Organisme(s) : EDF-R&D/AMA

Manuel de Référence
Fascicule R7.01 : Modélisation pour le Génie Civil et les géomatériaux
Document R7.01.01

Relation de comportement de Granger pour le fluage propre du béton

Résumé :

Ce document présente le modèle de fluage propre de « Granger », qui est une façon de modéliser le fluage propre du béton.
On y détaille également l'écriture et le traitement numérique du modèle.

Table des matières

1 Introduction

Dans le cadre des études du comportement à long terme de structures en béton, une part prépondérante des déformations mesurées sur structure concerne les déformations différées qui apparaissent dans le béton au cours de sa vie. Elles comportent les retraits au jeune âge, le retrait de dessiccation, le fluage propre et le fluage de dessiccation.

Le modèle présenté ici est dédié à la modélisation de la déformation différée associée au fluage propre. Le fluage propre est, en complément du fluage de dessiccation, la part de fluage du béton qu'on observerait lors d'un essai sans échange d'eau avec l'extérieur. Expérimentalement le béton en fluage propre présente un comportement visqueux vieillissant. La déformation de fluage observée est proportionnelle à la contrainte de chargement, dépend de la température et de l'hygrométrie. La déformation longitudinale s'accompagne comme en élasticité d'une déformation transversale de signe opposé.
Le modèle choisi est celui proposé par L. Granger [bib1]. C'est un modèle de type viscoélastique qui prend en compte l'effet du vieillissement ainsi que l'historique de contrainte, de température et de l'hygrométrie. Il permet donc de ce fait de modéliser les faits expérimentaux cités ci-dessus.

On effectue dans un premier temps un bref rappel sur les modèles viscoélastiques linéaires et on présente ensuite le modèle proprement dit ainsi que son intégration numérique dans le *Code_Aster*.

Dans le *Code_Aster*, 3 versions sont disponibles : `GRANGER_FP_V` le modèle complet, `GRANGER_FP` qui ne prend pas en compte l'effet du vieillissement et `GRANGER_FP_INDT`, qui en plus ne dépend pas de la température.

2 Rappel sur le comportement en fluage d'un matériau viscoélastique linéaire [bib3]

La courbe de fluage classique représente l'évolution en fonction du temps de la déformation d'un matériau soumis à une contrainte unidimensionnelle constante σ. La déformation de fluage ε_{fl} est, par opposition à la déformation instantanée, la part de déformation qui évolue avec le temps.
Si un matériau a un comportement viscoélastique linéaire, alors quelle que soit σ la charge constante appliquée à partir du temps de chargement t_c, la déformation de fluage (1D) peut s'écrire :

$$\varepsilon^{fl}(t) = f(t - t_c) \cdot \sigma \qquad \textbf{éq 2-1}$$

où $J(t, t_c) = f(t - t_c)$ est la fonction de fluage, fonction croissante de $(t - t_c)$ et nulle pour $(t - t_c)$ négatif.

2.1 Principe de superposition de Boltzmann

La relation [éq 2-1] n'est valable que pour un chargement constant. Pour un historique de chargement non constant on applique le principe de superposition de Boltzmann ; l'histoire de chargement $\sigma(t)$ est décomposée en incréments de charge :

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^{n} \Delta\sigma_i \cdot \mathrm{H}(t - t_i)$$

où H est la fonction de Heavyside.

On peut alors écrire : $\varepsilon^{fl}(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t - t_i) \cdot \Delta\sigma_i$

ce qui en continu donne :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\int_{\tau=0}^{t} f(t-\tau)\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}d\tau = f*\frac{\partial\sigma}{\partial t}=(f\otimes\sigma) \qquad \textbf{éq 2.1-1}$$

où $*$ représente le produit de convolution.

2.2 Modèle de Kelvin en série

On peut montrer que tout corps viscoélastique linéaire peut être modélisé par un groupement en série de modèles de Kelvin et que la fonction de fluage peut alors se mettre sous la forme

$$f(t)=\sum_{s=1}^{r} J_s.(1-\exp(-\frac{t}{\tau_s}))$$

τ_s et J_s sont des coefficients positifs identifiés sur les courbes expérimentales de fluage.

