

Manuel de Référence
Fascicule R5.05 : Dynamique transitoire
Document : R5.05.01

Résolution d'une équation différentielle du second ordre par la méthode de NIGAM

Résumé :

Nous présentons dans ce document, une méthode de résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre obtenue lors du calcul d'un spectre d'oscillateur.

1 Introduction

Lors du calcul d'un spectre d'oscillateur, on est amené à résoudre une équation différentielle du second ordre dont la solution est une intégrale de DUHAMEL.

Si cette intégrale peut être calculée exactement à l'aide de la transformée de LAPLACE pour certaines fonctions analytiques simples (Dirac, Sinus, Cosinus, Heavyside, ...) [bib1] elle doit être intégrée numériquement dans le cas général.

Ce document présente une méthode efficace pour résoudre ce problème.

Cette méthode est mise en oeuvre dans le *Code_Aster*, dans l'opérateur `CALC_FONCTION`, mot clé facteur `SPEC_OSCI`.

2 Solution analytique de l'équation

Lors du calcul du spectre d'oscillateur d'un accélérogramme [R4.05.03], on est amené à résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{q} + 2\xi\omega\dot{q} + \omega^2 q = -\alpha(t)$$

- où
- $q(t)$ est le déplacement relatif
 - $\alpha(t)$ est l'accélération du mouvement imposé à la base
 - ω est la pulsation de l'oscillateur
 - ξ est l'amortissement réduit de l'oscillateur

Avec des conditions initiales sur q et \dot{q} .

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$q(t) = + \int_0^t h(t-\tau)\alpha(\tau)d\tau + q(0)g(t) + \dot{q}(0)h(t) \quad \text{éq 2-1}$$

où $q(0)$ et $\dot{q}(0)$ sont le déplacement et la vitesse à l'instant initial.

- Expression de $h(t)$ et $g(t)$ selon la valeur de l'amortissement réduit ξ .
 - Si $\xi < 1$ (amortissement sous critique)

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}t\right)$$

$$g(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\cos\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}t\right) \right]$$

éq 2-2

- Si $\xi = 1$ (amortissement critique)

$$h(t) = te^{-\omega t}$$

$$g(t) = (1 - \omega t) e^{\omega t}$$

- Si $\xi > 1$ (amortissement sur-critique)

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot sh\left(\omega\sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

$$g(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ch\left(\omega\sqrt{\xi^2 - 1}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} sh\left(\omega\sqrt{\xi^2 - 1}\right) \right]$$

3 Méthode numérique

La méthode numérique implantée dans le Code Aster a été proposée par NIGAM et JENNINGS [bib2] dans le cas de l'amortissement sous critique qui correspond à notre problème sismique initial [R4.05.03].

En introduisant la formulation [éq 2-2] dans [éq 2-1] on est donc conduit à résoudre l'équation différentielle :

$$\ddot{q}(t) + 2\xi\omega\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = -\alpha(t)$$

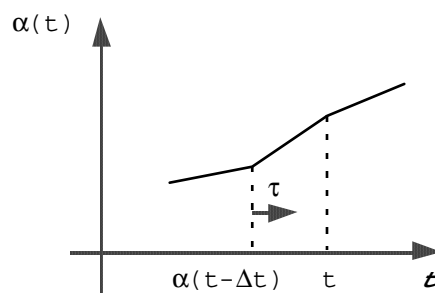
avec conditions initiales nulles, dont la solution s'écrit :

$$q(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] \alpha(\tau) d\tau$$

$$\text{avec } \omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

En supposant que $\alpha(t)$ varie linéairement à l'intérieur de chaque intervalle $\Delta(t)$, on peut alors écrire :

$$\alpha(\tau) = \alpha(t - \Delta t) + \frac{\tau}{\Delta t} [\alpha(t) - \alpha(t - \Delta t)] \text{ pour } \tau \in [0, \Delta t]$$



d'où l'équation à résoudre : (exprimée dans la nouvelle variable τ)

$$\ddot{q}(\tau) + 2\xi\omega\dot{q}(\tau) + \omega^2 q(\tau) = a + b\tau \text{ pour } \tau \in [0, \Delta t]$$

où

$$a = \alpha(t - \Delta t)$$

$$b = [\alpha(t) - \alpha(t - \Delta t)] / \Delta t$$

avec les conditions initiales :

$$q(0) = q(t - \Delta t)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}(t - \Delta t)$$

La solution de cette équation est la superposition d'une solution particulière et des solutions du problème homogène.

- une solution particulière : $q_p(t) = -\frac{a}{\omega^2} + \frac{2\xi b}{\omega^3} - \frac{b}{\omega^2} \tau$
- les solutions du problème homogène : $q_h(t) = e^{-\xi\omega\tau} [C_1 \cdot \cos(\omega_d \tau) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \tau)]$

Par suite : $q(\tau) = e^{-\xi\omega\tau} [C_1 \cdot \cos(\omega_d \tau) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \tau)] - \frac{a}{\omega^2} + 2\frac{\xi b}{\omega^3} - \frac{b \cdot \tau}{\omega^2}$

et en dérivant q (par rapport à τ) on a :

$$\dot{q}(\tau) = (-\xi\omega) e^{-\xi\omega\tau} (C_1 \cos \omega_d \tau + C_2 \sin \omega_d \tau) + e^{-\xi\omega\tau} (-C_1 \omega_d \sin \omega_d \tau + C_2 \omega_d \cos \omega_d \tau) - \frac{b}{\omega^2}$$

