Organisme(s) : *EDF/IMA/MMN*

Manuel de Référence
Fascicule R5.01 : Analyse modale
Document R5.01.03 :

Paramètres modaux et norme des vecteurs propres

Résumé :

Dans ce document, on décrit :

- les différentes possibilités dans le *Code_Aster* pour normer les modes propres,
- les paramètres modaux importants associés aux modes propres.

Table des matières

1 Définition du problème aux valeurs propres

1.1 Généralités

Soit le problème aux valeurs propres suivant :

Trouver

$$(\lambda,\mathbf{\Phi}) \in C \times C^n \quad / \quad \left(\lambda^2\ \mathbf{B} + \lambda\ \mathbf{C} + \mathbf{A}\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \qquad \textbf{éq 1.1-1}$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}$ sont des matrices réelles symétriques positives d'ordre n.

On distingue deux cas :

- problème quadratique : $\mathbf{C} \neq 0$,
- problème généralisé : $\mathbf{C} = 0$.

λ est appelé valeur propre et $\mathbf{\Phi}$ vecteur propre. Dans la suite, on parlera de mode propre pour $\mathbf{\Phi}$ et on introduira la notion de fréquence propre.

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes sont disponibles dans le *Code_Aster* et on renvoie le lecteur aux documents [R5.01.01] et [R5.01.02].

1.2 Problème généralisé

Le problème généralisé peut s'écrire sous la forme :

Trouver

$$(\lambda,\mathbf{\Phi}) \in \Re \times \Re^n \quad / \quad \left(-\lambda^2\ \mathbf{B} + \mathbf{A}\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \qquad \textbf{éq 1.2-1}$$

On introduit deux autres grandeurs qui permettent de caractériser le mode propre :

$$\lambda = \omega = (2\pi\ f) \qquad \textbf{éq 1.2-2}$$

où

ω : pulsation propre associée au mode propre $\mathbf{\Phi}$,
f : fréquence propre associée au mode propre $\mathbf{\Phi}$.

On montre également que les modes propres sont $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}^{iT}\ \mathbf{A}\ \mathbf{\Phi}^j = \delta_{ij}\ \mathbf{\Phi}^{iT}\ \mathbf{A}\ \mathbf{\Phi}^i \\ \mathbf{\Phi}^{iT}\ \mathbf{B}\ \mathbf{\Phi}^j = \delta_{ij}\ \mathbf{\Phi}^{iT}\ \mathbf{B}\ \mathbf{\Phi}^i \end{cases} \qquad \textbf{éq 1.2-3}$$

où $\left(\mathbf{\Phi}^i\ ,\mathbf{\Phi}^j\right)$ sont deux modes propres.

1.3 Problème quadratique

Le problème quadratique [éq 1.1-1] peut se mettre sous une autre forme de taille double (on parle de réduction linéaire [R5.01.02]) :

Trouver

$$(\lambda, \mathbf{\Phi}) \in C \times C^n \quad / \quad \left(\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda\, \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \textbf{éq 1.3-1}$$

On pose dans la suite : $\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$.

Comme les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}$ sont réelles, les valeurs et modes propres sont imaginaires conjugués deux à deux.

On introduit trois autres grandeurs qui permettent de caractériser le mode propre :

$$\lambda = a + i\, b = -\frac{\xi\, \omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + i\, \omega = -\frac{\xi\,(2\pi\, f)}{\sqrt{1-\xi^2}} + i\,(2\pi\, f) \qquad \textbf{éq 1.3-2}$$

où ω : pulsation propre associée au mode propre Φ,
f : fréquence propre associée au mode propre Φ,
ξ : amortissement réduit.

On montre également que les modes propres sont $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (\lambda_i + \lambda_j)\, \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^j + \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}^j = \delta_{ij} \left(2\, \lambda_i\, \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^i + \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}^i \right) \\ -\lambda_i\, \lambda_j\, \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^j + \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{A}\, \mathbf{\Phi}^j = \delta_{ij} \left(-\lambda_i^2\, \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^i + \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{A}\, \mathbf{\Phi}^i \right) \end{cases} \qquad \textbf{éq 1.3-3}$$

où (λ_i, λ_j) sont les valeurs propres associées respectivement aux modes propres $(\mathbf{\Phi}^i, \mathbf{\Phi}^j)$.

