3.2.1-4] sans vérifier le critère de contact, on lance l'algorithme de contraintes actives pour satisfaire les conditions de contact : on corrige ainsi $\mathbf{U}_i^0, \boldsymbol{\lambda}_i^0, \boldsymbol{\mu}_i^0$.

Remarque : matrice tangente singulière :

On vérifie sur [éq 3.2.1-4] que si la matrice tangente \mathbf{K}_{i-1} est singulière (cas d'un mode rigide, d'un matériau endommagé, ou plateau ductile...), la dynamique est pilotée par les forces d'inertie, et que, la matrice $\hat{\mathbf{K}}$ étant en général régulière (cf. remarque faite au [§ 3.1]), l'on trouve malgré tout bien un prédictor \mathbf{U}_i^0 , à condition que la précision dans la matrice $\hat{\mathbf{K}}$ ne soit pas perdue (pivot quasi-nul) à cause d'un choix de pas de temps trop grand qui joue en $1/\beta\Delta t^2$ dans [éq 3.1-8]. C'est par exemple le cas en dynamique de chute libre.

3.2.2 Premier pas de temps

Si l'on se trouve au premier pas de temps, d'une étude ou d'une reprise (poursuite), le prédictor est calculé différemment pour tenir compte de l'état initial ($\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0, \boldsymbol{\sigma}_0$) :

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0^{\text{M1}}) \Delta \mathbf{U}_1^0 + {}^t\mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\lambda}_1^0 + {}^t\mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\mu}_1^0 = \hat{\mathbf{L}}(t_1) + \Delta \mathbf{L}^{\text{anél}}(t_1) - {}^t\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}_1^0 = \mathbf{X}^d(t_1) - \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{U}_1^0) \leq \mathbf{d}_0(t_1) \\ \forall j, \quad \boldsymbol{\mu}_{1j}^0 \geq 0 \\ \forall j, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_1^0 - \mathbf{d}_{01})_j \cdot \boldsymbol{\mu}_{1j}^0 = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}(t_1) = & \mathbf{L}(t_1) + \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^{\text{fs}}) \left(\mathbf{U}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_0 + \Delta t^2 \left(\frac{1-2\beta}{2} \right) \ddot{\mathbf{U}}_0^0 \right) \\ & + \frac{1}{\beta\Delta t} \mathbf{C} \left(\gamma \mathbf{U}_0 + \Delta t (\gamma - \beta) \dot{\mathbf{U}}_0 + \Delta t^2 \left(\frac{\gamma - 2\beta}{2} \right) \ddot{\mathbf{U}}_0^0 \right) \end{aligned} \quad \text{éq 3.2.2-2}$$

et l'accélération $\ddot{\mathbf{U}}_0^0$ évaluée par la résolution préalable du système (on simplifie en supposant les liaisons de contact bloquées, les itérations de NEWTON se chargeront de corriger) :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_0^0 + {}^t\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_0 + {}^t\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{L}(t_0) + \mathbf{L}^{\text{anél}}(t_0) - {}^t\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_0^0 = 0 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_0^0 = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.2.2-3}$$

Remarque :

Il serait plus exact de calculer : $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_0^0 + {}^t\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_0 + {}^t\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{L}(t_0) + \mathbf{L}^{\text{anél}}(t_0) - {}^t\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_0$, mais pour simplifier sachant que cela n'aura que peu d'influence sur la suite des solutions, on néglige $\mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_0$ dans le second membre de [éq 3.2.2-3].

On doit noter que :

- la matrice \mathbf{M} doit être inversible : on devra affecter une masse volumique sur tous les éléments finis du modèle,
- il peut être nécessaire d'établir par un calcul statique (éventuellement non-linéaire) l'état d'équilibre sous le chargement initial, donc les contraintes σ_0 , avant l'imposition des conditions dynamiques initiales $\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0$. En effet, sinon, l'accélération $\ddot{\mathbf{U}}_0^0$ pourrait être « excessive » et conduire sur une branche non désirée d'équilibre,
- en présence de « charges cinématiques », cf. [U4.44.03], ces dernières sont mises à zéro à cette étape de calcul de $\ddot{\mathbf{U}}_0^0$.

Cependant, certains éléments finis ne possèdent pas de masse sur tous les degrés de liberté, par exemple les poutres avec gauchissement `POU_D_TG` justement sur les ddl de gauchissement, ou en couplage fluide/structure. Pour les éléments de couplage vibro-acoustiques [§ 2.4] en effet, la matrice de masse du problème [eq 2.4-1] n'est pas inversible. Dans ces cas-là, la matrice \mathbf{M} n'est pas inversible, et on se contente de prendre une accélération initiale nulle sur l'ensemble du modèle et la suite des itérations devra se charger de corriger cette prédiction moins « bonne ». On choisira alors un petit pas de temps pour assurer la convergence au moins au début du transitoire.

Le terme $\mathbf{L}^{abso}(t_0)$ est évalué à partir de la vitesse initiale $\dot{\mathbf{U}}_0$ (cf. [R4.02.05]).

3.3 Phase de correction par la méthode de NEWTON

On cherche les valeurs $(\Delta \mathbf{U}_i, \Delta \lambda_i, \Delta \mu_i)$ des incréments de déplacements et paramètres de LAGRANGE depuis les valeurs $(\mathbf{U}_{i-1}, \lambda_{i-1}, \mu_{i-1})$ obtenues à l'équilibre précédent (instant t_{i-1}). On prend comme valeurs initiales $(\Delta \mathbf{U}_i^0, \Delta \lambda_i^0, \mu_i^0)$ obtenues à l'issue de la phase de prédiction, avant de commencer les itérations de la méthode de NEWTON.

À chaque itération n de NEWTON, on note par des δ les évolutions conduisant à l'estimation des incréments à convergence des itérations : $\Delta \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_{i-1}$ et $\Delta \lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n + \delta \lambda_i^{n+1} - \lambda_{i-1}$ (de même pour les μ). On doit résoudre alors un système permettant de déterminer $(\delta \mathbf{U}_i^{n+1}, \delta \lambda_i^{n+1}, \mu_i^{n+1})$, incréments des déplacements et des paramètres de LAGRANGE depuis le résultat $(\mathbf{X}_i^n, \lambda_i^n, \mu_i^n)$ de l'itération précédente :

Correction (itération n° n)

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_i^n + \mathbf{K}_i^{\text{Mn}}) \delta \mathbf{U}_i^{n+1} + {}^t \mathbf{B} \cdot \delta \lambda_i^{n+1} + {}^t \mathbf{A} \cdot \delta \mu_i^{n+1} = \hat{\mathbf{L}}(t_i) + \mathbf{L}^{abso}_i^n - \mathbf{F}_i^n \\ \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{U}_i^{n+1} = 0 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i^{n+1} \leq \mathbf{d}_0(t_i) \\ \forall j, \quad \mu_j \geq 0 \\ \forall j, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{d}_{0i})_j \cdot \mu_j^{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.3-1}$$

avec un second membre appelé « résidu », car il tend vers zéro à la convergence. On note (cf. équilibre [éq 2.2.4-1]) :

$$\mathbf{F}_i^n = {}^t\mathbf{Q}(\mathbf{U}_i^n) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, t_i) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_i^n + \mathbf{M}(\mathbf{U}_i^n) \ddot{\mathbf{U}}_i^n - \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, \ddot{\mathbf{U}}_i^n) + {}^t\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_i^n + {}^t\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}_i^n \quad \text{éq 3.3-2}$$

