

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R4.02 : Acoustique**  
**Document : R4.02.01**

## Éléments finis en acoustique

---

### Résumé :

Ce document décrit en acoustique stationnaire à basse fréquence les équations utilisées, les formulations variationnelles qui en découlent ainsi que la traduction correspondante en éléments finis, pour chacune des deux méthodes utilisées dans le *Code\_Aster* : formulation "classique" à une inconnue  $p$  (pression acoustique), et formulation "mixte" à deux inconnues  $p, \mathbf{v}$  (pression et vitesse acoustiques).

---

## Table des matières

---

1 Introduction .....	3
2 Equations et conditions aux limites du problème.....	4
2.1 Equations et conditions aux limites .....	4
3 Formulation classique en pression .....	6
3.1 Expression mathématique du problème.....	6
3.2 Discrétisation par éléments finis.....	6
3.2.1 La matrice de rigidité .....	7
3.2.2 La matrice de masse.....	7
3.2.3 La matrice d'amortissement .....	7
3.2.4 Le vecteur source.....	8
4 Formulation mixte pression-vitesse .....	9
4.1 Expression mathématique du problème.....	9
4.1.1 Formulation locale .....	9
4.1.2 Formulation variationnelle mixte.....	9
4.2 Discrétisation par éléments finis.....	10
4.2.1 La matrice de rigidité .....	11
4.2.2 La matrice de masse.....	12
4.2.3 La matrice d'amortissement .....	12
4.2.4 Le vecteur source.....	12
5 Commandes spécifiques à la modélisation acoustique .....	13
6 Conclusion .....	16
7 Bibliographie .....	16

## 1 Introduction

Des options de modélisation ont été développées dans le *Code\_Aster*, permettant d'étudier la propagation acoustique stationnaire à basse fréquence, en milieu clos, pour des domaines de propagation à topologie complexe, c'est-à-dire y résoudre dans les conditions citées l'équation de Helmholtz.

La résolution par éléments finis de cette équation peut être réalisée suivant deux méthodes :

- une première méthode consiste à se fixer comme inconnues du problème, uniquement les pressions acoustiques complexes nodales, soit 1 degré de liberté par nœud [bib1]; c'est celle que l'on qualifie de formulation aux éléments finis "classiques",
- dans la deuxième méthode, dite aux éléments finis "mixtes", on se fixe comme inconnues à la fois les pressions acoustiques nodales et les 3 composantes de la vitesse vibratoire nodale, soit au total 4 degrés de liberté par nœud [bib5].

Pour connaître les chemins de propagation de l'énergie dans le fluide, l'acousticien dispose de 2 grandeurs : l'intensité acoustique active **I** et l'intensité acoustique réactive **J** ; ces deux grandeurs sont définies comme :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{p} \mathbf{v}^*] \text{ et } \mathbf{J} = \frac{1}{2} \text{Im}[\mathbf{p} \mathbf{v}^*] \quad \text{éq 1-1}$$

où  $\mathbf{v}^*$  désigne le conjugué complexe de la vitesse vibratoire. La connaissance de ces grandeurs apporte un complément d'information très important dans la résolution de problèmes de toutes sortes, comme par exemple la mesure des puissances rayonnées par les machines, la reconnaissance et la localisation des sources.

Le calcul de l'intensité acoustique par la méthode des éléments finis mixtes doit fournir des valeurs plus précises que la méthode classique; en effet dans le cas mixte on assure la continuité des dérivées premières de la pression et non pas simplement la continuité de cette dernière.

Cependant si elle est plus précise, la formulation mixte consomme en revanche plus de taille mémoire et de temps CPU, tout en gardant l'avantage d'avoir, à nombre de degrés de liberté par longueur d'onde égal, une erreur relative toujours plus faible sur le calcul de l'intensité acoustique.

