Organisme(s) : EDF-R&D/AMA

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.04

Relations de comportement élasto-visco-plastique de Chaboche

Résumé :

Ce document décrit l'intégration du modèle de comportement élasto-visco-plastique de J.L. Chaboche à écrouissage cinématique non linéaire et isotrope. Deux versions du modèle sont disponibles dans le *Code_Aster* :

- une version à une ou deux variables cinématiques, introduite récemment, prend en compte toutes les variations des coefficients avec la température, et possède un effet d'écrouissage sur les variables tensorielles de rappel. Cette version permet également de modéliser (de façon facultative) le caractère visqueux du matériau (viscosité de Norton). Elle est intégrée par la résolution d'une seule équation scalaire non linéaire.
  Ce modèle est disponible en 3D, déformation plane, axisymétrie. La modélisation en contrainte plane utilise une méthode de condensation statique (de Borst).
- une version à deux variables cinématiques qui existe dans le *Code_Aster* depuis la version 2, qui ne prend pas en compte toutes les variations des coefficients par rapport à la température, mais qui a été utilisée pour plusieurs études, et pour laquelle on dispose de jeux de paramètres identifiés. Cette version est intégrée dans l'environnement PLASTI. Elle ne permet pas de modéliser la viscosité.
  Elle ne prend pas en compte d'effet d'écrouissage sur la variable tensorielle de rappel.
  Ce modèle est disponible en 3D, déformation plane, contrainte plane et axisymétrie.
  On donne aussi des éléments pour identifier les coefficients de la relation de comportement.

1 Modèles élasto-visco-plastiques de J.L. Chaboche disponibles dans le *Code_Aster*

Pour le calcul de structures soumises à des chargements cycliques, les écrouissages isotrope (linéaire ou non) et cinématique linéaire classiques [R5.03.02] et [R5.03.16] ne sont plus suffisants. En particulier, on ne peut pas décrire correctement les cycles stabilisés obtenus expérimentalement sur une éprouvette de traction soumise à une déformation imposée alternée ou une traction-compression.

Si on cherche à décrire précisément les effets d'un chargement cyclique, il est souhaitable d'adopter des modélisations plus sophistiquées (mais simples d'emploi) telles que le modèle de Saïd Taheri, par exemple, cf. [R5.03.05], ou bien si le nombre de cycles est limité le modèle de Jean-Louis Chaboche qui est présenté ici.

En réalité, le modèle de J.L. Chaboche peut être plus ou moins sophistiqué. Les modèles développés dans le *Code_Aster* comportent soit une variable cinématique (`VISC_CIN1_CHAB`) soit deux (`VISC_CIN2_CHAB` et `CHABOCHE`), et de l'écrouissage isotrope.

Le choix d'utiliser deux variables cinématiques complique certes le modèle, mais permet d'identifier correctement les essais uniaxiaux dans une plus large gamme de déformations [bib2], [bib7]. Un certain nombre d'indentifications des paramètres de ce modèle ont été effectués principalement pour les aciers inoxydables A316 et A304 ([bib7], [bib8]).

Les modèles comportent 8 paramètres (une variable cinématique) ou 10 (deux variables cinématiques), introduits dans la commande `DEFI_MATERIAU` :

```
CIN1_CHAB (CIN1_CHAB_FO)          = _F(
                            ♦  R_0    =    R_0,
                            ◊  R_I    =    R_I,   (inutile si B=0)
                            ◊  B      =    b  ,   (défaut : 0.)

                            ♦  C_I    =    C_I,
                            ◊  K      =    k  ,   (défaut : 1.)
                            ◊  W      =    w  ,   (défaut : 0.)

                            ♦  G_0    =    G_0,
                            ◊  A_I    =    A_I,   (défaut : 0.)
                         )
CIN2_CHAB (CIN2_CHAB_FO)          = _F(
                            ♦  R_0    =    R_0,
                            ◊  R_I    =    R_I,   (inutile si B=0)
                            ◊  B      =    b  ,   (défaut : 0.)

                            ♦  C1_I   =    C1_I,
                            ♦  C2_I   =    C2_I,
                            ◊  K      =    k   ,  (défaut : 1.)
                            ◊  W      =    w   ,  (défaut : 0.)

                            ♦  G1_0   =    G1_0,
                            ♦  G2_0   =    G2_0,
                            ◊  A_I    =    A_I ,  (défaut : 0.)
                         )
```

Les 8 ou 10 paramètres sont des constantes réelles. Tous ces paramètres peuvent dépendre de la température (mots clé `CIN1_CHAB_FO` ou `CIN2_CHAB_FO`) et les valeurs attendues sont de type `fonction`.

Dans le cas où l'on veut introduire en plus de la viscosité (modèles VISC_CIN1_CHAB et VISC_CIN2_CHAB), il faut également fournir dans la commande DEFI_MATERIAU, sous le mot-clé LEMAITRE (ou LEMAITRE_FO) les paramètres N et UN_SUR_K, qui peuvent dépendre de la température.

Le paramètre UN_SUR_M du mot-clé LEMAITRE (respectivement LEMAITRE_FO) doit obligatoirement être mis à zéro (respectivement à la fonction identiquement nulle). En l'absence d'un des mots-clés LEMAITRE ou LEMATIRE_FO, le comportement est présumé plastique.

Le modèle CHABOCHE est un modèle à deux variables cinématiques avec écrouissage isotrope, mais sans l'effet de l'écrouissage sur le terme de rappel et sans prise en compte de la variation de C_1 et C_2 avec la température. Les caractéristiques de l'écrouissage sont données par 9 constantes, introduites dans la commande DEFI_MATERIAU :

```
CHABOCHE = _F     (
                            ♦  R_0    =     R_0,
                            ♦  R_I    =     R_I,
                            ♦  B      =     b,
                            ♦  K      =     k,
                            ♦  W      =     w,
                            ♦  A1     =     A1,
                            ♦  A2     =     A2,
                            ♦  C1     =     C1,
                            ♦  C2     =     C2,
                         )
```

Dans ce cas les caractéristiques ne dépendent plus de la température depuis la version 5, car ces variations étaient mal prises en compte par ce modèle.

L'emploi de ces lois de comportement est accessible dans les commandes STAT_NON_LINE ou DYNA_NON_LINE par les mot-clé VISC_CIN1_CHAB, VISC_CIN2_CHAB ou CHABOCHE de COMP_INCR.