Le terme $\hat{\mathbf{L}}(t_i)$ est défini par [éq 3.1-9], le terme $\mathbf{L}_i^{abso^n} = -\mathbf{A}_{fa} \dot{\mathbf{P}}_{i-1}^n + \mathbf{L}^{abso}(\mathbf{U}_{ent_{i-1}}, \dot{\mathbf{U}}_{ent_{i-1}}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}^n)$ correspond aux frontières fluides et élastiques absorbantes, qui est traité en explicite [éq 2.4-1], [éq 2.6-2] ; la matrice $\hat{\mathbf{K}}$ est donnée par [éq 3.1-8].

En présence d'amortissement modal les forces d'amortissement sont reportées au second membre. Selon la valeur donnée au mot clé AMOR_MODAL, REAC_VITE, on ajoute à $\hat{\mathbf{L}}(t_i)$ le terme réactualisé : $-\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_i^n$, ou non réactualisé $-\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{i-1}$.

La matrice \mathbf{K}_i^n est la matrice de l'application linéaire tangente de la partie « forces internes » du système d'équations non-linéaires [éq 3.1-7] ; elle vaut donc :

$$\mathbf{K}_i^n = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, t_i)} = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, t_i)} - \left. \frac{\partial \mathbf{L}_i^{méca}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, t_i)} \quad \text{éq 3.3-3}$$

En l'absence de forces suiveuses, le dernier terme est nul. Les forces suiveuses peuvent être : la pression exercée sur les bords d'éléments massifs, le chargement de pesanteur pour les éléments de câble, la force centrifuge en grands déplacements, le chargement de pesanteur pour toutes les modélisations THM des milieux poreux non-saturés [R7.01.10].

Si on envisage la réactualisation de la géométrie (en grands déplacements), on a plus précisément :

$$\mathbf{K}_i^n = {}^t\mathbf{Q}(\mathbf{U}) \cdot \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, t_i)} + \left. \frac{\partial {}^t\mathbf{Q}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, t_i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \left. \frac{\partial \mathbf{L}_i^{méca}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, t_i)} \quad \text{éq 3.3-4}$$

Le premier terme est la contribution du comportement comme en petites transformations, à la différence que cette contribution est ici évaluée en configuration actuelle. Le second terme est la contribution de la géométrie qui n'est pas présente en petites transformations. Dans le cadre de la réactualisation PETIT_REAC, ce terme n'est pas présent dans le calcul de la matrice tangente.

La matrice \mathbf{K}_i^{Mn} est la matrice de l'application linéaire tangente de la partie « forces d'inertie » du système d'équations non-linéaires [éq 3.1-7] qui vaut donc :

$$\mathbf{K}_i^{Mn} = \left. \frac{\partial \mathbf{L}_{GR}^{iner}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, \ddot{\mathbf{U}}_i^n)} \quad \text{éq 3.3-5}$$

En pratique on peut utiliser la « vraie » matrice tangente, mais cela présente un coût calcul certain (calcul et factorisation), ou se contenter d'une réactualisation de temps en temps : voir en [U4.51.03] le mot-clé facteur NEWTON, mot-clé MATRICE.

Remarque : matrice tangente singulière :

On vérifie sur [éq 3.3-1] que si la matrice tangente \mathbf{K}_i^n est singulière (cas d'un matériau endommagé, ou plateau ductile...), la dynamique est pilotée par les forces d'inertie, et que, la matrice $\hat{\mathbf{K}}$ étant régulière, l'on trouve malgré tout bien un correcteur $\delta \mathbf{U}_i^{n+1}$ (comme si on était par exemple en situation de chute libre). Cependant, si le pas de temps est « trop élevé », la matrice $(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_i^n + \mathbf{K}_i^{Mn})$ peut être mal conditionnée et le solveur lui trouve un pivot quasi-nul.

Après chaque itération de NEWTON ayant établi un candidat solution de [éq 3.3-1] sans vérifier le critère de contact, on lance l'algorithme de contraintes actives pour satisfaire les conditions de contact : on corrige ainsi $\delta \mathbf{U}_i^{n+1}$.

3.4 Mise à jour

- Dans le cas des petites rotations, pour les modélisations habituelles (éléments massifs, poutres, plaques, coques, éléments discrets...), la mise à jour s'appuie sur les formules [éq 3.1-5] et [éq 3.1-6].

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^{n+1} \\ \Delta \mathbf{U}_i^{n+1} = \Delta \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^{n+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_i^n + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta \mathbf{U}_i^{n+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \ddot{\mathbf{U}}_i^n + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \mathbf{U}_i^{n+1} \end{cases} \quad \text{éq 3.4-1}$$

- Dans le cas des grandes rotations des éléments de structure (poutres...) la mise à jour, nettement plus complexe, est indiquée en [R5.03.40].

3.5 Critère d'arrêt

Le critère de convergence globale de l'algorithme de NEWTON est identique à celui pratiqué dans STAT_NON_LINE. Il traduit la vérification de l'équilibre dynamique.

À l'instant t_i , on arrête les itérations au rang n , dès que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{\left\| {}^t \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i^n) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i^n + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_i^n + \mathbf{M}(\mathbf{U}_i^n) \cdot \ddot{\mathbf{U}}_i^n + {}^t \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_i^n + {}^t \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}_i^n - \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i^n, \dot{\mathbf{U}}_i^n, \ddot{\mathbf{U}}_i^n) - \hat{\mathbf{L}}(t_i) \right\|_{\infty}}{\left\| \hat{\mathbf{L}}(t_i) + \mathbf{L}^{anél}(t_i) - {}^t \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_i^n - {}^t \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu}_i^n \right\|_{\infty}} \leq \eta \quad \text{éq 3.5-1}$$

η est une tolérance, introduite en donnée par l'utilisateur (mot-clé CONVERGENCE, opérande RESI_GLOB_REL), de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-6} , et $\left\| \cdot \right\|_{\infty}$ est la norme du maximum sur les ddl.

Le dénominateur de [éq 3.5-1] est une norme du chargement à l'instant t_i , à laquelle on rapporte le numérateur, qui est une norme des forces non (encore) équilibrées.

Tout comme en statique, on doit accorder de l'importance à une correcte convergence car sinon, les estimations de forces intérieures et de réactions de contact, vérifiant les relations de comportement et de liaison de contact-frottement s'éloignent de l'équilibre, et ce n'est pas une force d'inertie $\mathbf{M}(\mathbf{U}_i^n)\ddot{\mathbf{U}}_i^n$ trop éloignée de la valeur « exacte » qui va suffire à produire au pas de temps suivant une bonne réponse dynamique transitoire.

