

Manuel de Référence**Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire****Document : R5.03.08**

Intégration des relations de comportement viscoélastiques dans l'opérateur STAT_NON_LINE

Résumé

Ce document décrit dans le cas des comportements viscoélastiques les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme non-linéaire `STAT_NON_LINE` décrit en [R5.03.01]. Les données d'entrée de toutes les relations de comportement viscoélastiques intégrées dans *Aster* ont de manière générale la même forme. Seule la façon d'introduire la donnée principale (la fonction vitesse de déformation visqueuse) varie : elle est présentée suivant les différents mot-clés qui permettent à l'utilisateur de choisir la relation de comportement souhaitée.

Ces quantités sont calculées par une méthode d'intégration semi-implicite. A partir de l'état initial, ou à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation.

Table des matières

1 Introduction	3
2 Relation continue	3
3 Nature de la fonction g pour chacune des relations de comportement	4
3.1 Relation LEMAITRE	4
3.2 Relations ZIRC_CYRA2 et ZIRC_EPRI	4
4 Intégration de la relation de comportement	7
4.1 Etablissement de l'équation scalaire pour le schéma implicite et avec des coefficients élastiques constants	7
4.2 Résolution de l'équation scalaire : principe de la routine ZERO2	8
4.3 Calcul de la contrainte à la fin du pas de temps courant.....	10
4.4 Schéma semi-implicite	11
4.5 Prise en compte de la variation des coefficients élastiques en fonction de la température	12
5 Calcul de l'opérateur tangent	13
6 Bibliographie	14

1 Introduction

Les tubes de gaine en Zircaloy du crayon combustible des centrales REP présentent un comportement mécanique fortement visqueux.

Dans le cadre du chaînage entre le *Code_Aster* et le code du crayon combustible CYRANO3, deux modèles viscoélastiques non-linéaires spécifiques au Zircaloy ont été introduits dans le *Code_Aster*. L'un d'eux est le modèle utilisé dans Cyrano2 et dans Cyrano3. L'autre a été développé par l'EPRI.

Par ailleurs, un modèle beaucoup plus général et correspondant à d'autres matériaux que le Zircaloy a été également introduit. Il s'agit de la viscoélasticité non-linéaire de Lemaître, qui peut se ramener pour certaines valeurs particulières des paramètres à une relation de comportement viscoélastique de Norton.

Pour ces trois modèles, on suppose que le matériau est isotrope. Ils peuvent être utilisés en 3D, en déformations planes (D_PLAN) et en axisymétrie (AXIS).

On présente dans cette note les équations constitutives des modèles et leur implantation dans le *Code_Aster*.

2 Relation continue

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et on scinde le tenseur des déformations en une partie élastique, une partie thermique, une partie anélastique (connue) et une partie visqueuse. Les équations sont alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{tot} &= \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_v \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{A}(T)\boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= g(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda, T) \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}}\end{aligned}$$

avec :

$$\lambda : \text{déformation visqueuse cumulée } \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \text{déviateur des contraintes } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq} : \text{contrainte équivalente } \boldsymbol{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\mathbf{A}(T) : \text{tenseur d'élasticité}$$

3 Nature de la fonction g pour chacune des relations de comportement

3.1 Relation LEMAITRE

Dans ce cas, g s'exprime de façon explicite (σ est ici un scalaire) :

$$g(\sigma, \lambda, T) = \left(\frac{1}{K} \frac{\sigma}{\lambda^{1/m}} \right)^n \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} \geq 0, \frac{1}{m} \geq 0, n > 0$$

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous les mots clés facteurs LEMAITRE ou LEMAITRE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

$$/ \text{ LEMAITRE} : \left(N : n \quad \text{UN_SUR_K} : \frac{1}{K} \quad \text{UN_SUR_M} : \frac{1}{m} \right)$$

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

3.2 Relations ZIRC_CYRA2 et ZIRC_EPRI

Pour ces relations, g ne s'exprime pas de façon explicite. Le comportement est représenté par un essai de fluage unidimensionnel, à contrainte constante, qui fait intervenir le temps écoulé depuis l'instant où l'on applique la contrainte. La relation de comportement est ici définie par la donnée de quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 décrivant l'évolution de la déformation visqueuse au cours du temps :

$$\varepsilon_v = \lambda = f_1(t) g_1(\sigma, T) + f_2(t) g_2(\sigma, T) \quad \text{éq 3.2-1}$$

