

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R7.02 : Mécanique de la rupture**  
**Document R7.02.08**

# Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du champ de déplacements

## Résumé :

On décrit ici une méthode de calcul de K1, K2 et K3 en 2D (plan et axisymétrique) et 3D par extrapolation des sauts de déplacements sur les lèvres de la fissure plane. Cette méthode n'est applicable qu'au cas des fissures planes, dans des matériaux homogènes et isotropes. Elle est utilisable à l'aide de la commande POST\_K1\_K2\_K3.

La méthode utilisée est moins précise que le calcul à partir de la forme bilinéaire du taux de restitution de l'énergie et des déplacements singuliers [R7.02.05] (option CALC\_K\_G de l'opérateur CALC\_G\_THETA\_T en 2D). Elle permet cependant d'obtenir facilement des valeurs approchées des facteurs d'intensité des contraintes, notamment dans le cas 3D, pour lequel la méthode des déplacements singuliers n'est opérationnelle qu'avec des éléments linéaires (option CALC\_K\_G de l'opérateur CALC\_G\_LOCAL\_T).

On peut se faire une idée de la précision des résultats en recalculant G par la formule d'Irwin, à partir des valeurs de K1, K2 et K3, et en comparant cette valeur avec celle obtenue par la méthode énergétique (méthode « THETA »). La précision des résultats est nettement améliorée si les éléments touchant le fond de fissure (éléments quadratiques) ont des nœuds milieux situés au quart des arêtes (éléments dits de « Barsoum »).

## 1 Position du problème

La méthode préconisée pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes est l'utilisation de la forme bilinéaire du taux de restitution de l'énergie et des déplacements singuliers (option `CALC_K_G` de `CALC_G_THETA_T` [R7.02.05]). Cette méthode est opérationnelle et précise, mais utilisable seulement en 2D (contraintes planes et déformations planes) et en 3D pour des éléments linéaires. Cette méthode n'est pas disponible en axisymétrique.

En effet, dans le cas général en 3D et en axisymétrique, on ne connaît pas le développement asymptotique du champ de contraintes, et donc pas la forme de la singularité.  $K_1$  et  $K_2$  (et  $K_3$  en 3D) n'ont alors pas de signification claire.

On peut toutefois donner une signification à  $K_1$  et  $K_2$  (et  $K_3$ ) sous certaines hypothèses ([bib1],[bib2]) :

- 1) la fissure est plane
- 2) le comportement est élastique, linéaire, isotrope et homogène
- 3) on se place dans un plan normal au fond de fissure

Sous ces hypothèses, on peut montrer que dans le plan normal au fond de fissure en un point  $M$ , les expressions des champs de contraintes (ou de déplacements) sont identiques au cas des déformations planes ; dans ce cas, on peut donc donner une signification précise à  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ . C'est la même définition qu'en déformations planes, et de plus, la formule d'Irwin qui permet de calculer  $G$  à partir de  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  reste valable. Cette situation est aisément transposable au cas axisymétrique, si la fissure est plane.

Ces expressions sont, en 3D, pour une fissure plane, en un point  $M$  :

$$K_1(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_m] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

$$K_2(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_n] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

$$K_3(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} [U_t] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

avec :

**t**, **n** dans le plan de la fissure

**t** vecteur tangent au fond de fissure en  $M$ ,

**n** vecteur normal au fond de fissure en  $M$ ,

**m** vecteur normal au plan de la fissure

$[U]$  saut de déplacement entre les lèvres de fissure,

$r = \|\mathbf{MP}\|$  où  $P$  est un point du plan normal au fond de fissure en  $M$ .

### Remarques :

- On peut constater que les signes de  $K_2$  et  $K_3$  dépendent de l'orientation de **t** et **n**. Ceci n'est pas trop gênant dans la mesure où les critères de rupture ou de fatigue n'utilisent que les valeurs absolues de  $K_2$  et  $K_3$ .
- On peut également donner des expressions en fonction des champs de contraintes, mais les valeurs des vecteurs contraintes sur les lèvres de la fissure sont moins précises que les déplacements (car issues d'un transport des points de Gauss aux nœuds).
- Pour se faire une idée de la précision du calcul de  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  par extrapolation des sauts de déplacements, il suffit de recalculer  $G$  par la formule d'Irwin à partir des facteurs d'intensité des contraintes et de comparer cette valeur à celle obtenue avec `G_THETA`.