3 Présentation du modèle de fluage propre de Granger [bib1]

3.1 Propriétés expérimentales du fluage propre du béton en chargement uniaxial

Les essais de fluage propre sur éprouvette font apparaître les propriétés suivantes :

- dans une gamme de contrainte inférieure à 50% de la résistance à la rupture, le fluage propre est proportionnel à la contrainte,
- le fluage propre d'une éprouvette à hygrométrie h_{ext} est quasiment proportionnel à h_{ext}. Le fluage propre d'un béton sec est presque nul et il est maximal pour un béton saturé en eau,
- lorsque la température T augmente on a une accélération du fluage,
- le fluage propre est un phénomène fortement vieillissant,
- une déformation longitudinale de fluage s'accompagne d'une déformation transversale de signe opposé (effet de Poisson).

On choisit de modéliser le fluage propre du béton avec un modèle viscoélastique linéaire qui devra en plus prendre en compte la dépendance du fluage vis-à-vis de la température et de l'hygrométrie.

3.2 Modélisation par un groupement en série de modèles de Kelvin

On utilise un groupement en série de modèles de Kelvin dont les coefficients sont identifiés à partir de courbes de fluage expérimentales. On montre en pratique qu'on reproduit de façon satisfaisante les courbes de fluage de béton avec r = 8 modèles en série.

On utilise donc la fonction de fluage suivante :

$$J(t,t_c)=\sum_{s=1}^{8} J_s \cdot \left(1-\exp\left[-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right]\right) \qquad \textbf{éq 3.2-1}$$

En pratique il est très difficile de déterminer à la fois les J_s et τ_s dès que le nombre de séries de Kelvin dépasse 2. On fait donc généralement un choix a priori sur les τ_s, $\tau_s=\tau_1\cdot 10^{s-1}$ et l'on détermine alors par régression linéaire les J_s.

L'expression [éq 3.2-1] est la fonction de fluage de base du modèle. On montre ci-dessous comment la prise en compte de l'effet de la température, de l'hygrométrie et du vieillissement est intégrée dans le modèle final.

3.3 Effet de la température

Pour tenir compte de l'effet de la température sur la cinétique de fluage, on définit un « temps équivalent » $t_{eq}(t)$ qui va remplacer le temps t dans le modèle.

$$t_{eq}(t)=\int_{s=t_c}^{t} \exp\left(-\frac{U_c}{R}\left(\frac{1}{T(s)}-\frac{1}{T_{ref}}\right)\right)ds \qquad \textbf{éq 3.3-1}$$

Remarques :

- *La température et le terme d'activation de la loi d'Arrhénius* $\frac{U_c}{R}$ *sont exprimés en degrés* K.
- *Modéliser ainsi l'effet de la température* T *ne joue que sur la cinétique de fluage. Pour réellement faire intervenir* T *sur l'amplitude du phénomène de fluage, en particulier sur le niveau de la valeur à l'infini de la fonction de fluage,* T *est également introduite dans l'expression de J comme une fonction multiplicative des coefficients de fluage telle que :*

$$J(t,t_c,T)=\frac{T-(T_{ref}-45)}{45}\cdot\sum_{s=1}^{r} J_s \cdot \left(1-\exp-\left[\frac{t_{eq}-t_c}{\tau_s}\right]\right) \qquad \textbf{éq 3.3-2}$$

- T_{ref} *est la température de référence. Elle est choisie par l'utilisateur. Elle est généralement prise égale à 20°C. Dans la suite du document* T_{ref} *sera prise égale à 20°C.*
- *Pour la version indépendante de la température, on a simplement* $t_{eq}(t)=t$ *et* $J(t,t_c,T)=\sum_{s=1}^{r} J_s \cdot \left(1-\exp-\left[\frac{t_{eq}-t_c}{\tau_s}\right]\right)$.