La fonction g se calcule alors numériquement en éliminant le temps t de la manière suivante :

- 1) pour un triplet donné (σ, λ, T) , on résout en t l'équation [éq 3.2-1] par la méthode de Newton (voir [bib2]). On trouve une approximation de la solution $t(\sigma, \lambda, T)$,
- 2) on obtient la valeur de la fonction g en (σ, λ, T) en dérivant par rapport au temps l'équation [éq 3.2-1] (voir [bib1]) :

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\lambda} = g(\sigma, \lambda, T) = f_1'(t) g_1(\sigma, T) + f_2'(t) g_2(\sigma, T)$$

et en substituant dans cette nouvelle équation la valeur de $t(\sigma, \lambda, T)$ trouvée précédemment. On trouve la formulation uniaxiale suivante :

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\lambda} = g(\sigma, \lambda, T) = f_1'(t(\sigma, \lambda, T)) g_1(\sigma, T) + f_2'(t(\sigma, \lambda, T)) g_2(\sigma, T)$$

Pour chacune des deux relations ZIRC_CYRA2 et ZIRC_EPRI, la forme des quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 est prédéfinie et l'utilisateur n'introduit que quelques paramètres dans le fichier de commande.

Ainsi, pour ZIRC_CYRA2, on a :

$$f_1(t) = \left[C_{th} \varepsilon_{fab} (1 - e^{-\lambda t}) + t \right] F_{rec}$$

$$g_1(\sigma, T) = \frac{2}{\sqrt{3}} A_{th} \exp(-K / (T + 273,15)) \left(\frac{2\sigma}{\sqrt{3}} \right)^{e^{(0,00266\sigma - 0,413)}}$$

$$f_2(t) = \left[C_{irr} \varepsilon_{fab} (1 - e^{-k_{irr} t}) + t \right] F_{rec}$$

$$g_2(\sigma, T) = \frac{4}{3} A_{irr} \Phi \sigma$$

avec : $C_{th} = 4450$

$$\lambda = 4,5 \cdot 10^{-3} h^{-1}$$

$$A_{th} = 9,529 \cdot 10^{17}$$

$$K = 39000^\circ K$$

$$F_{rec} = 1,816 \cdot 10^{-4} \exp(6400 / (T_{rec} + 273,15))$$

$$C_{irr} = 4000$$

$$K_{irr} = 3 \cdot 10^{-3} h^{-1}$$

$$A_{irr} = 1,2 \cdot 10^{-22}$$

Les paramètres positifs ε_{fab} , T_{rec} et Φ sont ceux fournis sous le mot clé facteur ZIRC_CYRA2 de l'opérateur DEFI_MATERIAU :

$$/ \text{ ZIRC_CYRA2 : } \left(\text{EPSI_FAB} : \varepsilon_{fab} \quad \text{TEMP_RECUIT} : T_{rec} \quad \text{FLUX_PHI} : \Phi \right)$$

De même, pour ZIRC_EPRI, on a :

$$f_1(t) = t^{A5}$$

$$g_1(\sigma, T) = A1 \left(sh(A2 \sigma^{A3}) \right)^{A4} R_p^{A6} e^{-A7/(T+273,15)}$$

$$f_2(t) = t^{B2}$$

$$g_2(\sigma, T) = B1 \Phi^{B3} \sigma^{B4} e^{-B5/(T+273,15)} R_p^{B6} (\cos \theta_{\max})^{B7}$$

avec : $A1 = 1,603 \cdot 10^8$

$$A2 = 4,567 \cdot 10^{-5}$$

$$A3 = 2,28$$

$$A4 = 0,997$$

$$A5 = 0,77$$

$$A6 = 0,956$$

$$A7 = 2,3 \cdot 10^4$$

$$B1 = 3,296 \cdot 10^{-21}$$

$$B2 = 0,811$$

$$B3 = 0,595$$

$$B4 = 1,352$$

$$B5 = 22,91$$

$$B6 = 1,58$$

$$B7 = 2,228$$

Les paramètres positifs Φ, R_p et $\theta_{\max} \left(0 \leq \theta_{\max} \leq \frac{\pi}{2} \right)$ sont ceux fournis sous le mot clé facteur ZIRC_EPRI de l'opérateur DEFI_MATERIAU :

$$/ \text{ ZIRC_EPRI : } \left(\text{FLUX_PHI} : \Phi \quad \text{R_P} : R_p \quad \text{THETA_MAX} : \theta_{\max} \right)$$

