

Manuel de Référence
Fascicule R7.06 :
Document : R7.06.01

Calcul des états limites cycliques avec Méthode ZAC

Résumé

Cette méthode est basée sur l'écroûissage cinématique linéaire. Elle donne une approximation pour l'état adapté et deux approximations pour l'état accommodé des caractéristiques en contrainte et en déformation des cycles limites, pour une structure sous chargement périodique thermo-mécanique dans le domaine de plasticité. Cela est fait à l'aide de trois calculs thermo-élastiques pour des coûts calcul faibles.

1 Introduction

Sous un chargement périodique, l'évolution de la déformation, ou du déplacement, en fonction du nombre de cycles des différents points d'une structure se concrétise sous trois formes : l'adaptation, où tous les points de la structure atteignent un état limite stable élastique ; l'accommodation, où au moins un point de la structure atteint un état limite stable élastoplastique ; et le rochet où pour au moins un point il y a un incrément constant de la déformation à chaque cycle. Pour un matériau décrit par une loi d'écrouissage cinématique linéaire on ne peut obtenir que de l'accommodation ou de l'adaptation.

Pour étudier les problèmes de fatigue ou de déformation progressive, pour une structure, on a généralement besoin de connaître l'état de contraintes et de déformations à l'état limite, c'est-à-dire les valeurs des amplitudes de déformation et de contrainte ainsi que la contrainte moyenne pour la fatigue, et la valeur de la déformation maximale pour la déformation progressive. Ces valeurs peuvent être obtenues à l'aide d'une loi de comportement cyclique. Néanmoins si l'état limite est obtenu après un nombre important de cycles les calculs peuvent être très longs.

Le post-processeur POST_ZAC fournit une approximation des caractéristiques en contrainte et en déformation citées ci-dessus. Plus précisément il propose deux estimations pour chaque caractéristique en contrainte ou en déformation. La durée des calculs correspond à 3 ou 4 calculs élastiques. Il faut noter que dans le modèle proposé les constantes sont indépendantes de la température. Dans le cas où la température varie il faut choisir les constantes du matériau à une température optimale pour les calculs.

2 Matériaux à écrouissage cinématique linéaire sous chargement périodique

On se place dans le cas d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire strictement positif et l'on fait les hypothèses suivantes :

- Evolution quasi-statique ;
- Déformations infinitésimales ;
- Le matériau est à élasticité linéaire indépendante de la température ;
- Chargements périodiques (thermique T , forces internes f , forces externes F sur $\partial\Omega_F$, déplacements imposés U sur $\partial\Omega_U$) sur la structure Ω et de frontière $\partial\Omega$;
- D'autre part, on suppose que le domaine d'élasticité est défini par le critère de Von Mises :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\tilde{\sigma} - \alpha) \cdot (\tilde{\sigma} - \alpha)} \leq \sigma_y \equiv \|\tilde{\sigma} - \alpha\| \leq \sigma_y,$$

avec le déviateur des contraintes $\tilde{\sigma} = \sigma_{ij} - 1/3 \text{tr}(\sigma) \delta_{ij}$, la limite d'élasticité σ_y , la variable interne $\alpha = C \varepsilon^p$ où $C = 2/3 h$ ($h = E E_T / (E - E_T)$) où E_T est la pente de la courbe de traction pendant l'écrouissage et où ε^p est la déformation plastique.

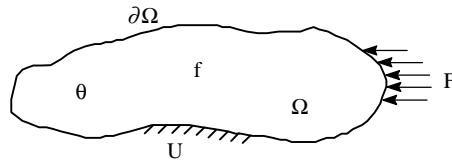


Figure 2-a : Types de chargements de la structure

Dans ce cadre et sous les hypothèses ci-dessus on a le théorème suivant [bib1] :

Théorème : (Melan généralisé). Toute solution du problème d'évolution tend vers une solution périodique en contrainte et en déformation. Si l'amplitude locale de déformation plastique est nulle on dit qu'il y a adaptation locale, sinon on dit qu'il y a accommodation locale. Si au moins un point de la structure est accommodé on dit que la structure est accommodée.

