

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document R5.03.50

Contact unilatéral par des conditions cinématiques

Résumé :

On décrit dans ce document la méthode numérique utilisée par défaut pour traiter les problèmes de contact unilatéral en grands déplacements dans l'opérateur `STAT_NON_LINE`. On utilise des conditions cinématiques de non interpénétration qui sont dualisées. La formulation utilisée est de type maître esclave (nœud-facette ou nodale) avec réactualisation de la géométrie au cours des itérations, et la résolution du problème de contact est effectuée par une méthode de contraintes actives au sein de chaque itération de la méthode de Newton globale de l'opérateur `STAT_NON_LINE`.

1 Introduction

Le mot-clé `CONTACT` de la commande `AFFE_CHAR_MECA` permet de définir des conditions de contact unilatéral qui sont traitées (dans la commande `STAT_NON_LINE`) en géométrie initiale ou réactualisée, dans une formulation nodale ou nœud-facette, mieux adaptée aux maillages incompatibles et au glissement des surfaces l'une par rapport à l'autre. Il se substituera à terme au mot-clé `LIAISON_UNIL_NO` qui n'est valide que pour des maillages compatibles subissant de petits glissements.

On présente ici un algorithme basé sur la méthode des contraintes actives [bib2]. C'est celui qui est utilisé par défaut et qui correspond à `METHODE : 'CONTRAINTE'` du mot clé `CONTACT`. Un autre algorithme est disponible sous `METHODE : 'LAGRANGIEN'`. Il est similaire au précédent au détail près que les liaisons n'y sont pas activées une par une (comme nous allons le voir), mais par paquet. Pour plus de précisions, on pourra se reporter au document [R5.03.51].

1.1 Généralités

Deux solides sont dits en contact lorsqu'ils se "touchent" par une partie de leurs frontières. Traiter le contact unilatéral consiste à empêcher que l'un des solides ne "traverse" l'autre : c'est le principe de non interpénétration de la matière, qui se traduit par des relations d'inégalité entre les variables cinématiques (déplacements). Ces relations sont écrites sous une forme discrétisée : il est donc nécessaire de repérer les entités entre lesquelles on les écrit (c'est ce qu'on appelle l'appariement). Dans le *Code_Aster*, l'utilisation du mot-clé `CONTACT` permet d'**appairier** un nœud à un autre nœud ou à une maille : on a alors un couple **potentiel** de contact, c'est-à-dire un couple pour lequel on va écrire des relations de non pénétration. Si le contact a réellement lieu (les deux nœuds se retrouvent à la même position, ou le nœud se retrouve sur la maille), on dira que les deux entités sont **associées** au sein d'un couple **effectif** de contact.

Remarque :

L'expression "faire un calcul avec contact" veut dire que l'on écrit de telles relations de non pénétration, mais n'implique pas qu'il y ait contact effectif pour le chargement considéré.

Il y a quatre ingrédients dans un algorithme de traitement du contact unilatéral :

- le repérage : définition des surfaces potentielles de contact (cf. [§1.2]),
- l'appariement : détermination des couples potentiels de contact (cf. [§2]),
- la relation de non pénétration : direction d'écriture et coefficients (cf. [§3]) ; la relation est écrite entre le nœud esclave et un ou plusieurs nœuds maîtres, selon la formulation utilisée,
- la résolution : on utilise ici une méthode de contraintes actives (cf. [§4]) ; c'est un algorithme itératif qui détermine, pas à pas, la liste des couples effectivement en contact en examinant les conditions géométriques de contact et le signe des multiplicateurs de Lagrange associés, par dualité, à ces conditions.

1.2 Zones et surfaces de contact

On considère les 3 solides de la figure [Figure 1.2-a], représentés en 2D. On a défini 3 zones possibles d'interpénétration entre les solides : une zone entre le solide A et le solide B, et deux zones entre le solide B et le solide C. L'utilisateur, qui définit ces zones dans le fichier de commande, suppose ici qu'en dehors de ces zones, il n'y a pas de risque d'interpénétration, compte tenu du chargement.

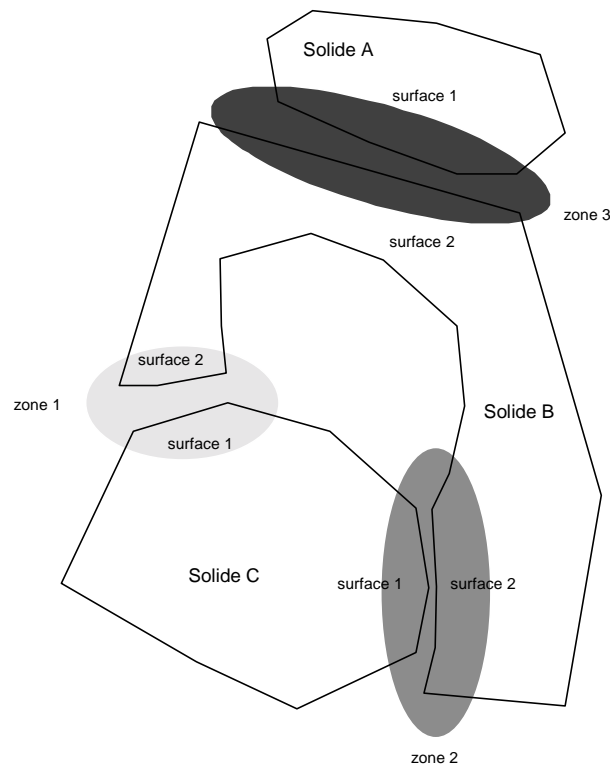


Figure 1.2-Erreur! Argument de commutateur inconnu. : Définition de 3 zones de contact

Chaque zone de contact est définie dans l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` par une occurrence du mot-clé `CONTACT`. Une zone se compose par définition de deux surfaces dont on cherche à empêcher l'interpénétration : la première est définie sous le mot-clé `GROUP_MA_1` (ou `MAILLE_1`), la seconde sous le mot-clé `GROUP_MA_2` (ou `MAILLE_2`), c'est-à-dire par la donnée des mailles **de bord** qui les constituent. Ces mailles sont des `SEG2` ou des `SEG3` pour un maillage 2D, des `TRIA3`, `TRIA6`, `QUAD4`, `QUAD8` ou `QUAD9` pour un maillage 3D.

Remarque :

Les mailles de bord nécessaires au contact ne seront pas créées par le code à partir des éléments volumiques et doivent donc déjà exister dans le fichier de maillage.

Il est impératif que les mailles de contact soient définies de façon à ce que la normale soit **sortante** : la connectivité des segments doit être définie dans l'ordre AB, celle des triangles dans l'ordre ABC, et celle des quadrangles dans l'ordre ABCD, comme indiqué sur la figure [Figure 1.2-b]. Pour une meilleure lecture du dessin, on a ici un peu écarté la maille de bord servant au contact de la "face" de l'élément volumique 2D ou 3D sur lequel elle s'appuie.

Cas particulier : contact pour un câble ou une poutre en 3D

Il est possible en 3D de traiter le contact entre une maille `SEG2` ou `SEG3` (modélisée en câble ou poutre) et une surface. Dans ce cas, il faut impérativement utiliser la méthode d'appariement '`MAIT_ESCL`' et donner les segments sous le mot-clé `GROUP_MA_2` (mailles esclaves). La section de la poutre peut être alors prise en compte par l'utilisation du mot-clé `DIST_2` (cf [§3.3]).

