

Manuel de Référence**Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire****Document : R5.03.17**

Relations de comportement des éléments discrets

Résumé :

Ce document décrit les comportements non linéaires des éléments discrets qui sont appelés par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires `STAT_NON_LINE` [R5.03.01]. ou `DYNA_NON_LINE` [R5.05.05].

Plus précisément, les comportements décrits dans ce document sont :

- le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope utilisé pour la modélisation des assemblages filetés, mis en œuvre dans `MACR_GOUJ2E_CALC`, accessible par les mots clés `DIS_GOUJ2E_PLAS` et `DIS_GOUJ2E_ELAS` du mot-clé `COMP_INCR` [U4.51.11],
- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb (en translation), et le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope ou cinématique linéaire (en rotation), utilisés pour modéliser le comportement des ressorts de liaison grille - crayon des assemblages combustibles, accessibles par le mot clé `DIS_CONTACT` du mot-clé `COMP_INCR` [U4.51.11],
- le comportement de type choc avec frottement de Coulomb, accessible par le mot clé `DIS_CHOC` de du mot-clé `COMP_INCR` [U4.51.11].

L'intégration des modèles de comportement mentionnés ci-dessus est implicite.

D'autres comportements relatifs aux éléments discrets sont disponibles, mais non détaillés ici :

- Armement des lignes (Relation `ARME`) [R5.03.31],
- Assemblage non linéaire de cornières de pylônes (Relation `ASSE_CORN`) [R5.03.32],

Table des matières

1 Principes généraux des relations de comportement des éléments discrets	3
1.1 Relations de comportement non linéaires (des éléments discrets) actuellement disponibles	3
1.2 Calcul des déformations (petites déformations)	4
1.3 Calcul des efforts et des forces nodales	4
2 Relation de comportement des assemblages filetés	5
2.1 Notations générales	5
2.2 Equations du modèle DIS_GOUJ2E_PLAS	5
2.3 Intégration de la relation DIS_GOUJ2E_PLAS	6
2.4 Variables internes	7
3 Relation de comportement des ressorts de liaison grille crayon combustible	7
3.1 Modèle de contact avec frottement de Coulomb	8
3.1.1 Présentation du modèle de contact - frottement	8
3.1.2 Equations du modèle	9
3.1.3 Intégration de la relation	9
3.2 Modèle de rotule élastoplastique	11
3.2.1 Equations du modèle	11
3.2.2 Intégration de la relation	12
3.3 Variables internes	13
4 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CHOC	14
4.1 Relation de contact unilatéral	14
4.2 Loi de frottement de Coulomb	15
4.3 Modélisation approchée des relations de contact par pénalisation	16
4.3.1 Modèle de force normale de contact	16
4.3.2 Modèle de force tangentielle de contact	17
4.4 Définition des paramètres de contact	18
5 Bibliographie	19

1 Principes généraux des relations de comportement des éléments discrets

1.1 Relations de comportement non linéaires (des éléments discrets) actuellement disponibles

Les relations disponibles dans le *Code_Aster* pour les éléments discrets sont des relations de comportement incrémentales données sous le mot-clé facteur COMP_INCR par le mot-clé RELATION dans les opérateurs non linéaires STAT_NON_LINE et DYNA_NON_LINE. On distingue :

- le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope utilisé pour la modélisation des assemblages filetés, mis en œuvre dans MACR_GOUJ2E_CALC et accessible par les mots clés DIS_GOUJ2E_PLAS et DIS_GOUJ2E_ELAS,
- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb, utilisé pour modéliser le comportement en translation des ressorts de liaison grille - crayon des assemblages combustibles, accessible par le mot clé DIS_CONTACT,
- le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope ou cinématique linéaire utilisé pour modéliser le comportement en rotation des ressorts de liaison grille - crayon des assemblages combustibles, accessible également par le mot clé DIS_CONTACT, de STAT_NON_LINE.

Et les comportements suivants, qui ne sont pas détaillés ici :

- Armement des lignes (Relation ARME) [R5.03.31],
- Assemblage non linéaire de cornières de pylônes (Relation ASSE_CORN) [R5.03.32],
- Contact avec chocs (Relation DIS_CHOC).

Les paramètres nécessaires à ces relations sont fournis dans l'opérateur DEFI_MATERIAU par les mots clés :

Comportement dans STAT_NON_LINE DYNA_NON_LINE	Type d'élément (modélisation) dans AFFE_MODELE	Mots clé dans DEFI_MATERIAU	AFFE_CARA_ELEM mots clé sous DISCRET
DIS_GOUJ2E_ELAS DIS_GOUJ2E_PLAS	2D_DIS_T: élément discret 2D à deux nœuds en translation	TRACTION	CARA : 'K_T_D_L'
DIS_CONTACT frottement de Coulomb	DIS_T ou DIS_TR : élément discret 3D à deux nœuds en translation ou translation / rotation	DIS_CONTACT : (COULOMB: RIGI_N_FO: EFFO_N_INIT:	CARA : 'K_T_D_L' ou CARA : 'K_TR_D_L' si rotation
DIS_CONTACT rotation	DIS_TR élément discret 3D à deux nœuds en translation / rotation	DIS_CONTACT : RELA_MZ : courbe	CARA : 'K_TR_D_L'
DIS_CHOC contact et choc avec frottement de Coulomb	DIS_T : élément discret 3D à deux nœuds en translation	DIS_CONTACT : (COULOMB: RIGI_NOR: RIGI_TAN: AMOR_NOR: AMOR_TAN: DIST_1 DIST_2 JEU)	CARA : 'K_T_D_L' Pour pouvoir utiliser la matrice de rigidité élastique, option RIGI_MECA

Ces comportements ont été développés et sont utilisés pour les applications suivantes :

DIS_GOUJ2E_PLAS	: Relation effort - déplacement de type Von Mises avec écrouissage isotrope pour la modélisation des assemblages filetés
DIS_GOUJ2E_ELAS	: Relation effort - déplacement linéaire déduite de la courbe effort - déplacement caractérisant l'assemblage
DIS_CONTACT	Comportement élastoplastique en rotation, contact unilatéral avec frottement de Coulomb en translation
DIS_CHOC	Prendre en compte les chocs ainsi que le frottement entre une structure et ses appuis ou entre les structures.