3 Présentation de la méthode simplifiée, ZAC

La méthode ZAC [bib2], [bib3] est une méthode qui est basée sur le modèle d'écrouissage cinématique linéaire et qui donne de façon simplifiée et peu coûteuse des approximations des caractéristiques du cycle limite en contrainte et en déformation plastique.

Pour le cas adapté, on a pour chaque composant les valeurs de : l'amplitude de contrainte, de la contrainte moyenne et de la déformation plastique limite.

Pour le cas accommodé pour chaque composant, on a deux valeurs pour l'amplitude de la contrainte, deux valeurs pour l'amplitude de la déformation plastique, une valeur pour la contrainte moyenne et une valeur pour la déformation plastique moyenne.

On peut résumer la méthode de la manière suivante :

On décompose la contrainte comme la somme d'un premier terme représentant la contrainte calculée avec un comportement élastique σ^{el} et d'un second appelé contrainte résiduelle ρ . En terme de déviateurs, cela s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{el} + \tilde{\rho}.$$

L'usage du paramètre interne modifié permettra de construire en chaque point l'état limite de la structure, **indépendamment** de ce qui se passe pour les autres points.

Le critère de plasticité étant :

$$\|\tilde{\sigma} - \alpha\| \leq \sigma_y$$

l'idée-clé de la méthode est de faire des calculs découplés en chaque point de la structure. Pour ce faire, on introduit le paramètre modifié :

$$\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\rho}.$$

s'écrit alors :

$$\|\tilde{\sigma}^{el} - \hat{\alpha}\| \leq \sigma_y.$$

La simplification introduite par la méthode ZAC réside dans la façon de calculer $\hat{\alpha}$ à l'état limite, en chaque point indépendamment les uns des autres et de ramener le calcul à 3 ou 4 calculs élastiques. L'approximation de $\hat{\alpha}$ à l'état limite, $\hat{\alpha}_{lim}$, est déterminée différemment selon qu'il y a adaptation ou accommodation. Cette approximation est obtenue à partir de la valeur initiale du tenseur $\hat{\alpha}$, qui est noté $\hat{\alpha}_0$.

Ainsi, pour résumer, si le problème thermo-élastoplastique d'origine s'écrit :

$$(P1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma = f, & \sigma \cdot n = F, & \text{sur } \partial \Omega_F \\ \varepsilon = 1/2(\nabla U + \nabla^t U), & U = 0 & \text{sur } \partial \Omega_U \\ \sigma = K(\varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon_{th}), \end{cases}$$

+ loi standard de comportement élasto-plastique en cinématique linéaire.

Le problème thermo-élastique associé s'écrit :

$$(P2) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma^{el} = f, & \sigma^{el} \cdot n = F, & \text{sur } \partial \Omega_F \\ \varepsilon^{el} = 1/2(\nabla U^{el} + \nabla^t U^{el}), & U^{el} = 0 & \text{sur } \partial \Omega_U \\ \sigma^{el} = K(\varepsilon^{el} - \varepsilon_{th}), \end{cases}$$

Et en faisant la différence entre ces deux ensembles d'équations en utilisant la relation $\hat{\alpha} = C \varepsilon^p - \tilde{\rho}$, ainsi que les définitions suivantes :

$\rho = \sigma - \sigma^{el}$, $\varepsilon^{ine} = \varepsilon - \varepsilon^{el}$ et $U^{ine} = U - U^{el}$ on retrouve le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \rho = 0, & \rho \cdot n = 0, & \text{sur } \partial \Omega_F \\ \varepsilon^{ine} = 1/2(\nabla U^{ine} + \nabla^t U^{ine}), & U^{ine} = 0 & \text{sur } \partial \Omega_U \\ \varepsilon^{ine} = (K^{-1} \rho + \tilde{\rho} / C) + \frac{\hat{\alpha}}{C} = \sigma - \sigma^{el} = K(\xi - \xi^{el} - \xi^p) \end{cases}$$

C'est un problème élastique avec une déformation initiale égale à $\frac{\hat{\alpha}}{C}$ où ρ , ε^{ine} et U^{ine} sont les inconnues.