Dans la suite de ce document, on décrit précisément les modèles VISC_CIN1_CHAB et VISC_CIN2_CHAB. On présente ensuite le détail de son intégration numérique en lien avec la construction de la matrice tangente cohérente. On décrit aussi succinctement l'intégration du modèle à deux variables cinématiques CHABOCHE. Enfin, on donne également quelques éléments pour l'identification des caractéristiques du matériau.

2 Modèles `VISC_CIN1_CHAB` et `VISC_CIN2_CHAB`

2.1 Description des modèles

A tout instant, l'état du matériau est décrit par la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, la température T, la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$, la déformation plastique cumulée p et le tenseur de rappel $\mathbf{X}$. Les équations d'état définissent alors en fonction de ces variables d'état la contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^H \mathbf{Id} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (décomposée en parties hydrostatique et déviatorique), la part isotrope de l'écrouissage R et la part cinématique $\mathbf{X}$:

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) = K\, tr\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}\right) \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}} = \alpha\left(T\text{-}T^{réf}\right)\mathbf{Id} \qquad \textbf{éq 2.1-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma^H \mathbf{Id} = 2\mu\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}\right) \qquad \textbf{éq 2.1-2}$$

$$R = \mathrm{R}(p) \qquad \textbf{éq 2.1-3}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(p, \varepsilon^p) = \mathbf{X}_1(p, \varepsilon^p) + \mathbf{X}_2(p, \varepsilon^p) \qquad \textbf{éq 2.1-4}$$

où K, μ, α et les coefficients de $\mathbf{X}(p)$ et $R(p)$ sont des caractéristiques du matériau qui peuvent dépendre de la température. Plus précisément, ce sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, le coefficient de dilatation thermique, les fonctions d'écrouissage isotrope et cinématique. Quant à $T^{réf}$, il s'agit de la température de référence, pour laquelle on considère la déformation thermique comme étant nulle.

Remarque :

> *Pour le modèle `VISC_CIN1_CHAB` on ne considère que la seule variable tensorielle $\mathbf{X}_1(p)$ donc $\mathbf{X}_2(p) = 0$. Ceci reste valable pour toute la suite : on décrira formellement les deux modèles de la même façon, le modèle `VISC_CIN1_CHAB` se déduisant de `VISC_CIN2_CHAB` en supposant $\mathbf{X}_2(p) = 0$.*

L'évolution de la déformation plastique est gouvernée par une loi d'écoulement normale à un critère de plasticité de von Mises :

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}) = \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)_{eq} - R(p) \qquad \text{avec} \quad \mathbf{A}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\, \tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{A}}} \qquad \textbf{éq 2.1-5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)_{eq}} \qquad \textbf{éq 2.1-6}$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}} \qquad \textbf{éq 2.1-7}$$

Quant au multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, il est obtenu par la condition de cohérence :

$$\begin{cases} \text{si} \quad \mathrm{F} < 0 \quad \text{ou} \quad \dot{\mathrm{F}} < 0 \quad \dot{\lambda} = 0 \\ \text{si} \quad \mathrm{F} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathrm{F}} = 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{éq 2.1-8}$$

Remarque :

L'évolution des variables $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \frac{2}{3} C_1(p) \boldsymbol{\alpha}_1, \\
\mathbf{X}_2 &= \frac{2}{3} C_2(p) \boldsymbol{\alpha}_2, \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} - \gamma_1(p) \boldsymbol{\alpha}_1 \, \dot{p} \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} - \gamma_2(p) \boldsymbol{\alpha}_2 \, \dot{p}
\end{aligned}
\qquad \text{éq 2.1-9}
$$

Les fonctions $C(p)$ $\gamma(p)$ et $R(p)$ sont définies, conformément à [bib2] par :

$$
\begin{aligned}
R(p) &= R_\infty + (R_0 - R_\infty) e^{-bp} \\
C_1(p) &= C_1^\infty \left(1 + (k-1)\ e^{-wp}\right) \\
C_2(p) &= C_2^\infty \left(1 + (k-1)\ e^{-wp}\right) \\
\gamma_1(p) &= \gamma_1^0 \left(a_\infty + (1-a_\infty) e^{-bp}\right) \\
\gamma_2(p) &= \gamma_2^0 \left(a_\infty + (1-a_\infty) e^{-bp}\right)
\end{aligned}
$$

La présence de viscosité peut se modéliser de façon simple (cf. Lemaitre et Chaboche [bib2]) en remplaçant la condition de cohérence [éq 2.1-8] par :

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle F \rangle}{K} \right)^N \qquad \text{éq 2.1-10}$$

$\langle F \rangle$ partie positive de F (crochets de Macauley)

K, N caractéristiques de viscosité (Norton) du matériau

On laisse inchangées toutes les autres équations du modèle. On verra qu'une telle introduction de la viscosité n'entraîne que des modifications mineures de l'algorithme d'intégration implicite de la loi de comportement.

Remarque :

La définition de $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sous la forme [éq 2.1-9] :

- *permet de garder une formulation qui prenne en compte les variations des paramètres avec la température sans introduire de terme en $\dot{T}$ comme dans [bib.4], de la même façon que le modèle de Chaboche viscoplastique. Ces termes sont nécessaires car leur non prise en compte conduirait à des résultats inexacts [bib4].*
- *permet d'avoir une écriture cohérente avec l'expression thermodynamique du potentiel plastique [bib2] (p.221).*

Remarque :

Signification des fonctions $C_1(p),\ \gamma_1(p),\ C_2(p),\ \gamma_2(p), R(p)$ *:*

on constate que les fonctions $C_1(p),\ \gamma_1(p),\ C_2(p),\ \gamma_2(p), R(p)$ *intervenant dans les équations précédentes permettent toutes les trois de modéliser différents effets d'écrouissage non linéaires. L'introduction de l'écrouissage, soit au niveau de la partie cinématique, par* $C(p)$*, soit au niveau du terme de rappel, par la fonction* $\gamma(p)$*, n'a pas le même effet sur les essais d'identification [bib2]. L'utilisation d'un modèle avec* $\gamma(p)$ *permet en particulier d'identifier plus facilement de forts écrouissages cycliques. Plusieurs travaux d'identification des coefficients des modèles de Chaboche ont d'ailleurs été effectués sur la base du modèle avec un écrouissage représenté par* $\gamma(p)$ *([bib5], [bib6]), en particulier pour l'acier inoxydable A316L.*