Contrairement aux modèles de comportement 1D [bib3], ces relations lient directement les efforts et les déplacements, au lieu d'être formulées entre contraintes et déformations. Elles ne sont valables qu'en petites déformations.

On décrit pour chaque relation de comportement le calcul du champ d'efforts à partir d'un incrément de déplacement donné (cf. algorithme de Newton [R5.03.01]), le calcul des forces **nodales** R et de la matrice tangente.

1.2 Calcul des déformations (petites déformations)

Pour chacun des éléments finis du *Code_Aster*, dans *STAT_NON_LINE*, l'algorithme global (Newton) fournit à la routine élémentaire, qui intègre le comportement, un accroissement du champ de déplacement [R5.03.01]

Pour les éléments discrets, on en déduit l'accroissement d'élongation (en translation) ou de rotation, entre les nœuds 1 et 2 de l'élément, ce qui est équivalent au calcul de l'accroissement de déformation dans le cas des milieux continus ou des comportements 1D.

$$\Delta \varepsilon = \Delta u_2 - \Delta u_1,$$

1.3 Calcul des efforts et des forces nodales

Après intégration du comportement, il faut fournir à l'algorithme global (Newton) un vecteur contenant les efforts généralisés, d'une part, et d'autre part un vecteur contenant les forces nodales R [R5.03.01] en repère global (X, Y, Z).

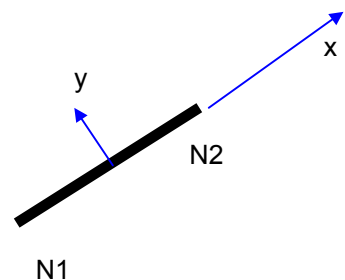
Pour les éléments discrets, la résolution du problème local non linéaire fournit directement les efforts dans l'élément (uniformes dans l'élément), en repère local (x,y,z), qui sont de la forme :

$$F = \begin{cases} F_1(\text{noeud 1}) \\ F_2(\text{noeud 2}) \end{cases} \text{ avec}$$

$$\text{en 2D : } F_1 = F_2 = \begin{cases} F_x \\ F_y \end{cases}$$

$$\text{en 3D : } F_1 = F_2 = \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} \text{ en translation seule, } F_1 = F_2 = \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{cases} \text{ en}$$

translation et rotation.



Le vecteur R des forces nodales équivalentes (qui est exprimé dans le repère global) est déduit de F par changement de repère :

$$R = P^T R_{loc} P \text{ avec } R_{loc} = \begin{cases} -F_1(\text{noeud 1}) \\ F_2(\text{noeud 2}) \end{cases}$$

où P est la matrice de changement de repère, permettant le passage du repère global vers le repère local, comme pour les éléments de poutre [R3.08.01].

2 Relation de comportement des assemblages filetés

2.1 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$.

Les quantités évaluées à l'instant $t + \Delta t$ ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par Δ . On a ainsi :

$$Q = Q(t + \Delta t) = Q^-(t) + \Delta Q(t) = Q^- + \Delta Q$$

2.2 Equations du modèle DIS_GOUJ2E_PLAS

Elles sont déduites du comportement 3D VMIS_ISOT_TRAC [R5.03.02] : on y représente une relation de comportement de type élastoplastique à écrouissage isotrope, liant les efforts dans l'élément discret à la différence de déplacement des deux nœuds dans la direction y locale.

Dans la direction x locale, le comportement est élastique, linéaire, et le coefficient reliant l'effort F_x au déplacement D_x est la raideur K_x fournie par l'intermédiaire de AFPE_CARA_ELEM.

Le comportement non linéaire ne concerne que la direction y locale.

En notant $\Delta \varepsilon = \Delta u_y^1 - \Delta u_y^2$ et $\sigma = F_y^1 = F_y^2$

Les relations s'écrivent sous la même forme que les relations de Von Mises 1D [R5.03.09] :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \dot{p} \frac{\sigma}{|\sigma|} \\ \sigma &= E(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ \sigma_{eq} - R(p) &= |\sigma| - R(p) \leq 0 \\ \sigma_{eq} - R(p) < 0 &\Rightarrow \dot{p} = 0 \\ \sigma_{eq} - R(p) = 0 &\Rightarrow \dot{p} \geq 0 \end{aligned}$$

Dans ces expressions, p représente un "déplacement plastique cumulé", et la fonction d'écrouissage isotrope $R(p)$ est affine par morceaux, donnée sous forme d'une courbe effort - déplacement définie point par point, fournie sous le mot clé facteur TRACTION de l'opérateur DEF1_MATERIAU [U4.43.01].

Le premier point correspond à la fin du domaine linéaire, et sert donc à définir à la fois la limite de linéarité (analogue à la limite d'élasticité), et E qui est la pente de cette partie linéaire (E est indépendant de la température). La fonction $R(p)$ est déduite d'une courbe caractéristique de l'assemblage (modélisation de quelques filets) exprimant l'effort sur le goujon en fonction de la différence de déplacement moyen entre le goujon et la bride [bib1] : $F = f(u - v)$.