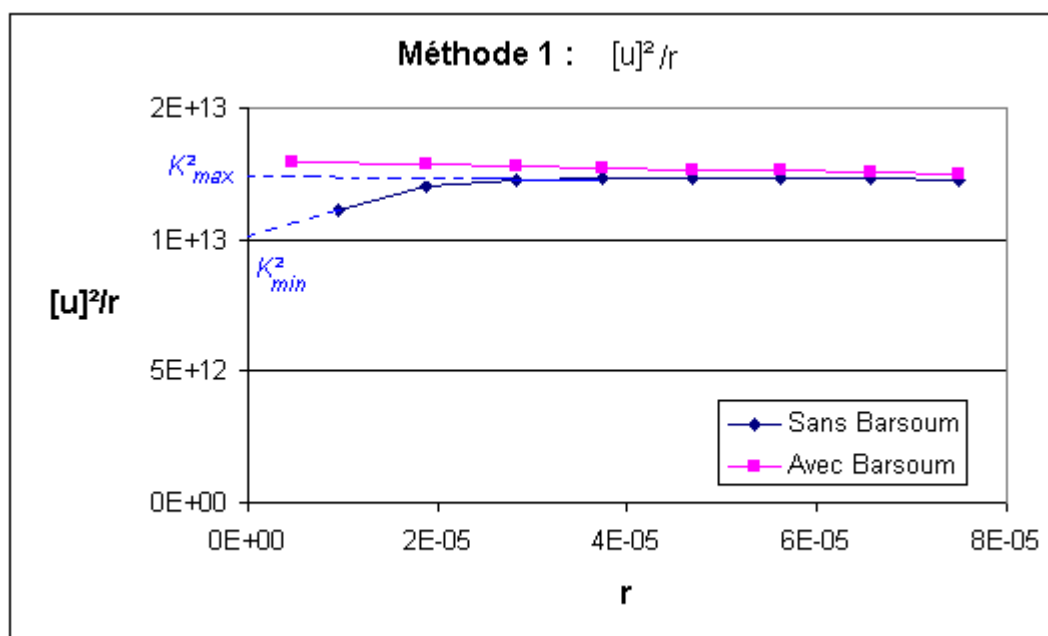
## 2 Mise en œuvre des méthodes d'extrapolation :

Les méthodes d'extrapolation des déplacements sont mises en œuvre dans POST\_K1\_K2\_K3, après extraction des champs de déplacements sur les deux lèvres de la fissure.

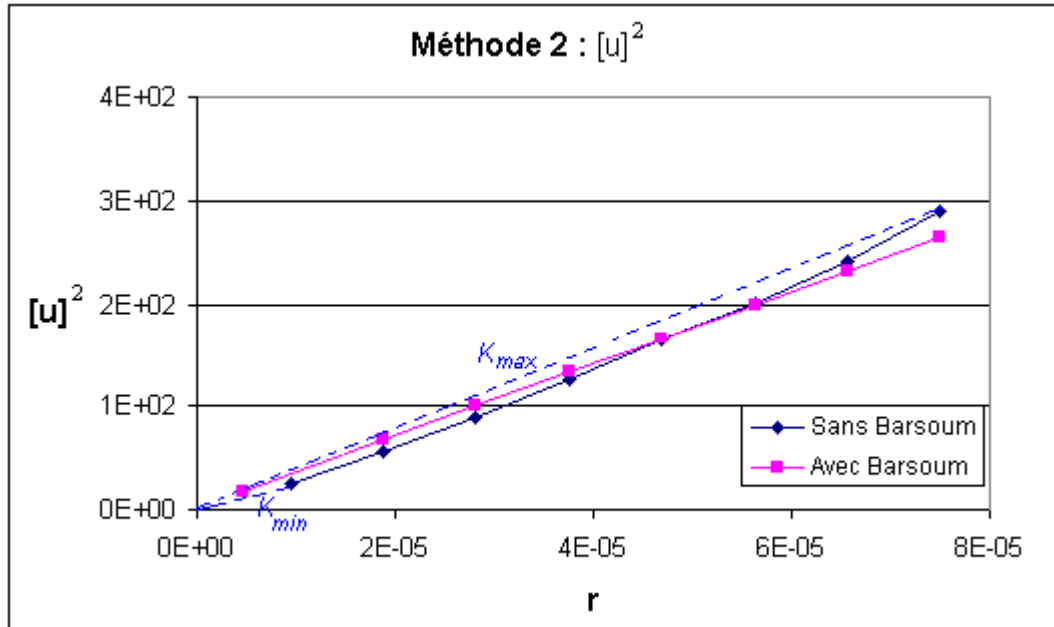
Elles sont testées avec ou sans un maillage de type « Barsoum » (les nœuds non sommets sur les côtés des éléments quadratiques touchant le fond de fissure sont déplacés au quart du côté).