Remarque :

les modes propres ne sont donc pas $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ou $\mathbf{C}$ *orthogonaux.*

2 Norme des modes propres du problème généralisé

On suppose avoir calculé un couple $(\lambda, \boldsymbol{\Phi})$ solution du problème [éq 1.2-1] : λ est la valeur propre associée au mode propre $\boldsymbol{\Phi}$. On considère pour l'instant seulement le cas du problème généralisé.

Dans le *Code_Aster*, la commande `NORM_MODE` [U4.06.02] permet d'imposer un type de normalisation pour l'ensemble des modes.

2.1 Composantes d'un mode propre

Soit un mode propre $\boldsymbol{\Phi}$ de composantes $\left(\boldsymbol{\Phi}_j\right)_{j=1,n}$.

Parmi ces composantes, on distingue :

- les composantes ou degrés de liberté appelés "physiques" (ce sont par exemple les degrés de liberté de déplacement (`DX,DY,DZ`), les degrés de liberté de rotation (`DRX,DRY,DRZ`), le potentiel caractérisant un fluide irrotationnel (`PHI`), ...),
- les composantes de Lagrange (les paramètres de Lagrange sont des inconnues supplémentaires qui sont rajoutées au problème "physique" initial afin que les conditions aux limites soient vérifiées [R3.03.01]).

Dans le *Code_Aster*, on dispose de trois familles de normes :

- norme euclidienne,
- norme : "plus grande composante à 1" parmi un groupe de degrés de liberté défini,
- norme masse ou rigidité généralisée unitaire.

On les décrit successivement.

Auparavant, on définit L une famille d'indices qui contient m termes :

$$L = \left\{ l_k \, , \, k = 1, m \quad \text{avec} \quad 1 \le l_k \le n \right\} \text{ et } 1 \le m \le n.$$

2.2 Norme euclidienne

On définit la norme suivante : $\|\boldsymbol{\Phi}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\boldsymbol{\Phi}_{l_k} \right)^2 \right)^{1/2}$

On obtient alors le vecteur normé $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$: $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}\|_2} \boldsymbol{\Phi} \qquad \left(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_j = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}\|_2} \boldsymbol{\Phi}_j \quad j = 1, n \right).$

Dans le *Code_Aster* , deux normes de cette famille sont disponibles :

- `NORME='EUCL'` : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique,
- `NORME='EUCL_TRAN'` : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique de déplacement en translation (`DX,DY,DZ`).

2.3 Norme "plus grande composante à 1"

On définit la norme suivante : $\|\boldsymbol{\Phi}\|_\infty = \max\limits_{k=1,m} \left|\boldsymbol{\Phi}_{l_k}\right|$

On obtient alors le vecteur normé $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$: $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}\|_\infty}\boldsymbol{\Phi}$ $\left(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_j = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}\|_\infty}\boldsymbol{\Phi}_j \quad j=1,n\right)$.

Dans le *Code_Aster* , cinq normes de cette famille sont disponibles :

- `NORME='SANS_CMP=LAGR'` : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique,
- `NORME='TRAN'` : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique de déplacement en translation (`DX,DY,DZ`),
- `NORME='TRAN_ROTA'` : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique de déplacement en translation et en rotation (`DX,DY,DZ,DRX,DRY,DRZ`),
- `NORME='AVEC_CMP'` ou `'SANS_CMP'` : L est construit soit en prenant tous les indices qui correspondent à des types de composantes stipulés par l'utilisateur (par exemple le type déplacement suivant l'axe x : 'DX') (`NORME='AVEC_CMP'`), soit en prenant le complémentaire de tous les indices qui correspondent à des types de composantes stipulés par l'utilisateur (`NORME='SANS_CMP'`),
- `NORME='NOEUD_CMP'`: L correspond à un seul indice qui caractérise une composante d'un noeud du maillage. Le nom du noeud et de la composante sont spécifiés par l'utilisateur (mots-clé `NOM_CMP` et `NOEUD` de la commande `NORM_MODE` [U4.64.02]).