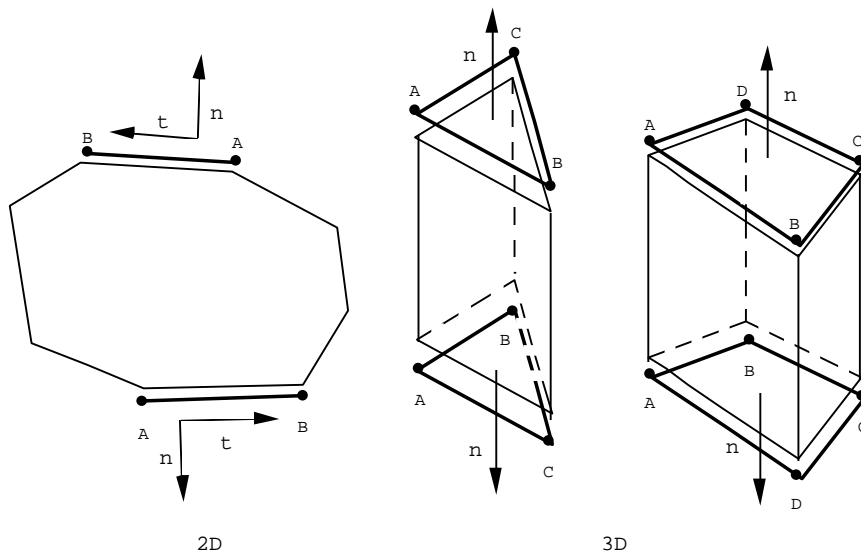


Figure 1.2-Erreur! Argument de commutateur inconnu. : **Numérotation des mailles de contact pour avoir une normale sortante**

Remarque :

On conseille d'utiliser des zones de contact disjointes, c'est-à-dire n'ayant aucun nœud en commun.

Le chapitre 2 détaille la méthode d'appariement pour les formulations nœud-facette et nodale : l'établissement des couples potentiels de contact se fait zone par zone. Dans le chapitre 3, on donne la forme des relations de non pénétration (inéquations). L'imposition de ces conditions de non pénétration est réalisée par une méthode itérative, appelée méthode des contraintes actives, décrite dans le chapitre 4 : la résolution du problème obtenu est globale, c'est-à-dire qu'elle prend en compte les couples de toutes les zones simultanément.

2 Etablissement des couples de contact

2.1 Principe

Les surfaces de contact potentielles ont été définies dans l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` comme précisé dans le [§1.2]. Le traitement effectif du contact se fait, lui, dans l'opérateur `STAT_NON_LINE`. La résolution d'un problème non linéaire dans l'opérateur `STAT_NON_LINE` est décrite en détail dans le document [R5.03.01]. Nous en rappelons ici brièvement les phases principales, pour un calcul comportant deux pas de temps :

1^{er} pas de charge

(1/a)	prédiction
(1/b ₁)	itération de Newton n°1
(1/b ₂)	itération de Newton n°2
.....	
(1/b _m)	itération de Newton n°m
(1/c)	stockage des résultats à convergence

2nd pas de charge

(2/a)	prédiction
(2/b ₁)	itération de Newton n°1
(2/b ₂)	itération de Newton n°2
.....	
(2/b _p)	itération de Newton n°p
(2/c)	stockage des résultats à convergence

Le contact unilatéral est traité après les phases (1/a), (1/b₁), (1/b₂), ..., (1/b_m), (2/a), (2/b₁), (2/b₂), ..., (2/b_p) i.e. après la phase de prédiction et après chaque itération de Newton de `STAT_NON_LINE`. C'est là la différence essentielle entre cet algorithme et l'algorithme de contact frottement (voir documentation [R5.03.51]) où le traitement du contact n'est effectif qu'à la fin du pas de charge et non au cours des itérations.

| On appelle "passe de contact" chacune des occurrences de traitement du contact.

2.1.1 Formulation nœud-facette

Cette formulation, choisie par le mot-clé APPARIEMENT : 'MAIT_ESCL', n'accorde pas un rôle équivalent aux deux surfaces : la surface décrite sous GROUP_MA_1 ou MAILLE_1 (S_1) est appelée la surface maître et l'autre (S_2) la surface esclave. Les conditions de non interpénétration expriment que les nœuds de la surface esclave (des étoiles sur la figure [fig 2.1.1-a]) ne pénètrent pas dans les mailles de la surface maître : on peut voir que, par contre, il est possible que les nœuds maîtres (des ronds) pénètrent dans la surface esclave.

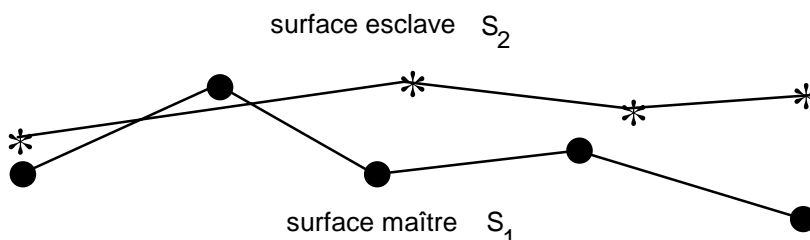


Figure 2.1.1-a : Surface maître et surface esclave

La relation de non interpénétration sera écrite entre un nœud et une maille : on cherche d'abord le nœud de la surface maître le plus proche du nœud esclave (cf. [§2.2]), puis on examine (cf. [§2.3]) toutes les mailles maîtres contenant ce nœud (la distance obtenue par projection du nœud esclave sur chaque maille maître permet de choisir la maille la plus proche). On utilise la normale à la maille maître pour écrire la relation de non pénétration.

Remarques :

Les nœuds esclaves sont par défaut tous les nœuds appartenant aux mailles de contact définissant la surface esclave. Les mots-clés SANS_NO et SANS_GROUP_NO permettent de donner, zone par zone, la liste des nœuds qui doivent être enlevés de la liste des nœuds esclaves (mais ils pourront être utilisés comme nœuds maîtres). Cela permet d'enlever les nœuds soumis à des conditions aux limites de Dirichlet incompatibles avec le contact.

Pour symétriser le rôle des deux surfaces, il serait intéressant d'utiliser une fonctionnalité du type APPARIEMENT : 'MAIT_ESCL_SYME' qui échangerait les rôles de maître et d'esclave à chaque passe de traitement du contact. C'est un développement envisagé en version 6.

2.1.2 Formulation nodale

La formulation nodale (APPARIEMENT : 'NODAL') impose que le déplacement relatif entre un nœud esclave et le nœud maître qui lui est apparié, projeté sur la direction de la normale au nœud esclave, soit inférieur au jeu initial dans cette direction. L'utilisation de cette formulation est déconseillée car elle nécessite d'avoir des maillages compatibles (nœuds "en face") qui restent compatibles au cours de la déformation (hypothèse de petits glissements), et pour lesquels les normales maître et esclave sont à peu près colinéaires. Sans ces hypothèses, l'approximation faite devient hasardeuse (tout comme l'utilisation de LIAISON_UNIL_NO) et il est préférable d'utiliser la formulation nœud-facette.