2.3 Intégration de la relation DIS_GOUJ2E_PLAS

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 1D [R5.03.09] on obtient :

$$\begin{aligned}
 E\Delta\varepsilon - \Delta\sigma &= E\Delta p \frac{\sigma^- + \Delta\sigma}{|\sigma^- + \Delta\sigma|} \\
 |\sigma^- + \Delta\sigma| - R(p^- + \Delta p) &\leq 0 \\
 |\sigma^- + \Delta\sigma| - R(p^- + \Delta p) < 0 &\Rightarrow \Delta p = 0 \\
 |\sigma^- + \Delta\sigma| - R(p^- + \Delta p) = 0 &\Rightarrow \Delta p \geq 0
 \end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

- $|\sigma^- + \Delta\sigma| < R(p^- + \Delta p)$ dans ce cas $\Delta p = 0$ soit $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$ donc $|\sigma^- + E\Delta\varepsilon| < R(p^-)$,
- $|\sigma^- + \Delta\sigma| = R(p^- + \Delta p)$ dans ce cas $\Delta p \geq 0$ donc $|\sigma^- + E\Delta\varepsilon| \geq R(p^-)$.

On en déduit l'algorithme de résolution :

posons $\sigma^e = \sigma^- + E\Delta\varepsilon$

si $|\sigma^e| \leq R(p^-)$ alors $\Delta p = 0$ et $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$

si $|\sigma^e| > R(p^-)$ alors il faut résoudre :

$$\begin{aligned}
 \sigma^e &= \sigma^- + \Delta\sigma + E\Delta p \frac{\sigma^- + \Delta\sigma}{|\sigma^- + \Delta\sigma|} \\
 \sigma^e &= \left(1 + \frac{E\Delta p}{|\sigma^- + \Delta\sigma|}\right)(\sigma^- + \Delta\sigma)
 \end{aligned}$$

donc en prenant la valeur absolue :

$$|\sigma^e| = \left(1 + \frac{E\Delta p}{|\sigma^- + \Delta\sigma|}\right)|\sigma^- + \Delta\sigma|$$

soit, en utilisant $|\sigma^- + \Delta\sigma| = R(p^- + \Delta p)$.

$$|\sigma^e| = R(p^- + \Delta p) + E\Delta p$$

En tenant compte de la linéarité par morceaux de $R(p)$, on peut résoudre explicitement cette équation pour trouver Δp . Une fois calculé Δp on en déduit σ de la façon suivante :

$$\frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} = \frac{\sigma}{R(p)}$$

alors :

$$\sigma = (\sigma^- + \Delta\sigma) = \frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} R(p) = \frac{\sigma^e}{1 + \frac{E \Delta p}{R(p)}}$$

De plus, l'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente \mathbf{K}_i^n à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

$$\begin{aligned} \text{si } |\sigma^e| > R(p^-) \quad \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} &= E_T = \frac{E \cdot R'(p)}{E + R'(p)} \\ \text{sinon} \quad \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} &= E \end{aligned}$$

2.4 Variables internes

La relation de comportement DIS_GOUJ2E_PLAS produit deux variables internes : le « déplacement plastique cumulé » p , et un indicateur valant 1 si l'accroissement de déformation plastique est non nul et 0 dans le cas contraire.

3 Relation de comportement des ressorts de liaison grille crayon combustible

Le comportement DIS_CONTACT, utilisé pour modéliser le comportement en translation des ressorts de liaison grille - crayon des assemblages combustibles recouvre en fait deux comportements distincts, concernant des degrés de liberté différents :

- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb, concerne les directions x et y locales,
- le comportement de type Von Mises à écrouissage isotrope ou cinématique linéaire utilisé pour modéliser le comportement en rotation concerne la rotation autour de z local et celle autour de x local.

Dans les autres directions (translations suivant z local, rotation autour de y local), le comportement est élastique, défini par les raideurs fournies dans CARA : 'K_T_D_L' ou CARA : 'K_TR_D_L' du mot-clé facteur DISCRET de la commande AFfe_CARA_ELEM.

3.1 Modèle de contact avec frottement de Coulomb

3.1.1 Présentation du modèle de contact - frottement

La liaison grille - crayon est assurée par une lame et deux bossettes flexibles. Ce système permet un glissement avec frottement du crayon dans le sens axial. Par ailleurs, l'irradiation neutronique a pour effet d'assouplir cette liaison : la force de serrage diminue en fonction du temps. Pour modéliser cette liaison, on a introduit un comportement qui s'applique pour des éléments discrets à deux nœuds MECA_DIS_TR_L et MECA_DIS_T_L

Soit un élément à deux nœuds. Soit N la direction portée par l'élément (x local) et T une direction perpendiculaire (dans le cas présent, elle correspond à la direction axiale du crayon) : c'est la direction y locale. Soient les efforts dans les directions N et T (Cf. [Figure 3.1.1-a]).

La relation de comportement est de type élastique parfaitement plastique et caractérisée par [Figure 3.1.1-b] :

- K_{Te} une pente "élastique",
- K_N rigidité élastique dans la direction N ,
- un seuil de frottement défini par $|R_T| = \mu R_N$ où μ est le coefficient de frottement de Coulomb,
- un module "d'écrouissage" fictif K_{TI} pour éviter un glissement non contrôlé,
- R_{N0} une tension initiale dans la direction N ,
- une fonction du temps $F(t)$ ou de la fluence $G(\phi)$, normalisée ("de décroissance") de la rigidité de la liaison dans la direction N .