4 Passage dans l'espace des paramètres modifiés et construction locale de la solution

Dans la suite on distinguera les cas où il y a un **état initial** nul ou non au sens de la méthode ZAC. Dans le cas d'un état initial nul le tenseur $\hat{\alpha}_0$ est pris égal à zéro. On distinguera de même les cas où le trajet chargement en chaque point du solide est **affine** (souvent nommé radial dans le cas de cette méthode) ou **non affine**. Par conséquent, on donne la définition de ces deux notions.

Définition 1 : Etat initial non nul au sens de la méthode ZAC.

On dit que l'on a un état initial non nul lorsque l'on fait un calcul incrémental élastoplastique jusqu'à un niveau de chargement donné et que l'on calcule $\hat{\alpha}_0 = C \varepsilon^P - \tilde{\rho}$. Le niveau du chargement considéré est généralement le niveau du chargement maximal (Il est souhaitable de prendre en compte un état initial non nul lorsque, par exemple, le premier cycle de chargement entraîne une déformation importante de la structure.)

Définition 2 : Trajet de chargement affine au sens de la méthode ZAC.

On dit qu'un trajet chargement est affine si en chaque point de la structure, pour un comportement élastique, le trajet des contraintes est affine.

4.1 Adaptation et accommodation dans le cas d'un chargement affine

En un point x de la structure Ω , on définit $F^{el}(x)$, tel que :

$$F^{el}(x) = \max_{t_0, t_1} \left\| \tilde{\sigma}^{el}(x, t_0) - \tilde{\sigma}^{el}(x, t_1) \right\| \equiv \left\| \tilde{\sigma}_{max}^{el}(x) - \tilde{\sigma}_{min}^{el}(x) \right\|,$$

où $\tilde{\sigma}^{el}(x, t)$ est le tenseur déviatorique des contraintes élastiques au point x et à l'instant t et où les instants t_0 et t_1 correspondent aux **extrema** du cycle de chargement. L'instant t_0 peut être égal à zéro. On définit F^{el} tel que :

$$F^{el} = \max_{x \in \Omega} F^{el}(x) = \max_{x \in \Omega} \left\| \tilde{\sigma}_{max}^{el}(x) - \tilde{\sigma}_{min}^{el}(x) \right\|.$$

La comparaison de F^{el} avec la valeur de la limite d'élasticité du matériau permet de savoir si l'état limite de la structure est de type **adapté** ou **accommodé** :

$$\begin{aligned} F^{el} &\leq 2\sigma_y && \text{adaptation} \\ F^{el} &> 2\sigma_y && \text{accommodation.} \end{aligned}$$

4.1.1 Cas de l'adaptation

Si la structure est adaptée, il existe un champ limite, fixe en temps, de paramètres modifiés $\hat{\alpha}$, noté $\hat{\alpha}_{lim}$, tel que $\hat{\alpha}_{lim}$ appartient à l'intersection C_L des deux convexes de centre $\tilde{\sigma}_{min}^{el}$ et $\tilde{\sigma}_{max}^{el}$ et de rayon σ_y , voir la figure [Figure 4.1-a], [bib3], [bib4].

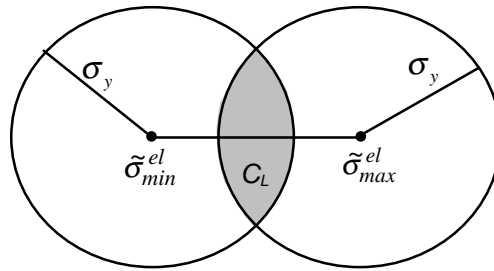


Figure 4.1-a : L'intersection des deux convexes C_L , dans le cas de l'adaptation.

Dans le cas de l'**adaptation** la valeur limite de $\hat{\alpha}$, notée $\hat{\alpha}_{lim}$ est déterminée par la projection orthogonale de $\hat{\alpha}_0$ initial, noté $\hat{\alpha}_0$ sur le convexe C_L selon les règles présentées sur les figures [Figure 4.1-b], [Figure 4.1-c], [Figure 4.1-d].