On choisit de prendre comme surface esclave celle qui comporte le moins de nœuds (à nombre égal, c'est celle décrite sous GROUP_MA_2 ou MAILLE_2), afin de maximiser les chances d'avoir un appariement injectif (un nœud maître n'est apparié qu'à un seul nœud esclave). Le nœud maître apparié à chaque nœud esclave est déterminé par un calcul de plus proche voisin expliqué dans le [§2.2]. On utilise la normale au nœud maître pour écrire la relation de non interpénétration (cf. [§3]).

Remarque :

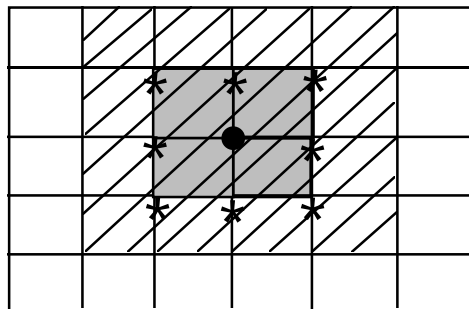
Même dans le cas de l'appariement nodal, les surfaces de contact sont définies en termes de mailles (cf. [§1.2]). Les nœuds esclaves et maîtres sont alors les nœuds des mailles ainsi définies.

2.2 Recherche du plus proche voisin d'un nœud

La méthode utilisée pour rechercher le nœud maître le plus proche d'un nœud esclave est très simple : il suffit de calculer la distance (en géométrie courante, cf. [§2.4]) entre le nœud esclave et les nœuds maîtres candidats. La seule variante utilisée consiste à pouvoir restreindre l'ensemble des nœuds maîtres a priori candidats.

Le mot-clé RECHERCHE : 'NOEUD_BOUCLE' déclenche l'examen de tous les nœuds maîtres appartenant à la même zone de contact que le nœud esclave.

On stocke à chaque passe de contact le nœud maître qui était le plus proche de chaque nœud esclave (on l'appelle l'ancien "voisin"). Si le glissement relatif des deux surfaces est petit (une maille ou deux), on peut choisir de n'examiner que les nœuds maîtres connectés à cet ancien nœud par des mailles de contact. Cette méthode est activée par RECHERCHE : 'NOEUD_VOISIN'. On choisit parmi ces nœuds candidats le plus proche comme "nouveau voisin", et on examinera (cf. [§2.3]) les mailles contenant ce nouveau voisin. Ainsi, les mailles potentiellement susceptibles d'être appariées au nœud esclave (rond noir) dans la nouvelle configuration sont celles ayant des rayures sur la figure [Figure 2.2-a].



- ancien nœud maître le plus proche (ancien "voisin")
- mailles contenant l'ancien "voisin"
- * nœuds candidats pour être le nouveau "voisin"
- ▨ mailles susceptibles d'être appariées au nœud esclave

Figure 2.2-a : Territoire couvert par RECHERCHE : 'NOEUD_VOISIN'

Remarque :

Si la discrétisation en temps est suffisamment fine (ce qui est le cas en général hors les problèmes d'élasticité), il est raisonnable de penser que le glissement sera petit d'un pas de temps à l'autre. On peut donc a minima utiliser l'option RECHERCHE : 'NOEUD_VOISIN'.

2.3 Recherche de la maille la plus proche (formulation nœud-facette)

Connaissant le nœud maître le plus proche du nœud esclave, on examine successivement les mailles maîtres contenant ce nœud. La méthode de sélection est simple : on détermine la projection M du nœud esclave P sur la maille maître (suivant la normale à la maille maître), on la ramène sur le bord de la maille si elle se trouve en dehors, et on calcule le produit scalaire entre le vecteur PM et la normale à la maille. La maille réalisant la plus petite valeur de ce produit scalaire (avant correction en ramenant sur le bord) est choisie pour être appariée au nœud esclave.

2.3.1 Projection sur un segment (contact en 2D)

On considère la situation décrite sur la figure [Figure 2.3.1-a]. La surface maître se trouve "en-dessous" de la surface esclave, donc le sens de parcours de la surface maître doit être de A vers B (la maille de bord maître est définie comme étant AB , et non BA) : ainsi **la normale n à la maille est sortante**, c'est-à-dire pointée vers la surface esclave (cf. [§1.2]). Par contre, d'un point de vue algorithmique, on utilise $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$, le vecteur opposé à la normale sortante de la maille.

On cherche la coordonnée paramétrique λ du point M , projection du nœud esclave P selon la normale entrante \mathbf{N} à la maille AB , définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{AM} = \lambda \mathbf{AB} \\ \mathbf{MP} = \alpha \mathbf{N} \\ (\mathbf{AB}, \mathbf{N}) = 0 \end{cases}$$

où $(,)$ dénote le produit scalaire.

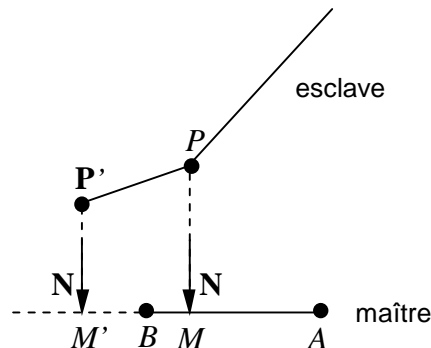


Figure 2.3.1-a : Projection sur un segment

On a : $\lambda = \frac{(\mathbf{AP}, \mathbf{AB})}{(\mathbf{AB}, \mathbf{AB})}$.

Le point M appartient à la maille AB si $\lambda \in [0; 1]$. Si $\lambda > 1$ (cas de P' projeté en M'), on ramène la projection en A en posant $\lambda = 1$; si $\lambda < 0$, on ramène la projection en B en posant $\lambda = 0$. On évalue ensuite le produit scalaire de \mathbf{PM} avec la normale \mathbf{N} entrante à la maille (i.e. opposée à la normale sortante de la maille maître), dont les composantes sont :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\frac{y_B - y_A}{L} \\ \frac{x_B - x_A}{L} \end{pmatrix}, \text{ avec } L \text{ longueur de } AB : L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

La valeur de $(\mathbf{PM}, \mathbf{N})$ est appelée le jeu entre le nœud esclave et la maille maître. La direction \mathbf{N} est retenue comme direction d'écriture des relations de non pénétration (cf. [§3]).

Remarques :

On aurait pu définir la direction d'écriture des relations de non pénétration par le vecteur \mathbf{PM} , et donc le jeu par la norme de \mathbf{PM} . Cependant, le vecteur \mathbf{PM} tend vers le vecteur nul (direction indéterminée) lorsque les points se rapprochent (lorsqu'on tend vers le contact effectif) et devient très sensible aux erreurs d'arrondi : à l'extrême, lorsque $P = M$, on peut trouver $\mathbf{PM} = (10^{-15}; 0)$ (pour une maille maître horizontale), qui est une direction horizontale, parfaitement erronée pour l'écriture des relations de non pénétration ici. C'est pour cette raison que l'on choisit d'utiliser la normale maître qui, elle, ne varie pas du fait du seul rapprochement des solides.