2.2 Intégration des relations `VMIS_CIN1_CHAB` et `VMIS_CIN2_CHAB`

Pour réaliser numériquement l'intégration de la loi de comportement, on effectue une discrétisation en temps et on adopte un schéma d'Euler implicite, réputé approprié pour des relations de comportement élastoplastiques. Dorénavant, on emploiera les notations suivantes : A^-, A et ΔA représentent respectivement les valeurs d'une quantité au début et à la fin du pas de temps considéré ainsi que son incrément durant le pas. Le problème est alors le suivant : connaissant l'état au temps t^- ainsi que les incréments de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (issus de la phase de prédiction (cf. doc R `STAT_NON_LINE` [R5.03.01])) et de température ΔT, déterminer l'état des variables internes au temps t ainsi que les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

On prend en compte les variations des caractéristiques par rapport à la température en remarquant que :

$$\sigma^H = \frac{K}{K^-}\,\sigma^{H-} + K\ \mathrm{tr}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}\right) \qquad \textbf{éq 2.2-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mu}{\mu^-}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}\right) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} \qquad \textbf{éq 2.2-2}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e = \frac{\mu}{\mu^-}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Au vu de l'équation [éq 2.2-1], on constate que le comportement hydrostatique est purement élastique si K est constant. Seul le traitement de la composante déviatorique est délicat.

En l'absence de terme visqueux, la relation de cohérence discrétisée est :

Régime élastique : $F \le 0$ et $\Delta p = 0$
Régime plastique : $F = 0$ et $\Delta p \ge 0$

En revanche, en présence de viscosité, la condition de cohérence est remplacée par l'équation [éq 2.1-10] qui, discrétisée, s'écrit :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \left(\frac{\langle F\rangle}{K}\right)^N \Leftrightarrow \langle F\rangle = K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

Autrement dit, en posant :

$$\tilde{F} = F - K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

l'incrément de déformation viscoplastique cumulée est déterminé par :

$$\begin{aligned} &\text{Régime élastique :} && \tilde{F} \leq 0 \text{ et } \Delta p = 0 \\ &\text{Régime viscoplastique :} && \tilde{F} = 0 \text{ et } \Delta p \geq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.2-3}$$

Finalement, en adoptant une discrétisation implicite, la seule différence entre les lois de comportement plastique et viscoplastique réside dans la forme de la fonction de charge F : on y observe un terme complémentaire en cas de viscosité. En fait, la plasticité incrémentale apparaît comme le cas limite de la viscoplasticité incrémentale lorsque K tend vers zéro. Cette convergence a déjà été décrite par J.L. Chaboche et G. Cailletaud dans [bib3].

Dans la suite de ce paragraphe, on détaillera donc l'intégration de la loi viscoplastique. Pour retrouver le cas du comportement plastique, il suffit de prendre $K = 0$ dans les équations ci-dessous (on rappelle que l'utilisateur pour se placer dans ce cas doit obligatoirement enlever le mot-clé `LEMAITRE` ou `LEMAITRE_FO` de la commande `DEFI_MATERIAU`).

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - \frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p} - \frac{2}{3}\left(C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2\right)$$

Les équations d'écoulement [éq 2.1-6] et [éq 2.1-7], une fois discrétisées, et la condition de cohérence [éq 2.2-3] s'écrivent (en remarquant que $p = \lambda$) :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p} = \frac{3}{2}\Delta p \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mathbf{e} - \frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p} - \frac{2}{3}C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{2}{3}C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mathbf{e} - \frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mathbf{p} - \frac{2}{3}C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{2}{3}C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{eq}} \qquad \textbf{éq 2.2-4}$$

$$\tilde{\mathrm{F}} \leq 0 \quad \Delta p \geq 0 \quad \tilde{\mathrm{F}} \;\; \Delta p = 0 \qquad \textbf{éq 2.2-5}$$

Le traitement de la condition de cohérence (équation précédente) est classique. On commence par un essai élastique ($\Delta p = 0$) qui est bien la solution si le critère de plasticité n'est pas dépassé, c'est-à-dire si :

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - \frac{2}{3}C_1\left(p^-\right)\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\left(p^-\right)\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)_{eq} - R\left(p^-\right) < 0 \qquad \textbf{éq 2.2-6}$$

Dans le cas contraire, la solution est plastique ($\Delta p > 0$) et la condition de cohérence se réduit à $\tilde{\mathrm{F}} = 0$. Pour la résoudre, on montre qu'on peut se ramener à un problème scalaire en exprimant $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ et $\Delta\boldsymbol{\alpha}_1, \Delta\boldsymbol{\alpha}_2$ en fonction de Δp. En regroupant les équations du problème issu de la discrétisation implicite, on obtient le système d'équations :

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} - \frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \frac{2}{3}C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{2}{3}C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{eq} = R(p) + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N} \qquad \textbf{éq 2.2-7}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \frac{3}{2}\Delta p \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} - \frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \frac{2}{3}C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{2}{3}C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2}{R(p) + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}} \qquad \textbf{éq 2.2-8}$$

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\alpha}_1 &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \gamma_1\boldsymbol{\alpha}_1\Delta p \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_2 &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \gamma_2\boldsymbol{\alpha}_2\Delta p \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.2-9}$$

Dans cette écriture, il faut bien noter que $p = p^- + \Delta p$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}}^- + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}}$ et que C_i, γ_i sont des fonctions de p. En considérant les trois dernières équations, ce système linéaire en $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ et $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{i}}$ peut se résoudre pour exprimer ces quantités en fonction de Δp. En effet, il est équivalent à :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}\left(R(p) + 3\mu\Delta p + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}\right) = \Delta p\left(\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} - C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- - C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 - C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2\right) \qquad \textbf{éq 2.2-10}$$

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\alpha}_1(1+\gamma_1\Delta p) &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \gamma_1\boldsymbol{\alpha}_1^-\Delta p \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_2(1+\gamma_2\Delta p) &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \gamma_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\Delta p \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.2-11}$$