## 2 Equations et conditions aux limites du problème

### 2.1 Equations et conditions aux limites

L'équation à résoudre est l'équation de Helmholtz [bib2] :

$$(\Delta + k^2) p = s \quad \text{éq 2.1-1}$$

- $k$  désigne le nombre d'onde du problème traité ; il peut être complexe ou réel, suivant que la propagation s'effectue ou non dans un domaine poreux [bib6] :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{éq 2.1-2}$$

- $c$  désigne la célérité du son, qui peut être complexe dans le cas d'une propagation en milieu poreux.
- $p$  est une grandeur complexe désignant la pression acoustique et  $s$ , également complexe, représente les termes sources du problème.
- $\omega$  est un réel dans tous les cas, qui désigne la pulsation :

$$\omega = 2 \pi f \quad \text{éq 2.1-3}$$

- $f$  est la fréquence de travail du problème harmonique.

Nous représentons sur la figure [Figure 2.1-a] le domaine confiné quelconque où s'applique l'équation de Helmholtz [éq 2.1-1] et les conditions aux frontières.

- $\Omega$  est un ouvert borné de  $R^3$  de frontière  $\partial\Omega$  régulière, partitionnée en  $\partial\Omega_v$  et  $\partial\Omega_z$  ;  
 $\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_z$

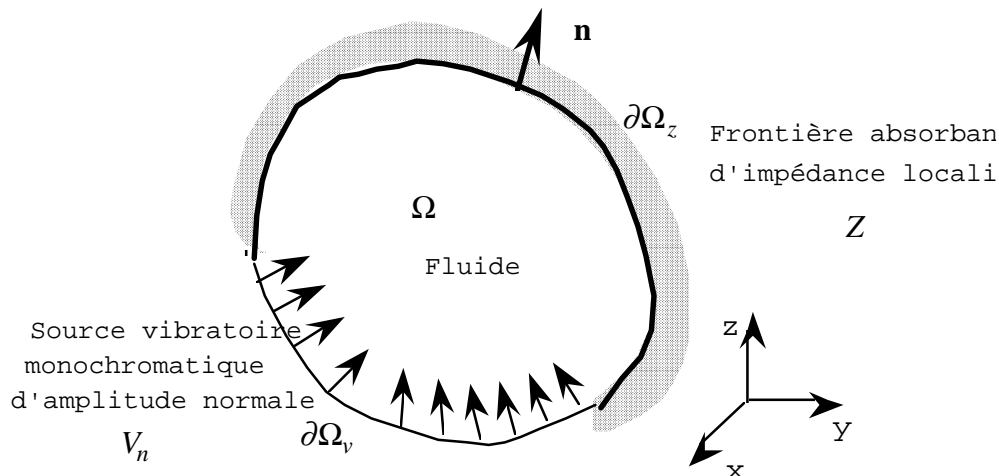


Figure 2.1-a : Configuration du problème

L'équation [éq 2.1-1] est à résoudre dans un domaine clos  $\Omega$ . Les conditions aux limites à prendre en compte sur la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  s'expriment sous leur forme la plus générale comme :

$$\alpha p + \beta \frac{\partial p}{\partial n} = \gamma \quad \text{éq 2.1-4}$$

$\partial/\partial n$  désigne l'opérateur de dérivée normale.

$\alpha, \beta, \gamma$  sont des opérateurs complexes, qui peuvent être des scalaires, ou des opérateurs intégraux suivant que la frontière d'application de la condition à la limite est à réaction locale ou à réaction non locale (cas de l'interaction fluide-structure).

Les développements actuellement réalisés dans le *Code\_Aster* concernent uniquement des conditions à la limite à réaction locale, pour lesquelles les  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des scalaires ; les cas spécifiés sont les suivants :

- $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$  qui désigne une frontière du domaine à vitesse vibratoire imposée. En effet, il existe une relation reliant le gradient de pression acoustique complexe à la vitesse vibratoire particulaire complexe.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\omega\rho_0 V_n \quad \text{éq 2.1-5}$$

$\rho_0$  désigne la masse volumique du fluide considéré, et on impose  $V_n$ , la vitesse vibratoire normale à la paroi ( $V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à la frontière  $\partial\Omega$ ).

- $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$  concerne une frontière à impédance acoustique  $Z$  imposée. L'impédance acoustique  $Z$  est définie comme le rapport de la pression à la vitesse vibratoire particulaire au voisinage de la paroi à impédance imposée :

$$Z = \frac{p}{V_n} \quad \text{éq 2.1-6}$$

- $\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma \neq 0$  représente le cas où l'on impose la pression acoustique  $p$  à une frontière (le plus souvent  $\gamma = 0$ , correspondant à  $p = 0$ ).