Le fait de privilégier une surface par rapport à une autre peut engendrer des erreurs de modélisation (perte de symétrie) que l'on peut minimiser en raffinant le maillage. Une autre solution consisterait à utiliser la moyenne entre les normales maître et esclave. Cette approche est à l'étude en version 6.

2.3.2 Projection sur un triangle (contact en 3D)

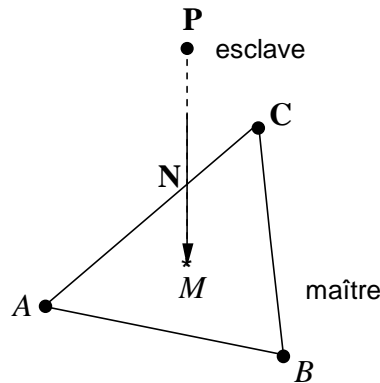


Figure 2.3.2-a : Projection sur un triangle

On cherche les coordonnées paramétriques ξ_1 et ξ_2 du point M , projection du nœud esclave P selon la normale \mathbf{N} entrante à la maille triangulaire ABC (on utilise la normale à la maille, mais dans le sens esclave vers maître), définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{AM} = \xi_1 \mathbf{AB} + \xi_2 \mathbf{AC} \\ \mathbf{PM} \wedge \mathbf{N} = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \xi_1 = - \frac{((\mathbf{AP} \wedge \mathbf{N}), \mathbf{AC})}{\|(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC})\|} \\ \xi_2 = \frac{((\mathbf{AP} \wedge \mathbf{N}), \mathbf{AB})}{\|(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC})\|} \end{cases} \quad \text{avec } \mathbf{N} = \frac{-\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}\|} \text{ (normale unitaire entrante).}$$

Si l'on pose $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$, les valeurs des trois coordonnées paramétriques ξ_1, ξ_2, ξ_3 permettent de trouver si le point M appartient ou non au triangle ABC , comme l'illustre la figure [Figure 2.3.2-b].

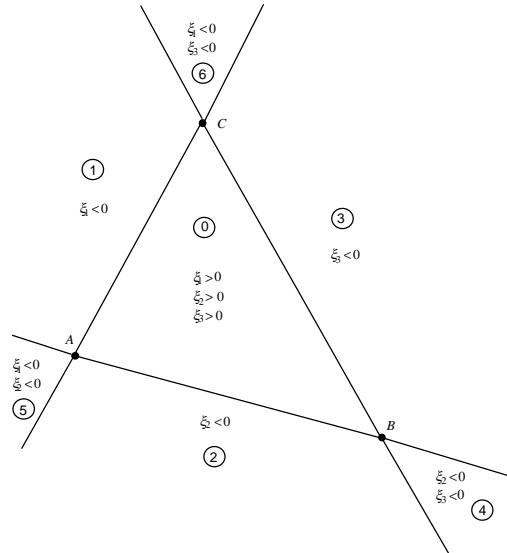


Figure 2.3.2-b : Zones possibles pour le point M , prolongement du nœud P selon la direction de la normale à la maille

Si le point M se trouve dans les secteurs 1, 2, ou 3, on le ramène sur l'arête correspondante (AC , AB ou BC). S'il se trouve dans les secteurs 4, 5 ou 6, on le ramène sur le point correspondant (point B , A ou C). Cela revient à annuler les coordonnées paramétriques qui sont négatives.

Prenons l'exemple du secteur 1 où $\xi_1 < 0$. On ramène le point M au point M' , défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{AM}' = \xi_2' \mathbf{AC} \\ \mathbf{AM} = \xi_1 \mathbf{AB} + \xi_2 \mathbf{AC} \\ (\mathbf{AM}', \mathbf{MM}') = 0 \end{cases}$$

On trouve : $\xi_2' = \xi_2 + \xi_1 \frac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})}{(\mathbf{AC}, \mathbf{AC})}$.

Dans le secteur 2, un raisonnement identique donne : $\xi_1' = \xi_1 + \xi_2 \frac{(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})}{(\mathbf{AB}, \mathbf{AB})}$ et $\mathbf{AM}' = \xi_1' \mathbf{AB}$.

Dans le secteur 3, on a $\mathbf{AM}' = \xi_1' \mathbf{AB} + (1 - \xi_1') \mathbf{AC}$ avec $\xi_1' = \frac{-\xi_1 (\mathbf{AB}, \mathbf{BC}) + (1 - \xi_2) (\mathbf{AC}, \mathbf{BC})}{(\mathbf{BC}, \mathbf{BC})}$.

Le jeu est calculé comme le produit scalaire entre le vecteur \mathbf{PM} et la normale \mathbf{N} entrante à la maille maître.

2.3.3 Projection sur un quadrangle (contact en 3D)

Pour les quadrangles, la détermination des coordonnées paramétriques dans l'élément courant nécessiterait le retour à l'élément de référence, et donc la résolution d'un problème non linéaire, qui est coûteux.

On a choisi dans un premier temps une solution approchée, qui est de couper (virtuellement) le quadrangle en deux triangles, selon les deux manières possibles (cf. [Figure 2.3.3-a]), de calculer la distance du nœud esclave à chacun des quatre triangles ainsi définis (cf. [§2.3.2]), et de choisir le triangle réalisant la plus petite distance. La relation de non interpénétration est alors écrite entre le nœud esclave et les 3 sommets maîtres du triangle choisi. Dans le cas où le quadrangle reste plan, la projection sur le triangle choisi est équivalente à la projection sur le quadrangle ; dans le cas plus général où le quadrangle est gauchi, cette opération est un moyen de prendre en compte, d'une certaine façon, la courbure.

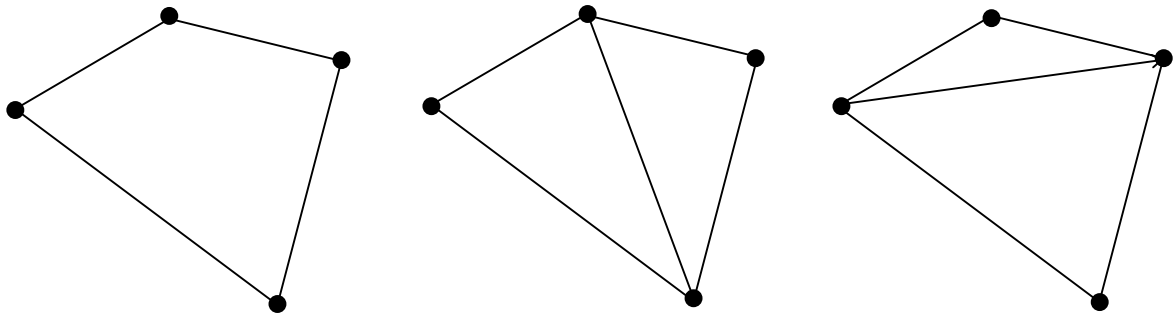


Figure 2.3.3-a : Découpage d'un quadrangle linéaire

2.3.4 Cas des éléments quadratiques

La projection sur les éléments quadratiques est faite pour l'instant en se ramenant au cas linéaire (triangle à trois nœuds et quadrangle à quatre nœuds). Par contre, l'écriture de la relation de non interpénétration fait intervenir tous les nœuds des éléments maîtres avec les fonctions de forme associées (cf. [§3.2]). On considère donc que la contribution des nœuds milieux au résultat doit être prise en compte même si leur contribution à la déformation géométrique de l'élément est négligée.