En calculant $C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1$ et $C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2$ et en les remplaçant dans l'expression de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ on obtient une expression de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ en fonction de Δp seulement :

$$\begin{aligned} C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1 &= \left(\frac{C_1}{1+\gamma_1\Delta p}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \left(\frac{C_1\ \gamma_1\ \boldsymbol{\alpha}_1^-\Delta p}{1+\gamma_1\ \Delta p}\right) = M_1(p)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - M_1(p)\gamma_1\ \Delta p\boldsymbol{\alpha}_1^- \\ C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2 &= \left(\frac{C_2}{1+\gamma_2\Delta p}\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \left(\frac{C_2\ \gamma_2\ \boldsymbol{\alpha}_2^-\Delta p}{1+\gamma_2\ \Delta p}\right) = M_2(p)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - M_2(p)\gamma_2\ \Delta p\boldsymbol{\alpha}_2^- \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.2-12}$$

avec $M_i(p) = \dfrac{C_i(p)}{1+\gamma_i(p)\Delta p}$

En reportant cette expression dans l'expression de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ on trouve :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}=\frac{1}{\left(R(p)+(3\mu+M_1+M_2)\Delta p+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}\right)}\left(\frac{3}{2}\Delta p\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}-\Delta p\left((C_1-M_1\gamma_1\Delta p)\boldsymbol{\alpha}_1^- +(C_2-M_2\gamma_2\Delta p)\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)\right)$$

ce qui se simplifie en :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}=\frac{1}{D(p)}\left(\frac{3}{2}\,\Delta p\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}-\Delta p\left(M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- +M_2\,\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)\right) \qquad \textbf{éq 2.2-13}$$

avec :

$$D(p)=R(p)+(3\mu+M_1(p)+M_2(p))\Delta p+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à remplacer $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ dans les expressions de $C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1$ et $C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2$ pour exprimer ce terme en fonction de Δp par :

$$C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{M_1}{D}\left(\frac{3}{2}\,\Delta p\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}-\Delta p\left(M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- +M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)\right)-M_1\gamma_1\,\Delta p\,\boldsymbol{\alpha}_1^-$$

$$C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{M_2}{D}\left(\frac{3}{2}\,\Delta p\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}-\Delta p\left(M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- +M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)\right)-M_2\gamma_2\,\Delta p\,\boldsymbol{\alpha}_2^-$$

puis de substituer l'expression obtenue ainsi que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ en fonction de Δp dans l'équation $\tilde{\mathrm{F}}=0$, et on obtient une équation scalaire en Δp à résoudre, à savoir :

$$\tilde{F}(p)=\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}-\frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2^- -2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\frac{2}{3}C_1\Delta\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2}{3}C_2\Delta\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{eq}-R(p)-K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}=0$$

ce qui se simplifie en :

$$\tilde{F}(p)=\frac{R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}}{D(p)}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}}-\frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)_{eq}-R(p)-K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}=0 \qquad \textbf{éq 2.2-14}$$

Cette équation scalaire en Δp est résolue numériquement, par une méthode de recherche de zéro de fonction (méthode de sécantes que l'on décrit brièvement dans l'annexe 2).

Une fois déterminé Δp, on peut calculer $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ à l'aide de l'équation [éq 2.2-13] puis $\Delta\boldsymbol{\alpha}_1$ et $\Delta\boldsymbol{\alpha}_2$ à l'aide des équations [éq 2.2-11]. Il ne reste plus qu'à calculer le tenseur des contraintes, par les équations [éq 2.2-1] et [éq 2.2-2], et à actualiser les variables internes $\boldsymbol{\alpha}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_2$.

Remarques :

- *un cas limite intéressant (pour la validation de ce modèle) se présente en posant $\gamma_i=0$. On se retrouve alors exactement dans la situation de l'écrouissage cinématique linéaire (si $R(p)=\sigma_y$, [R5.03.02]) ou de l'écrouissage mixte pour $R(p)$ quelconque (cf. [R5.03.16]),*
- *ces modèles sont également disponibles en contraintes planes, par une méthode globale (condensation statique due à R. de Borst) [R5.03.03].*

2.3 Calcul de la rigidité tangente

Afin de permettre une résolution du problème global (équations d'équilibre) par une méthode de Newton [R5.03.01], il est nécessaire de déterminer la matrice tangente cohérente du problème incrémental.

Cette matrice se compose classiquement d'une contribution élastique et d'une contribution plastique :

$$\frac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\mu\frac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \textbf{éq 2.3-1}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\sigma} + 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$, ce qui redonne en particulier $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e} = \frac{\mu}{\mu^{-}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-} + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

On en déduit immédiatement qu'en régime élastique (classique ou pseudo-décharge), la matrice tangente se réduit à la matrice élastique :

$$\frac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \textbf{éq 2.3-2}$$

Pour cela, on adopte une fois de plus la convention d'écriture des tenseurs symétriques d'ordre 2 sous forme de vecteurs à 6 composantes. Ainsi, pour un tenseur $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = {}^{t}\left[a_{xx} \quad a_{yy} \quad a_{zz} \quad \sqrt{2}a_{xy} \quad \sqrt{2}a_{xz} \quad \sqrt{2}a_{yz}\right] \qquad \textbf{éq 2.3-3}$$

Si on introduit en outre le vecteur hydrostatique $\mathbf{1}$ et la matrice de projection déviatorique $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{1} = {}^{t}\left[1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] \qquad \textbf{éq 2.3-4}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Id} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \qquad \textbf{éq 2.3-5}$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel

Alors la matrice de rigidité tangente cohérente s'écrit pour un comportement élastique :

$$\frac{\partial\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = K\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\,\mathbf{P} \qquad \textbf{éq 2.3-6}$$

En revanche, en régime plastique, la variation de la déformation plastique n'est plus nulle.

On dérive par rapport à $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}$, sachant qu'on a :

$$\frac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}.\frac{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu\frac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}.\mathbf{P} \qquad \textbf{éq 2.3-7}$$

S espace des tenseurs symétriques
$\mathbf{P}$ projecteur sur les déviateurs

Pour calculer $\dfrac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$, on utilise l'expression de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ en fonction de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}}$ et p :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \frac{1}{D(p)}\left(\frac{3}{2}\Delta p\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}} - \Delta p\left(M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- + M_2\,\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)\right)$$

ce qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = A(p)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}} + B_1(p)\boldsymbol{\alpha}_1^- + B_2(p)\boldsymbol{\alpha}_2^-$$

Donc :

$$\frac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = A(p)\mathbf{Id} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} \otimes \frac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} + \frac{\delta B_1(p)}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} \otimes \boldsymbol{\alpha}_1^- + \frac{\delta B_2(p)}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} \otimes \boldsymbol{\alpha}_2^-$$

Les quantités du type $\dfrac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$ se calculent à l'aide de : $\dfrac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = \dfrac{\delta A(p)}{\delta p}\dfrac{\delta p}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$

Finalement, il ne reste plus qu'à calculer la variation de p : $\dfrac{\delta p}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$

On utilise pour cela : $\tilde{\mathrm{F}}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right) = 0$

$$\tilde{F}(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{e}}) = \frac{R(p) + K\left(\dfrac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}}{D(p)}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} - \frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)_{eq} - R(p) - K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N} = 0$$

$$\tilde{\mathrm{F}}_{,p}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right)\delta p = -\tilde{\mathrm{F}}_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right)\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\delta p}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = -\frac{\tilde{\mathrm{F}}_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right)}{\tilde{\mathrm{F}}_{,p}\left(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right)} \qquad \textbf{éq 2.3-8}$$

Le détail des calculs est donné en annexe 1.