3.4 Effet de l'hygrométrie

Dans le modèle, h est également introduit comme un paramètre multiplicatif des coefficients de fluage de telle sorte que :

$$J(t,t_c,T,h) = h\cdot\frac{T-248}{45}\cdot\sum_{s=1}^{r} J_s\cdot\left(1-\exp-\left[\frac{t_{eq}-t_c}{\tau_s}\right]\right) \qquad \textbf{éq 3.4-1}$$

Remarque :

C'est la variable séchage notée C qu'on a à l'issue du calcul Code_Aster de séchage et c'est la courbe isotherme de sorption-désorption qui permet de passer de la variable C à l'hygrométrie du milieu ambiant h. Soit $\mathcal{C}$ la courbe isotherme de désorption : $C = \mathcal{C}(h)$ et $h = \mathcal{C}^{-1}(C)$. La courbe $h = \mathcal{C}^{-1}(C)$ doit être renseignée par l'utilisateur.

3.5 Effet du vieillissement

Pour un matériau viscoélastique vieillissant, la fonction de fluage varie pour deux temps de chargement différents. Le vieillissement est associé à l'hydratation au jeune âge et à d'autres phénomènes comme la polymérisation pour le béton âgé. L'effet du vieillissement est modélisé en multipliant les coefficients de fluage par une fonction de vieillissement $k(t_c)$ dépendant du temps de chargement. La modélisation choisie pour prendre en compte le vieillissement associée à l'hydratation est celle du CEB [bib2] :

$$k(t_c) = \frac{28^{0.2}+0.1}{t_c^{0.2}+1}$$

t_c est exprimé en jour.

Pour faire apparaître une sensibilité du phénomène de vieillissement par rapport à la température on définit également un temps de chargement équivalent $tc_{eq}(t_c)$ qui remplace t_c dans la fonction de vieillissement.

$$tc_{eq}(t_c) = \int_{s=t_0}^{t_c} \exp\left(-\frac{U_v}{R}\left(\frac{1}{T(s)}-\frac{1}{T_{ref}}\right)\right)ds$$

t_0 : correspond à l'âge du béton au jeune âge, il est généralement pris égal à 28 jours

t_c : le temps ou âge de chargement exprimé en jours

Remarques :

- *T et $\frac{U_v}{R}$ sont en degrés K,*
- *pour le béton âgé il faudrait utiliser un autre temps équivalent et une autre fonction de vieillissement,*
- *si on ne prend pas en compte le vieillissement, on a simplement $k(t_c)=1$.*

La fonction de fluage, qui sera la fonction de fluage finale du modèle, s'écrit alors :

$$J(t,t_c,T,h) = h\cdot\frac{T-248}{45}\cdot k(tc_{eq})\cdot\sum_{s=1}^{n} J_s\cdot\left(1-\exp-\left[\frac{t_{eq}-t_c}{\tau_s}\right]\right) \qquad \textbf{éq 3.5-1}$$

3.6 Modélisation 3D

L'hypothèse classique consiste à supposer l'existence d'un coefficient de Poisson de fluage constant et égal au coefficient de poisson élastique, soit $\nu_f = 0.2$. D'où pour σ, T, h constants :

$$\varepsilon^{fl}(t) = J(t,t_c,T,h)\cdot[(1+\nu_f)\sigma \ -\nu_f\, tr(\sigma)I]$$

et donc :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}^{fl}(t) = J(t,t_c,T,h)\cdot(1+\nu_f)\tilde{\sigma} \\ tr(\varepsilon^{fl}(t)) = J(t,t_c,T,h)\cdot(1-2\nu_f)tr\sigma \end{cases}$$

3.7 Superposition sur la contrainte, la température et l'hygrométrie (1D)

Pour simplifier la démonstration, on prend dans cette partie comme fonction de fluage une des composantes de la série de Kelvin, sans prise en compte de l'effet du vieillissement, ni du temps équivalent paramétrant la température, soit :

$$J(t,t_c,T,h) = h\cdot\frac{T-248}{45}\cdot J_s.\left(1-\exp-\left[\frac{t-t_c}{\tau_s}\right]\right)$$

la déformation de fluage s'écrivant alors : $\varepsilon^{fl} = \sigma\cdot h\cdot\frac{T-248}{45}\cdot J_s.\left(1-\exp-\left[\frac{t-t_c}{\tau_s}\right]\right)$.