Les coefficients C_1 et C_2 sont alors déterminés par les conditions initiales au début de l'intervalle (c'est-à-dire pour $\tau = 0$).

$$C_1 = q(t - \Delta t) + \frac{a}{\omega^2} - \frac{2\xi b}{\omega^3}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_d} \left[\dot{q}(t - \Delta t) + \xi\omega q(t - \Delta t) + \frac{\xi a}{\omega} - \frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2} b \right]$$

et en reportant C_1 et C_2 dans l'expression de q et \dot{q} on obtient l'égalité matricielle pour $\tau = \Delta t$:

$$\begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} = A(\xi, \omega, \Delta t) \begin{Bmatrix} q(t - \Delta t) \\ \dot{q}(t - \Delta t) \end{Bmatrix} + B(\xi, \omega, \Delta t) \begin{Bmatrix} \alpha(t - \Delta t) \\ \alpha(t) \end{Bmatrix}$$

4 Coefficients des matrices A et B du système à résoudre

Matrice A :

$$a_{11} = e^{-\xi\omega\Delta t} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d \Delta t) + \cos(\omega_d \Delta t) \right]$$

$$a_{12} = \frac{e^{\xi\omega\Delta t}}{\omega_d} \sin(\omega_d \Delta t)$$

$$a_{21} = -\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega\Delta t} \sin(\omega_d \Delta t)$$

$$a_{22} = e^{-\xi\omega\Delta t} \left[\cos(\omega_d \Delta t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d \Delta t) \right]$$

Matrice B :

$$b_{11} = e^{-\xi\omega\Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\xi}{\omega} \right) \cdot \frac{\sin(\omega^d \Delta t)}{\omega^d} + \left(\frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} + \frac{1}{\omega^2} \right) \cos(\omega^d \Delta t) \right] - \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t}$$

$$b_{12} = e^{-\xi\omega\Delta t} \left[\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} \cdot \frac{\sin(\omega^d \Delta t)}{\omega^d} + \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} \cdot \cos(\omega^d \Delta t) \right] - \frac{1}{\omega^2} + \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t}$$

$$b_{21} = e^{-\xi\omega\Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\xi}{\omega} \right) \cdot \left(\cos(\omega_d \Delta t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega^d \Delta t) \right) - \left(\frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} + \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot (\omega_d \sin(\omega_d \Delta t) + \xi \omega \cos(\omega_d \Delta t)) \right] + \frac{1}{\omega^2 \Delta t}$$

$$b_{22} = -e^{-\xi\omega\Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} \right) \cdot \left(\cos(\omega_d \Delta t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d \Delta t) \right) - \left(\frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} \right) \cdot (\omega_d \sin(\omega_d \Delta t) + \xi \omega \cos(\omega_d \Delta t)) \right] - \frac{1}{\omega^2 \Delta t}$$

$$\text{avec } \omega_d = \omega \sqrt{1-\xi^2}$$

5 Calcul de $q(\tau)$

Connaissant $q(\tau)$ et $\dot{q}(\tau)$, il est dès lors possible de donner l'expression analytique de l'accélération $\ddot{q}(\tau)$.

$$\dot{q}(\tau) = -(\xi\omega)e^{-\xi\omega}\left[C_1 \cos(\omega_d \tau) + C_2 \sin(\omega_d \tau)\right] + e^{-\xi\omega}\left(-C_1\omega_d \sin(\omega_d \tau) + C_2\omega_d \cos(\omega_d \tau)\right) - \frac{1}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}(\tau) = & +(\xi\omega)^2 e^{-\xi\omega}\left[C_1 \cos(\omega_d \tau) + C_2 \sin(\omega_d \tau)\right] \\ & + (\xi\omega)e^{-\xi\omega}\left(-C_1\omega_d \sin(\omega_d \tau) + C_2\omega_d \cos(\omega_d \tau)\right) \\ & - (\xi\omega)e^{-\xi\omega}\left(-C_1\omega_d \sin(\omega_d \tau) + C_2\omega_d \cos(\omega_d \tau)\right) \\ & + e^{-\xi\omega}\left[-C_1\omega_d^2 \cos(\omega_d \tau) - C_2\omega_d^2 \sin(\omega_d \tau)\right] \end{aligned}$$

$$\ddot{q}(\tau) = \left[(\xi\omega)^2 - \omega_d^2\right]e^{-\xi\omega} \cdot \left[C_1 \cos(\omega_d \tau) + C_2 \sin(\omega_d \tau)\right]$$

or

$$\omega_d^2 = \omega^2(1 - \xi^2), \text{ d'où}$$

$$\ddot{q}(\tau) = \omega^2 e^{-\xi\omega}\left[C_1 \cos(\omega_d \tau) + C_2 \sin(\omega_d \tau)\right]$$

6 Bibliographie

- [1] R.J. GIBERT : Vibrations des structures, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, n°69, Eyrolles 1988.
- [2] N.C. NIGAM & P.C JENNINGS : Calculation of Response spectra from motion earthquake Bull. of the Seismological society of America, Vol.59 n°2 pp 909 - 922 April 1969.
- [3] D. SELIGMANN, L. VIVAN : Réponse sismique par méthode spectrale [R4.05.03].