La matrice tangente initiale, utilisée par l'option RIGI_MECA_TANG est obtenue en adoptant le comportement du pas précédent (élastique ou plastique, signifié par une variable interne ξ valant 0 ou 1) et en faisant tendre Δp vers zéro dans les équations précédentes.

2.4 Signification des variables internes

Les variables internes des deux modèles aux points de Gauss (VELGA) sont :

- V1 = p : la déformation plastique cumulée (positive ou nulle)
- V2 = ξ : valant 1 si le point de Gauss a plastifié au cours de l'incrément ou 0 sinon.

Les variables internes suivantes sont, pour la modélisation 3D :

- Pour le modèle VISC_CIN1_CHAB
  - V3 = α_{1xx}
  - V4 = α_{1yy}
  - V5 = α_{1zz}
  - V6 = α_{1xy}
  - V7 = α_{1xz}
  - V8 = α_{1yz}
- Pour le modèle VISC_CIN2_CHAB
  - V3 = α_{1xx}
  - V4 = α_{1yy}
  - V5 = α_{1zz}
  - V6 = α_{1xy}
  - V7 = α_{1xz}
  - V8 = α_{1yz}
  - V9 = α_{2xx}
  - V10 = α_{2yy}
  - V11 = α_{2zz}
  - V12 = α_{2xy}
  - V13 = α_{2xz}
  - V14 = α_{2yz}

Pour les modélisations C_PLAN, D_PLAN, et AXIS :

- V7 = 0
- V8 = 0
- V13 = 0
- V14 = 0

3 Modèle à deux variables cinématiques : CHABOCHE

3.1 Description du modèle

Ce modèle comporte deux variables tensorielles qui décrivent la part cinématique de l'écrouissage : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$. Les équations du comportement sont alors :

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) = K \, tr\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}\right) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}} = \alpha \left(T\text{-}T^{réf}\right) \mathbf{Id} \qquad \text{éq 3.1-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma^H \mathbf{Id} = 2\mu \left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}\right) \qquad \text{éq 3.1-2}$$

$$R = \mathrm{R}(p) \qquad \text{éq 3.1-3}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1\left(p, \varepsilon^p\right) + \mathbf{X}_2\left(p, \varepsilon^p\right) \qquad \text{éq 3.1.4}$$

où K, μ, α et les coefficients des fonctions $R(p)$, $\mathbf{X}_1(p)$ et $\mathbf{X}_2(p)$ sont des caractéristiques du matériau qui peuvent dépendre de la température. Plus précisément, ce sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, le coefficient de dilatation thermique, les fonctions d'écrouissage isotrope et cinématique. Quant à $T^{réf}$, il s'agit de la température de référence, pour laquelle on considère la déformation thermique comme étant nulle.

L'évolution des variables internes est gouvernée par une loi d'écoulement normale à un critère de plasticité :

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)_{eq} - R(p) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \, \tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{A}}} \qquad \text{éq 3.1-5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)_{eq}} \qquad \text{éq 3.1-6}$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}} \qquad \text{éq 3.1-7}$$

Quant au multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, il est obtenu par la condition de cohérence :

$$\begin{cases} \text{si} \quad \mathrm{F} < 0 \quad \text{ou} \quad \dot{\mathrm{F}} < 0 \quad \dot{\lambda} = 0 \\ \text{si} \quad \mathrm{F} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathrm{F}} = 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{éq 3.1-8}$$

L'évolution des variables $\mathbf{X}_i$ est donnée dans le modèle CHABOCHE par :

$$\dot{\mathbf{X}}_i = C_i \left(\frac{2}{3} \, a_i \, \varphi(p) \, \dot{\varepsilon}^p - \mathbf{X}_i \dot{p}\right), \quad i = 1,2$$

Les fonctions $\varphi(p)$ et $R(p)$ sont définies par :

$$\varphi(p) = \left(1 + (k-1)e^{-wp}\right)$$

$$R(p) \ = \ R_\infty \ + \ \left(R_0 \ - \ R_\infty\right)e^{-bp}$$

3.2 Intégration de la relation de comportement CHABOCHE

Comme pour les relations de comportement `VISC_CIN1_CHAB` et `VISC_CIN2_CHAB`, on adopte un schéma d'Euler implicite. On prend en compte les variations des caractéristiques élastiques de la même façon que précédemment [éq.2.1-1], [éq.2.1-2].

On commence par un essai élastique, en prenant pour champ de contraintes :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e = \frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- + 2\mu\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

qui est bien la solution du problème si :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e - \frac{2}{3}C_1\left(p^-\right)\boldsymbol{\alpha}_1^- - \frac{2}{3}C_2\left(p^-\right)\boldsymbol{\alpha}_2^- - R\left(p^-\right) < 0$$

Dans le cas contraire, la solution est élastoplastique. Il faut alors résoudre le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{aligned}
&\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \left(\frac{\mu}{\mu^-} - 1\right)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- - 2\mu\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}\right) = 0\\
&\Delta\mathbf{X}_1 \ - \frac{2}{3} \ C_1 a_1 \varphi(p)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} \ + \ C_1\,\mathbf{X}_1\,\Delta p = 0\\
&\Delta\mathbf{X}_2 \ - \frac{2}{3} \ C_2 a_2 \varphi(p)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} \ + \ C_2\,\mathbf{X}_2\,\Delta p = 0\\
&\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\right)_{eq} - R(p) = 0
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire de façon plus contractée sous la forme suivante :

$$F^l\left(\Delta y\right) = 0 = \begin{bmatrix} g\ (\Delta y) \\ h\ (\Delta y) \\ i\ (\Delta y) \\ j\ (\Delta y) \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \ \ \Delta y = \begin{pmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\,\mathrm{X}_1 \\ \Delta\,\mathrm{X}_2 \\ \Delta p \end{pmatrix}$$

On résout ce système par la méthode de Newton proposée dans l'environnement PLASTI, (décrit en détail dans [R5.03.10]), soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^l}{\partial \Delta y_k} \quad d\ \left(\Delta y_k\right) = -F^l\left(\Delta y_k\right) \\ \Delta y_{k+1} = \Delta y_k + d\ \left(\Delta y_k\right) \end{cases}$$

En itérant en k jusqu'à convergence. Cette résolution a lieu pour chaque point d'intégration.