On rappelle que cette écriture de la déformation de fluage est valable pour σ, T et h constants (dans ce cas le modèle équivaut en fait à prendre un module d'Young décroissant en fonction du temps).
Pour une histoire de chargement, de température et d'hygrométrie non constants on applique le principe de superposition de Boltzmann.

Supposons que pour un élément de volume donné, l'on connaisse au temps t_n les grandeurs $(\varepsilon^{fl}{}_n, \sigma_n, T_n, h_n)$. Au temps t_{n+1} les grandeurs seront $(\varepsilon^{fl}{}_{n+1}, \sigma_{n+1}, T_{n+1}, h_{n+1})$.

Pour $t_n < t < t_{n+1}$ on propose de calculer la déformation de fluage de la façon suivante :

$$\varepsilon^{fl}{}_{n+1}(t) = \varepsilon^{fl}{}_n(t) - \sigma_n J(t,t_n,T_n,h_n) + \sigma_{n+1} J(t,t_n,T_{n+1},h_{n+1})$$

c'est-à-dire :

$$\varepsilon^{fl}{}_{n+1}(t) = \varepsilon^{fl}{}_n(t) + \sigma_{n+1}\cdot\frac{T_{n+1}-248}{45}\cdot h_{n+1}\cdot J_s\left(1-\exp-\left[\frac{t-t_n}{\tau_s}\right]\right)$$

$$-\sigma_n\cdot\frac{T_n-248}{45}\cdot h_n\cdot J_s\left(1-\exp\left[\frac{t-t_n}{\tau_s}\right]\right)$$

La superposition est donc considérée non seulement sur la contrainte mais aussi sur la température et l'hygrométrie qui sont traitées mathématiquement de la même façon. D'où :

$$\varepsilon^{fl}(t)=\sum_{i=0}^{n}J_s.\left(1-\exp-\left[\frac{t-t_i}{\tau_s}\right]\right)\Delta\left(\sigma\cdot\frac{T-248}{45}\cdot h\right)_i$$

On a alors en écriture intégrale, la déformation de fluage d'une composante *s* de la série de Kelvin :

$$\varepsilon_s^{fl}(t)=\int_{\tau=t_0}^{t}J_s.\left(1-\exp-\left[\frac{t-\tau}{\tau_s}\right]\right)d\left(\sigma\cdot\frac{T-248}{45}\cdot h\right) \qquad \textbf{éq 3.7-1}$$

4 Relations de comportement *Code_Aster*

On introduit dans le *Code_Aster* trois relations de comportement associées au fluage propre :

- GRANGER_FP_V
- GRANGER_FP
- GRANGER_FP_INDT

La première tient compte de l'ensemble des effets (contrainte, température, hygrométrie et vieillissement), la deuxième ne tient pas compte du phénomène de vieillissement et la dernière ne tient compte ni du vieillissement ni de l'effet de la température. Elles sont disponibles en modélisation 2D, 3D et contraintes planes.

Les différents paramètres du modèle sont renseignés dans DEFI_MATERIAU. Sont renseignées sous le mot-clé GRANGER_FP, dont l'utilisation est commune aux relations de comportement GRANGER_FP et GRANGER_FP_V, les caractéristiques matériaux suivantes :

GRANGER_FP :

- les (2x8) constantes caractéristiques de la fonction de fluage J_i, τ_i,

  J1 : J_1
  TAUX_1 : τ_1
  .
  .
  .
  J8 : J_8
  TAUX_8 : τ_8

- la courbe de sorption-désorption donnant h en fonction de la variable séchage C

  FONC_DESORP : $\mathcal{C}'(C)$

- la constante d'énergie d'activation pour l'équivalence temps-température.

  QSR_K : $\dfrac{U_c}{R}$

Si on utilise la relation de comportement vieillissante alors on renseigne en plus le mot-clé V_GRANGER_FP sous lequel sont renseignées les caractéristiques associées au vieillissement, à savoir l'énergie d'activation pour le calcul du temps de chargement équivalent et la fonction de vieillissement $k(tc_{eq})$.