Par défaut les modes sont normés avec la norme `'SANS_CMP=LAGR'.`

2.4 Norme masse ou rigidité généralisée unitaire

Soit une matrice définie positive d'ordre n. On définit la norme suivante : $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathbf{E}} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\ \mathbf{E}\ \boldsymbol{\Phi}\right)^{1/2}$

On obtient alors le vecteur normé $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$: $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathbf{E}}}\boldsymbol{\Phi}$ $\left(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_j = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathbf{E}}}\boldsymbol{\Phi}_j \quad j=1,n\right)$.

Dans le *Code_Aster* , deux normes de cette famille sont disponibles :

- `NORME='MASSE_GENE'`: $\mathbf{E}=\mathbf{B}$. Dans un problème classique de vibration, B est la matrice de masse.
- `NORME='RIGI_GENE'` : $\mathbf{E}=\mathbf{A}$. Dans un problème classique de vibration, A est la matrice de rigidité.

Remarque :

> *Pour un mode* $\boldsymbol{\Phi}$ *de corps rigide, on a :* $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathbf{E}} = \|\boldsymbol{\Phi}\|_{\mathbf{A}} = 0$

3 Norme des modes propres du problème quadratique

3.1 Normes euclidienne et "plus grande composante à 1"

Pour le problème quadratique, on dispose des mêmes normes que pour le problème généralisé. Les modes propres étant complexes, on travaille avec le produit hermitien. Les différentes normes "classiques" deviennent :

- norme hermitienne : $\|\mathbf{\Phi}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\overline{\mathbf{\Phi}}_{l_k} \; \mathbf{\Phi}_{l_k} \right) \right)^{1/2}$ où $\overline{\mathbf{\Phi}}_{l_k}$ est le conjugué de $\mathbf{\Phi}_{l_k}$,
- norme "plus grande composante à 1" : $\|\mathbf{\Phi}\|_\infty = \max_{k=1,m} \left| \mathbf{\Phi}_{l_k} \right| = \max_{k=1,m} \left(\left(\overline{\mathbf{\Phi}}_{l_k} \; \mathbf{\Phi}_{l_k} \right)^{1/2} \right)$ (la valeur absolue dans le domaine réel devient le module dans le domaine complexe).

3.2 Norme masse ou rigidité généralisée unitaire

En ce qui concerne la norme "masse ou rigidité généralisée", dénomination par analogie avec le problème généralisé, on utilise comme matrice associée à la norme, celle qui intervient dans l'écriture du problème quadratique mis sous la forme réduite [éq 1.3-1].

On a alors :

- norme masse généralisée :

$$\|\mathbf{\Phi}\|_{\widehat{\mathbf{B}}} = \left(\lambda \, \mathbf{\Phi}^T , \mathbf{\Phi}^T \right) \widehat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \lambda \, \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \left(\lambda \, \mathbf{\Phi}^T , \mathbf{\Phi}^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \, \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = 2 \, \lambda \, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B} \, \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \, \mathbf{\Phi},$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{\|\mathbf{\Phi}\|_{\widehat{\mathbf{B}}}} \mathbf{\Phi} ,$$

- norme rigidité généralisée :

$$\|\mathbf{\Phi}\|_{\widehat{\mathbf{A}}} = \left(\lambda \, \mathbf{\Phi}^T , \mathbf{\Phi}^T \right) \widehat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \lambda \, \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \left(\lambda \, \mathbf{\Phi}^T , \mathbf{\Phi}^T \right) \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \, \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = -\lambda^2 \; \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B} \, \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{A} \, \mathbf{\Phi},$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{\|\mathbf{\Phi}\|_{\widehat{\mathbf{A}}}} \mathbf{\Phi} \, .$$

4 Paramètres modaux associés pour le problème généralisé

On se place dans le cas d'un problème généralisé classique de vibration. On a :

- $\mathbf{A}=\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité,
- $\mathbf{B}=\mathbf{M}$ est la matrice de masse.

Soit un couple $(\lambda,\mathbf{\Phi})$ solution du problème :

$$\left(-\lambda^2\ \mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\mathbf{\Phi}=\mathbf{0} \qquad \textbf{éq 4-1}$$

Dans la suite, on définit successivement les grandeurs suivantes :

- grandeurs généralisées,
- masse modale effective et masse modale effective unitaire,
- facteur de participation.