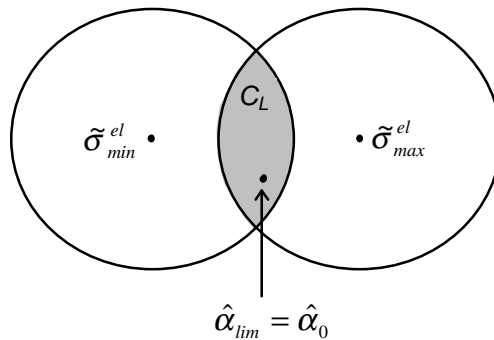


Figure 4.1.b : Cas où $\hat{\alpha}_0$ est strictement inclus dans le convexe C_L

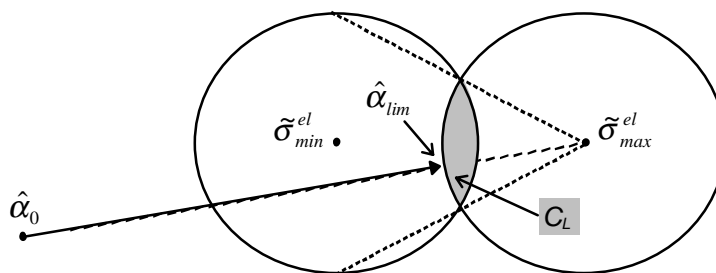
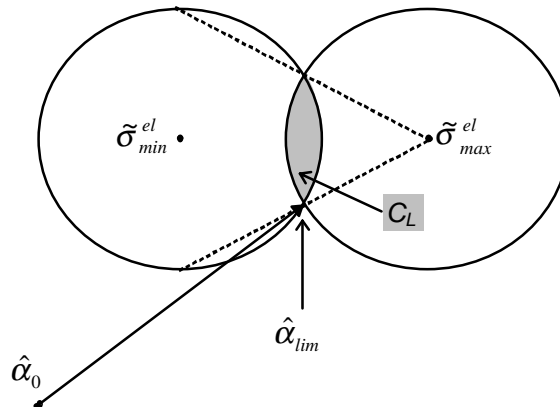


Figure 4.1-c : Cas où $\hat{\alpha}_0$ n'appartient pas au convexe C_L , mais appartient au cône de sommet $\tilde{\sigma}_{max}^{el}$ (ou $\tilde{\sigma}_{min}^{el}$) $\hat{\alpha}_{lim}$ est sur le bord du convexe C_L



**Figure 4.1-d : Cas où $\hat{\alpha}_0$ n'appartient ni au convexe C_L ,
ni au cône de sommet $\tilde{\sigma}_{max}^{el}$, $\hat{\alpha}_{lim}$ est sur le bord du convexe C_L**

Dans le cas de l'adaptation, on peut prendre un **état initial nul** $\hat{\alpha}_0 = 0$, ou bien on fait un calcul élastoplastique incrémental qui permet d'avoir un **état initial non nul** $\hat{\alpha}_0 = C \varepsilon^P - \tilde{\rho}$ pour trouver souvent un meilleur résultat.

4.1.2 Cas de l'accommodation

Lorsque la structure est accommodée, c'est-à-dire qu'en au moins un des points de la structure les deux convexes de centre $\tilde{\sigma}_{min}^{el}$ et $\tilde{\sigma}_{max}^{el}$ ont une intersection vide, on est conduit à définir les trois grandeurs qui suivent, aux points où il y a accommodation :

- 1) le paramètre d'écrouissage interne modifié moyen, noté $\hat{\alpha}_{moy}$;
- 2) l'amplitude du paramètre d'écrouissage interne modifié inférieure, notée $\Delta\hat{\alpha}_{inf}$;
- 3) l'amplitude du paramètre d'écrouissage interne modifié supérieure, notée $\Delta\hat{\alpha}_{sup}$.

Ces trois grandeurs sont représentées sur la figure [Figure 4.1-e].