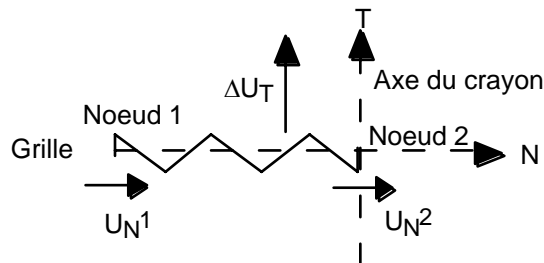


Figure 3.1.1-a

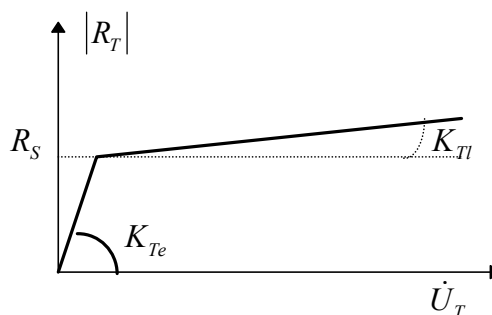


Figure 3.1.1-b

Ces données sont fournies dans DEF1_MATERIAU :

```
DIS_CONTACT : (
    COULOMB      : μ      (coefficient de frottement)
    EFFO_N_INIT  : RN0    (tension initiale du ressort)

    / RIGI_N_FO   : F(t)   (fonction normalisée du temps)
    / RIGI_N_IRRA : G(φ)   (fonction normalisée de la fluence)

    .
    KT_ULTM      : Ktt     (pente d'écrouissage)
)
```

Les caractéristiques élastiques des ressorts K_N et K_{Te} sont fournies sous le mot-clé facteur DISCRET de la commande AFFE_CARA_ELEM. La modélisation suppose que la direction T de glissement est le y local et que le x local est la direction normale N au contact (pour orienter l'élément discret, on utilise le mot-clé facteur ORIENTATION de AFFE_CARA_ELEM). Le contact avec frottement s'écrit dans les directions x et y. Pour la troisième direction z et pour les degrés de liberté de rotation, la loi de comportement est purement élastique et les caractéristiques de rigidité ne varient pas avec le temps.

La pente d'écrouissage est une pente de régularisation qui simule un glissement non parfait, mais qui permet d'obtenir une solution si le crayon n'est soumis à aucun déplacement imposé et entre dans un régime de glissement pur.

3.1.2 Equations du modèle

Le modèle de contact - frottement est similaire à un comportement de Von Mises en plasticité parfaite :

$$\begin{aligned}
 R_N &\leq 0 \\
 R_N &= F(t)(R_{N0} + K_N(U_{N2} - U_{N1})) \\
 R_T &= K_{Te}(U_T - U_T^p) \text{ avec } U_T = U_{T2} - U_{T1} \\
 |R_T| &\leq R_S + K_{Tl} \lambda \\
 R_S &= -\mu R_N \\
 \dot{U}_T^p &= \lambda \cdot \text{sgn}(R_T) = \lambda \frac{R_T}{|R_T|} \\
 \text{avec } \lambda &> 0 \text{ si } |R_T| = R_S \\
 \lambda &= 0 \text{ si } |R_T| < R_S
 \end{aligned}$$

$$K_{Tl} \text{ est défini par : } K_{Tl} = \frac{K_{Te} \cdot K_{Tl}}{K_{Te} - K_{Tl}}$$

3.1.3 Intégration de la relation

Elle est faite sur la base d'une intégration purement implicite.

On suppose connue la solution à l'instant précédent t^- : R_T^-, R_N^-

et les déplacements et accroissements de déplacements de l'itération n de l'algorithme de Newton de STAT_NON_LINE, notés :

$$\Delta U_T = \Delta U_{T2} - \Delta U_{T1} \text{ et } U_N = U_{N2}(t) - U_{N1}(t)$$

Le problème s'écrit alors :

$$R_N = F(t)(R_{N0} + K_N U_N) \leq 0$$

$$\Delta R_T = K_{Te} \left(\Delta U_T - \Delta \lambda \frac{R_T}{|R_T|} \right)$$

$$|R_T| \leq R_S + \lambda \cdot K_{Tl}$$

$$\text{avec } \Delta \lambda > 0 \text{ si } |R_T| = R_S$$

$$\Delta \lambda = 0 \text{ si } |R_T| < R_S$$

Phase de prédiction :

$$\text{On pose : } R_{Te} = R_T^- + K_{Te} \cdot \Delta U_T$$

$$\text{On peut trouver directement } R_N = \min\{0, F(t)(R_{N0} + K_N U_N)\}$$

Résolution :

- Si il y a contact, alors $R_N \leq 0$ et :
 - Si $R_{Te} < R_S$ alors il n'y a pas de glissement :
 $\Delta \lambda = 0$ et $R_T = R_{Te}$
 - Sinon, il y a glissement :
 Pour résoudre, on écrit comme habituellement :

$$R_T = R_T^- + \Delta R_T = R_T^- + K_{Te} \Delta U_T - K_{Te} \cdot \Delta \lambda \frac{R_T}{|R_T|} = R_{Te} - K_{Te} \cdot \Delta \lambda \frac{R_T}{|R_T|}$$

$$|R_T| = R_S + K_{Tl} \cdot (\lambda^- + \Delta \lambda)$$

donc en regroupant les termes :