Pour connaître les noms des paramètres associés aux modes propres et comment y accéder dans la structure de données `RESULTAT mode_meca`, on renvoie le lecteur au document [U5.01.23].

4.1 Grandeurs généralisées

4.1.1 Définition

On définit deux grandeurs généralisées :

- Masse généralisée du mode $\mathbf{\Phi}$: $m_{\Phi}=\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}$,
- Rigidité généralisée du mode $\mathbf{\Phi}$: $k_{\Phi}=\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\ \mathbf{\Phi}$.

Ces quantités dépendent de la normalisation de $\mathbf{\Phi}$. Ces grandeurs sont accessibles dans le concept `RESULTAT` de type `mode_meca` [U5.01.23] sous les noms `MASS_GENE, RIGI_GENE`.

Remarque 1 :

> *On a la relation suivante entre la pulsation (ou la fréquence) du mode et la masse et rigidité généralisées du mode :*
>
> $$\lambda=\omega=\left(2\pi\ f\right)=\frac{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\ \mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}}=\frac{k_{\Phi}}{m_{\Phi}}.$$

Remarque 2 :

> *Du point de vue physique, la masse généralisée (qui est une valeur positive) peut s'interpréter comme la masse en mouvement :*
>
> $m_{\Phi}=\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}=\int\rho\ \mathbf{\Phi}^2$ *où* ρ *est la densité de la structure.*
>
> *L'énergie cinétique de la structure vibrant selon le mode* $\mathbf{\Phi}$ *est égale alors à :*
>
> $$E_c=\frac{1}{2}\omega^2\ m_{\Phi}=\frac{1}{2}\omega^2\ \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}.$$
>
> *L'énergie potentielle de déformation associée au mode* $\mathbf{\Phi}$ *est égale à :*
>
> $$E_p=\frac{1}{2}\ k_{\Phi}=\frac{1}{2}\ \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\ \mathbf{\Phi}.$$

4.1.2 Utilisation

Lors d'un calcul par recombinaison modale [R5.06.01], on cherche une solution de l'équation de la dynamique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = f(t),$$

sous la forme $\mathbf{x} = \sum_{i=1,m} \boldsymbol{\alpha}_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}^i$ où $\boldsymbol{\Phi}^i$ est le mode propre réel associé à la valeur propre λ_i, solution du problème généralisé (en général on a $m \leq n$ (n est le nombre de degré de liberté) car on ne prend en compte qu'une partie de la base modale) :

$$\left(-\mathbf{M}\,\lambda_i^2 + \mathbf{K}\right)\boldsymbol{\Phi}^i = 0$$

Le vecteur généralisé $\boldsymbol{\alpha} = \left(\boldsymbol{\alpha}_i\right)_{i=1,m}$ est solution de :

$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\alpha} = \tilde{f}$ (problème d'ordre m) avec :

$$\begin{array}{ll} \tilde{\mathbf{M}} = \left(\tilde{\mathbf{M}}_{ij}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\ \mathbf{M}\ \boldsymbol{\Phi}^j\right) & \tilde{\mathbf{C}} = \left(\tilde{\mathbf{C}}_{ij}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\ \mathbf{C}\ \boldsymbol{\Phi}^j\right) \\ \tilde{\mathbf{K}} = \left(\tilde{\mathbf{K}}_{ij}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\ \mathbf{K}\ \boldsymbol{\Phi}^j\right) & \tilde{f} = \left(\tilde{f}_i\right) = \left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\ f\right) \end{array}.$$

Les modes de vibration du problème généralisé sont $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ orthogonaux [R5.01.01]. Les matrices $\tilde{\mathbf{M}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ sont alors diagonales et sont constituées des rigidités et masses généralisées de chaque mode. La matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ est habituellement pleine si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur $\mathbf{C}$ [R5.05.04].

4.2 Masses modales effectives et masses modales effectives unitaires

4.2.1 Masses modales effectives

Soit $\mathbf{U}_d$ un vecteur unitaire dans la direction d. En chaque noeud du vecteur $\mathbf{U}_d$ ayant les composantes de déplacement (DX, DY, DZ) on a :

$\left(\mathrm{DX} = x_d, \mathrm{DY} = y_d, \mathrm{DZ} = z_d\right)$ où $\left(x_d, y_d, z_d\right)$ sont les cosinus directeurs de la direction d (on a donc : $x_d^2 + y_d^2 + z_d^2 = 1$).