### 3 Formulation classique en pression

#### 3.1 Expression mathématique du problème

La procédure standard visant à poser le problème aux éléments finis classiques est la suivante :

- on suppose la solution du problème suffisamment régulière,  $p \in H^2(\Omega)$ . On multiplie l'équation :

$$(\Delta + k^2) p = 0 \quad \text{éq 3.1-1}$$

par une fonction test  $\phi$ . On intègre sur  $\Omega$  et on utilise la formule de Green. La frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ , se subdivise en 2 zones, une zone à vitesse vibratoire imposée,  $\partial\Omega_v$  et une zone à impédance acoustique imposée,  $\partial\Omega_z$ . L'équation obtenue peut être réécrite sous la forme :

$$\int_{\Omega} \left( \text{grad}(p) \cdot \text{grad}(\phi) - \frac{\omega^2}{c^2} p \cdot \phi \right) dV + j \int_{\partial\Omega_z} \frac{\rho_0 \omega}{Z} p \cdot \phi dS + j \int_{\partial\Omega_v} \rho_0 \omega V_n \cdot \phi dS = 0 \quad \text{éq 3.1-2}$$

- $dV$  représente un élément de volume différentiel dans  $\Omega$  et  $dS$  représente un élément de surface sur  $\partial\Omega$ .
- la vitesse vibratoire particulière est ensuite déterminée par :

$$\mathbf{v} = \frac{j}{\rho_0 \omega} \text{grad}(p) \quad \text{éq 3.1-3}$$

#### 3.2 Discrétisation par éléments finis

Dans le cas des éléments finis classiques, les intégrales élémentaires sont au nombre de quatre  $\mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{M}^e$ ,  $\mathbf{C}^e$ ,  $\mathbf{U}^e$  suivant la décomposition indiquée en [éq 3.2-3] ( $\mathbf{K}^e$  est la matrice de rigidité,  $\mathbf{M}^e$  la matrice de masse,  $\mathbf{C}^e$  la matrice d'amortissement et  $\mathbf{U}^e$  le vecteur source). Deux d'entre elles proviennent d'intégrales volumiques, les deux autres sont le résultat d'intégrales respectivement sur une surface vibrante et sur une surface à impédance imposée.

On supposera que les coordonnées globales d'un élément peuvent s'écrire grâce à la donnée de  $m$  fonctions de forme élémentaires  $H_i$  :

$$\mathbf{OM} = \sum_{i=1}^m H_i \mathbf{OM}_i \quad \text{éq 3.2-1}$$

On se donne en outre, des fonctions de base  $N_i$ , pour décrire la pression élémentaire.

La pression à l'intérieur d'un élément pourra s'écrire :

$$p^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) P_i^e \quad \text{éq 3.2-2}$$

où  $P_i^e$  est la pression au nœud  $i$  de l'élément  $e$ .

Dans le cas des éléments finis isoparamétriques, les fonctions de base  $N_i$  sont égales aux fonctions de forme  $H_i$ .

Sur chaque élément du domaine, le problème aux éléments finis en pression s'écrit :

$$\left( \mathbf{K}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e + j\omega \mathbf{C}^e \right) \frac{q}{1} \left( \mathbf{P}^e \right) \frac{q}{1} = -j\omega \left( \mathbf{U}^e \right) \frac{q}{1} \quad \text{éq 3.2-3}$$

où  $\left( \mathbf{P}^e \right) \frac{q}{1}$  est la matrice colonne des valeurs nodales de la pression sur l'élément.