Remarque :

Pour les quadrangles, on n'utilise que les fonctions de forme relatives aux trois sommets du triangle choisi, et cela même pour les QUAD8 et QUAD9.

Mise en garde importante :

Le contact en 3D pour des éléments quadratiques donne, pour des raisons théoriques exposées dans le CR MMN 97/023, des résultats qui peuvent surprendre l'utilisateur. Nous ne recommandons pas l'utilisation de tels éléments ; si tel est le cas, cependant, nous conseillons de raffiner "suffisamment" le maillage sur les bords des structures en contact.

2.4 Réactualisation géométrique

Dans le cadre de la modélisation du contact en grands déplacements, l'évolution de la géométrie des surfaces joue un rôle fondamental. En effet, c'est elle qui conditionne le calcul des normales aux faces potentiellement en contact et donc qui conditionne l'appariement réalisé.

La réactualisation géométrique est définie par le mot clé REAC_GEOM_INTE du mot clé facteur CONTACT. Son fonctionnement est le suivant :

REAC_GEOM_INTE=0	Il n'y a pas de réactualisation géométrique. Tout le calcul s'effectue sur la configuration initiale avec l'appariement initial.
REAC_GEOM_INTE=1	Une réactualisation géométrique est effectuée à convergence de chaque pas de charge <i>i.e.</i> juste avant les phases (1/c), (2/c),... présentées au [§2.1]. Cette réactualisation s'accompagne d'un nouvel appariement.
REAC_GEOM_INTE=2	On se place à un pas de charge donné. A convergence de ce dernier, une réactualisation géométrique puis un nouvel appariement sont effectués. On ne passe pas au pas de charge suivant mais on reprend le même pas de charge jusqu'à convergence. Une réactualisation géométrique puis un nouvel appariement sont effectués et on passe au pas de charge suivant.
REAC_GEOM_INTE=n (n>2)	C'est une généralisation du cas précédent. Au sein du même pas de charge, on effectue n fois le cycle <i>itération jusqu'à convergence, réactualisation géométrique, appariement</i> .

On peut tout d'abord remarquer que l'appariement est soumis à la phase de réactualisation géométrique. En outre, le fait de réaliser plusieurs fois au sein du même pas de charge le cycle *itération jusqu'à convergence, réactualisation géométrique, appariement* permet de suivre l'évolution de la géométrie de la structure. Il faut en effet souligner que cette évolution géométrique est une des composantes non linéaires d'un calcul de contact en grands déplacements.

Dans la pratique, on peut conseiller les valeurs suivantes pour le mot clé REAC_GEOM_INTE :

- pour un calcul en petits déplacements, la valeur naturelle est 0. On travaille sur la configuration initiale,
- pour des calcul en grands déplacements, la valeur choisie dépend bien sûr de l'importance de l'évolution géométrique des surfaces mais les valeurs 1 ou 2 sont généralement à conseiller. La valeur 2 est d'ailleurs la valeur par défaut de ce mot clé.

3 Relation de non interpénétration

3.1 Condition cinématique

On effectue une modélisation idéalisée du phénomène de contact, en ce sens qu'il suppose les frontières des corps parfaitement définies par une ligne ou une surface : on écrit alors une condition de non interpénétration discrète et linéarisée [bib3].

Soit P un nœud esclave, M sa projection sur la maille maître qui a été déterminée lors de l'appariement. En 2D, cette maille maître a 2 nœuds (SEG2) ou 3 nœuds (SEG3). En 3D, elle peut en avoir 3, 4, 6, 8 ou 9 (TRIA3, QUAD4, TRIA6, QUAD8, QUAD9). Le déplacement du point M est une combinaison linéaire des déplacements des nœuds de l'élément fini, avec pour coefficients les valeurs des fonctions de forme Φ en M . Plaçons-nous dans le cas où la maille maître est un SEG2 pour simplifier l'exposé. On a alors :

$$\mathbf{u}_M = \Phi_A(M) \mathbf{u}_A + \Phi_B(M) \mathbf{u}_B$$

La relation de non pénétration linéarisée consiste à dire que déplacement relatif entre P et M selon une direction donnée ne peut pas dépasser le jeu initial dans cette direction. On a choisi de prendre comme direction \mathbf{N} la normale entrante de la maille maître (cf. [fig 3.1-a]).

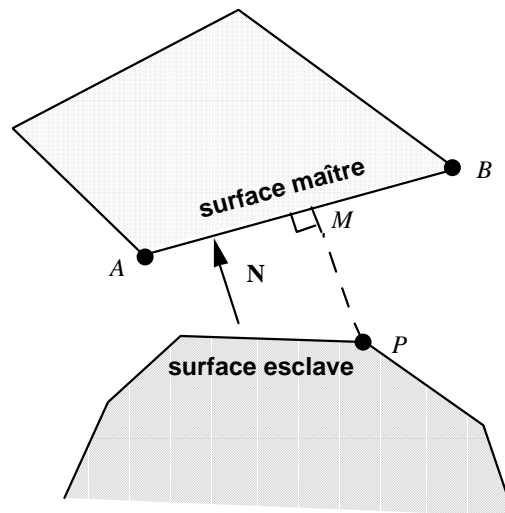


Figure 3.1-a : Projection d'un nœud esclave sur une maille SEG2

La relation de non pénétration s'écrit alors comme un signe de produit scalaire (noté par un \cdot) :

$$\mathbf{PM} \cdot \mathbf{N} \geq 0, \text{ soit } \mathbf{P}^- \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{N} + (\delta \mathbf{u}_M - \delta \mathbf{u}_P) \cdot \mathbf{N} \geq 0,$$

si $\delta \mathbf{u}$ est l'incrément de déplacement depuis la configuration précédente où le déplacement était noté \mathbf{u}^- .

On doit donc vérifier $(\delta \mathbf{u}_P - \delta \mathbf{u}_M) \cdot \mathbf{N} \leq \mathbf{P}^- \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{N}$. En remarquant que $\mathbf{P}^- \mathbf{M}^- \cdot \mathbf{N}$ est le jeu d^- dans la configuration précédente, la relation de non pénétration s'écrit aussi :

$$(\delta \mathbf{u}_P - \delta \mathbf{u}_M) \cdot \mathbf{N} \leq d^-,$$

soit, en utilisant la relation $\mathbf{u}_M = \Phi_A(M) \mathbf{u}_A + \Phi_B(M) \mathbf{u}_B$:

$$[\delta \mathbf{u}_P - (\Phi_A(M) \delta \mathbf{u}_A + \Phi_B(M) \delta \mathbf{u}_B)] \cdot \mathbf{N} \leq d^-$$

L'extension de la formule pour une maille maître comportant $n_{\text{maît}}$ nœuds notés B_j , est immédiate :

$$\left[\delta \mathbf{u}_P - \sum_{j=1}^{n_{\text{maît}}} \Phi_{B_j}(M) \delta \mathbf{u}_{B_j} \right] \cdot \mathbf{N} \leq d^-$$

Si l'on écrit une telle relation pour tous les couples de contact, on obtient les conditions géométriques de non pénétration sous forme matricielle :

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}^-$$

Remarque :

Le jeu effectif dans la configuration $\mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u}$ est $\mathbf{d}_0 - \mathbf{A}(\mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u})$, soit $\mathbf{d}^- - \mathbf{A} \delta \mathbf{u}$. La condition de non pénétration exprime donc que le jeu effectif reste positif ou nul dans toute configuration.