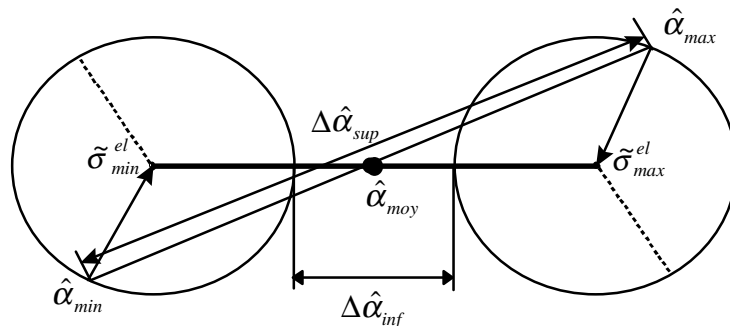


Figure 4.1-e : Représentation de $\hat{\alpha}_{moy}$, $\Delta\hat{\alpha}_{inf}$ et $\Delta\hat{\alpha}_{sup}$

On calcule les deux premières grandeurs $\hat{\alpha}_{moy}$ et $\Delta\hat{\alpha}_{inf}$ comme suit :

$$\hat{\alpha}_{moy} = \frac{\tilde{\sigma}_{min}^{el} + \tilde{\sigma}_{max}^{el}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\hat{\alpha}_{inf} = \left(\tilde{\sigma}_{max}^{el} - \tilde{\sigma}_{min}^{el} \right) \left(1 - \frac{2\sigma_y}{\|\tilde{\sigma}_{max}^{el} - \tilde{\sigma}_{min}^{el}\|} \right)$$

Calcul de $\Delta\hat{\alpha}_{sup}$

Le calcul de $\Delta\hat{\alpha}_{sup}$ représenté sur la figure [Figure 4.1-e] est donné ci-dessous :

En chaque point de la structure, si il y a plastification, on a :

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\tilde{\sigma} - \alpha}{\|\tilde{\sigma} - \alpha\|} \quad \text{avec } \lambda > 0$$

On peut alors écrire, en terme de paramètre modifié, que :

$$\dot{\varepsilon}^p = -\lambda \frac{\hat{\alpha} - \tilde{\sigma}^{el}}{\|\hat{\alpha} - \tilde{\sigma}^{el}\|}, \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

Comme $\|\tilde{\sigma} - \alpha\| = \|\hat{\alpha} - \tilde{\sigma}^{el}\| = \sigma_y$, en chaque point où il y a plastification, $\hat{\alpha}$ est sur le bord d'une boule de centre $\tilde{\sigma}^{el}$ et de rayon σ_y [Figure 4.1-e]. La grandeur $\dot{\varepsilon}^p$ est la normale intérieure à cette boule au point $\hat{\alpha}$.

On suppose que dans le cas où l'on va très loin en écrouissage, on a : $\dot{\hat{\alpha}} = \dot{\tilde{\sigma}}^{el}$, [bib3].

Pour un chargement affine, cela revient à dire que quand on passe de σ_{min}^{el} à σ_{max}^{el} on a $\Delta\hat{\alpha} = \tilde{\sigma}_{max}^{el} - \tilde{\sigma}_{min}^{el} = \Delta\tilde{\sigma}^{el}$, c'est-à-dire que la direction de déplacement de $\hat{\alpha}$ est égale à $\Delta\tilde{\sigma}^{el}$. De la résolution du problème élastique homogène (P) avec les constantes modifiées et la déformation initiale $\Delta\tilde{\sigma}^{el}/C$, cf. [§3], on déduit $\Delta\varepsilon^p$ et donc une direction pour $\dot{\varepsilon}^p$. En tenant le même raisonnement lorsque l'on passe de $\tilde{\sigma}_{max}^{el}$ à $\tilde{\sigma}_{min}^{el}$, on obtient $\Delta\hat{\alpha} = -\Delta\tilde{\sigma}^{el}$, ce qui donne à $\dot{\varepsilon}^p$ la direction opposée au précédent cas, (cf. [Figure 4.1-e]). On prend finalement $\Delta\hat{\alpha}_{sup} = |\hat{\alpha}_{min} - \hat{\alpha}_{max}|$.

4.2 Adaptation et accommodation dans le cas d'un chargement non affine

Lorsque le chargement est **non affine** la méthode ZAC n'est opérationnelle que dans le cas de l'**adaptation**.