### 3.2.1 La matrice de rigidité

La matrice de rigidité  $\mathbf{K}^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\Omega^e} \mathbf{grad}(p) \cdot \mathbf{grad}(\phi) dV$

Elle admet comme terme général :

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N_i \nabla N_j dV \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

### 3.2.2 La matrice de masse

La matrice de masse  $\mathbf{M}^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} p \cdot \phi dV$

Elle admet comme terme général :

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} N_i N_j dV \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

### 3.2.3 La matrice d'amortissement

La matrice d'amortissement  $\mathbf{C}^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\partial\Omega_z^e} \frac{\rho_0}{Z} p \cdot \phi dS$

Elle admet comme terme général :

$$C_{ij}^e = \int_{\partial\Omega_z^e} \frac{\rho_0}{Z} N_i N_j dS \quad \text{éq 3.2.3-1}$$

### 3.2.4 Le vecteur source

Le vecteur source  $\mathbf{U}^e$  correspond au calcul de :  $\int_{\partial\Omega_v^e} \rho_0 V_n \phi dS$

Il admet comme terme général :

$$U_i^e = \int_{\partial\Omega_v^e} \rho_0 V_n N_i dS \quad \text{éq 3.2.4-1}$$



## 4 Formulation mixte pression-vitesse

### 4.1 Expression mathématique du problème

#### 4.1.1 Formulation locale

L'équation de Helmholtz [éq 1-1] avec les conditions aux limites [éq 2.1-3] se déduisent en fait des équations locales ci-dessous :

$$i\omega \chi p + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{éq 4.1.1-1}$$

$$i\omega \rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{grad} p = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{éq 4.1.1-2}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{Z} p \quad \text{sur } \partial\Omega_z \quad \text{éq 4.1.1-3}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_n \quad \text{sur } \partial\Omega_v \quad \text{éq 4.1.1-4}$$

où  $\chi = 1 / \rho_0 c^2$  est le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide.

Le problème mathématique est le suivant: étant donné des fonctions  $Z \in L^\infty(\partial\Omega_z)$  et  $V_n \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_v)$ , trouver des fonctions  $p$  et  $\mathbf{v}$  définies dans  $\Omega$  et à valeurs dans  $C$  vérifiant ces équations. Elles décrivent, en régime harmonique de pulsation  $\omega$ , les petites fluctuations de pression  $p$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  à partir de l'état de repos (c.à.d. la pression acoustique et la vitesse particulaire acoustique) d'un fluide compressible homogène, isotrope, non visqueux, confiné dans  $\Omega$  et soumis à une distribution de vitesse normale  $V_n$  sur  $\partial\Omega_v$ .

$\rho_0$ ,  $\chi$  et  $c$  représentent respectivement la masse volumique, le coefficient de compressibilité adiabatique et la célérité du son relatifs au fluide, en absence de perturbation acoustique ; le coefficient  $\alpha = 1 / Z$  est l'admittance localisée du matériau constituant  $\partial\Omega_v$  à la pulsation considérée.

Pour construire une méthode d'approximation par éléments finis de ce problème, il est nécessaire de le mettre sous une forme variationnelle.

#### 4.1.2 Formulation variationnelle mixte

On prend le produit scalaire de l'équation [éq 4.1.1-1] dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction quelconque  $q$  dans  $H^1(\Omega)$  (c'est la fonction-test).

La formule de Green et le fait que  $\mathbf{v}$  vérifie les conditions aux limites [éq 4.1.1-3] et [éq 4.1.1-4] nous permettent d'aboutir à :

$$\int_{\Omega} i\omega \chi p q^* + \int_{\partial\Omega_z} \alpha p q^* - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} q^* = - \int_{\partial\Omega_v} V_n q^* \quad \text{éq 4.1.2-1}$$

On procède de même avec l'équation [éq 4.1.1-2] en prenant son produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction-test  $\mathbf{u}$  quelconque dans  $(L^2(\Omega))^3$  on obtient :

$$\int_{\Omega} i\omega \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{éq 4.1.2-2}$$

A présent nous multiplions [éq 4.1.2-1] par  $j\omega \rho_0$  et [éq 4.1.2-2] par  $-j\omega \rho_0$ , puis nous faisons le **changement de fonction** :

$$j\omega \mathbf{v} \mapsto \bar{\mathbf{v}}$$

Ainsi nous obtenons la formulation variationnelle mixte [éq 4.1.2-3] :