V_GRANGER_FP :

QSR_VEIL : $\dfrac{U_v}{R}$

FONC_V : $k(tc_{eq})$

Pour la loi `GRANGER_FP_INDT`, les paramètres à renseigner sous le mot-clé `GRANGER_FP_INDT` de `DEFI_MATERIAU` sont :

`GRANGER_FP_INDT :`

- les (2x8) constantes caractéristiques de la fonction de fluage J_i, τ_i,

  `J1` : J_1
  `TAUX_1` : τ_1
  .
  .
  .
  `J8` : J_8
  `TAUX_8` : τ_8

- la courbe de sorption-désorption donnant h en fonction de la variable séchage C

  `FONC_DESORP` : $\mathscr{C}'(C)$

5 Intégration numérique du modèle

5.1 Discrétisation (1D)

Posons $S = \sigma \cdot T' \cdot h$ $\qquad T' = \dfrac{T-248}{45}$

L'expression [éq 3.7-1] s'écrit donc :

$$\varepsilon_s^{fl}(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} J_s.(1-\exp-\left[\frac{t-\tau}{\tau_s}\right]).\frac{\partial S}{\partial \tau}.d\tau$$

La discrétisation en temps est telle que pour $t \in [t_{n-1,} t_n]$ on considère une évolution linéaire de S (décomposition de $S(t)$ en fonctions linéaires par morceau). On a alors :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}. \int_{\tau=t_{i-1}}^{t_i} J_s.\left(1-\exp-\left[\frac{t_n-\tau}{\tau_s}\right]\right)d\tau$$

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta S_i}{\Delta t_i} \cdot J_s \cdot \Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}\right) \cdot J_s \cdot \tau_s \cdot \left(\exp-\left[\frac{t_n-t_i}{\tau_s}\right] - \exp-\left[\frac{t_n-t_{i-1}}{\tau_s}\right]\right)$$

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n) = J_s \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot J_s \cdot \frac{\tau_s}{\Delta t_i} \cdot \left(\exp-\left[\frac{t_n-t_i}{\tau_s}\right]\right)\left(1-\exp-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right) \qquad \textbf{éq 5.1-1}$$

Remarque :

> *Notation* $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$.

Considérons maintenant les 8 modèles de Kelvin en série on a : $\varepsilon^{fl}(t_n) = \sum_{s=1}^{8} \varepsilon_s^{fl}(t_n) = \sum_{s} \varepsilon_s^{fl}(t_n)$

On peut alors décomposer la déformation de fluage [éq 5.1-1] sur la base des $\left\{1; \exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right)\right\}$ et réaliser une récurrence sur les coefficients de cette base. D'après [éq 5.1-1] on a à t_n :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_n) = J_s \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i}_{A_n^0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \frac{\tau_s}{\Delta t_i} \cdot J_s \cdot \left(\exp-\left[\frac{t_n - t_i}{\tau_s}\right]\right)\left(1-\exp-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right)}_{A_n^s} = J_s \cdot A_n^0 - A_n^s$$

A t_{n+1} on peut également écrire :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1}) = J_s \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \frac{1}{\Delta t_i} \cdot J_s \cdot \tau_s \cdot \left(\exp-\left[\frac{t_{n+1} - t_i}{\tau_s}\right]\right)\left(1-\exp-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right)$$
$$+ \Delta S_{n+1} \cdot J_s - \Delta S_{n+1} \cdot \frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}} \cdot J_s \cdot \left(1-\exp-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)$$

soit :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1}) = J_s \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \Delta S_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \frac{1}{\Delta t_i} \cdot J_s \cdot \tau_s \cdot \left(\exp-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right) \cdot \left(\exp-\left[\frac{t_n - t_i}{\tau_s}\right]\right)\left(1-\exp-\frac{\Delta t_i}{\tau_s}\right)$$
$$- \Delta S_{n+1} \cdot \frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}} \cdot J_s \cdot \left(1-\exp-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)$$

On peut donc écrire :

$$\varepsilon_s^{fl}(t_{n+1}) = J_s . A_n^0 + \Delta S_{n+1} \cdot J_s$$
$$- A_n^s \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right) - \Delta S_{n+1} \cdot \frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}} \cdot J_s \cdot \left(1-\exp-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right)$$