$$R_T \left(1 + K_{Te} \cdot \Delta \lambda \frac{1}{|R_T|} \right) = R_{Te}$$

$$|R_T| = R_S + K_{Tl} \cdot (\lambda^- + \Delta \lambda)$$

soit encore

$$\frac{R_T}{|R_T|} (|R_T| + K_{Te} \cdot \Delta \lambda) = R_{Te}$$

$$|R_T| = R_S + K_{Tl} \cdot (\lambda^- + \Delta \lambda)$$

donc $|R_{Te}| = (|R_T| + K_{Te} \cdot \Delta \lambda)$, ce qui permet de trouver $(\Delta \lambda)$:

$$|R_{Te}| = R_S + K_{Tl} \cdot (\lambda^- + \Delta \lambda) + K_{Te} \cdot (\Delta \lambda) = R_S + K_{Tl} \cdot (\lambda^-) + (K_{Te} + K_{Tl}) \cdot (\Delta \lambda)$$

puis de trouver R_T par :

$$R_T = (R_S + K_{Tl} (\lambda^- + \Delta \lambda)) \cdot \frac{R_{Te}}{|R_{Te}|}$$

- Si il n'y a plus contact ($R_N = 0$) alors : $R_T = 0$

Pour le calcul de la matrice tangente, l'option FULL_MECA permet de calculer la matrice tangente \mathbf{K}_i^n à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

$$\begin{aligned} - \quad & \text{si } R_N \leq 0 \text{ et } \Delta \lambda > 0 \text{ alors } \left(\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} \right)_T = K_T \text{ et } \left(\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} \right)_N = F(t).K_N \\ - \quad & \text{sinon } \left(\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} \right)_T = 0 \text{ et } \left(\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} \right)_N = F(t).K_N \end{aligned}$$

Remarque :

Dans le cas où il y a décollement ($R_N = 0$), il faut prendre garde au fait que la partie qui est normalement "tenue" par l'élément discret ne l'est plus. Par exemple, dans le cas d'un crayon combustible, si aucun des ressorts n'est plus en contact, celui-ci peut "tomber". En pratique, pour éviter ces situations, il faut que le ressort modélisé par l'élément discret soit toujours en compression. Cela peut être spécifié par l'utilisateur à l'aide de l'effort initial, du coefficient de rigidité et de la fonction $F(t)$.

3.2 Modèle de rotule élastoplastique

3.2.1 Equations du modèle

Elles sont déduites du comportement 3D VMIS_ECMI_TRAC [R5.03.16] : en effet, il s'agit ici de représenter une relation de comportement de type élastoplastique à écrouissage isotrope quelconque, superposée à un écrouissage cinématique linéaire, liant le moment M_z (ou M_x) dans l'élément discret à la différence de rotation des deux nœuds autour de z local (ou x local). On ne s'intéresse donc ici qu'à la rotation autour de z (ou x) local.

En notant $\Delta \varepsilon = \Delta \theta_{z2} - \Delta \theta_{z1}$ et $\sigma = M_{z1} = M_{z2}$, (resp. $\Delta \varepsilon = \Delta \theta_{x2} - \Delta \theta_{x1}$ et $\sigma = M_{x1} = M_{x2}$)

Les relations s'écrivent ici encore sous la même forme que les relations de Von Mises 1D [R5.03.09]. Elles peuvent être déduites du comportement VMIS_ECMI_TRAC [R5.03.16], en remarquant que dans le cas uniaxial, la constante de Prager C doit être multipliée par 3/2. En toute rigueur il faudrait écrire :

$X = \frac{3}{2} C \varepsilon^p$, mais ici, on écrit directement : $X = C \varepsilon^p$. Elle est fournie par l'intermédiaire du mot clé

PRAGER du mot clé facteur DIS_CONTACT de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \dot{p} \frac{\sigma - X}{|\sigma - X|} \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ |\sigma - X| - R(p) \leq 0 \\ \begin{cases} \dot{p} = 0 & \text{si } (\sigma - X)_{eq} - R(p) < 0 \\ \dot{p} \geq 0 & \text{si } (\sigma - X)_{eq} - R(p) = 0 \end{cases} \\ X = C \varepsilon^p \end{cases}$$

p représente ici une "rotation plastique cumulée" autour de chacune des directions locales z et x . La fonction d'écrouissage isotrope $R(p)$ est affine par morceaux, donnée sous forme d'une fonction définie point par point sous le mot clé facteur `RELA_MZ` du mot clé facteur `DIS_CONTACT` de l'opérateur `DEFI_MATERIAU`. On suppose implicitement que la relation utilisée pour la rotation autour de Z est identique à celle utilisée pour la rotation autour de x local.

La fonction $R(p)$ est déduite d'une courbe caractéristique du ressort au cours d'un essai de flexion d'un crayon dans une grille, courbe qui exprime le moment appliqué au crayon en fonction de la rotation du crayon $F = f(\theta)$ qui se traduit avec nos notations en : $\sigma = f(\varepsilon)$. $R(p)$ est déduit de f , comme dans [bib2] en tenant compte de la linéarité par morceaux de f . Le premier point correspond à la fin de linéarité, et définit donc à la fois la limite de linéarité analogue à la limite d'élasticité et E qui est la pente de cette partie linéaire (indépendante de la température pour ce développement).

3.2.2 Intégration de la relation

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 1D [R5.03.09] on obtient :

$$\begin{cases} |\sigma - X| - R(p) = |\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X| - R(p^- + \Delta p) \leq 0 \\ E\Delta\varepsilon - \Delta\sigma = E\Delta p \frac{\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X}{|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X|} \\ \Delta p \geq 0 \quad \text{si } |\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X| = R(p^- + \Delta p) \\ \Delta p = 0 \quad \text{si } |\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X| < R(p^- + \Delta p) \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- $|\sigma - X| < R(p^- + \Delta p)$ dans ce cas $\Delta p = 0$ soit $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$
donc $|\sigma^- + E\Delta\varepsilon| < R(p^-)$,
- $|\sigma - X| = R(p^- + \Delta p)$ dans ce cas $\Delta p \geq 0$
donc $|\sigma^- + E\Delta\varepsilon| \geq R(p^-)$.