On notera que, pour les deux relations de comportement et pour toutes les fonctions :

t s'exprime en heures

T s'exprime en °C

σ s'exprime en MPa

Le document d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots-clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

4 Intégration de la relation de comportement

4.1 Etablissement de l'équation scalaire pour le schéma implicite et avec des coefficients élastiques constants

On désigne par $\boldsymbol{\varepsilon}_{tot}$ la déformation totale à l'instant $t + \Delta t$ et par $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{tot}$ la variation de déformation totale au cours du pas de temps courant. On appelle $\boldsymbol{\varepsilon}_o$ la déformation imposée à l'instant $t + \Delta t$ et $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_o$ la variation de déformation imposée au cours du pas de temps courant.

Cette déformation imposée résulte de la dilatation thermique et des déformations anélastiques. On a donc :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_o = \left[\alpha(t + \Delta t) \left(T(t + \Delta t) - T_{ref} \right) - \alpha(t) \left(T(t) - T_{ref} \right) \right] \mathbf{I}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_a(t + \Delta t) - \boldsymbol{\varepsilon}_a(t)$$

où \mathbf{I}_3 est le tenseur identité d'ordre 2 en dimension 3.

On pose $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{tot} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_o$

Comme on suppose ici que μ est constant, on a la relation suivante entre les déviateurs de $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ et $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu(\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v) \quad \text{éq 4.1-1}$$

Or, la loi d'écoulement s'écrit, de façon implicite :

$$\frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v}{\Delta t} = \frac{3}{2} g\left(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda^- + (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v)_{eq}, T\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}} \quad \text{éq 4.1-2}$$

On a donc, en éliminant $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v$ entre [éq 4.1-1] et [éq 4.1-2] :

$$\begin{aligned} 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + 3\mu\Delta t \, g\left(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda^- + (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v)_{eq}, T\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}} \\ (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \left(1 + 3\mu\Delta t \frac{g\left(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda^- + (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v)_{eq}, T\right)}{\boldsymbol{\sigma}_{eq}} \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad \text{éq 4.1-3}$$

En posant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, on a donc :

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^e = 3\mu\Delta t \, g\left(\boldsymbol{\sigma}_{eq}, \lambda^- + (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_v)_{eq}, T\right) + \boldsymbol{\sigma}_{eq} \quad \text{éq 4.1-4}$$

Or, on a d'après [éq 4.1-2] :

$$(\Delta \epsilon_v)_{eq} = \Delta t \, g\left(\sigma_{eq}, \lambda^- + (\Delta \epsilon_v)_{eq}, T\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sigma_{eq}^e &= 3\mu(\Delta \epsilon_v)_{eq} + \sigma_{eq} \\ (\Delta \epsilon_v)_{eq} &= \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})\end{aligned}$$

En substituant cette dernière expression dans [éq 4.1-4], on a :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu\Delta t \, g\left(\sigma_{eq}, \lambda^- + \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}), T\right) + \sigma_{eq}$$

Si l'on pose, $\sigma_{eq}^e, \lambda^-, T$ et Δt étant connus :

$$f(x) = 3\mu\Delta t \, g\left(x, \lambda^- + \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - x), T\right) + x - \sigma_{eq}^e$$

on peut alors calculer la quantité $\sigma_{eq} = (\sigma^- + \Delta \sigma)_{eq}$ comme étant la solution de l'équation scalaire : $f(x) = 0$ où $x = \sigma_{eq}$, convention adoptée pour les paragraphes suivants.