Posons $J = \sum_{s=1}^{8} J_s$,on a alors :

$$\varepsilon^{fl}(t_n) = J \cdot A_n^0 - \sum_{s=1}^{8} A_n^s \quad \text{et} \quad \varepsilon^{fl}(t_{n+1}) = J \cdot A_{n+1}^0 - \sum_{s=1}^{8} A_{n+1}^s$$

avec

$$\begin{cases} A_{n+1}^0 = A_n^0 + \Delta S_{n+1} \\ A_{n+1}^s = A_n^s \cdot \exp(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}) + \Delta S_{n+1} \cdot \frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}} \cdot J_s \cdot \left(1-\exp-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}\right) \end{cases}$$

Plus précisément, si :

- on prend en compte le temps équivalent pour la température et le vieillissement,
- au cours d'un pas de temps le paramètre T est évalué au milieu du pas de temps pour le calcul des temps équivalents t_{eq} et tc_{eq}, son évolution étant supposée linéaire au cours de ce pas de temps,

alors on a :

$$\varepsilon^{fl}(t_{n+1}) = J \cdot A^0_{n+1} - \sum_{s=1}^{8} A^s_{n+1}$$

avec

$$t_{eq}(t_{n+1}) - t_{eq}(t_n) = dt_{eq}(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{U_c}{R}\left(\frac{1}{T_{n+1/2}} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right)\Delta t_{n+1}$$

$$tc_{eq}(t_{n+1}) - tc_{eq}(t_n) = dtc_{eq}(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{U_v}{R}\left(\frac{1}{T_{n+1/2}} - \frac{1}{293}\right)\right)\Delta t_{n+1}$$

$$\begin{cases} A^0_{n+1} = A^0_n + k(tc_{eq}(t_{n+1/2}))\cdot \Delta S_{n+1} \\ A^s_{n+1} = A^s_n \cdot \exp(-\dfrac{\Delta t_{eq\,n+1}}{\tau_s}) + \Delta S_{n+1} \cdot \dfrac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}} \cdot J_s \cdot k(tc_{eq}(t_{n+1/2})) \cdot \left(1 - \exp - \dfrac{\Delta t_{eq\,n+1}}{\tau_s}\right) \end{cases}$$

Remarques :

- *Si on ne tient pas compte du vieillissement* k *alors* $A^0_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta S_i = S_{n+1}$,
- *on a noté* $X_{n+1/2} = \dfrac{X_{n+1} + X_n}{2}$,
- *on a noté* $\Delta t_{eq_{n+1}} = \Delta t_{eq}(t_{n+1})$.

Pour avoir ε_{fl} au temps t_{n+1}, il ne faut stocker que A_0 et les A_s du pas de temps précédent, soient 9 variables. En 3D A_0 et les A_s sont des tenseurs. On associera alors aux deux relations de comportement de fluage propre (9x6) variables internes correspondant aux composantes des tenseurs A. Elles caractérisent l'avancement du fluage.

L'écriture en incrément de déformation, plus proche de la programmation donne quant à elle :

$$\Delta\varepsilon^{fl}_s(t_{n+1}) = \varepsilon^{fl}_s(t_{n+1}) - \varepsilon^{fl}_s(t_n) = A^s_n\left(1 - \exp(-\frac{\Delta t_{eq\,n+1}}{\tau_s})\right)$$
$$+ \Delta S_{n+1} \cdot k(tc_{eq}(t_{n+1/2})) \cdot J_s \cdot \left(1 - \frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}} \cdot (1 - \exp - \frac{\Delta t_{eq_{n+1}}}{\tau_s})\right)$$

5.2 Intégration de la relation de comportement

Soit l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla(\Delta u) + \nabla^T(\Delta u)\right)$.