La résolution nécessite le calcul du Jacobien du système local F^l. On donne son expression générale ci-après ; les calculs analytiques ne sont pas détaillés dans ce document.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial \Delta\sigma} & \dfrac{\partial g}{\partial \Delta \mathrm{X}_1} & \dfrac{\partial g}{\partial \Delta \mathrm{X}_2} & \dfrac{\partial g}{\partial \Delta p} \\ \dfrac{\partial h}{\partial \Delta\sigma} & \dfrac{\partial h}{\partial \Delta \mathrm{X}_1} & \dfrac{\partial h}{\partial \Delta \mathrm{X}_2} & \dfrac{\partial h}{\partial \Delta p} \\ \dfrac{\partial i}{\partial \Delta\sigma} & \dfrac{\partial i}{\partial \Delta \mathrm{X}_1} & \dfrac{\partial i}{\partial \Delta \mathrm{X}_2} & \dfrac{\partial i}{\partial \Delta p} \\ \dfrac{\partial j}{\partial \Delta\sigma} & \dfrac{\partial j}{\partial \Delta \mathrm{X}_1} & \dfrac{\partial j}{\partial \Delta \mathrm{X}_2} & \dfrac{\partial j}{\partial \Delta p} \end{bmatrix}$$

3.3 Opérateur de comportement tangent

Après résolution du système discrétisé précédent, la solution obtenue est telle que l'équation $\left(F^l(\Delta y) = 0\right)$ est vérifiée en fin d'incrément. On cherche à évaluer l'opérateur tangent en ce point, c'est à dire $\left(\dfrac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\varepsilon}\right)_{t+\Delta t}$.

Pour une petite variation de F^l, en considérant cette fois $\Delta\varepsilon$ comme variable et non comme paramètre, le système reste à l'équilibre et on vérifie $dF^l = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial F^l}{\partial \Delta\sigma}\delta\Delta\sigma + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta\varepsilon}\delta\Delta\varepsilon + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta \mathrm{X}_1}\delta\Delta \mathrm{X}_1 + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta \mathrm{X}_2}\delta\Delta \mathrm{X}_2 + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta p}\delta\Delta p = 0$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial F^l}{\partial \Delta y}\delta(\Delta y) = X, \quad \text{avec} \quad X = \begin{bmatrix} \underline{H}\delta\Delta\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système d'équations peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\mathrm{K}}\,\delta\sigma = \underline{\mathrm{H}}\,\delta\varepsilon$$

d'où l'opérateur tangent recherché :

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\varepsilon}\right)_{t+\Delta t} = \underline{\mathrm{K}}^{-1}\,\underline{\mathrm{H}}$$

On est conduit à réutiliser la même matrice jacobienne J que précédemment pour évaluer l'opérateur tangent. Le calcul de $\underline{\mathrm{K}}^{-1}$ est effectué numériquement par une méthode de décomposition de Gauss. Son expression est détaillée en annexe 1.

3.4 Signification des variables internes

Les variables internes du modèle aux points de Gauss (VARI_ELGA) sont, pour la modélisation 3D :

- V1 = X_{1xx}
- V2 = X_{1yy}
- V3 = X_{1zz}
- V4 = X_{1xy}
- V5 = X_{1xz}
- V6 = X_{1yz}
- V7 = X_{2xx}
- V8 = X_{2yy}
- V9 = X_{2zz}
- V10 = X_{2xy}
- V11 = X_{2xz}
- V12 = X_{2yz}
- V13 = p : la déformation plastique cumulée (positive ou nulle)

Pour les modélisations D_PLAN, et AXIS,

- V5 = 0
- V6 = 0
- V11 = 0
- V12 = 0

4 Comparaison des modèles VMIS_CIN2_CHAB et CHABOCHE

La principale différence entre les modèles VISC_CIN2_CHAB et CHABOCHE concerne l'évolution des variables cinématiques.

Dans le cas VISC_CIN2_CHAB, on a :

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{2}{3}\left(\dot{C}_i \boldsymbol{\alpha}_i + C_i \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) = \left(\frac{2}{3}\dot{C}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \frac{2}{3} C_i(p)\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma_i(p)\mathbf{X}_i \dot{p}\right)$$

Dans le cas CHABOCHE, on a :

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \overline{C}_i \left(\frac{2}{3}\ a_i\ \phi(p)\ \dot{\varepsilon}^p - \mathbf{X}_i \dot{p}\right), \quad i = 1,2$$

Ces deux modèles ne sont pas équivalents : en particulier, la variation des coefficients avec la température n'est pas bien prise en compte dans le modèle CHABOCHE.
Dans le cas particulier où les coefficients C_i sont constants, les deux modèles sont équivalents. Pour cela, il faut choisir :

- $\gamma_i(p) = \overline{C}_i$ ce qui implique : $\gamma_i^0 = \overline{C}_i , a_\infty = 1$
- $C_i(p) = C_i^\infty = \overline{C}_i a_i$ et $w = 0$, à cause du terme supplémentaire : $\frac{2}{3}\dot{C}_i \boldsymbol{\alpha}$ qui permet de prendre en compte la variation de C_i avec la température et avec la déformation plastique cumulée p.

5 Principe de l'identification des paramètres du modèle.

Dans le cas le plus simple (une seule variable cinématique, $\gamma_1 = cste, C_1 = cste \quad , R(p) = \sigma_y$) les coefficients du modèle γ_1, C_1 peuvent être identifiés sur un essai de traction simple uniaxial, ou bien sur une courbe d'écrouissage cyclique.