Par exemple, si d est la direction x, le vecteur $\mathbf{U}_d$ a toutes ses composantes DX égales à 1 et ses autres composantes égales à 0.

On définit les masses modales effectives dans la direction d par :

$$m_{\Phi,d} = \frac{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\ \mathbf{M}\ \mathbf{U}_d\right)^2}{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\ \mathbf{M}\ \boldsymbol{\Phi}\right)}.$$

4.2.2 Propriété

Enoncé :

La somme des masses modales effectives dans une direction d est égale à la masse totale m_{totale} de la structure. Cela s'écrit :

$$m_{totale} = \sum_{i=1,n} \frac{\left(\mathbf{\Phi}^{iT}\ \mathbf{M}\ \mathbf{U}_d\right)^2}{\left(\mathbf{\Phi}^{iT}\ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}^i\right)} = \sum_{i=1,n} m_{\Phi^i,d}$$ où n est le nombre total de modes associés au problème [éq 4-1]

4.2.3 Masses modales effectives unitaires

En utilisant la propriété précédente, on définit les masses modales effectives unitaires :

$$\tilde{m}_{\Phi,d} = \frac{1}{m_{totale}} \frac{\left(\mathbf{\Phi}^{T}\ \mathbf{M}\ \mathbf{U}_d\right)^2}{\left(\mathbf{\Phi}^{T}\ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}\right)},$$

et on a : $\sum_{i=1,n} \tilde{m}_{\Phi^i,d} = 1$.

Les masses modales $\tilde{m}_{\Phi,d}$ et $m_{\Phi,d}$ sont indépendantes de la normalisation du mode $\mathbf{\Phi}$ de vibration.

4.2.4 Utilisation

Relation "empirique" :

Lors d'une étude "sollicitation sismique d'une structure dans une direction d" par une méthode de recombinaison modale, on doit conserver les modes de vibration qui ont une masse effective unitaire importante et on considère qu'on a une bonne représentation modale si pour l'ensemble des modes conservés on a :

$$\sum_{i=1,n} \tilde{m}_{\Phi^i,d} \geq 0{,}9 .$$

Cette relation empirique est énoncée dans le RCC_G (Règles de conception et de construction applicables au Génie Civil).

4.2.5 Directions privilégiées dans le *Code_Aster*

Dans le *Code_Aster*, on dispose de trois directions qui sont celles du repère de définition du maillage :

- d = direction X,
- d = direction Y,
- d = direction Z.

Les masses modales effectives et les masses modales effectives unitaires sont accessibles dans le concept `RESULTAT` de type `mode_meca` [U5.01.23] sous les noms `MASS_EFFE_DX`, `MASS_EFFE_DY`, `MASS_EFFE_DZ`, `MASS_EFFE_UN_DX`, `MASS_EFFE_UN_DY`, `MASS_EFFE_UN_DZ`.

4.3 Facteurs de participation

4.3.1 Définition

On définit d'autres paramètres appelés facteur de participation :

$$p_{\Phi,d} = \frac{\left(\mathbf{\Phi}^T \ \mathbf{M}\ \mathbf{U}_d\right)}{\left(\mathbf{\Phi}^T \ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}\right)}.$$

Ce paramètre dépend de la normalisation du mode de vibration Φ .

Comme pour les masses effectives, on dispose de trois directions d qui sont celles du repère de définition du maillage.

Les facteurs de participation sont accessibles dans le concept `RESULTAT` de type `mode_meca` [U5.01.23] sous les noms `FACT_PARTICI_DX, FACT_PARTICI_DY, FACT_PARTICI_DZ.`

4.3.2 Propriété

Enoncé :

Les facteurs de participation associés à une direction d vérifient la relation suivante :

$$m_{totale} = \sum_{i=1,n} \frac{\left(\mathbf{\Phi}^{iT} \ \mathbf{M}\ \mathbf{U}_d\right)^2}{\left(\mathbf{\Phi}^{iT} \ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}^i\right)} = \sum_{i=1,n} \left(\frac{\mathbf{\Phi}^{iT} \ \mathbf{M}\ \mathbf{U}_d}{\mathbf{\Phi}^{iT} \ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}^i}\right)^2 \left(\mathbf{\Phi}^{iT} \ \mathbf{M}\ \mathbf{\Phi}^i\right) = \sum_{i=1,n} \left(p_{\Phi^i,d}\right)^2 m_\Phi$$ où n est le nombre total de modes associés au problème [éq 4-1].