4.2 Résolution de l'équation scalaire : principe de la routine ZEROF2

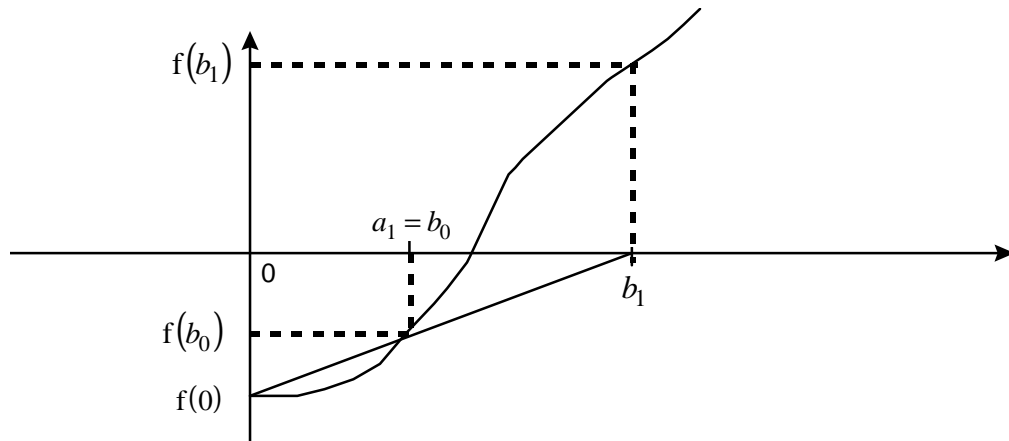
On montre facilement que, si les conditions requises au paragraphe [§3] sur les caractéristiques des matériaux sont vérifiées, la fonction f est strictement croissante et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Si $\sigma_{eq}^e = 0$, alors la solution est $x = 0$. Sinon, on a : $f(0) = -\sigma_{eq}^e < 0$

Le problème consiste donc à trouver pour une fonction f quelconque la solution de l'équation $f(x) = 0$ sachant que cette solution existe, que $f(0) < 0$ et que f est strictement croissante.

L'algorithme adopté dans ZEROF2 est le suivant :

- on part de $a_0 = 0$ et $b_0 = x_{ap}$ où x_{ap} est une approximation de la solution. Si c'est nécessaire (c'est-à-dire si $f(b_0) < 0$), on se ramène par la méthode des sécantes ($z_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ puis $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = z_n$) en une ou plusieurs itérations au cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$:



(Dans le cas de la figure ci-dessus, cette première phrase s'est faite en une itération : $a_1 = b_0$ et $f(b_1) > 0$).

- on calcule $N_d = \text{partie entière}(\sqrt{N_{\max}})$ ou N_{\max} est le nombre maximum d'itérations que l'on s'est donné. On résout alors l'équation par la méthode des sécantes en utilisant toutefois la méthode de dichotomie à chaque fois que n est multiple de N_d :

```

1)
Si  $N_d$  divise  $n$ 
     $z_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ 
sinon
     $z_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ 
finsi
 $n = n + 1$ 
si  $|f(z)| > \varepsilon$ 
    si  $f(z) < 0$ 
         $a_{n+1} = z_n$      $b_{n+1} = b_n$ 
    sinon
         $a_{n+1} = a_n$      $b_{n+1} = z_n$ 
    finsi
    aller en 1)
sinon
    La solution est :  $x = z_n \rightarrow FIN$ 
finsi
    
```

Cette deuxième partie de l'algorithme permet de traiter en un nombre d'itérations raisonnable les cas où f est très fortement non-linéaire, alors que la méthode des sécantes aurait convergé trop lentement. Ces cas de forte non-linéarité se rencontrent notamment avec la loi de LEMAITRE, pour des valeurs de $\frac{n}{m}$ grandes.

4.3 Calcul de la contrainte à la fin du pas de temps courant

D'après [éq 4.1-3], si x est la solution de l'équation scalaire, en posant :

$$b(x, \sigma_{eq}^e) = \frac{1}{1 + 3\mu\Delta t \frac{g\left(x, \lambda^- + \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - x), T\right)}{x}} = \frac{x}{\sigma_{eq}^e}$$

on a :

$$\tilde{\sigma} = b(x, \sigma_{eq}^e) \tilde{\sigma}^e \quad \text{éq 4.3-1}$$

Dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$, ce qui équivaut d'après l'équation scalaire à $x = 0$, on prolonge b par continuité. Pour cela, on pose $y(x) = \lambda^- + \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - x)$ et $G(x) = g(x, y(x), T)$. La dérivée de G s'exprime en fonction des dérivées partielles de g au point $(x, y(x), T)$:

$$G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x), T) - \frac{1}{3\mu} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x), T)$$

Le prolongement de b par continuité donne alors :

$$b(0,0) = \frac{1}{1 + 3\mu\Delta t G'(0)}$$

et on a, toujours dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$, $\tilde{\sigma} = 0$.