En effet dans le cas uniaxial, le modèle se réduit en 1D à [bib2] :

$$
\begin{aligned}
dX_1 &= C_1 \;\; d\varepsilon^{\,p} - \gamma_1 \mathbf{X}_1 \xi \, d\varepsilon^{\,p}, \qquad \xi = \pm 1 \\
|\sigma - X_1| &= \sigma_y
\end{aligned}
$$

que l'on peut intégrer (en chargement monotone) de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \xi \frac{C_1}{\gamma_1} + \left(X_1^0 - \xi \frac{C_1}{\gamma_1} \right) \exp\left(-\xi \gamma_1 \left(\varepsilon^p - \varepsilon_0^p \right) \right), \qquad \xi = \pm 1 \\
\sigma &= \xi \sigma_y + X_1
\end{aligned}
$$

dont l'asymptote de la courbe de traction permet d'obtenir $\frac{C_1}{\gamma_1}$ par :

$$
\varepsilon^p \to \infty \quad X_1 \to \xi \frac{C_1}{\gamma_1} \text{ donc } \sigma \to \xi \left(\sigma_y + \frac{C_1}{\gamma_1} \right)
$$

et dont la pente à l'origine fournit C_1 $\left(\text{Si } X_1^0 = 0\right)$:

$$
\varepsilon^p \to 0 \quad \dot{X}_1 \to C_1 - y_1 X_1^0 \xi \qquad X_1^0 = C_1 - y_1 X_1 \xi
$$

Pour un modèle a deux variables cinématiques, sans écrouissage isotrope, une courbe de traction permet encore de retrouver ces relations :

$$
\varepsilon^p \to \infty \quad \sigma \to \xi \left(\sigma_y + \left(\frac{C_1}{\gamma_1} + \frac{C_2}{\gamma_2} \right) \right) \text{ et la pente à l'origine vaut } C_1 + C_2
$$

Mais en dehors de ces cas simples une identification numérique est nécessaire pour obtenir les paramètres. On pourra faire cette identification par exemple sur des essais de traction compression à déformation imposée.

6 Bibliographie

[1] P. MIALON, Eléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité. EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches - Série C - N° 3 1986, p. 57 - 89.

[2] J.LEMAITRE, J.L.CHABOCHE, Mécanique des matériaux solides. Dunod 1996

[3] J.L.CHABOCHE, G.CAILLETAUD, Integration methods for complex constitutive equations, Computer Methods in Applied Machanics Engineering, N°133 (1996), pp 125-155

[4] J.L.CHABOCHE, Cyclic viscoplastic constitutive equations, Journal of Applied Mechanics, Vol.60, Décembre 1993, pp. 813-828

[5] R.FORTUNIER, Loi de comportement de Chaboche : identification des paramètres élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques de l'acier EDF-SPH entre 20°C et 600°C. Note FRAMATOME/NOVATOME, NOVTUDD90011, Octobre 1990

[6] C.MIGNE, Recalage des paramètres du modèle de plasticité cinématique non linéaire de SYSTUS. Modélisation du phénomène de déformation progressive avec consolidation cyclique du matériau. Note FRAMATOME EE/R.DC.0286. Septembre 1992.

[7] J.J.ENGEL, G.ROUSSELIER, Comportement en contrainte uniaxiale sous chargement cyclique de l'acier inoxydable austénitique 17-12 Mo à très bas carbone et azote contrôle. Identification de 20)C à 600°C d'un modèle de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique non linéaire. Note EDF/DER/EMA N°D599 MAT/T43 (1985)

[8] P.GEYER, C.COUTEROT, caractérisation de l'acier 304L utilisé lors des essais « déformation, progressive » sur CUMULUS et identification des paramètres du modèle de Chaboche, Note EDF/DER/ HT-26/93/040/A

[9] R de Borst « the zero normal stress condition in plane stress and shell elastoplasticity » Communications in applied numerical methods, Vol 7, 29-33 (1991)

Annexe 1 Matrice de comportement tangente pour les modèles VMIS_CIN1_CHAB et VMIS_CIN2_CHAB

Pour obtenir le comportement tangent dans le cas élastoplastique, il faut calculer $\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$ [éq 2.3-7].

On utilise pour cela l'expression de $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ en fonction de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}}$ et p, qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \frac{3\Delta p}{2D(p)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}} + B_1^*(p) \boldsymbol{\alpha}_1^- + B_2^*(p) \boldsymbol{\alpha}_2^-$$

avec

$$B_i^*(p) = -\Delta p \frac{M_i(p)}{D(p)}$$

$$M_i(p) = \frac{C_i(p)}{1 + \gamma_i(p)\Delta p}$$

$$D(p) = R(p) + (3\mu + M_1(p) + M_2(p))\Delta p + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

On rappelle les définitions suivantes :

$$R(p) = R_\infty + (R_0 - R_\infty) e^{-bp}$$

$$C_i(p) = C_i^\infty \left(1 + (k-1) e^{-wp}\right)$$

$$\gamma_i(p) = \gamma_i^0 \left(a_\infty + (1 - a_\infty) e^{-bp}\right)$$

donc :

$$\frac{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = \frac{3\Delta p}{2D(p)} \mathbf{Id} + \frac{\delta\left(\frac{3\Delta p}{2D(p)}\right)}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} + \frac{\delta B_1^*(p)}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} \otimes \boldsymbol{\alpha}_1^- + \frac{\delta B_2^*(p)}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} \otimes \boldsymbol{\alpha}_2^-$$

Les quantités du type $\frac{\delta A(p)}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$ se calculent à l'aide de : $\frac{\delta A(p)}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = \frac{\delta A(p)}{\delta p} \frac{\delta p}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$

Ces différents termes s'expriment par :

- $\frac{\delta\left(\frac{3\Delta p}{2D(p)}\right)}{\delta p} = \frac{3}{2} I(p)$ avec $I(p) = \frac{1}{D(p)} - \frac{D'(p)}{D^2(p)} \Delta p$
- $\frac{\delta B_i^*(p)}{\delta p} = -\frac{M_i'(p)}{D(p)} \Delta p - M_i(p).I(p) = H_i(p)$

Il reste à calculer : $\frac{\delta p}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$

On utilise donc, suivant [éq 2.3-8] : $\frac{\delta p}{\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = -\frac{\tilde{\mathrm{F}}_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}\left(p, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right)}{\tilde{\mathrm{F}}_{,p}\left(p, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}\right)}$

$$\tilde{\mathrm{F}}(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}) = S_{eq}(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}) - R(p) - K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N} = G(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}) - R(p) - K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

avec $\mathbf{S} = A\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e} + B_1\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + B_2\boldsymbol{\alpha}_2^{-}$ $\quad A = \dfrac{R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}}{D(p)}$ $\quad B_i = -\dfrac{2}{3}\dfrac{M_i(p)\left(R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}\right)}{D(p)}$