Trouver  $(p, \bar{\mathbf{v}}) \in X \times M$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} -\rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} q^* - \omega^2 \int_{\Omega} 1/c^2 p q^* + j\omega \int_{\partial\Omega_Z} \rho_0 \alpha p q^* = -j\omega \int_{\partial\Omega_V} \rho_0 V_n q^* \quad \forall q \in X \\ \int_{\Omega} \rho_0^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^* + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{grad} p \cdot \bar{\mathbf{u}}^* = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in M \end{array} \right. \quad \text{éq 4.1.2-3}$$

où :  $X = H^1(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) ; \partial p / \partial x_i \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2, 3\}$

et :  $M = (L^2(\Omega))^3 = \{\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_i) \quad i = 1, 2, 3 ; \bar{v}_i \in L^2(\Omega)\}$

## 4.2 Discrétisation par éléments finis.

Le domaine  $\Omega$  et ses frontières  $\partial\Omega_V$  et  $\partial\Omega_Z$  sont découpés en domaines et frontières élémentaires :

$$\Omega^e, \partial\Omega_V^e, \partial\Omega_Z^e$$

sur lesquels sont calculées des intégrales élémentaires.

Pour représenter les champs de  $p^e$  et de  $\mathbf{v}^e$  à l'intérieur de l'élément on utilise les mêmes fonctions de base  $N_i$ .

A l'intérieur de chaque élément (comportant m nœuds) on écrit :

$$\mathbf{OM}^e = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) \mathbf{OM}_i^e$$

$$p^e = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) p_i^e$$

$$\bar{\mathbf{v}}^e = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta, \xi) \bar{\mathbf{v}}_i^e$$

$\varepsilon, \eta, \xi$  sont les coordonnées curvilignes d'un élément tridimensionnel ;

$\mathbf{OM}_i^e$  est le vecteur position du nœud  $M_i$  de l'élément  $e$  à  $m$  nœuds ;

$N_i, i = 1, m$  sont les fonctions de base sur l'élément  $e$  ;

$\bar{\mathbf{v}}_i^e$  est le vecteur 'accélération' au nœud  $M_i$  de l'élément  $e$ .

Dans ce cas le système d'équations [éq 4.1.2-3] s'écrit matriciellement pour chaque élément  $e$  :

$$p^e \bar{\mathbf{v}}^e \mathbf{K}^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{\mathbf{u}}^{e*} \end{bmatrix} - \omega^2 p^e \bar{\mathbf{v}}^e \mathbf{M}^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{\mathbf{u}}^{e*} \end{bmatrix} + j\omega p^e \bar{\mathbf{v}}^e \mathbf{C}^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{\mathbf{u}}^{e*} \end{bmatrix} = -j\omega \mathbf{S}^e \begin{bmatrix} q^{e*} \\ \bar{\mathbf{u}}^{e*} \end{bmatrix} \quad \text{éq 4.2-1}$$

où :

$$p^e \bar{\mathbf{v}}^e = \begin{bmatrix} p^e \\ \bar{\mathbf{v}}^e \end{bmatrix}^t = \left\{ p_1^e, \bar{v}_{1x}^e, \bar{v}_{1y}^e, \bar{v}_{1z}^e \quad \cdots \quad p_m^e, \bar{v}_{mx}^e, \bar{v}_{my}^e, \bar{v}_{mz}^e \right\} \text{ est le vecteur solution dans l'élément } e ;$$

## 4.2.1 La matrice de rigidité

$\mathbf{K}^e$  est la matrice de 'rigidité' élémentaire, correspondant au calcul de la partie suivante de [éq 4.1.2-3] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^e} -\rho_0 \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{grad} q^* \\ \int_{\Omega^e} \rho_0^2 \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^* + \int_{\Omega^e} -\rho_0 \mathbf{grad} p \cdot \bar{\mathbf{u}}^* \end{array} \right.$$

On peut l'écrire en la décomposant en  $m \times m$  sous matrices  $\mathbf{K}_{ij}^e$  de dimensions 4 x 4 comme ci-dessous :

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \cdots \mathbf{K}_{1j}^e & \cdots \mathbf{K}_{1m}^e \\ \mathbf{K}_{i1}^e & \cdots \mathbf{K}_{ij}^e & \cdots \mathbf{K}_{im}^e \\ \mathbf{K}_{m1}^e & \cdots \mathbf{K}_{mj}^e & \cdots \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \text{ pour } i, j = 1, \dots, m$$

avec les termes suivants pour  $\mathbf{K}_{ij}^e$  :