La matrice \mathbf{A} , appelée matrice de contact, contient 1 ligne par couple de contact, et autant de colonnes que de degrés de liberté physiques du problème.

Supposons que l'on ait 2 mailles de contact de type SEG2, selon le schéma de la figure [Figure 3.1-b] :

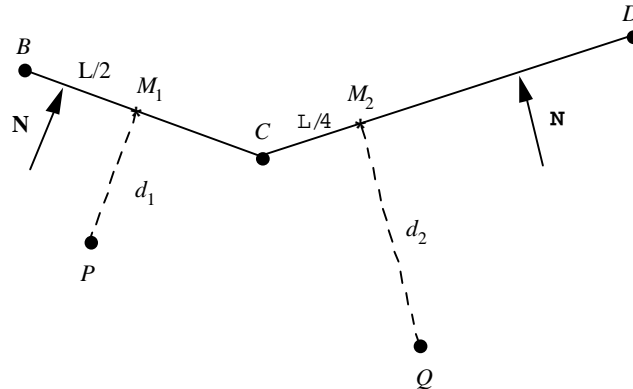


Figure 3.1-b : Ecriture de la matrice de contact A sur un exemple

Si l'on note par exemple $\delta \mathbf{u}_{B_x}$ l'incrément de déplacement du nœud B selon la direction x , et d_1 et d_2 les jeux courants pour les deux couples, les deux relations de non pénétration s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} N_x & N_y & 0 & 0 & -0.5N_x & -0.5N_y & -0.5N_x & -0.5N_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_x & N_y & 0 & 0 & -0.75N_x & -0.75N_y & -0.25N_x & -0.25N_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{P_x} \\ \delta u_{P_y} \\ \delta u_{Q_x} \\ \delta u_{Q_y} \\ \delta u_{B_x} \\ \delta u_{B_y} \\ \delta u_{C_x} \\ \delta u_{C_y} \\ \delta u_{D_x} \\ \delta u_{D_y} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Remarque :

On n'a ici considéré que les degrés de liberté des nœuds impliqués dans le contact ; dans la réalité, la matrice **A** est plus creuse.

3.2 Coefficients de la relation de non pénétration

La relation de non pénétration s'écrit :

$$\left[\delta u_P - \sum_{j=1}^{n_{\text{maître}}} \Phi_{B_j}(M) \delta u_{B_j} \right] \cdot \mathbf{N} \leq d^-$$

On donne ci-dessous les valeurs des fonctions de forme $\Phi_{B_j}(M)$ des nœuds maîtres au point M pour les différentes mailles de contact traitées.

3.2.1 Mailles SEG2

La coordonnée paramétrique de la projection du nœud esclave sur le SEG2 est notée λ . Les valeurs des fonctions de forme au point de coordonnée paramétrique λ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_A(M) = 1 - \lambda \\ \Phi_B(M) = \lambda \end{cases}$$

3.2.2 Mailles SEG3

On a projeté le nœud esclave en supposant la maille rectiligne : le point M n'appartient donc pas forcément rigoureusement au SEG3 si celui-ci est courbe. Néanmoins, on calcule les valeurs des fonctions de forme associées au SEG3 (sommets A et B , nœud milieu C) à partir de la coordonnée paramétrique λ rapportée au SEG2 :

$$\begin{cases} \Phi_A(M) = 2(1-\lambda)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) \\ \Phi_B(M) = 2\lambda\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) \\ \Phi_C(M) = 4\lambda(1-\lambda) \end{cases}$$

3.2.3 Mailles TRIA3

On a expliqué dans le [§2.3.2] comment on trouve les coordonnées paramétriques ξ_1 et ξ_2 de la projection M du nœud esclave dans le triangle. Les valeurs des fonctions de forme sont en fait celles des coordonnées paramétriques :

$$\begin{cases} \Phi_A(M) = 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ \Phi_B(M) = \xi_1 \\ \Phi_C(M) = \xi_2 \end{cases}$$

3.2.4 Mailles TRIA6

Comme dans le cas des segments, on a effectué la projection en ne tenant compte que des 3 sommets du triangle : par contre, on utilise les coordonnées paramétriques ainsi obtenues (en posant $\lambda_A = 1 - \xi_1 - \xi_2$, $\lambda_B = \xi_1$, $\lambda_C = \xi_2$) pour en déduire les valeurs des fonctions de forme aux 6 nœuds (A, B, C sommets, D, E, F nœuds milieux respectivement des côtés AB, BC et CA) :

$$\begin{cases} \Phi_A(M) = \lambda_A(2\lambda_A - 1) \\ \Phi_B(M) = \lambda_B(2\lambda_B - 1) \\ \Phi_C(M) = \lambda_C(2\lambda_C - 1) \\ \Phi_D(M) = 4\lambda_A\lambda_B \\ \Phi_E(M) = 4\lambda_B\lambda_C \\ \Phi_F(M) = 4\lambda_C\lambda_A \end{cases}$$

3.3 Introduction d'un jeu fictif

On peut vouloir modéliser le contact entre des structures dont le maillage n'a pas tenu compte de certaines particularités ("trou" ou "bosse" non maillés (cf. [Figure 3.3-a])).

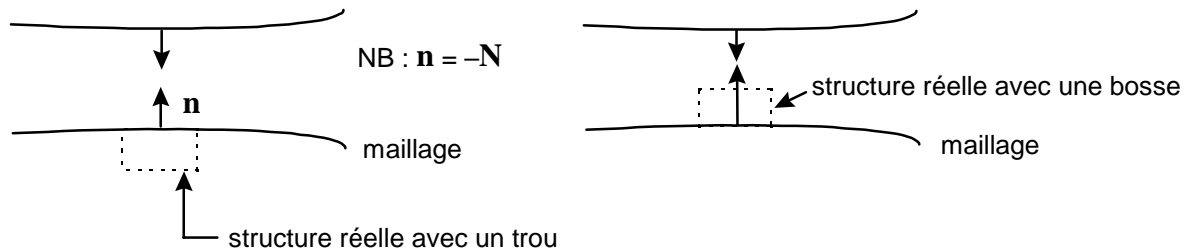


Figure 3.3-Erreur! Argument de commutateur inconnu. : Trous et bosses

Dans ce cas, il faut corriger la valeur du jeu intervenant au second membre de l'inéquation de non pénétration, selon le modèle suivant (\mathbf{N} est la normale **entrante** à la maille maître) :

$$(\delta \mathbf{u}_P - \delta \mathbf{u}_M) \cdot \mathbf{N} \leq d^- - (d_1 + d_2)$$

où d_1 et d_2 sont donnés par l'utilisateur respectivement sous les mots-clés DIST_1 et DIST_2 pour chaque zone de contact. Ces "distances" ont un signe : elles représentent la translation à appliquer au nœud du maillage dans la direction de la normale \mathbf{n} sortante pour obtenir le point de la structure réelle (cf. [Figure 3.3-b]).