Alors, en posant $R_v(p) = R(p) + K\left(\dfrac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$:

$$\frac{\delta p}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = -\frac{G_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}})}{G_{,p}(p,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}) - R_v'(p)} = -\frac{\frac{3}{2}\frac{R_v(p)}{D(p)}\frac{\mathbf{S}}{S_{eq}}}{\frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}}{S_{eq}}:\mathbf{S}_{,p} - R_v'(p)} = -\frac{3}{2}\frac{\frac{R_v}{DS_{eq}}\left(A\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e} + B_1\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + B_2\boldsymbol{\alpha}_2^{-}\right)}{\frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}}{S_{eq}}:\mathbf{S}_{,p} - R_v'(p)}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{L_1(p)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e} + L_{21}(p)\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + L_{22}(p)\boldsymbol{\alpha}_2^{-}}{L_3(p)}$$

avec $L_1(p) = \dfrac{R_v^2(p)}{D^2(p) * S_{eq}} = \dfrac{A^2(p)}{S_{eq}}$

$$L_{21}(p) = \frac{R_v(p)}{D(p)}B_1(p)\frac{1}{S_{eq}} \qquad L_{22}(p) = \frac{R_v(p)}{D(p)}B_2(p)\frac{1}{S_{eq}}$$

$$L_3(p) = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}}{S_{eq}} : \left(A'(p)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{e} + B_1'(p)\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + B_2'(p)\boldsymbol{\alpha}_2^{-}\right) - R'(p) - \frac{K}{N\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{N}-1}$$

Finalement, $\dfrac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}}$ se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}}} = &\frac{3}{2}\frac{\Delta p}{D(p)}\mathbf{Id} + \frac{3}{2}\left(I_S(p)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} + I_{a1}(p)\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + I_{a2}(p)\boldsymbol{\alpha}_2^{-}\right)\otimes\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} \\ &+\left(H_s^1\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} + H_{a1}^1\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + H_{a2}^1\boldsymbol{\alpha}_2^{-}\right)\otimes\boldsymbol{\alpha}_1^{-} \\ &+\left(H_s^2\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{e}} + H_{a1}^2\boldsymbol{\alpha}_1^{-} + H_{a2}^2\boldsymbol{\alpha}_2^{-}\right)\otimes\boldsymbol{\alpha}_2^{-}\end{aligned}$$

avec :

$$I_S(p) = -\frac{3}{2}I(p).\frac{L_1(p)}{L_3(p)} \qquad I_{a1}(p) = -\frac{3}{2}\frac{I(p)L_{21}(p)}{L_3(p)}$$

$$I_{a2}(p) = -\frac{3}{2}\frac{I(p)L_{22}(p)}{L_3(p)}$$

$$H_s^1(p) = -\frac{3}{2}\frac{H_1(p).L_1(p)}{L_3(p)} \qquad H_{a1}^1(p) = -\frac{3}{2}\frac{H_1(p)L_{21}(p)}{L_3(p)} \qquad H_{a2}^1(p) = -\frac{3}{2}\frac{H_1(p)L_{22}(p)}{L_3(p)}$$

$$H_s^2(p) = -\frac{3}{2}\frac{H_2(p).L_1(p)}{L_3(p)} \qquad H_{a1}^2(p) = -\frac{3}{2}\frac{H_2(p)L_{21}(p)}{L_3(p)} \qquad H_{a2}^2(p) = -\frac{3}{2}\frac{H_2(p)L_{22}(p)}{L_3(p)}$$

Annexe 2 Résolution de l'équation f(∆p) = 0

Il s'agit de résoudre une équation scalaire non linéaire en cherchant la solution dans un intervalle de confiance. Pour cela, on se propose de coupler une méthode de sécante avec un contrôle de l'intervalle de recherche. Soit l'équation suivante à résoudre :

$$\mathrm{f}(x) = 0 \qquad x \in [a,b] \quad \mathrm{f}(a) < 0 \quad \mathrm{f}(b) > 0 \qquad \textbf{éq A2-1}$$

La méthode de la sécante consiste à construire une suite de points x^n qui converge vers la solution. Elle est définie par récurrence (approximation linéaire de la fonction par sa corde) :

$$x^{n+1} = x^{n-1} - \mathrm{f}\left(x^{n-1}\right)\frac{x^n - x^{n-1}}{\mathrm{f}\left(x^n\right) - \mathrm{f}\left(x^{n-1}\right)} \qquad \textbf{éq A2-2}$$

Par ailleurs, si x^{n+1} devait sortir de l'intervalle, alors on le remplace par la borne de l'intervalle en question :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x^{n+1} < a & \text{alors} \quad x^{n+1} := a \\ \text{si} \quad x^{n+1} > b & \text{alors} \quad x^{n+1} := b \end{cases} \qquad \textbf{éq A2-3}$$

En revanche, si x^{n+1} est dans l'intervalle courant, alors on réactualise l'intervalle :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x^{n+1} \in [a,b] \quad \text{et} \quad \mathrm{f}\left(x^{n+1}\right) < 0 & \text{alors} \quad a = x^{n+1} \\ \text{si} \quad x^{n+1} \in [a,b] \quad \text{et} \quad \mathrm{f}\left(x^{n+1}\right) > 0 & \text{alors} \quad b = x^{n+1} \end{cases} \qquad \textbf{éq A2-4}$$

On considère avoir convergé lorsque f est suffisamment proche de 0 (tolérance à renseigner). Quant aux deux premiers points de la suite, on peut choisir les bornes de l'intervalle, ou bien, si on dispose d'une estimation de la solution, on peut adopter cette estimation et l'une des bornes de l'intervalle.

Remarque :

Cette méthode fonctionne bien si il y a une seule solution dans l'intervalle $[a,b]$. *Sans que cela soit formellement démontré, on peut constater que* $\mathrm{f}(0) > 0$.
On cherche alors b *tel que* $\mathrm{f}(b) < 0$.
On part pour cela de $b = \dfrac{\left(\tilde{\sigma}^e \dfrac{2}{3}C_1\alpha_1^- - \dfrac{2}{3}C_2\alpha_2^-\right)_{eq} - R\left(p^-\right)}{3\mu}$
Si $\mathrm{f}(b)$ *est* > 0, *on multiplie* b *par 10 et on teste si* $\mathrm{f}(b) > 0$, *et ainsi de suite, jusqu'à trouver une valeur* b *telle que* $\mathrm{f}(b) < 0$.
On est sûr qu'il y a alors au moins une solution sur $[a,b]$.

Page laissée intentionnellement blanche.