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} 0 & -\int_{\Omega^e} \rho_0 \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j & -\int_{\Omega^e} \rho_0 \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & -\int_{\Omega^e} \rho_0 \frac{\partial N_i}{\partial z} N_j \\ -\int_{\Omega^e} \rho_0 \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i & \int_{\Omega^e} \rho_0^2 N_i N_j & 0 & 0 \\ -\int_{\Omega^e} \rho_0 \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i & 0 & \int_{\Omega^e} \rho_0^2 N_i N_j & 0 \\ -\int_{\Omega^e} \rho_0 \frac{\partial N_j}{\partial z} N_i & 0 & 0 & \int_{\Omega^e} \rho_0^2 N_i N_j \end{bmatrix}$$

## 4.2.2 La matrice de masse

$\mathbf{M}^e$  est la matrice de 'masse' élémentaire, correspondant au calcul de :

$$\int_{\Omega} 1/c^2 p q^*$$

Ses coefficients sont les suivants :

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega} 1/c^2 N_i N_j \quad \begin{array}{l} \text{pour } i, j = 1, \dots, 4r-3, \dots, 4m-3 \\ \text{avec } r = 1, \dots, m \end{array}$$

Les autres termes sont **nuls**

## 4.2.3 La matrice d'amortissement

$\mathbf{C}^e$  est la matrice d' 'amortissement' élémentaire, provenant du calcul de :

$$\int_{\partial\Omega_V^e} \rho_0 \alpha p q^*$$

Ses coefficients sont les suivants :

$$C_{ij}^e = \int_{\partial\Omega_V^e} \rho_0 \alpha N_i N_j \quad \begin{array}{l} \text{pour } i, j = 1, \dots, 4r-3, \dots, 4m-3 \\ \text{avec } r = 1, \dots, m \end{array}$$

Les autres termes sont **nuls**.

## 4.2.4 Le vecteur source

$\mathbf{S}^e$  est le vecteur 'source' élémentaire, représentant le calcul des termes :

$$\int_{\partial\Omega_Z^e} \rho_0 V_n q^*$$

Ses composantes sont les suivantes :

$$S_i^e = \int_{\partial\Omega_Z^e} \rho_0 V_n N_i \quad \begin{array}{l} \text{pour } i, j = 1, \dots, 4r-3, \dots, 4m-3 \\ \text{avec } r = 1, \dots, m \end{array}$$

Les autres termes sont **nuls**.

Après avoir obtenu le champ  $p, \bar{v}$  sur le domaine  $\Omega$  par résolution de l'équation [éq 4.2-1] assemblée, on revient au champ  $p, v$  par le changement de fonction inverse; on peut calculer les intensités acoustiques définies par [éq 1-1] qui sont dans ce cas continues dans tout le domaine  $\Omega$ .

## 5 Commandes spécifiques à la modélisation acoustique

Lors d'une étude par modélisation en éléments finis acoustiques avec le *Code\_Aster* on utilise des commandes générales et des commandes qui sont propres à l'acoustique, ou dont les mots-clés et options sont particulières à cette discipline ; nous en présentons ci-dessous la liste.

### Definition des caractéristiques des milieux de propagation

Il est nécessaire de donner la masse volumique (valeur réelle) et la célérité de propagation (valeur complexe) ; on utilise pour cela la commande :

DEFI\_MATERIAU avec les mots-clés suivants :

mot-clé facteur :	FLUIDE	
mots-clés :	RHO	(masse volumique $\rho_0$ )
	CELE_C	(célérité $c$ )

#### Exemple :

```
air = DEFI_MATERIAU(FLUIDE: ( RHO : 1.3  
                             CELE_C : RI 343. 0. ));
```

Dans ce cas  $\rho_0 = 343. + j0$ .