On pourra aussi employer d'autres critères de convergence comme proposé dans STAT_NON_LINE.

4 Qualités et défauts du schéma de NEWMARK

4.1 Propriétés du schéma de NEWMARK

Ce paragraphe et le suivant reprennent partiellement certaines parties de [bib2]. On pourra aussi consulter [bib24] et [bib27].

On définit à l'aide des méthodes d'analyse numérique plusieurs types de propriétés pour un schéma d'intégration temporelle. Voici leur signification :

- Convergence : la solution tend vers une limite quand le pas de temps Δt tend vers 0 ;
- Précision : taux de convergence quand le pas de temps Δt tend vers 0 ;
- Consistance et ordre du schéma : le résidu est borné par $(\Delta t)^{k+1}$ (exemple : $k = 2$ pour la règle du trapèze) : un polynôme d'ordre $k + 1$ est intégré exactement ;
- Stabilité : une perturbation finie de l'état initial n'entraîne pas de perturbation exagérément amplifiée (« explosion numérique ») à l'état ultérieur ; il faut que l'amplification (rayon spectral) soit inférieure à 1 : pour un schéma de forme générale $\mathbf{U}_i = \mathbf{A}\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{L}_i$, on doit avoir $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$. C'est une condition nécessaire pour ne pas diverger ! Si $\rho(\mathbf{A}) < 1$ il y a atténuation numérique.

L'erreur e induite par le schéma de NEWMARK [eq 3.1-1], [eq 3.1-2] est donnée par :

$$e \approx \frac{\Delta t^2}{6} \|\Delta \ddot{\mathbf{U}}_i\| \quad \text{éq 4.1-1}$$

que l'on peut normaliser par le vecteur position $\|\mathbf{X}\|$ ou l'amplitude $\|\mathbf{U}\|$. On peut aussi remplacer dans [eq 4.1-1] la norme L_2 ($\|\Delta \ddot{\mathbf{U}}_i\|$) par la norme L_∞ : $|\Delta \ddot{\mathbf{U}}_i|_\infty = \underset{\text{noeuds } k}{\text{Max}} \left(|\Delta \ddot{\mathbf{U}}_i^k| \right)$. Aujourd'hui Code_Aster ne fournit pas l'information de cet estimateur.

L'analyse numérique du schéma de NEWMARK se fait sur le traitement de l'équation de l'oscillateur linéaire à un d.d.l., sans frottement :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{éq 4.1-2}$$

Les schémas temporels ne donnent **pas la solution exacte** de [éq 4.1-2] :

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, C_1 et C_2 dépendant des conditions initiales, mais une **solution approchée** :

$$x_i = [\exp(-\xi \tilde{\omega} t_i)] (C_1' \cos \tilde{\omega} t_i + C_2' \sin \tilde{\omega} t_i)$$

Deux erreurs sont donc apportées :

- d'une part, il s'introduit un amortissement artificiel défini par le taux d'amortissement réduit ξ , qui est le décrément logarithmique divisé par 2π ;
- d'autre part, la pulsation ω correspondant à la période exacte T est remplacée par la pulsation $\tilde{\omega}$ correspondant à une période \tilde{T} .

Ces erreurs dépendent du rapport $\frac{\Delta t}{T}$ et du schéma lui-même.

En écrivant l'équilibre du système à 1 d.d.l. [éq 4.1-2] et les équations du schéma de NEWMARK [éq 3.1-1], [éq 3.1-2] on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \Delta t \dot{x}_{i+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma \omega^2 \Delta t^2 & 1 + \omega^2 \Delta t^2 (\beta - \gamma) & 1 - \gamma - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 (\gamma - 2\beta) \\ -\omega^2 \Delta t^2 & -\omega^2 \Delta t^2 & -\omega^2 \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \Delta t \dot{x}_i \\ \Delta t^2 \ddot{x}_i \end{pmatrix} \quad \text{éq 4.1-3}$$

d'où en terme d'accroissements :

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta t \Delta \dot{x} \\ \Delta t^2 \Delta \ddot{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2} \begin{pmatrix} -\beta \omega^2 \Delta t^2 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma \omega \Delta t & -\gamma \omega^2 \Delta t^2 & 1 - \gamma - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 (\gamma - 2\beta) \\ -\omega^2 \Delta t^2 & -\omega^2 \Delta t^2 & -\frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \Delta t \dot{x}_i \\ \Delta t^2 \ddot{x}_i \end{pmatrix} \quad \text{éq 4.1-4}$$

Les propriétés de cette matrice servent à caractériser celles du schéma, en régime linéaire.

Les propriétés du schéma de NEWMARK sont résumées ci-après.

À cause de la manière choisie d'exprimer le schéma (cf. [éq 3.1-1] et [éq 3.1-2]), on ne peut pas prendre $\beta = 0$ ni $\gamma = 0$.

Pour les problèmes linéaires, le schéma est **inconditionnellement stable**, même en présence d'amortissement physique — une perturbation n'est pas amplifiée par le schéma — c'est-à-dire stable quelle que soit la taille du pas de temps, si les paramètres satisfont aux inégalités :

$$\begin{cases} 2\gamma & \geq 1 \\ 4\beta & \geq \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \end{cases} \quad \text{éq 4.1-5}$$

Si $2\gamma \geq 1$ et $\beta < \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$ le schéma est **conditionnellement stable** : le pas de temps doit être choisi inférieur à : $\Delta t \leq \frac{T_{\min}}{\pi} \left(\left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - 4\beta \right)^{-1/2}$ — cette relation étant valable en absence d'amortissement physique $\xi = 0$ mais aussi en présence d'amortissement physique — en fonction de la plus petite période T_{\min} de vibration du système étudié, voir [bib24], [bib27].

En présence d'amortissement physique $\xi > 0$, on peut se permettre des Δt légèrement supérieurs.

En présence de contact avec impact, on assure aussi la stabilité du schéma si $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$.

Le tableau suivant montre quelques cas particuliers :

| β | γ | méthode | type | propriétés |
|---------|----------|--|--|---|
| 1/12 | 1/2 | « Fox-Goodwin » | implicite | schéma d'ordre 4 ; pas de dissipation numérique conditionnellement stable : $\Delta t \leq \sqrt{3/2} / (\pi f_{\max})^{-1}$, f_{\max} étant la fréquence vibratoire maximale « visée » dans la simulation, pas de dissipation numérique |
| 1/6 | 1/2 | accélération « linéaire » | implicite identique à la θ -méthode WILSON, avec $\theta = 1$ | schéma d'ordre 2, pas de dissipation numérique conditionnellement stable : $\Delta t \leq \sqrt{3} / (\pi f_{\max})^{-1}$, f_{\max} étant la fréquence vibratoire maximale « visée » dans la simulation, pas de dissipation numérique |
| 1/4 | 1/2 | « règle du trapèze » ou accélération moyenne | implicite | schéma d'ordre 2, pas de dissipation numérique stabilité inconditionnelle en Δt , les fréquences sont décalées vers le bas, mais une matrice de masse consistante limite ce défaut (puisque provoque l'effet inverse), pas de dissipation numérique : pas d'atténuation d'amplitude due au schéma |
| β | γ | α -méthode | implicite | Voir [§ 5]. |

La règle du trapèze ($\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$) est la plus communément adoptée, associée à une masse consistante (option par défaut MASS_MECA). Si l'on souhaite utiliser un schéma où les fréquences sont décalées vers le haut, il convient de choisir l'option MASS_MECA_DIAG.