Une fois que l'on a calculé $\tilde{\sigma}$, on obtient σ par la relation (K est ici supposé constant) :

$$\sigma = \sigma^- + \Delta\sigma = \tilde{\sigma} + \left(\frac{1}{3} Tr(\sigma^-) + K Tr(\Delta\epsilon) \right) \mathbf{I}_3 \quad \text{éq 4.3-2}$$

4.4 Schéma semi-implicite

Avec un schéma numérique implicite [éq 4.1-2], dans le cas, par exemple, où g ne dépend pas de λ , seule intervient par le calcul de $\Delta \epsilon_v$, la valeur de la contrainte en fin de pas de temps. Il peut en résulter des erreurs numériques importantes si la contrainte varie fortement au cours du temps (voir [bib2]).

Pour remédier à cela et améliorer la résolution, on discrétise la loi d'écoulement de façon semi-implicite :

$$\frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta t} = \frac{3}{2} g \left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \epsilon_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right)}{\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}} \quad \text{éq 4.4-1}$$

Pour transformer de la façon la plus économique ce qui a été programmé précédemment (en suivant la formulation implicite [éq 4.1-2]), il suffit de diviser chaque membre de l'équation [éq 4.4-1] par 2 :

$$\frac{(\Delta \epsilon_v / 2)}{\Delta t} = \frac{3}{2} \frac{g \left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \epsilon_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right)}{2} \frac{\left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right)}{\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}}$$

et de faire la même chose avec la relation [éq 4.1-1] :

$$\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} = 2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\epsilon}}{2} - \frac{\Delta \epsilon_v}{2} \right)$$

On constate que ce système est de la même forme que celui constitué par les équations [éq 4.1-1] et [éq 4.1-2], la donnée étant $\frac{\Delta \epsilon}{2}$ au lieu de $\Delta \epsilon$, les inconnues étant respectivement $\frac{\Delta \sigma}{2}$ et $\frac{\Delta \epsilon_v}{2}$ au lieu de $\Delta \sigma$ et $\Delta \epsilon_v$ et la fonction $\frac{g}{2}$ remplaçant la fonction g .

On peut donc utiliser la résolution des paragraphes [§4.1] à [§4.3] ainsi que l'algorithme correspondant en introduisant $\frac{\Delta \epsilon}{2}$ et en divisant la fonction g par 2. Il reste alors à multiplier les résultats $\left(\frac{\Delta \sigma}{2} \right)$ et $\left(\frac{\Delta \epsilon_v}{2} \right)$ par 2 pour obtenir les incréments de contrainte et de déformation visqueuse calculés par le schéma semi-implicite (le $\Delta \sigma$ et le $\Delta \epsilon_v$ de l'équation [éq 4.4-1]).

On remarquera que le calcul de l'opérateur tangent n'est pas affecté par cette modification du schéma numérique. En effet, on a évidemment :

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial \left(\frac{\Delta \sigma}{2} \right)}{\partial \left(\frac{\Delta \epsilon}{2} \right)}$$

4.5 Prise en compte de la variation des coefficients élastiques en fonction de la température

On a, si \mathbf{A} est le tenseur d'élasticité :

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_v + \Delta (\mathbf{A}^{-1} \sigma)$$

avec :

$$\Delta (\mathbf{A}^{-1} \sigma) = \mathbf{A}^{-1} (T^- + \Delta T) (\sigma^- + \Delta \sigma) - \mathbf{A}^{-1} (T^-) \sigma^-$$

Ceci se traduit dans les équations du [§4.4] par :

$$2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\epsilon}}{2} \right) - \left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right) = 3\mu \Delta t \frac{\mathfrak{g} \left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \epsilon_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right)}{2} \frac{\left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)}{\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}} - \tilde{\sigma}^- \left(\frac{2\mu^- + 2\mu}{4\mu^-} \right)$$

En posant :

$$\tilde{\sigma}^e = \left(\frac{2\mu^- + 2\mu}{4\mu^-} \right) \tilde{\sigma}^- + 2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\epsilon}}{2} \right)$$

et

$$Tr(\sigma^e) = \left(\frac{3K^- + 3K}{6K^-} \right) Tr(\sigma^-) + 3K Tr \left(\frac{\Delta \epsilon}{2} \right)$$

on se ramène exactement au cas précédent [§4.4].

5 Calcul de l'opérateur tangent

Dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$ et $x = 0$, on prend le tenseur d'élasticité comme opérateur tangent.