Cas de l'adaptation

Au point x on considère l'intersection des boules de centre $\tilde{\sigma}^{el}(x, t)$ sur une période. Dans le cas de l'adaptation cette intersection est non vide et convexe. On définit donc, comme dans le cas affine, $\hat{\alpha}_{lim}$ par la projection de $\hat{\alpha}_0$ sur ce convexe, [bib3], [bib4]. La méthode de projection utilisée dans le *Code_Aster* est la projection successive sur l'intersection deux à deux des sphères.

Cas de l'accommodation

Dans ce cas les règles proposées ne sont pas rigoureuses [bib5] et il n'y a pas d'option associée dans le *Code_Aster*. On utilisera des approximations affines du chargement dans ce cas.

5 Retour dans l'espace des paramètres d'origine

Une fois que l'on a calculé $\hat{\alpha}_{lim}$, $\hat{\alpha}_{moy}$, $\Delta\hat{\alpha}_{inf}$ et $\Delta\hat{\alpha}_{sup}$ on a une déformation initiale pour le problème (P) du [§3] qui pourra prendre tour à tour les valeurs suivantes :

$$\frac{\hat{\alpha}_{lim}}{C}, \frac{\hat{\alpha}_{moy}}{C}, \frac{\Delta\hat{\alpha}_{inf}}{C} \text{ et } \frac{\Delta\hat{\alpha}_{sup}}{C}.$$

On résout alors le problème (P) avec les déformations initiales ci-dessus pour obtenir :

- 1) dans le cas de l'adaptation : U_{lim} , ρ_{lim} , σ_{lim} et ε_{lim}^p ;
- 2) dans le cas de l'accommodation : U_{moy} , ρ_{moy} , σ_{moy} , ε_{moy}^p , ΔU_{inf} , $\Delta\rho_{inf}$, $\Delta\sigma_{inf}$, $\Delta\varepsilon_{inf}^p$, ΔU_{sup} , $\Delta\rho_{sup}$, $\Delta\sigma_{sup}$ et $\Delta\varepsilon_{sup}^p$.

6 Opérateur POST_ZAC dans le Code_Aster

L'opérateur post-processeur POST_ZAC a besoin des données suivantes : le modèle, le matériau, et les deux instants du chargement. Dans le cas où l'état initial est nul ($\hat{\alpha}_0 = 0$) on utilise le concept EVOL_ELAS. Dans le cas où l'état initial n'est pas nul, $\hat{\alpha}_0 = C \varepsilon^P - \tilde{\rho}$ étant obtenu à partir d'un calcul élastoplastique, on utilise en plus le concept EVOL_NOLI.

A la sortie POST_ZAC donne : U_{lim} , ρ_{lim} , σ_{lim} et ε_{lim}^P dans le cas où il y a adaptation et donne : U_{moy} , ρ_{moy} , σ_{moy} , ε_{moy}^P , ΔU_{inf} , $\Delta \rho_{inf}$, $\Delta \sigma_{inf}$, $\Delta \varepsilon_{inf}^P$, ΔU_{sup} , $\Delta \rho_{sup}$, $\Delta \sigma_{sup}$ et $\Delta \varepsilon_{sup}^P$ dans le cas où il y a accommodation. Le document U associé est [U4.74.05].

Le cas test associé à la méthode est : SSNA100 [V6.01.100].

7 Bibliographie

- [1] « Problèmes quasistatiques en viscoplasticité » de B. Halphen, Thèse de doctorat d'état ès sciences mathématiques présentée à l'université Pierre et Marie Curie Paris VI, 1978.
- [2] J. Casier, Thèse de docteur-ingénieur, Paris 1977.
- [3] « Méthode ZAC » de S. TAHERI, Note EDF-DER HI-71/6139, 1989.
- [4] « Etudes sur la méthode ZARKA pour une analyse à la fatigue » de M.F. ROBBE et B. AUTRUSSON, rapport CEA/DRN/DMT 93/361, 1993.
- [5] « Analyse simplifiée des structures élasto-visco-plastiques sous chargements cycliques » de G. INGLEBERT, Thèse d'état Paris VI, 1983.
- [6] « RCC-MR Règles de conception et de construction des matériels des chaudières nucléaires RNR AFCEN », édition 1985.