Trois méthodes sont programmées :

- **Méthode 1** : on calcule le saut du champ de déplacements au carré et on le divise par  $r$ . Différentes valeurs de  $K^2$  sont obtenues (à un facteur multiplicatif près) par extrapolation en  $r=0$  des segments de droites ainsi obtenus. Si la solution était parfaite (champ asymptotique analytique partout), on devrait obtenir une droite. En réalité, on obtient presque une droite avec un maillage de type « Barsoum », et une courbe non droite sinon :



- **Méthode 2** : on trace le saut du champ de déplacements au carré en fonction de  $r$ . Les approximations de K sont (toujours à un facteur multiplicatif près) égales à la racine de la pente des segments reliant l'origine aux différents points de la courbe.



- **Méthode 3** : on identifie le facteur d'intensité de contrainte K à partir du saut de déplacement  $[U]$  par une méthode des moindres carrés. Le recalage se fait sur un segment de longueur  $d_{max}$ , où  $d_{max}$  est le paramètre fixé dans l'opérande ABSC\_CURV\_MAXI de l'opérateur POST\_K1\_K2\_K3 :

$$K \text{ minimise } J(k) = \frac{1}{2} \int_0^{d_{max}} ([U(r)] - k\sqrt{r})^2 dr$$

Soit donc la formule explicite pour calculer K :

$$K = \frac{2}{r_m^2} \int_0^{d_{max}} [U(r)]\sqrt{r} dr = \frac{1}{r_m^2} \sum_{i=0}^{nbno-1} (r_{i+1} - r_i) ([U]_{i+1} \sqrt{r_{i+1}} - [U]_i \sqrt{r_i})$$

où  $nbno$  est le nombre de nœuds sur le segment de recalage  $[0, d_{max}]$ . On remarque que dans cette expression K est, pour un  $d_{max}$  fixé, une forme linéaire du champ de déplacement.

Ces trois méthodes ont été validées sur les tests SSLP313 (fissure inclinée dans un milieu infini) et SSLV134 (fissure plane, en forme de disque, dans un espace 3D infini). La référence [bib2] préconise l'utilisation de la méthode 1, avec maillage de type « Barsoum ».

### 3 Validité des méthodes proposées

On évalue la précision des méthodes d'extrapolation sur des tests dont les solutions analytiques sont connues. On compare les résultats aux méthodes plus précises fondées sur le calcul du taux de restitution de l'énergie et sur les fonctions singulières.

Pour bien mettre en évidence l'imprécision des méthodes d'extrapolation, POST\_K1\_K2\_K3 fournit systématiquement pour les deux premières méthodes les valeurs maximum et les valeurs minimum (sur l'ensemble des points calculés) des facteurs d'intensité des contraintes, ainsi que la valeur de G recalculée par la formule d'Irwin. On qualifiera donc de précise une méthode qui fournit des valeurs maximum et minimum proches, et dont le taux de restitution de l'énergie est proche de celui calculé par la méthode « THETA ».

La méthode 3 ne fournit quant à elle qu'une seule valeur pour chaque facteur d'intensité de contrainte et pour G. La précision de la méthode sera donc estimée uniquement par comparaison entre la valeur de G recalculée par la formule d'Irwin et le taux de restitution d'énergie calculé par la méthode « THETA ». La méthode 3 peut être considérée comme une moyenne pondérée des taux de restitution d'énergie extrapolés en chaque nœuds. On vérifiera donc que l'erreur obtenue avec cette méthode est inférieure au maximum d'erreur des deux précédentes méthodes.

On présente ici succinctement les résultats obtenus sur un test 2D et sur un test 3D.

#### 3.1 Test SSLP313 : 2D C\_PLAN

Il s'agit d'une fissure inclinée dans un milieu infini soumise à un champ de contraintes uniforme dans une direction (solution de référence analytique en contraintes planes). La fissure s'ouvre en mode mixte (K1 et K2).