Le schéma de NEWMARK est du second ordre en déplacement (au pire) si et seulement si $\gamma = 1/2$. Dès que $\gamma > 1/2$, le schéma de NEWMARK est d'ordre 1, et introduit une dissipation numérique proportionnelle à $\left(\beta - \frac{1}{4} \right) \Delta t^2$. Afin d'assurer un amortissement numérique croissant avec la fréquence, il convient de choisir : $\beta \geq \frac{(\gamma + 1/2)^2}{4}$, l'égalité étant le choix optimal, cf. le schéma HHT, voir le [§ 5].

Si on choisissait $\gamma < 1/2$, le schéma de NEWMARK apporterait un amortissement numérique négatif qui amènerait une instabilité.

En utilisant les accroissements [éq 4.1-4], on déduit l'erreur [éq 4.1-1] du schéma, moyennée sur une période $2\pi/\omega$, et normalisée par rapport à l'amplitude, dans le cas de l'oscillateur à 1 d.d.l., cf. [bib28] :

$$e_{moy}^{norm} \approx \frac{\omega^3 \Delta t^3}{2\pi(1 + \beta\omega^2 \Delta t^2)} \sqrt{4 + \omega^2 \Delta t^2} \quad \text{éq 4.1-6}$$

Cette expression peut servir d'erreur de référence au schéma appliqué à la réponse dynamique d'une structure quelconque.

4.2 Point de vue énergétique

Dans le cas élastique linéaire en petites transformations, on peut facilement évaluer les variations des différentes énergies au cours du pas de temps Δt entre t_i et t_{i+1} . Ainsi, respectivement pour l'énergie cinétique, l'énergie de déformation, le travail des efforts extérieurs :

$$\Delta \mathcal{E}_{cin} = \frac{1}{2} \left({}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) - {}^t\dot{\Phi}(t_i) \right) \cdot \mathbf{M} \cdot \left({}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\dot{\Phi}(t_i) \right) ; \Delta \mathcal{E}_{déf} = \frac{1}{2} \left({}^t\Phi(t_{i+1}) - {}^t\Phi(t_i) \right) \cdot \mathbf{K} \cdot \left({}^t\Phi(t_{i+1}) + {}^t\Phi(t_i) \right) \\ \Delta \mathcal{W}_{ext} = {}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) \cdot \mathbf{F}(t_{i+1}) - {}^t\dot{\Phi}(t_i) \cdot \mathbf{F}(t_i)$$

En injectant les expressions du schéma [éq 3.1-1] et [éq 3.1-2], on trouve :

$$\Delta \mathcal{E}_{cin} = \frac{\Delta t}{4} \left({}^t\ddot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\ddot{\Phi}(t_i) + (1 - 2\gamma)\Delta {}^t\ddot{\Phi} \right) \cdot \mathbf{M} \cdot \left({}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\dot{\Phi}(t_i) \right) \\ \Delta \mathcal{E}_{déf} = \frac{\Delta t}{4} \left({}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\dot{\Phi}(t_i) + \frac{2\beta - \gamma}{\gamma} \left(\Delta {}^t\dot{\Phi} - \Delta t {}^t\ddot{\Phi}(t_{i+1}) \right) \right) \cdot \mathbf{K} \cdot \left({}^t\Phi(t_{i+1}) + {}^t\Phi(t_i) \right) \\ \Delta \mathcal{W}_{ext} = \frac{1}{2} \left({}^t\Phi(t_{i+1}) + {}^t\Phi(t_i) \right) \cdot \Delta \mathbf{F} + \frac{\Delta t}{4} \left({}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\dot{\Phi}(t_i) + \frac{2\beta - \gamma}{\gamma} \left(\Delta {}^t\dot{\Phi} - \Delta t {}^t\ddot{\Phi}(t_{i+1}) \right) \right) \cdot \left(\mathbf{F}(t_{i+1}) + \mathbf{F}(t_i) \right)$$

En utilisant l'équilibre aux instants t_i et t_{i+1} sous l'action des efforts extérieurs, on vérifie que la variation d'énergie totale $\Delta \mathcal{E}_{tot} = \Delta \mathcal{E}_{cin} + \Delta \mathcal{E}_{déf} - \Delta \mathcal{W}_{ext}$ du système s'exprime :

$$\Delta \mathcal{E}_{tot} = \frac{\Delta t}{4} (1 - 2\gamma) \Delta {}^t\ddot{\Phi} \cdot \mathbf{M} \cdot \left({}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\dot{\Phi}(t_i) \right) - \frac{1}{2} \left({}^t\Phi(t_{i+1}) + {}^t\Phi(t_i) \right) \cdot \Delta \mathbf{F} \\ + \frac{\Delta t(2\beta - \gamma)}{4\gamma} \left(\Delta {}^t\dot{\Phi}(t_{i+1}) - \Delta {}^t\dot{\Phi} \right) \cdot \left(\mathbf{M} \cdot \left({}^t\ddot{\Phi}(t_{i+1}) + {}^t\ddot{\Phi}(t_i) \right) \right) \quad \text{éq 4.2-1}$$

On vérifie que lorsque $\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/4$ (règle du trapèze), on n'a pas de dissipation numérique d'énergie apportée par le schéma. On remarque aussi qu'un choix différent de γ et/ou $2\beta \neq \gamma$ amène une dissipation proportionnelle au pas de temps.

4.3 Propriétés du schéma de NEWMARK pour les problèmes non-linéaires

Pour les problèmes non-linéaires (grandes déformations, non-linéarités matériau), le schéma est **inconditionnellement stable**, si $\beta \geq \frac{1}{4}$ et avec $\gamma = 1/2$, cf. preuve en [bib25].

En **présence de contact unilatéral**, on trouve dans la littérature, cf. [bib26], le conseil de prendre $\beta = \gamma$ (par exemple avec $\beta = \gamma = 1/2$) ce qui assure la compatibilité des vitesses durant la phase où le contact est maintenu entre deux solides. Cela s'obtient directement à partir des équations [éq 3.1-1] et [éq 3.1-2] ; le saut $[\dot{\Phi}]$ de vitesse entre les deux points restant en contact sur le pas Δt ($[\Phi(t)] = 0$ et $[\Phi(t+\Delta t)] = 0$) à l'instant $t+\Delta t$ est en effet :

$$[\dot{\Phi}(t+\Delta t)] = (1 - \gamma/\beta)[\dot{\Phi}(t)] + (1 - \gamma/(2\beta))\Delta t[\ddot{\Phi}(t)]$$

Cependant ce choix n'est pas compatible avec celui d'un optimum en terme de dissipation numérique, tel que défini par la α -méthode (cf. [§ 5]) : il faudrait prendre $\alpha = -1 - \sqrt{2}$ qui donne un amortissement numérique énorme ! On n'incite donc pas l'utilisateur à suivre cette recommandation.