Sinon, on obtient cet opérateur en dérivant l'équation [éq 4.3-1] par rapport à $\Delta \epsilon$:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial b(x, \sigma_{eq}^e)}{\partial \Delta \epsilon} \tilde{\sigma}^e + b(x, \sigma_{eq}^e) \frac{\partial \tilde{\sigma}^e}{\partial \Delta \epsilon}$$

puis en dérivant aussi [éq 4.3-2] par rapport à $\Delta \epsilon$:

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \epsilon} + K \mathbf{I}_3 \frac{\partial Tr(\Delta \epsilon)}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \epsilon} + K {}^t \mathbf{I}_3$$

On notera que, dans ces équations, les tenseurs d'ordre 2 et d'ordre 4 sont respectivement assimilés à des vecteurs et à des matrices. \mathbf{I}_3 est ici un tenseur d'ordre 2, assimilé à un vecteur :

$${}^t \mathbf{I}_3 = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

On a de plus :

$$\frac{\partial b(x, \sigma_{eq}^e)}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial b}{\partial x}(x, \sigma_{eq}^e) \frac{\partial x}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial b}{\partial \sigma_{eq}^e}(x, \sigma_{eq}^e) \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \epsilon}$$

Il faut donc calculer $\frac{\partial x}{\partial \Delta \epsilon}$. Pour cela, on dérive implicitement l'équation scalaire par rapport à $\Delta \epsilon$.

Pour simplifier, on omettra par la suite dans l'écriture de g et de ses dérivées le paramètre T .

On a alors :

$$[3\mu\Delta t G'(x) + 1] \frac{\partial x}{\partial \Delta \epsilon} + \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \epsilon}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \Delta \epsilon} &= \frac{1 - \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{1 + 3\mu\Delta t G'(x)} \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \epsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \Delta \epsilon} &= \frac{1 - \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{1 + 3\mu\Delta t G'(x)} \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e} {}^t \tilde{\sigma}^e \end{aligned}$$

avec l'expression de $G'(x)$ obtenue au [§4.3].

On obtient finalement l'expression suivante de l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \epsilon} = K \mathbf{I}_3^t \mathbf{I}_3 + 2\mu \left[\gamma \tilde{\sigma}^e \tilde{\sigma}^e + b(x, \sigma_{eq}^e) \mathbf{A} \right]$$

avec :

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \Delta \tilde{\epsilon}}{\partial \Delta \epsilon} = \mathbf{J}_6 - \frac{1}{3} \mathbf{I}_3^t \mathbf{I}_3 \text{ où } \mathbf{J}_6 \text{ est la matrice identité de rang 6.}$$

$$\gamma = \frac{3}{2(\sigma_{eq}^e)^3} \left[\sigma_{eq}^e \frac{1 - \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{1 + 3\mu \Delta t G'(x)} - x \right]$$

Remarque :

Dans le cas des lois ZIRC_CYRA2 et ZIRC_EPRI, on vérifie facilement que :

$$G'(x) = \frac{1}{f_1' g_1 + f_2' g_2} \left[g_1 g_1' (f_1'^2 - f_1 f_1'') + g_2 g_2' (f_2'^2 - f_2 f_2'') + g_1 g_2' (f_1' f_2' - f_1'' f_2) \right. \\ \left. + g_2 g_1' (f_1' f_2' - f_1 f_2'') - \frac{1}{3\mu} (f_1'' g_1 + f_2'' g_2) \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, y, T) = \frac{f_1'' g_1 + f_2'' g_2}{f_1' g_1 + f_2' g_2}$$

où $f_1, f_1', f_1'', f_2, f_2', f_2''$ désignent les valeurs de f_1 et f_2 et de leurs dérivées au point $t(x, y, T)$ et où g_1, g_1', g_2, g_2' désignent les valeurs de g_1 et g_2 et de leur dérivée par rapport à σ au point (x, T) (voir [bib1]).

6 Bibliographie

- [1] de BONNIERES P. : Ecriture sous forme standard généralisée des lois de comportement viscoplastiques du Zircaloy, note EDF-DER HI-71/7940-Indice A, 1992
- [2] de BONNIERES P., ZIDI M. : Introduction de la viscoplasticité dans le module de thermomécanique de Cyrano3 : principe, description et validation, note EDF-DER HI-71/8334, 1993