Si on tient compte, dans la partition de déformation, de la déformation thermique, des déformations associées au retrait endogène et au retrait de dessiccation, alors :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{fl} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{retend} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{retdés}$$

où :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e = H\boldsymbol{\sigma} & \text{: déformation élastique} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_{ref})\mathbf{I}_d & \text{: déformation thermique} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{retend} = -\beta\xi\mathbf{I}_d & \text{: déformation de retrait endogène} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{retdes} = -\kappa(C_{ref} - C)\mathbf{I}_d & \text{: déformation de retrait de dessiccation} \end{cases}$$

avec :

ξ : hydratation,
C : concentration en eau.
T_{ref} et C_{ref} : température et séchage de référence
H, α, β, κ : caractéristiques matériaux

Remarque :

Dans la suite du document, on notera $\Delta\varepsilon^A = \Delta\varepsilon^{th} + \Delta\varepsilon^{ret\,end} + \Delta\varepsilon^{ret\,des}$.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{2\mu}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fl}$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{fl}(t_{n+1}) = (1+\nu_f)\left(\mathrm{J}\cdot\tilde{\mathbf{A}}_{n+1}^0 - \sum_{s=1}^{8}\tilde{\mathbf{A}}_{n+1}^s\right)$$

il résulte que :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\left[1 + (2\mu)(1+\nu_f)\left(h\cdot T'\cdot k\left(tc_{eq_{n+1/2}}\right)\right)\cdot\sum_s J_s\left(1 - \left(\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}\right)\right)\right)\right] = \frac{2\mu}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$-(2\mu)(1+\nu_f)\left[\sum_s \tilde{\mathbf{A}}_n^s\left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}\right)\right) - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- \cdot h^- \cdot T'^-)\cdot k\left(tc_{eq_{n+1/2}}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\sum_s J_s\cdot\left(1 - \left(\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}\right)\right)\right)\right]$$

De même :

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 3K\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{th}) = \frac{3K}{3K^-}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^-) + 3K\,\mathrm{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e) - 3K\,\mathrm{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{fl}) - 3K\,\mathrm{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^A)$$

et

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{fl}) = (1-2\nu_f)\left(\mathrm{J}\cdot\mathbf{A}_n^0 - \sum_{s=1}^{8}\mathbf{A}_n^s\right)$$

d'où :

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\left[1+3K(1-2\nu_f)(h\cdot T'\cdot k(tc_{eq_{n+1/2}})\cdot\sum_s J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}\right)\right)\right)\right] = \frac{3K}{3K^-}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^-)$$

$$+3K\,\mathrm{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e) - 3K(1-2\nu_f)\left[\sum_s \mathrm{tr}(\mathbf{A}_n^s)\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{eq}^{(t_{n+1})}}{\tau_s}\right)\right) - (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^-\cdot h^-\cdot T'^-)\cdot k(tc_{eq_{n+1/2}})\cdot\right.$$

$$\left.\sum_s J_s\left(1-\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}\right)\right)\right)\right]$$

$$-3K\,\mathrm{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^A)$$

On en déduit alors σ puisque $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma\delta_{ij}$

5.3 Variables d'état

Les variables d'état des deux relations de comportement sont donc :

- $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$: tenseur des déformations,
- T : température,
- C : concentration en eau,
- ξ : hydratation,
- $\mathbf{A}_s$: tenseurs caractéristiques de l'avancement du fluage, soient 6x9 variables,
- tc_{eq} : temps de chargement équivalent, caractéristique de l'âge du béton.

Les $\mathbf{A}_s$ et tc_{eq} sont des variables internes des lois de comportement, lesquelles comportent donc 55 variables internes.

5.4 Matrice tangente

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\varepsilon}+\frac{1}{3}\frac{\partial(\mathrm{tr}\,\sigma)}{\partial\varepsilon}I_d$$

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\varepsilon} \qquad \frac{\partial\tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$\frac{\partial(\mathrm{tr}\,\sigma)}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial(\mathrm{tr}\,\sigma)}{\partial(\mathrm{tr}\,\varepsilon)}\frac{\partial(\mathrm{tr}\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \qquad \frac{\partial(\mathrm{tr}\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon_{ij}}=\delta_{ij}$$

Itération de Newton :