4.4 Choix des pas de temps

Le pas de temps à choisir doit respecter un certain nombre de conditions.

La première, évidente, est qu'il doit être **adapté à l'échantillonnage temporel des chargements** appliqués au système étudié. Accessoirement, il peut être opportun de reconsidérer une modélisation avec une dépendance temporelle trop « violente » des chargements appliqués, en adoucissant des ruptures de pente par exemple.

On conseille, pour des **raisons de précision** (à la critère de type « Shannon » sur la fréquence de coupure), un pas de temps à choisir tel que :

$$\Delta t \leq 0,10 T_{\min} \quad \text{éq 4.4-1}$$

où T_{\min} désigne la plus petite période de vibration du système que l'on souhaite étudier.

Le pas d'espace des mailles éléments finis choisi intervient aussi : le pas de temps Δt maximal à choisir est de l'ordre de h/c , où c est la célérité des ondes de compression élastiques du matériau et h une taille caractéristique des mailles, si l'on cherche à décrire partiellement des phénomènes en haute fréquence, pour lesquels cependant cette formulation numérique de l'élasto-dynamique n'est pas véritablement adaptée (il existe d'autres méthodes numériques pour ce faire).

Enfin dans le cas de solides présentant des modes rigides (chute libre par exemple), conformément à la remarque faite au [§ 3.1], il convient de choisir un pas de temps Δt suffisamment petit pour que les termes de masse soient du même ordre que ceux de raideur (dans la matrice $\hat{\mathbf{K}}$, cf. [éq 3.1-8]). Ainsi, on pourra choisir :

$$\Delta t \approx \sqrt{\frac{L}{50g}} \quad \text{éq 4.4-2}$$

où L est le diamètre du solide considéré en « chute libre » sous l'accélération de pesanteur g . Ainsi l'incrément de déplacement $g\Delta t^2/2$ lors de ce pas de temps est faible devant les dimensions du solide, ou, d'une autre manière, similaire à un déplacement élastique sous un champ d'action de même ampleur.

Il est possible de faire se succéder plusieurs analyses dynamiques, sur des intervalles de temps successifs, communiquant par des reprises en choisissant comme état initial le résultat du dernier pas étudié auparavant, en utilisant des pas de temps très distincts selon l'idée a priori que l'on a de la réponse du système étudié. On ne possède pas de résultat général avec ce type de choix en terme de convergence...

On sait aussi que le traitement des collisions est sensible au cadencement des pas de temps, par rapport aux instants « réels » de choc : on devra étudier la sensibilité de la réponse obtenue.

Cependant, un pas de temps « trop petit » peut exacerber les oscillations induites par la discontinuité.

Il est cependant conseillé de maintenir constant le pas de temps durant une phase de réponse dynamique linéaire stationnaire, pour garder les propriétés énoncées précédemment.

Remarque :

On doit noter que Code_Aster ne propose pas aujourd'hui de méthode multi-domaine en temps et espace, qui permettrait de définir un pas de temps par zone dans le solide étudié, ni de critère d'erreur en dynamique.

5 Une variante du schéma de NEWMARK : le schéma d'accélération moyenne modifiée

5.1 Motivation

En analyse mécanique, on souhaite que les basses fréquences soient reproduites le plus fidèlement possible.

On souhaite par contre que les hautes fréquences soient atténuées par le calcul parce qu'elles peuvent engendrer des instabilités numériques et que les contraintes mécaniques associées sont en général faibles.

Les courbes donnant le facteur d'amortissement ξ en fonction de $\frac{\Delta t}{T}$ (période $T = 2\pi / \omega$) doivent donc :

- partir de l'origine avec une tangente horizontale pour donner un très faible amortissement aux basses fréquences,
- être des fonctions croissantes pour atténuer les hautes fréquences et ce d'autant plus qu'elles sont plus élevées.

Pour tenter d'atteindre ces objectifs, Hilber, Hughes et Taylor (HHT) ont proposé dans [bib4] de définir les paramètres β et γ de NEWMARK en fonction d'un troisième paramètre α négatif par les relations suivantes, qui sont calquées sur les conditions de stabilité [éq 3.1-2] :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha ; \quad \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \quad \text{éq 5.1-1}$$

Ce choix offre le meilleur compromis sur la précision et l'amortissement en hautes fréquences.

Ce paramètre α , négatif, est fourni via l'opérande ALPHA du mot-clé HHT de DYNA_NON_LINE.

5.2 Schéma HHT et méthode d'accélération moyenne modifiée

On obtient ainsi [bib4] :

$$\ddot{\Phi}(t + \Delta t) = \frac{4}{(1 - \alpha)^2 \Delta t^2} [\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)] - \frac{4}{(1 - \alpha)^2 \Delta t} \dot{\Phi}(t) + \frac{(1 - \alpha)^2 - 2}{(1 - \alpha)^2} \ddot{\Phi}(t) \quad \text{éq 5.2-1}$$

$$\dot{\Phi}(t + \Delta t) = \frac{2 - 4\alpha}{(1 - \alpha)^2 \Delta t} [\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)] + \frac{(\alpha^2 + 2\alpha - 1)}{(1 - \alpha)^2} \dot{\Phi}(t) + \frac{\alpha^2 \Delta t}{2(1 - \alpha)^2} \ddot{\Phi}(t) \quad \text{éq 5.2-2}$$

Par ailleurs, l'équilibre dynamique [éq 2.2.4-1], discrétisé en temps à l'instant $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ est modifié en introduisant un « décalage », contrôlé aussi par le coefficient $\alpha \leq 0$, sur les forces intérieures :

$$\mathbf{M}(\mathbf{U}_i) \ddot{\mathbf{U}}_i + (1 + \alpha) \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_i + (1 + \alpha) \mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, t_i) + {}^t \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}_i + {}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{L}(t_{i-1+\alpha}) + \alpha \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1}) + \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{i-1} - \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, \ddot{\mathbf{U}}_i) \quad \text{éq 5.2-3}$$

où les forces extérieures sont évaluées à $t_{i-1+\alpha} = (1 + \alpha)t_i - \alpha t_{i-1} = t_i + \alpha \Delta t$.