### Affectation du modèle

Il faut obligatoirement préciser qu'il s'agit du **phénomène** 'acoustique' et choisir l'une des 3 **modélisations** possibles de l'acoustique; on utilise donc la commande :

AFFE\_MODELE avec les mots-clés suivants pour lesquels on spécifie les valeurs d'affectation possibles :

mot-clés :	PHENOMENE : 'ACOUSTIQUE'
	MODELISATION: '3D' ou 'PLAN' ou '3D_MIXTE'

#### Exemple :

```
guide = AFFE_MODELE( MAILLAGE: mail  
                    AFFE : ( TOUT : 'oui'  
                          MODELISATION : '3d_mixte'  
                          PHENOMENE : 'acoustique'));
```

### Conditions aux limites

On doit affecter des valeurs de vitesse vibratoire normale par face (ou arête en bidimensionnel) aux mailles définissant les frontières sources, et aussi des valeurs d'impédance acoustique par face (arête en bidimensionnel) aux mailles définissant les frontières à impédance imposée.

On utilise la commande spécifique à l'acoustique :

AFFE\_CHAR\_ACOU avec les mots-clés suivants :

mot-clé :	MODELE	
mot-clé facteur :	VITE_FACE	
mot-clé :	MAILLE	
	GROUP_MA	
	VNOR	(vitesse vibratoire normale $V_n$ )
mot-clé facteur :	IMPE_FACE	
mot-clé :	MAILLE	
	GROUP_MA	
	IMPE	(impédance acoustique $Z$ )
mot-clé facteur :	PRES_IMPO	
	NEUD	
	GROUP_NO	
	PRES	(pression $p$ imposée aux nœuds)

#### Exemple :

```
characou = AFFE_CHAR_ACOU (  MODELE: guide
                              VITE_FACE: (      GROUP_MA: entree
                                                VNOR: RI  0.0135  0. ) );
```

Dans ce cas  $V_n = 0.0135 + j0$ .

#### Calcul des matrices élémentaires

Les différentes matrices élémentaires (rigidité, masse et amortissement) sont calculées par des options spécifiques. On emploie la commande :

CALC\_MATR\_ELEM avec le mot-clé OPTION pour lequel on spécifie les valeurs d'affectation possibles :

mots-clés :	OPTION :	'RIGI_ACOU'
		'MASS_ACOU'
		'AMOR_ACOU'

#### Exemple :

```
matele_k = CALC_MATR_ELEM (  MODELE: guide
                              CHAM_MATER: chamat
                              OPTION: 'rigi_acou' );
```

#### Nota :

*les matrices assemblées peuvent être obtenue directement avec la macro commande MACRO\_MATR\_ASSE et les mêmes options.*

#### Calcul du vecteur source élémentaire

Le vecteur élémentaire est calculé par une option spécifique; il faut obligatoirement indiquer le chargement. On emploie la commande :

CALC\_VECT\_ELEM avec le mot-clé OPTION pour lequel on spécifie la seule valeur d'affectation possible :

mots-clé :	OPTION :	'CHAR_ACOU'
mots-clé :	CHARGE	

#### Exemple :

```
vectelem = CALC_VECT_ELEM (  MODELE: guide
                              CHAM_MATER: chamat
                              OPTION: 'char_acou'
                              CHARGE: characou );
```

### Calcul de la solution

Après assemblage des matrices et vecteur élémentaires la solution harmonique peut se calculer directement avec la commande :

DYNA\_LINE\_HARM

### Exemple :

```
presharm = DYNA_LINE_HARM (  MATR_MASS: matasm
                             MATR_RIGI: matask
                             MATR_AMOR: matasi
                             FREQ: f
                             EXCIT: (VECT_ASSE: vectass COEF_MULT:-1.);
                             PUIS_PULS:1 PHAS_DEG:90.);
```

### Post-traitements

A partir du résultat de la résolution de la transcription matricielle des équations [éq 3.1-2] ou [éq 4.1.2-3], des commandes de post-traitement permettent d'obtenir les champs nodaux de grandeurs acoustiques suivantes:

- niveau  $L_p$  de pression acoustique  $P$  en  $dB$  :  $L_p = 20 \log_{10} \left[ \frac{|P|}{2.0 \cdot 10^{-5}} \right]$
- partie réelle de la pression acoustique
- partie imaginaire de la pression acoustique
- intensité acoustique active  $\mathbf{I} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{p} \mathbf{v}^*]$
- intensité acoustique réactive  $\mathbf{J} = \frac{1}{2} \text{Im}[\mathbf{p} \mathbf{v}^*]$

Ces champs sont calculés par utilisation de la commande de post-traitement CALC\_ELEM (le concept du résultat est du type 'ACOU\_HARMO' ou 'MODE\_ACOU') :

CALC\_ELEM avec les mots-clés RESULTAT et OPTION pour lequel on spécifie les valeurs d'affectation possibles :

mot-clé :	RESULTAT	
mot-clé :	OPTION :	'PRES_ELNO_DBEL' (niveau de pression en dB)
		'PRES_ELNO_REEL' (partie réelle de la pression)
		'PRES_ELNO_IMAG' (partie imaginaire de la pression)
		'INTE_ELNO_ACTI' (intensité active)
		'INTE_ELNO_REAC' (intensité réactive)

### Exemple :

```
&presharm = CALC_ELEM (  MODELE: guide
                         CHAM_MATER: chamat
                         RESULTAT: presharm
                         OPTION: 'pres_elnodbel' );
```

## 6 Conclusion

Des modules ont donc été intégrés dans *Code\_Aster*, permettant de faire des calculs d'acoustique intérieure en basses fréquences pour des géométries complexes par deux méthodes : éléments finis acoustiques classiques et éléments finis acoustiques mixtes.

Les deux formulations ont été validées par comparaison à une même solution analytique; des cas tests sont présentés dans le manuel de validation V7 sous la codification AHLV100.

Comme il était prévu, la précision, à maillage identique, est supérieure dans le cas mixte ; si on tient compte de l'encombrement mémoire cette supériorité n'est avantageuse que si nous voulons obtenir le champ d'intensité : on devrait utiliser les E.F. mixtes uniquement dans ce cas là.

## 7 Bibliographie

- [1] A. BOUIZI : 'Mise en oeuvre d'un code de calcul d'éléments finis en vue du traitement de l'équation de Helmholtz en espace clos' - Travail de fin d'études, E.C.L. 1986.
- [2] A. BOUIZI : 'Analyse spectrale de l'équation de Helmholtz.' - Rapport de DEA, Ecole Centrale de Lyon, 1986.
- [3] A. BOUIZI : 'Eléments finis mixtes en acoustique linéaire stationnaire : Développement du code AIRMEF' - Département Acoustique. DER - EDF. HE-24 / 88.02. 1988.
- [4] A. BOUIZI, M. COURTADE, D. JEANDEL, E. LUZZATO, A. MIGNOT, C. SURRY. : 'Conditions de compatibilité de Brezzi-Babuska pour des méthodes d'éléments finis mixtes conformes en Mécanique et Acoustique' AUM, Actes du 8ème Congrès Français de Mécanique, Nantes, 1987.
- [5] A. BOUIZI, M. COURTADE, D. JEANDEL, E. LUZZATO, C. SURRY : 'Traitement de l'équation de Helmholtz par un code d'éléments finis mixtes en espace clos' GAMI, Colloque Vibrations Chocs, 1988, ECL, 1988.
- [6] A. BOUIZI : 'Résolution des équations de l'Acoustique linéaire par une méthode d'éléments finis mixtes'. Thèse présentée devant l'Ecole Centrale de Lyon -Spécialité : Mécanique -. Soutenue le 02/03/89.
- [7] C. HABASQUE : 'Validation expérimentale du code de calcul d'acoustique interne, Basse Fréquence'. Rapport de stage de DEA. ECL 1986 (+ Projet de fin d'études).
- [8] A.ADOBES : 'Etude numérique et expérimentale des champs d'ondes stationnaires' Rapport DER / EDF - HE-2287.22
- [9] F. STIFKENS, A.ADOBES : 'Bilan de l'intégration des éléments finis classiques dans Aster' - Rapport DER / EDF - HP-64/91.149
- [10] F. STIFKENS : 'Intégration des éléments finis acoustiques mixtes dans Aster' Rapport DER / EDF - HP-61/92.081