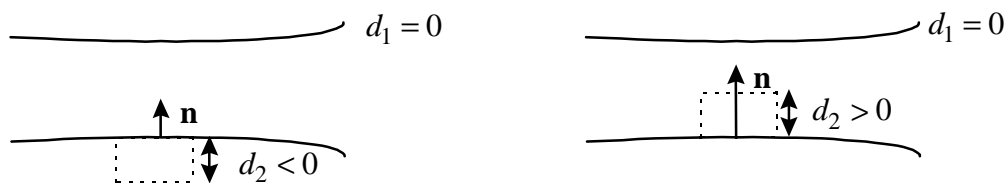


Figure 3.3-Erreur! Argument de commutateur inconnu. : Définition de d_1 et d_2

Ces mots-clés permettent de rendre compte également du contact entre coques dont seules les surfaces moyennes sont maillées : d_1 et d_2 valent alors la demi-épaisseur des coques (valeurs positives) (cf. [Figure 3.3-c]).

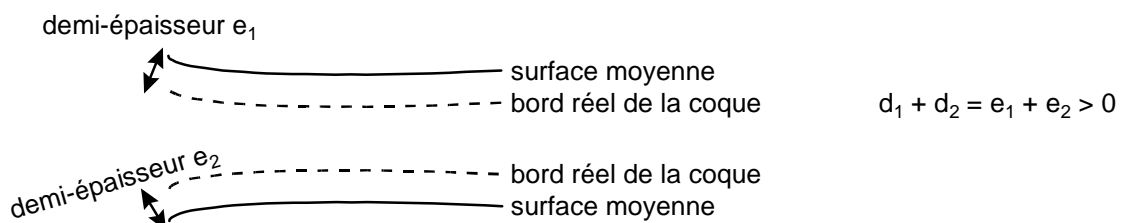


Figure 3.3-Erreur! Argument de commutateur inconnu. : Contact entre coques

Remarque :

Si l'on utilise *DIST_1* et *DIST_2*, il faut prendre garde à l'interprétation visuelle des résultats. Si $d_1 + d_2 > 0$, le code pourra annoncer du contact alors que la visualisation montrera un espacement des deux maillages. Si $d_1 + d_2 < 0$, le code pourra annoncer du contact alors que la visualisation montrera deux maillages interpénétrés.

Aide mémoire :

Pour se souvenir des signes, penser à :

$d_1 > 0$ ou $d_2 > 0$: "ajout" de matière par rapport au maillage,

$d_1 < 0$ ou $d_2 < 0$: "ablation" de matière par rapport au maillage.

3.4 Dualisation des conditions de non pénétration

Pour simplifier l'écriture, plaçons-nous dans ce chapitre en élasticité linéaire (matrice **C**, chargement **F**), en oubliant les conditions aux limites de Dirichlet. Si l'on dualise les conditions de non pénétration (cf. [bib3]), on doit résoudre le système suivant, comprenant des équations et des inéquations :

$$\begin{cases} \mathbf{Cu} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{F} \\ \mathbf{Au} \leq \mathbf{d}^- \\ \boldsymbol{\mu} \geq 0 \\ \forall j, (\mathbf{Au} - \mathbf{d}^-)_j \mu_j = 0 \end{cases}$$

La première ligne exprime les équations d'équilibre : le vecteur $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}$ peut s'interpréter comme les forces nodales dues au contact. La seconde ligne représente les conditions géométriques de non interpénétration : l'inégalité s'entend composante par composante (chaque ligne est relative à un couple potentiel de contact). La troisième ligne exprime l'absence d'opposition au décollement (les surfaces de contact ne peuvent connaître que des compressions). La dernière ligne est la condition de compatibilité : lorsque pour la liaison *j* le multiplicateur de Lagrange μ_j est non nul, on a contact et donc le jeu $(\mathbf{d}^- - \mathbf{Au})_j$ est nul ; lorsque le jeu est non nul (les deux surfaces ne sont pas en contact), le multiplicateur associé doit être nul (pas de compression).

4 Résolution du problème de contact

4.1 Position du problème

On traite le contact unilatéral après la phase de prédiction et après chaque itération de Newton. Ainsi le champ de déplacements passe par les états suivants :

début du pas de temps i :	\mathbf{u}_{i-1}
prédiction	$\rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{u}}_i^0$
traitement du contact	$\rightarrow \Delta \mathbf{u}_i^0$
mise à jour :	$\mathbf{u}_i^0 = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i^0$
itération de Newton numéro 1	$\rightarrow \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^1$
traitement du contact	$\rightarrow \delta \mathbf{u}_i^1$
mise à jour :	$\mathbf{u}_i^1 = \mathbf{u}_i^0 + \delta \mathbf{u}_i^1$
...	
itération de Newton numéro n	$\rightarrow \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^n$
traitement du contact	$\rightarrow \delta \mathbf{u}_i^n$
mise à jour :	$\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}_i^{n-1} + \delta \mathbf{u}_i^n$
...	

Quand on ne traite pas le contact, les systèmes à résoudre sont les suivants (avec les notations de [R5.03.01]) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_i^0 \\ \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{L}_i^{méca} + \Delta \mathbf{L}_i^{ther} \\ \Delta \mathbf{u}_i^d \end{pmatrix} \quad \text{à la phase de prédiction}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_i^{n-1} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i^n \\ \delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_i^{méca} - \mathbf{R}(\mathbf{u}_i^{n-1}) - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}_i^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{à la } n^{\text{ième}} \text{ itération de Newton}$$

On peut écrire la forme générique du système à résoudre quand on ne traite pas le contact :

$$\mathbf{C} \delta \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

où \mathbf{U} regroupe les degrés de liberté de déplacement \mathbf{u} et les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ associés aux conditions aux limites de Dirichlet (le \sim indique que le contact n'est pas pris en compte), \mathbf{C} est la matrice tangente complète, et \mathbf{F} le second membre.

La relation de non interpénétration s'écrit :

$$\mathbf{A} \mathbf{u} \leq \mathbf{d}_0 \quad (\mathbf{d}_0 \text{ est le jeu initial, mesuré sur le maillage}),$$

ou encore : $\mathbf{A} \delta \mathbf{u} \leq \mathbf{d}^- = \mathbf{d}_0 - \mathbf{A} \mathbf{u}^-$ si $\mathbf{u} = \mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u}$ (cf. [§3.2]).

En présence de conditions de contact unilatéral, les systèmes à résoudre (dualisation des conditions de non interpénétration) s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\delta\mathbf{U} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F} \\ \mathbf{A}\delta\mathbf{U} \leq \mathbf{D}^- \end{cases}$$

où \mathbf{A} est la matrice des conditions de contact complète, $\boldsymbol{\mu}$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés au contact (ils doivent être positifs ou nuls), $\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}$ le vecteur des forces nodales de contact, et \mathbf{D}^- le vecteur (plongé dans l'ensemble des degrés de liberté, multiplicateurs de Lagrange compris) contenant le jeu courant (pour \mathbf{u}^-) :

$$\mathbf{D}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0 - \mathbf{A}\mathbf{u}^- \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Méthode des contraintes actives

On pourra trouver une description complète de la méthode avec les justifications théoriques nécessaires dans [bib2] et [bib3]. Le principe est le suivant : on postule un ensemble de contraintes dites actives, qui correspondent à un jeu nul (la relation inégalité devient une égalité) ; on résout le système d'équations obtenu dans ce sous-espace, et on regarde si le postulat de départ était justifié. Si l'ensemble choisi était trop petit (on avait oublié des liaisons actives), on rajoute à l'ensemble la liaison violant le plus la condition de non interpénétration ; si l'ensemble choisi était trop grand (des liaisons supposées actives ne le sont en fait pas), on enlève de l'ensemble la liaison la plus improbable *i.e.* celle dont le multiplicateur de Lagrange violant la condition 3 du système du [§3.4] a la plus grande valeur absolue. Le fait d'enlever ou de rajouter une seule liaison à chaque itération de la méthode garantit la convergence en un nombre fini d'itérations [bib2].