On en déduit l'algorithme de résolution :

posons $\sigma^e = \sigma^- + E\Delta\varepsilon - X^-$

si $|\sigma^e| \leq R(p^-)$ alors $\Delta p = 0$ et $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$

si $|\sigma^e| > R(p^-)$ alors il faut résoudre :

$$\sigma^e = \sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X + \Delta X + E\Delta p \frac{\sigma - X}{|\sigma - X|} = \sigma - X + (E + C)\Delta p \frac{\sigma - X}{|\sigma - X|}$$

$$\text{car } \Delta X = C\Delta p \frac{\sigma - X}{|\sigma - X|}$$

on obtient donc :

$$\sigma^e = \left(1 + \frac{(E + C) \Delta p}{|\sigma - X|} \right) (\sigma - X)$$

et en prenant la valeur absolue :

$$|\sigma^e| = \left(1 + \frac{(E + C) \Delta p}{|\sigma - X|} \right) |\sigma - X|$$

soit, en utilisant $|\sigma - X| = R(p^- + \Delta p)$.

$$|\sigma^e| = R(p^- + \Delta p) + (E + C) \Delta p$$

En tenant compte de la linéarité par morceaux de $R(p)$, on peut résoudre explicitement cette équation pour trouver Δp . Une fois calculé Δp on en déduit σ de la façon suivante :

on a la relation de proportionnalité :

$$\frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} = \frac{\sigma - X}{R(p)}$$

où ΔX est calculé à l'aide de :

$$\Delta X = C \Delta p \frac{\sigma - X}{|\sigma - X|} = C \Delta p \frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} = C \Delta p \frac{\sigma^e}{R(p) + (E + C) \Delta p}$$

d'où

$$\sigma = X + \frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} R(p)$$

De plus, l'option `FULL_MECA` permet de calculer la matrice tangente \mathbf{K}_i^n à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

$$\text{si } |\sigma^e| > R(p^-) \quad \frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} = E_T = \frac{E \cdot (R'(p) + C)}{E + R'(p) + C}$$

$$\text{sinon} \quad \frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} = E$$

3.3 Variables internes

La relation de comportement `DIS_CONTACT` produit 3 variables internes :

- La première concerne le contact - frottement : elle vaut :
 - 1 si il y a glissement,
 - 0 si non glissement,
 - -1 si décollement.
- Les deux suivantes concernent le comportement élastoplastique en rotation :
 - la deuxième variable interne est égale à p autour de la direction Z locale,
 - la troisième variable interne est égale à p autour de la direction X locale.

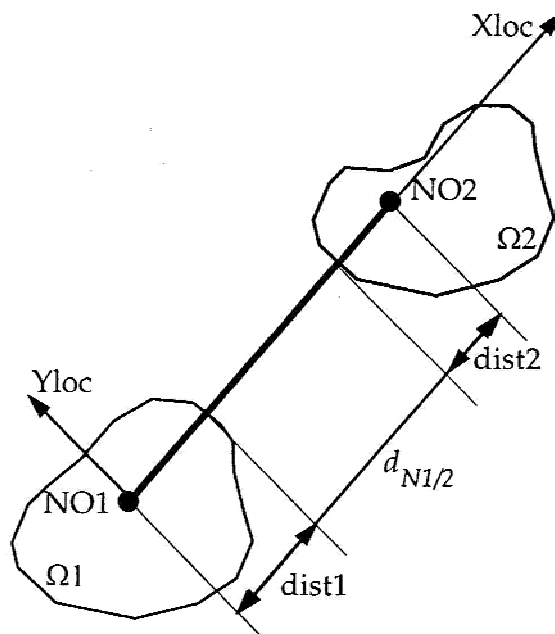
4 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CHOC

Le comportement DIS_CHOC traduit le contact avec choc et frottement entre deux structures, via deux types de relations :

- la relation de contact unilatéral qui exprime la non-interpénétrabilité entre les corps solides,
- la relation de frottement qui régit la variation des efforts tangentiels dans le contact. On retiendra pour les présents développements une relation simple : la loi de frottement de Coulomb.

4.1 Relation de contact unilatéral

Soient deux structures Ω_1 et Ω_2 . On note $d_N^{1/2}$ la distance normale entre les structures, $F_N^{1/2}$ la force de réaction normale de Ω_1 sur Ω_2 .



Dans le repère local à l'élément, la distance normale d_N a pour expression :

$$d_N = ((X_{loc2}^0 + u_2) - (X_{loc1}^0 + u_1)) - \text{dist1} - \text{dist2}$$

La loi de l'action et de la réaction impose :

$$F_N^{2/1} = -F_N^{1/2} \quad \text{éq 4.1-1}$$

Les conditions de contact unilatéral, encore appelées conditions de Signorini [bib5], s'expriment de la façon suivante :

$$d_N^{1/2} \geq 0, \quad F_N^{1/2} \geq 0, \quad d_N^{1/2} \cdot F_N^{1/2} = 0 \quad \text{et} \quad F_N^{2/1} = -F_N^{1/2} \quad \text{éq 4.1-2}$$

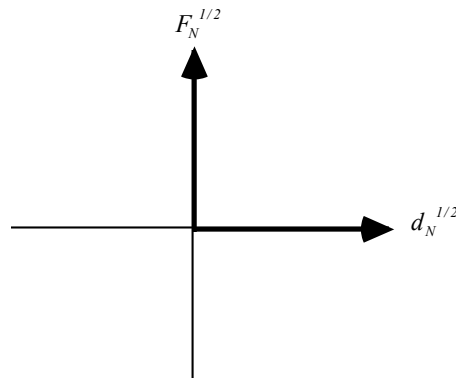


Figure 4.1-a : Graphe de la relation de contact unilatéral

Ce graphe traduit une relation force-déplacement qui n'est pas différentiable. Il n'est donc pas utilisable de façon simple dans un algorithme de calcul dynamique.