Le système d'équations non-linéaires [éq 3.1-7], se réécrit donc :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U}_i + (1 + \alpha) \mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, t_i) + {}^t \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}_i + {}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_i = \hat{\mathbf{L}}(t_i) - \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{U}_i, \dot{\mathbf{U}}_i, \ddot{\mathbf{U}}_i) \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_i = \mathbf{U}^d(t_i) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i \leq \mathbf{d}_0(t_i) \\ \boldsymbol{\mu} \geq 0 \\ \forall j, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_i - \mathbf{d}_{0i})_j \cdot \boldsymbol{\mu}_j = 0 \end{cases} \quad \text{éq 5.2-4}$$

avec, en suivant [éq 3.1-8] et [éq 3.1-9] et β et γ fonction du paramètre α , cf. [éq 4.1-1] :

$$\hat{\mathbf{K}} = (1 + \alpha) \mathbf{K}^{fs} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^{fs}) + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (1 + \alpha) \mathbf{C} \quad \text{éq 5.2-5}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}(t_i) = & \mathbf{L}(t_i) + \mathbf{L}_{abs0}(t_{i-1}) + \alpha \mathbf{K}^{fs} \cdot \mathbf{U}_{i-1} \\ & + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^{fs}) \left(\mathbf{U}_{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \Delta t^2 \left(\frac{1 - 2\beta}{2} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{i-1} \right) + \alpha \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1}) \\ & + \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \left(\gamma \mathbf{U}_{i-1} + \Delta t (\gamma - \beta) \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \Delta t^2 \left(\frac{\gamma - 2\beta}{2} \right) \ddot{\mathbf{U}}_{i-1} \right) + \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{i-1} \end{aligned} \quad \text{éq 5.2-6}$$

Les modifications que ce schéma apporte aux phases de prédiction et correction de la méthode de NEWTON [§ 3.2] et [§3.3] sont les suivantes :

- phase de prédiction [éq 3.2.1-4] : mettre la nouvelle expression de $\hat{\mathbf{K}}$ [éq 5.2-5], ainsi que $(1 + \alpha)\mathbf{K}_{i-1}$ à la place de \mathbf{K}_{i-1} dans [éq 3.2.1-4] et $(\alpha - 1)\mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1})$ à la place de $-\mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t_{i-1})$ dans l'expression de $\Delta\hat{\mathbf{L}}(t_i)$ dans [éq 3.2.1-3] ;
- phase de correction [éq 3.3-1] : mettre $(1 + \alpha)\mathbf{K}_i^n$ et $\alpha\mathbf{F}_i^n$ à la place de \mathbf{K}_i^n et \mathbf{F}_i^n .

Quand $\alpha = -1$ (d'où $\beta = 1$, $\gamma = 3/2$), le schéma HHT devient alors explicite (cf. [éq 5.2-3]) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_i + {}^t\mathbf{B}\lambda_i + {}^t\mathbf{A}\mu_i = \mathbf{L}(t_{i-1}) - \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1}, \dot{\mathbf{U}}_{i-1}, t) \quad \text{éq 5.2-7}$$

avec :

$$\ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t^2}[\mathbf{U}(t+\Delta t) - \mathbf{U}(t)] - \frac{1}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}(t) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{U}}(t) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) = \frac{3}{2\Delta t}[\mathbf{U}(t+\Delta t) - \mathbf{U}(t)] - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\Delta t}{4}\ddot{\mathbf{U}}(t)$$

assurant en même temps la plus grande dissipation possible en hautes fréquences.

Remarque importante :

Dans cette version de Code_Aster, ni les termes de [éq 5.2-3] à [éq 5.2-6] « décalés » par $(1 + \alpha)$ ou α sur l'amortissement et les raideurs, ni l'évaluation à $t_{i-1+\alpha}$ des seconds membres ne sont traités, ce qui fait perdre un ordre sur le schéma (de 2 à 1).
Il s'agit donc en réalité de ce qu'on note dans la littérature la « méthode d'accélération moyenne modifiée », qui se limite donc à définir la relation optimale entre les paramètres du schéma de Newmark selon les [éq 4.1-1] à [éq 4.1-3].

5.3 Propriétés du schéma d'accélération moyenne modifiée

Il faut :

$$\alpha \leq 0$$

éq 5.3-1

pour que les conditions de stabilité du schéma soient remplies, cf. [§4.3] : le schéma est **inconditionnellement stable**.

Le schéma « d'accélération moyenne modifiée », amène donc $\beta = \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 / 4$, ce qui est le choix optimal pour apporter de l'amortissement croissant sur les hautes fréquences.

Quand $\alpha = 0$, le schéma HHT (α -méthode) redevient la « règle du trapèze » et l'amortissement est nul [Figure 5.3-a].

La valeur $\alpha = -1$, soit $\gamma = 3/2$ et $\beta = 1$ produit la plus forte dissipation en haute fréquence, mais détruit beaucoup la précision sur les modes de basse fréquence.

En pratique, dans le schéma HHT originel, on limite à $\alpha \in [-1/3, 0]$, ce qui assure la monotonie de l'accroissement de l'amortissement en fonction de la fréquence. Le choix $\alpha = -0,10$ semble être efficace.

Cependant, dans le cadre de la méthode « d'accélération moyenne modifiée », qui est celle proposée par Code_Aster, il est possible de prendre de valeurs de α plus élevées en valeur absolue.

La figure [Figure 5.3-a], extraite de [bib5], donne les variations de ξ en fonction de $\frac{\Delta t}{T}$ pour quelques valeurs de α . Cette figure appelle des commentaires suivants :

- la « règle du trapèze » ($\alpha = 0$) est séduisante parce qu'elle n'apporte aucun amortissement parasite, mais elle peut être instable en non-linéaire,
- quand $\alpha \neq 0$, les courbes ne sont pas à tangente horizontale à l'origine. Comme le schéma HHT (α -méthode) apporte un important amortissement artificiel, certains utilisateurs [bib5] choisissent un pas de temps, puis déterminent la valeur du paramètre α pour que, dans la plage de fréquences qui les intéresse, le taux d'amortissement numérique soit du même ordre que le taux d'amortissement mécanique réel qui, alors, n'est pas pris en compte.

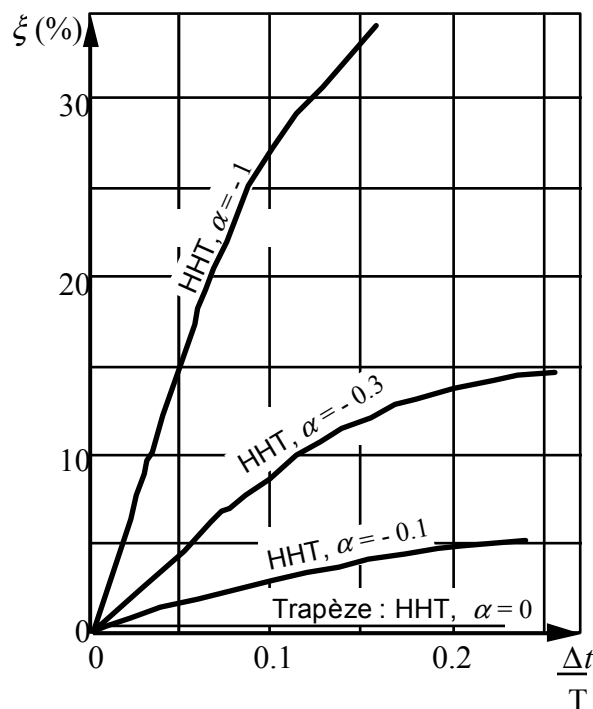


Figure 5.3-a : Taux d'amortissement numérique en fonction du pas de temps du schéma HHT

On constate que l'on a pour les petits pas de temps $\frac{\Delta t}{T}$ l'amortissement numérique suivant :

$$\xi = |\alpha| \frac{\pi \Delta t}{T} + o\left(\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2\right) \quad \text{éq 5.3-2}$$

ce qui permet d'estimer dans la gamme de fréquence visée l'amortissement numérique moyen apporté par le schéma HHT (α -méthode), qui vient s'ajouter à l'amortissement physique éventuellement déjà présent.