Ce résultat s'obtient facilement en exprimant le facteur de participation en fonction de la masse modale effective et en utilisant le résultat énoncé au [§ 4.2.3].

4.3.3 Utilisation

Ces paramètres sont utilisés en particulier pour calculer la réponse d'une structure soumise à un séisme par méthode spectrale. On renvoie le lecteur au document [R4.05.03].

4.4 Vecteur déplacement unitaire

Dans ce qui précède, on a considéré un vecteur de déplacement unitaire $\mathbf{U}_d$ qui ne concerne que les degrés de liberté de translation (`DX,DY,DZ`). Cette notion peut être étendue aux rotations en considérant la définition suivante. On définit une matrice $\mathbf{U}$ de dimension $(n \times 6)$. Si tous les nœuds du maillage supportent 3 degrés de liberté de translation et 3 autres de rotation, la matrice $\mathbf{U}$ est formée de l'empilement des matrices $\mathbf{u}_{tr\,d}^k$ (6×6) suivantes (l'indice k correspond au nœud de numéro k) :

$$\mathbf{u}_{tr}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_k - z_c) & -(y_k - y_c) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_k - z_c) & 0 & (x_k - x_c) \\ 0 & 0 & 1 & (y_k - y_c) & -(x_k - x_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\left(x_k, y_k, z_k\right)$ sont les coordonnées du nœud et $\left(x_c, y_c, z_c\right)$ sont les coordonnées du centre instantané de rotation.

On peut donc définir des masses modales effectives, des facteurs de participation associés à des degrés de liberté de rotation.

Pour l'instant, le calcul de ces paramètres n'est pas disponible dans le Code_Aster.

5 Paramètres modaux associés pour le problème quadratique

On écrit le problème quadratique sous la forme : $\left(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda\, \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \mathbf{\Phi} = 0$.

Pour le problème quadratique, on ne calcule que trois paramètres qui correspondent aux grandeurs généralisées suivantes :

- masse généralisée (quantité réelle) : $m_\Phi = \overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{M}\, \mathbf{\Phi}$,
- rigidité généralisée (quantité réelle) : $k_\Phi = \overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{K}\, \mathbf{\Phi}$,
- amortissement généralisé (quantité réelle) : $c_\Phi = \overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}$.

Attention, si on norme le mode propre avec la norme "masse généralisée", on n'a pas dans le cas quadratique : $m_\Phi = 1$. On peut faire la même remarque concernant la rigidité généralisée.

En utilisant les relations d'orthogonalité et le fait que les éléments propres apparaissent par paires conjuguées, on peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{\overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}}{\overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{M}\, \mathbf{\Phi}} = \frac{c_\Phi}{m_\Phi} = 2\ \mathrm{Re}(\lambda) = -\frac{2\,\xi\,\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{2\,\xi\left(2\pi\ f\right)}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$\frac{\overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{K}\, \mathbf{\Phi}}{\overline{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{M}\, \mathbf{\Phi}} = \frac{k_\Phi}{m_\Phi} = |\lambda|^2 = \frac{\omega^2}{1-\xi^2} = \frac{\left(2\ \pi\ f\right)^2}{1-\xi^2}.$$

6 Bibliographie

[1] J.R. LEVESQUE, L. VIVAN, Fe WAECKEL : Réponse sismique par méthode spectrale [R4.05.03].

[2] D. SELIGMANN, B. QUINNEZ : Algorithmes de résolution pour le problème généralisé [R5.01.01].

[3] D. SELIGMANN, R. MICHEL : Algorithmes de résolution pour le problème quadratique [R5.01.02].

[4] Opérateur `NORM_MODE` [U4.06.02].