4.2 Loi de frottement de Coulomb

La loi de Coulomb exprime une limitation de l'effort tangentiel $\mathbf{F}_T^{1/2}$ de réaction tangentielle de Ω_1 sur Ω_2 . Soit $\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}$ la vitesse relative de Ω_1 par rapport à Ω_2 en un point de contact et soit μ le coefficient de frottement de Coulomb, on a [bib5] :

$$s = \|\mathbf{F}_T^{1/2}\| - \mu \cdot F_N^{1/2} \leq 0, \exists \lambda \dot{\mathbf{u}}_T^{1/2} = \lambda \mathbf{F}_T^{1/2}, \lambda \leq 0, \lambda \cdot s = 0 \quad \text{éq 4.2-1}$$

et la loi de l'action et de la réaction :

$$\mathbf{F}_T^{2/1} = -\mathbf{F}_T^{1/2} \quad \text{éq 4.2-2}$$

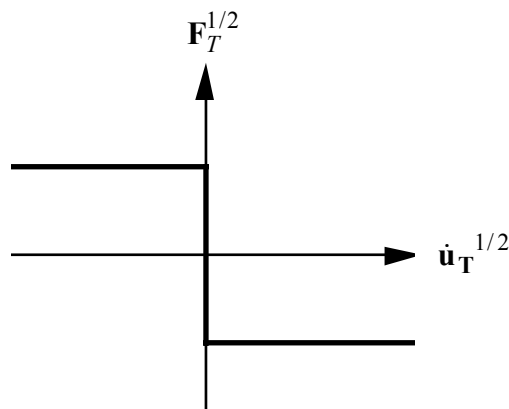


Figure 4.2-a : Graphe de la loi de frottement de Coulomb

Le graphe de la loi de Coulomb est lui aussi non différentiable et n'est donc pas simple à utiliser dans un algorithme dynamique.

4.3 Modélisation approchée des relations de contact par pénalisation

4.3.1 Modèle de force normale de contact

Le principe de la pénalisation appliqué au graphe de la figure [Figure 4.3.1-a] consiste à introduire une relation univoque $F_N^{1/2} = f_\varepsilon(d_N^{1/2})$ au moyen d'un paramètre ε . Le graphe de f_ε doit tendre vers le graphe de Signorini lorsque ε tend vers zéro [bib6].

Une des possibilités consiste à proposer une relation linéaire entre $d_N^{1/2}$ et $F_N^{1/2}$:

$$F_N^{1/2} = -\frac{1}{\varepsilon} d_N^{1/2} \text{ si } d_N^{1/2} \leq 0; F_N^{1/2} = 0 \text{ sinon} \quad \text{éq 4.3.1-1}$$

Si l'on note $K_N = \frac{1}{\varepsilon}$ appelée communément "**raideur de choc**", on retrouve la relation classique, modélisant un choc élastique :

$$F_N^{1/2} = -K_N \cdot d_N^{1/2} \quad \text{éq 4.3.1-2}$$

Le graphe approché de la loi de contact avec pénalisation est le suivant :

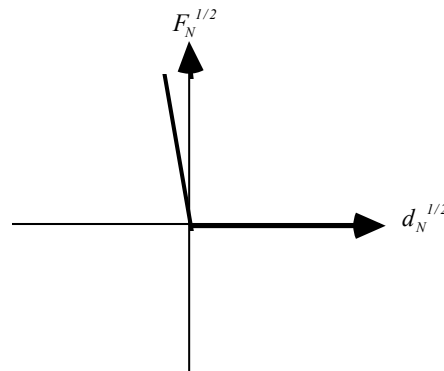


Figure 4.3.1-a : Graphe de la relation de contact unilatérale approchée par pénalisation

Pour tenir compte d'une éventuelle perte d'énergie dans le choc, on introduit un "amortissement de choc" C_N . L'expression de la force normale de contact s'exprime alors par :

$$F_N^{1/2} = -K_N \cdot d_N^{1/2} - C_N \cdot \dot{u}_N^{1/2} \quad \text{éq 4.3.1-3}$$

où $\dot{u}_N^{1/2}$ est la vitesse normale relative de Ω_1 par rapport à Ω_2 . Pour respecter la relation de Signorini (pas d'adhérence en contact), on doit par contre vérifier a posteriori que $F_N^{1/2}$ est positive ou nulle. On ne prendra donc que la partie positive $\langle \cdot \rangle^+$ de l'expression [éq 4.3.1-3] :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^+ &= x \text{ si } x \geq 0 \\ \langle x \rangle^+ &= 0 \text{ si } x < 0 \end{aligned}$$

La relation complète donnant la force normale de contact qui est retenue pour l'algorithme est la suivante:

$$\begin{aligned} \text{si } d_N^{1/2} \leq 0 F_N^{1/2} = \left\langle -K_N \cdot d_N^{1/2} - C_N \cdot \dot{u}_N^{1/2} \right\rangle^+, F_N^{2/1} = -F_N^{1/2} \\ \text{sinon } F_N^{2/1} = F_N^{1/2} = 0. \end{aligned} \quad \text{éq 4.3.1-4}$$

4.3.2 Modèle de force tangentielle de contact

Le graphe décrivant la force tangentielle avec loi de Coulomb est non-différentiable pour la phase d'adhérence ($\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2} = 0$). On introduit donc une relation univoque liant le déplacement tangentiel relatif $\mathbf{d}_T^{1/2}$ et la force tangentielle $\mathbf{F}_T^{1/2} = \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{d}_T^{1/2})$ au moyen d'un paramètre ξ . Le graphe de \mathbf{f}_ε doit tendre vers le graphe de Coulomb lorsque ξ tend vers zéro [bib6].