La figure [Figure 5.3-b], également extraite de [bib4], donne les variations de l'erreur relative en période en fonction de $\frac{\Delta t}{T}$. L'erreur est une fonction croissante de $|\alpha|$.

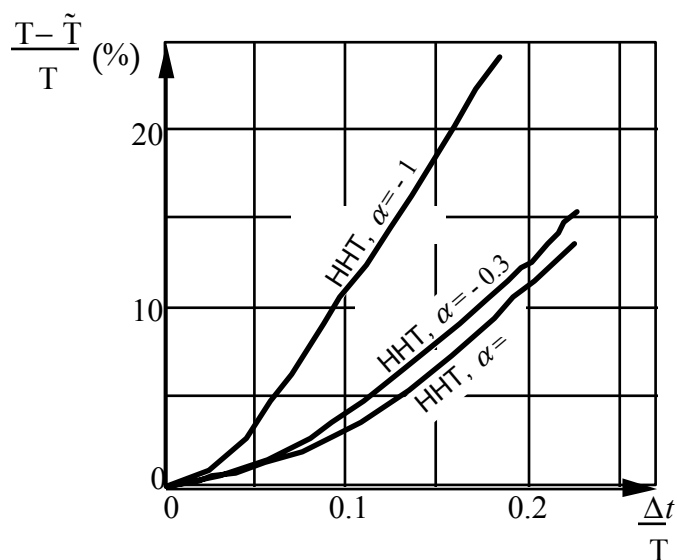


Figure 5.3-b : Erreur relative sur la période en fonction du pas de temps du schéma HHT

6 Exemple

Il s'agit [Figure 6-a] du mouvement plan de pendulaison d'une barre extensible AB de longueur unité, rotulée en A à un support fixe, libre en B et abandonnée sans vitesse dans le champ de pesanteur terrestre à partir d'une position définie par l'angle θ_0 . On néglige tous les phénomènes de dissipation mécanique.

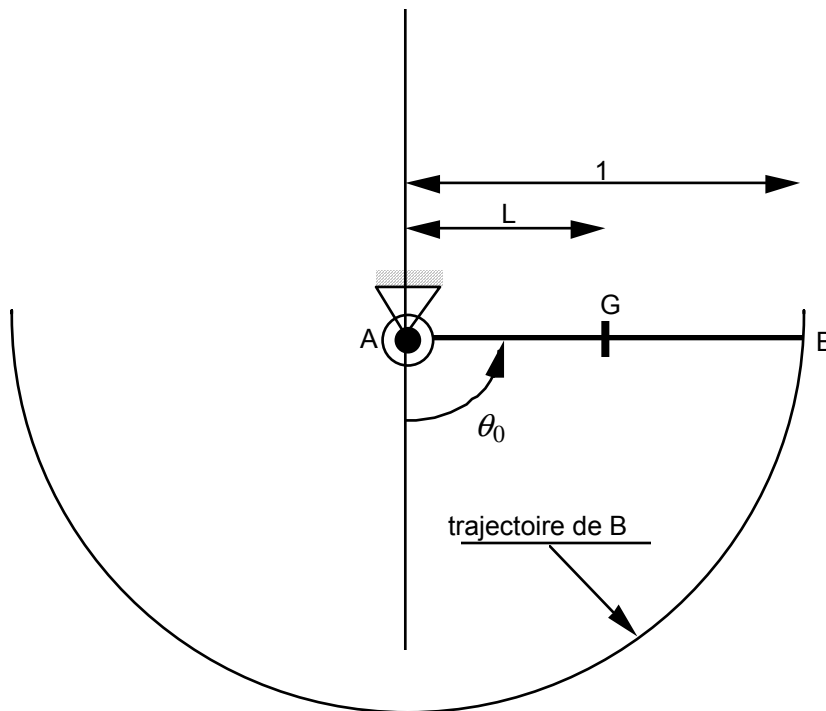


Figure 6-a : Pendule de grande amplitude

Comme l'amplitude θ_0 peut être grande – nous la prendrons de 90° – le point B subit de grands déplacements et le problème est non-linéaire.

La période théorique est :

$$T = 1,6744s$$

Le calcul du mouvement du pendule par le schéma HHT (α -méthode) avec $\alpha = 0$ (« règle du trapèze ») constitue le cas-test SDNL100.

La figure [Figure 6-b] représente l'évolution pendant une période de la cote du point B calculée par le schéma « d'accélération moyenne modifiée » avec trois valeurs de α . La période est divisée en 40 pas de temps égaux.

La courbe en trait plein est relative à $\alpha = 0$. On n'observe pratiquement aucune erreur.