Pour le test Aster, la fissure est maillée dans une plaque assez grande. Le maillage est très fin. Les résultats sont les suivants :

Solution de référence (CALC\_G\_THETA\_T)

K1 aster	K2 aster	Gtheta
<b>3.6037E+06</b>	<b>2.7000E+06</b>	<b>1.0013E+02</b>

POST\_K1\_K2\_K3 : maillage sans nœuds d'arêtes au quart

méthode	K1_max	K1_min	K2_max	K2_min	G_max	G_min	différence entre Gmax et Gtheta	différence entre Gmin et Gtheta
1	3.54E+06	3.19E+06	2.63E+06	1.92E+06	9.73E+01	6.94E+01	-3,33%	-30,70%
2	3.51E+06	3.33E+06	2.61E+06	2.25E+06	9.57E+01	8.08E+01	-4,50%	-19,32%
3	3.50E+06		2.59E+06		9.47E+01		-5,47%	

POST\_K1\_K2\_K3 : maillage avec nœuds d'arêtes au quart

méthode	K1_max	K1_min	K2_max	K2_min	G_max	G_min	différence entre Gmax et Gtheta	différence entre Gmin et Gtheta
1	3.61E+06	3.60E+06	2.70E+06	2.69E+06	1.01E+02	1.01E+02	1,29%	1,07%
2	3.60E+06	3.53E+06	2.69E+06	2.65E+06	1.01E+02	9.75E+01	1,02%	-2,67%
3	3.56E+06		2.66E+06		9.88E+01		-1,42%	

Sur ce test on constate que le maillage de type « Barsoum » est indispensable si on veut des résultats précis. Avec « Barsoum » la méthode 1 est plus stable. Elle fournit des valeurs de G (à partir de K1 et K2) à environ 1% de la solution  $G_{\text{THETA}}$ . Les méthodes 2 et 3 conduisent à des erreurs de 1 à 2,5 %.

Par contre, avec un maillage normal, les résultats varient beaucoup (entre -3% et -30% de la solution). Il en est de même avec des éléments linéaires. Dans le cas d'un maillage sans éléments de « Barsoum », la méthode 3 est la plus précise.

## 3.2 Test SSLV134 : 3D

Il s'agit d'une fissure plane en forme de disque dans un milieu infini 3D soumise à un champ de contraintes uniforme dans une direction (solution de référence analytique connue sous le nom de « penny shape crack »). La fissure s'ouvre en mode 1 (K1 seul) [V3.04.134].

Pour ce test, la fissure est maillée dans un bloc parallélépipède. Le maillage est relativement grossier. On compare les résultats à ceux de la méthode « THETA ».

Solution de référence :

K1	G local
$1,6 \cdot 10^6$	11,59

Les résultats sont les suivants :

POST\_K1\_K2\_K3 : maillage sans noeuds d'arêtes au quart

méthode	K1_max	K1_min	G_max	G_min	différence entre Gmax et Gtheta	différence entre Gmin et Gtheta
1	1.56E+06	1.45E+06	1.11E+01	9.63E+00	-4,32%	-16,91%
2	1.53E+06	1.49E+06	1.06E+01	1.01E+01	-8,35%	-13,08%
3	1.52E+06		1.05E+01		-9,51%	

POST\_K1\_K2\_K3 : maillage avec noeuds d'arêtes au quart

méthode	K1_max	K1_min	G_max	G_min	différence entre Gmax et Gtheta	différence entre Gmin et Gtheta
1	1.61E+06	1.59E+06	1.18E+01	1.16E+01	1,32%	-0,06%
2	1.59E+06	1.53E+06	1.15E+01	1.07E+01	-0,42%	-7,87%
3	1.55E+06		1.10E+01		-5,16%	

Sur ce test on constate encore que le maillage de type « Barsoum » est indispensable si on veut des résultats précis. Avec « Barsoum » la méthode 1 est la plus stable. Elle fournit des valeurs de G (à partir de K1 et K2) à 1% de la solution  $G_{\text{THETA}}$ .

## 3.3 Conclusion

Il faut bien remarquer que l'expression asymptotique des déplacements n'est valable que pour  $r$  tendant vers 0. C'est pourquoi les maillages de type « Barsoum » sont nettement préférables (et quasiment obligatoires). Il faut également veiller à ne pas choisir un domaine d'extrapolation trop grand (distance  $d_{\text{max}}$  de l'opérateur POST\_K1\_K2\_K3 de l'ordre de 4 à 5 éléments).

Avec Barsoum, la méthode 1 donne les résultats les plus précis et les plus stables, que ce soit en 2D ou en 3D. Si le maillage ne comporte pas d'éléments de Barsoum, on conseille alors d'utiliser les résultats de la méthode 3.

## 4 Bibliographie

---

- [1] H.D.BUI « Mécanique de la rupture fragile » Masson (1978)
- [2] J. Lemaître, J.L.Chaboche « Mécanique des matériaux solides » Dunod 1996

Page laissée intentionnellement blanche.