Une des possibilités consiste à écrire une relation linéaire entre $\mathbf{d}_T^{1/2}$ et $\mathbf{F}_T^{1/2}$:
en notant a^0 la valeur d'une quantité a au début du pas de temps :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} - \mathbf{F}_T^{1/2^0} = -\frac{1}{\xi} \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \mathbf{d}_T^{1/2^0}) \quad \text{éq 4.3.2-1}$$

Si l'on introduit une "raideur tangentielle" $K_T = \frac{1}{\xi}$, on obtient la relation :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} = \mathbf{F}_T^{1/2^0} - K_T \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \mathbf{d}_T^{1/2^0}) \quad \text{éq 4.3.2-2}$$

Pour des raisons numériques, liées à la dissipation de vibrations parasites [bib7] en phase d'adhérence, on est amené à ajouter un "amortissement tangentiel" C_T dans l'expression de la force tangentielle. Son expression finale est :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} = \mathbf{F}_T^{1/2^0} - K_T \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \mathbf{d}_T^{1/2^0}) - C_T \cdot \dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}, \mathbf{F}_T^{2/1} = -\mathbf{F}_T^{1/2} \quad \text{éq 4.3.2-3}$$

Il faut de plus que cette force vérifie le critère de Coulomb, soit :

$$\|\mathbf{F}_T^{1/2}\| \leq \mu \cdot F_N^{1/2} \text{ sinon on applique } \mathbf{F}_T^{1/2} = -\mu \cdot F_N^{1/2} \cdot \frac{\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}}{\|\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}\|}, \mathbf{F}_T^{2/1} = -\mathbf{F}_T^{1/2} \quad \text{éq 4.3.2-4}$$

Le graphe approché de la loi de frottement de Coulomb modélisée par pénalisation est le suivant :

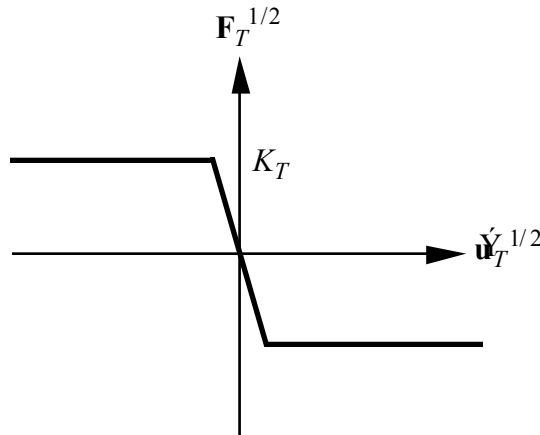


Figure 4.3.2-a : Graphe de la loi de frottement approchée par pénalisation

4.4 Définition des paramètres de contact

On précise ici les mots-clés permettant de définir les paramètres de contact, amortissement et frottement [U4.43.01]

L'opérande `RIGI_NOR` est obligatoire, il permet de donner la valeur de raideur normale de choc K_N .
Les autres opérandes sont facultatifs.

L'opérande `AMOR_NOR` permet de donner la valeur d'amortissement normal de choc C_N .

L'opérande `RIGI_TAN` permet de donner la valeur de raideur tangentielle K_T .

L'opérande `AMOR_TAN` permet de donner la valeur d'amortissement tangentielle de choc C_T .

L'opérande `COULOMB` permet de donner la valeur du coefficient de Coulomb.

L'opérande `DIST_1` permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le premier nœud de choc

L'opérande `DIST_2` permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le deuxième nœud de choc (choc entre deux structures mobiles)

L'opérande `JEU` définit la distance entre le nœud de choc et un obstacle non modélisé (cas d'un choc entre une structure mobile et un obstacle indéformable et immobile).

5 Bibliographie

- [1] J. ANGLES : "Modélisation des assemblages filetés..." Note HI74-99-020A
- [2] J.M. PROIX, B. QUINNEZ, P. MASSIN, P. LACLERGUE : "Assemblages combustibles sous irradiation. Etude de faisabilité". Note HI-75/97/017/0
- [3] G. JACQUART : "Méthodes de Ritz en dynamique non-linéaire - Application à des systèmes avec choc et frottement localisé" - Rapport EDF DER HP61/91.105
- [4] M. JEAN, J.J. MOREAU : "Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection" Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium - ed. A. CURNIER - Presses Polytechniques et Universitaires Romandes - Lausanne, 1992, pp 31-48
- [5] J.T. ODEN, J.A.C. MARTINS : "Models and computational methods for dynamic friction phenomena" - Computational Methods Appl. Mech. Engng. 52, 1992, pp 527-634
- [6] B. BEAUFILS : "Contribution à l'étude des vibrations et de l'usure des faisceaux de tubes en écoulement transversal" - Thèse de doctorat PARIS VI
- [7] Fe WAECKEL, G. DEVESA : « Dossier de spécifications d'un modèle de choc dans la commande DYNA_NON_LINE du Code_Aster ». Note HP-52/97/026/B

Page laissée intentionnellement blanche.