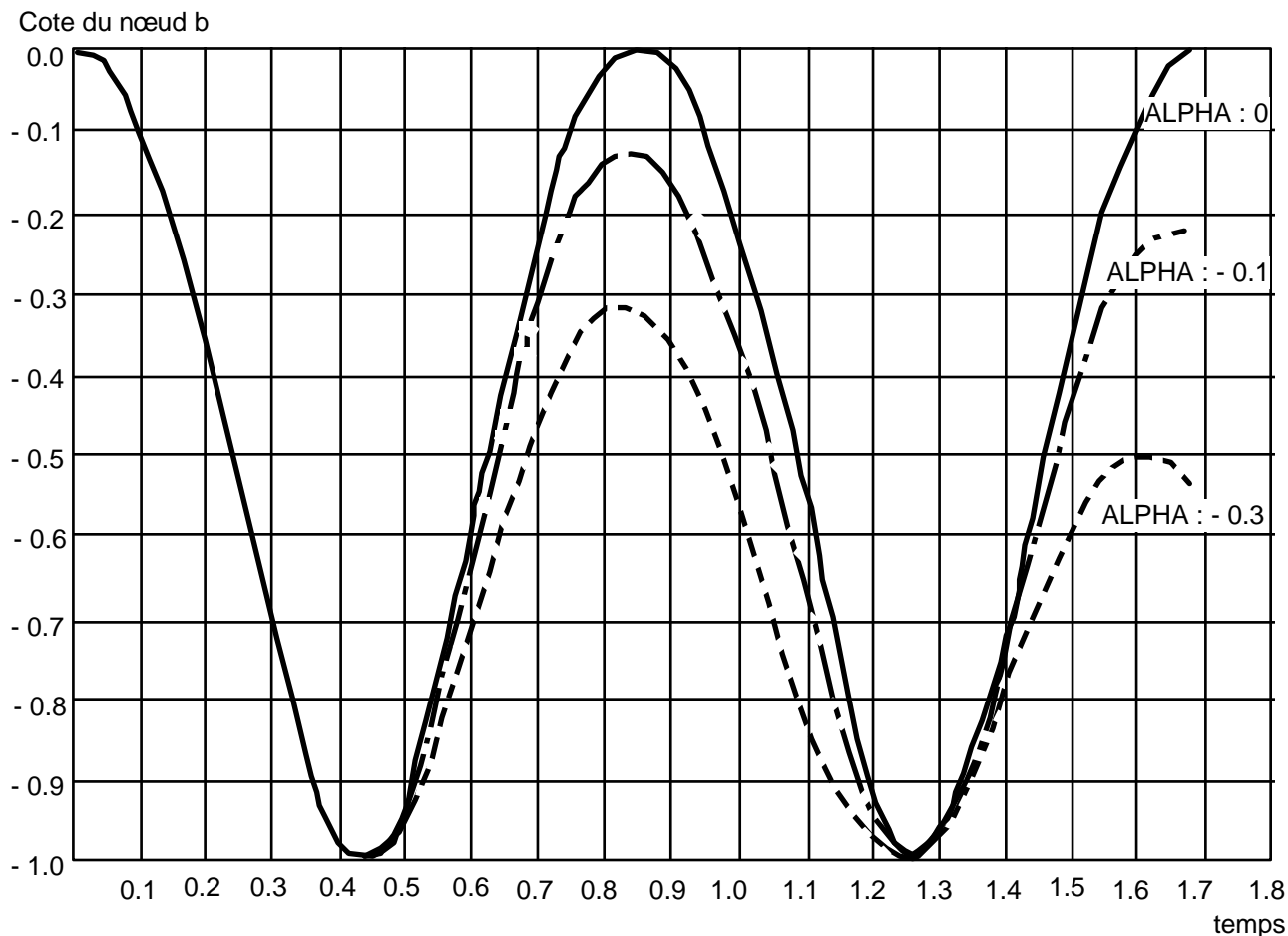


Figure 6-b : Schéma « d'accélération moyenne modifiée », 40 pas de 0.0419 s

La courbe en trait d'axe est relative à $\alpha = -0,1$. On observe un taux d'amortissement d'environ 2 % alors que la figure [Figure 6-a], pour $\frac{\Delta t}{T} = 0,025$, prévoit 0,8 %. C'est que cette courbe a été établie en linéaire, alors que le mouvement de notre pendule est non-linéaire.

La courbe en pointillés est relative à $\alpha = -0,3$. Le taux d'amortissement est d'environ 5,8 %, alors que celui prévu par la figure [Figure 5.3-a] est d'environ 2,2 %. L'écart est encore dû à la non-linéarité du problème.

Enfin, les courbes en trait d'axe et surtout en pointillés révèlent un raccourcissement de la période calculée par rapport à la période théorique.

7 Conclusion

Le schéma d'intégration temporelle de Newmark et sa variante dite « accélération moyenne modifiée », accompagnés de la méthode de Newton, permettent de traiter de nombreux types de problèmes de dynamique non-linéaire, pour des non-linéarités matérielles ou géométriques.

Le traitement des problèmes dynamiques hautement non-linéaires et non-réguliers, tels que l'analyse des structures en grands déplacements ou de contact-frottement, est sujet à l'instabilité numérique, même avec des méthodes d'intégration temporelle inconditionnellement stables dans le domaine linéaire. On ne parvient alors à intégrer les équations du mouvement par rapport au temps qu'en introduisant de la dissipation artificielle. Tout l'art est de doser cette dissipation pour que, dans la gamme des fréquences qui présentent un intérêt mécanique, elle soit à peu près équivalente à l'amortissement naturel, sans trop décaler le spectre vibratoire de la structure.

8 Bibliographie

- [1] K.J. BATHE : Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall (1982).
- [2] M. AUFAURE : Méthodes directes d'analyse dynamique des structures en non-linéaire. Note HI-70/93/124 (27 janvier 1994).
- [3] M.AUFAURE : Modélisation statique et dynamique des poutres en grandes rotations. [R5.03.40].
- [4] H.M. HILBER, T.J.R. HUGHES and R.L. TAYLOR : Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthq. Engng Struct. Dyn. 5, 283-292 (1977).
- [5] J.-L. LILIEN : Contraintes et conséquences électromécaniques liées au passage d'une intensité de courant dans les structures en câbles. Thèse, Université de Liège (1983).
- [6] P. BALLARD : Dynamique des systèmes mécaniques discrets avec liaisons unilatérales parfaites. C.R.Acad.Sci. Série IIb, Paris, pp.953-958, 1999.
- [7] [R5.02.01] Algorithme de thermique linéaire transitoire.
- [8] [R5.03.01] Algorithme non-linéaire quasi-statique (opérateur STAT_NON_LINE).
- [9] [R5.06.01] Méthodes de RITZ en dynamique non-linéaire.
- [10] [R3.03.01] Dualisation des conditions aux limites.
- [11] [R5.03.08] Intégration des relations de comportement viscoélastiques dans l'opérateur STAT_NON_LINE.
- [12] [R5.03.50] Contact unilatéral par des conditions cinématiques.
- [13] [R5.03.80] Méthodes de pilotage du chargement.
- [14] [R4.02.02] éléments vibro-acoustiques.
- [15] [R4.02.04] Couplage Fluide - Structure avec Surface Libre.
- [16] [R4.05.01] Réponse sismique par analyse transitoire.
- [17] [R5.03.40] Modélisation statique et dynamique des poutres en grandes rotations.
- [18] [R5.03.17] Relations de comportement des éléments discrets.
- [19] [R5.03.80] Méthodes de pilotage du chargement.
- [20] [R4.02.05] éléments de frontière absorbante.
- [21] [U4.51.03] Opérateur STAT_NON_LINE.
- [22] [U4.53.01] Opérateur DYNA_NON_LINE.
- [23] [R5.05.04] Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire.
- [24] P. SANS : Amortissement physique et amortissement numérique dans les schémas d'intégration numériques des études structurales. Note HT-61/01/028/B, octobre 2002.
- [25] T.J.R. HUGHES : A note on the stability of Newmark's algorithm in non-linear structural dynamics, pp. 383-386 (19/08/1975).
- [26] A. MILLARD : Contact, frottement, adhésion : bases et avancées récentes en modélisation et simulation numérique. Cours IPSI 10/2004, ch.3-8.
- [27] N. GREFFET : Vers de nouvelles méthodes numériques pour l'intégration temporelle dans le Code_Aster. Note EDF/AMA HT-62/04/016/A, 12/2004.
- [28] L. NOELS, et al. : Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of non-linear dynamics, Adv. Eng. Software, vol. 33, pp. 589-603, 2002.

Page laissée intentionnellement blanche.