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tilde{\varepsilon}}\left[1+2\mu(1+\nu_f).h\cdot T'\cdot k(tc_{eq_{n+1/2}})\cdot\sum_s J_s\left(1-(\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}})(1-\exp(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}))\right)\right]=2\mu\mathbf{I}$$

avec $I_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$

$$\frac{\partial(\mathrm{tr}\,\sigma)}{\partial(\mathrm{tr}\,\varepsilon)}\left[1+3K(1-2\nu_f).h\cdot T'\cdot k(tc_{eq_{n+1/2}})\cdot\sum_s J_s\left(1-(\frac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}})(1-\exp(-\frac{\Delta t_{eq}(t_{n+1})}{\tau_s}))\right)\right]=3K\mathbf{I}$$

Phase de prédiction pour le pas de temps [tn, tn+1]

Remarque :

> *En 1D :* $\left(\frac{\partial\varepsilon_s^{fl}}{\partial t}\right)_{t_n}=\frac{A_s^-}{\tau_s}-J_s\cdot k(tc_{eq})\cdot\frac{\partial S}{\partial t}$.

Ecriture en vitesse à l'instant t_n :

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial t}\left[1+2\mu(1+\nu_f)(\sum_s J_s\cdot k(tc_{eq_n})\cdot T'^-\cdot h^-)\right]=2\mu\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial t}-2\mu(1+\nu_f)$$
$$\left[\sum_s\left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}_s^-}{\tau_s}-J_s\cdot k(tc_{eq_n})\cdot\tilde{\sigma}^-h^-\frac{dT'}{dt}-J_s\cdot k(tc_{eq_n})\cdot\tilde{\sigma}^-T'^-\frac{dh}{dt}\right)\right]$$

linéarisation pour la phase de prédiction du pas de temps $[tn, tn+1]$:

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\left[1+2\mu(1+\nu_f)(\sum_s J_s \cdot k(tc_{eq_n}) \cdot T'^- \cdot h^-)\right]=$$
$$2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-2\mu(1+\nu_f)\left[\sum_s \frac{\tilde{\mathbf{A}}_s^-}{\tau_s}\cdot\Delta t - J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- h^- \Delta T' - J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- T'^- \Delta h\right]$$

Ecriture en vitesse à l'instant tn :

$$\frac{\partial(\mathrm{tr}\sigma)}{\partial t}\left[1+3K(1-2\nu_f)(\sum_s J_s \cdot k(tc_{eq})\cdot T'^- \cdot h^-)\right]=3K\frac{\partial(\mathrm{tr}\varepsilon)}{\partial t}$$
$$-3K(1-2\nu_f)\left[\sum_s \frac{(\mathrm{tr}\mathrm{A}_s^-)}{\tau_s} - J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot(\mathrm{tr}\sigma^-)h^- \frac{dT'}{dt} - J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot(tr\sigma^-)T'^- \frac{dh}{dt}\right]$$
$$-3K(3\alpha\frac{dT}{dt})+3K(3\beta\frac{d\xi}{dt})+3K(3\kappa\frac{dC}{dt})$$

linéarisation pour la phase de prédiction du pas de temps $[tn, tn+1]$:

$$\Delta(\mathrm{tr}\sigma)\left[1+3K(1-2\nu_f)(\sum_s J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot T'^- \cdot h^-)\right]=3K\Delta(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})$$
$$-3K(1-2\nu_f)\left[\sum_s \frac{(\mathrm{tr}\mathbf{A}_s^-)}{\tau_s}\cdot\Delta t - J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^-)h^-\Delta T' - J_s \cdot k(tc_{eq_n})\cdot(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^-)T'^-\Delta h\right]$$
$$-3K(3\alpha\Delta T)+3K(3\beta\Delta\xi)+3K(3\kappa\Delta C)$$

Le fluage introduit donc un terme de second membre spécifique lors de la phase de prédiction qui en fait est négligé, sans conséquence sur les résultats.

6 Bibliographie

[1] L. GRANGER : Comportement différée du béton dans les enceintes de centrale nucléaire : analyse et modélisation. Thèse de Doctorat de l'ENPC (février 1995).

[2] CEB FIP Model (1990) General task group n°9, Evaluation of the time behaviour of concrete.

[3] J. LEMAITRE, J-L CHABOCHE : Mécanique des matériaux solides. Dunod.