On note \mathbf{u}^- le champ de déplacements obtenu avant de traiter le contact : il s'agit de \mathbf{u}_{i-1} lorsqu'on traite le contact à l'issue de la phase de prédiction, et de \mathbf{u}_i^{n-1} lorsqu'on traite le contact à l'issue de l'itération de Newton numéro n . Les incréments de déplacements (obtenus sans prendre en compte le contact) calculés auparavant ne sont donc pas pris en compte dans \mathbf{u}^- . On cherche l'incrément $\delta\mathbf{u}$ à rajouter à \mathbf{u}^- pour obtenir \mathbf{u}_i^0 ou \mathbf{u}_i^n .

La méthode des contraintes actives est une méthode itérative découplée des itérations de Newton : à chaque itération de contraintes actives, la solution de départ est notée $\delta\mathbf{U}^k$, et l'incrément ajouté par la nouvelle itération est noté $\boldsymbol{\delta}^{k+1}$. On a donc en principe : $\delta\mathbf{U}^{k+1} = \delta\mathbf{U}^k + \boldsymbol{\delta}^{k+1}$, et $\mathbf{U} = \mathbf{U}^- + \delta\mathbf{U}^k + \boldsymbol{\delta}^{k+1}$. On part de $\delta\mathbf{U}^0 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}$, qui est l'incrément obtenu sans traiter le contact ($\delta\mathbf{U}^0 = \Delta\mathbf{U}_i^0$ donné par la prédiction, ou $\delta\mathbf{U}^0 = \delta\mathbf{U}_i^n$ donné par la $n^{\text{ième}}$ itération de Newton) et on effectue les itérations de contraintes actives jusqu'à convergence propre de cet algorithme. La convergence au sens des contraintes actives est obtenue lorsqu'aucune liaison ne viole la condition cinématique 2 du [§3.4] et lorsque les multiplicateurs de Lagrange associés sont tous positifs.

En élasticité, à la fin des itérations de contraintes actives, on a un résultat convergé au sens de Newton. En plasticité ou si on réactualise la géométrie, ce n'est pas le cas car plusieurs itérations de Newton sont nécessaires pour obtenir l'équilibre. Après chaque itération de Newton, on lance l'algorithme de contraintes actives pour satisfaire les conditions de contact. Ainsi, en élasticité, on convergera nécessairement pour chaque pas en une itération si REAC_GEOM_INTE = 0 ou REAC_GEOM_INTE = 1 en itérations si REAC_GEOM_INTE = n, n > 1.

4.2.1 Résolution du système réduit aux liaisons actives

Au début de l'algorithme, on évalue le jeu courant $[\mathbf{d}_0]_j - [\mathbf{A}_k(\mathbf{u}^- + \delta\mathbf{u}^0)]_j$ pour toutes les liaisons j , en tenant compte du déplacement $\delta\mathbf{U}^0 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}$ estimé sans traiter le contact. On appelle active une liaison pour laquelle ce jeu courant est négatif, ce qui indique une interpénétration. On postule que pour les liaisons actives, le jeu effectif sera nul, et que donc l'inégalité $\mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{d}_0$ devient une égalité pour les liaisons actives.

Remarque :

On pourrait partir de l'ancien ensemble de liaisons actives obtenu à convergence de la passe précédente, mais si les couples de contact ont été réactualisés, les numéros de liaisons ne correspondent plus forcément. Cependant, dans les cas où ceci est licite, le nombre d'itérations de la méthode des contraintes actives peut en être diminué, comme c'est le cas avec le mot clé `LIAISON_UNIL_NO`.

Si on note \mathbf{A}_k la matrice de contact réduite aux liaisons actives à l'itération k (on ne garde que les lignes correspondant aux liaisons actives), on a :

$$\begin{cases} \mathbf{C}\delta\mathbf{U}^k + \mathbf{C}\delta^{k+1} + \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{F} \\ \mathbf{A}_k \mathbf{U}^- + \mathbf{A}_k \delta\mathbf{U}^k + \mathbf{A}_k \delta^{k+1} = \mathbf{D}_0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \delta^{k+1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} - \delta\mathbf{U}^k - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\mu} \\ -\mathbf{A}_k \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{D}_0 - \mathbf{A}_k \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{A}_k \mathbf{U}^- \end{cases}$$

soit, en tenant compte de $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} = \delta\mathbf{U}_0$:

$$\begin{cases} -\mathbf{A}_k \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{D}^- - \mathbf{A}_k \delta\mathbf{U}^0 \\ \delta^{k+1} = \delta\mathbf{U}^0 - \delta\mathbf{U}^k - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\mu} \end{cases}$$

avec $\mathbf{D}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^- \\ 0 \end{pmatrix}$, où $\mathbf{d}^- = \mathbf{d}_0 - \mathbf{A}_k \mathbf{u}^-$ est le jeu actualisé correspondant au champ de déplacement \mathbf{u}^- .

La première équation donne les valeurs des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$ associés aux relations de non pénétration pour les contraintes actives, et la seconde équation donne la valeur de l'incrément δ^{k+1} des inconnues pour la $k^{\text{ième}}$ itération de la méthode des contraintes actives.

4.2.2 Validité de l'ensemble de liaisons actives choisi

Soit la liaison numéro j (on désigne par $[\]_j$ la $j^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur, c'est-à-dire celle correspondant à la liaison j). Trois situations sont possibles :

- 1) le déplacement relatif compense le jeu initial : $[\mathbf{A}_k (\mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u}^k + \delta^{k+1})]_j = [\mathbf{d}_0]_j$
- 2) le déplacement relatif est inférieur au jeu initial : $[\mathbf{A}_k (\mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u}^k + \delta^{k+1})]_j < [\mathbf{d}_0]_j$
- 3) le déplacement relatif est supérieur au jeu initial : $[\mathbf{A}_k (\mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u}^k + \delta^{k+1})]_j > [\mathbf{d}_0]_j$

La situation (3) est interdite : elle correspond à une violation de la condition de non interpénétration. La situation (1) correspond à une liaison dite active, la situation (2) à une liaison non active.

Au début de la $k^{\text{ème}}$ itération de l'algorithme, on avait postulé un ensemble de liaisons actives. On a trouvé un incrément possible δ^{k+1} des inconnues sous ces hypothèses : on va maintenant vérifier que cet incrément est compatible avec les hypothèses. En pratique, cela consiste à vérifier :

- (i) que les liaisons supposées non actives ne violent pas la condition de non interpénétration (sinon on en active une) ;
- (ii) que les liaisons supposées actives sont associées à des multiplicateurs de contact μ positifs ou nuls (sinon on en désactive une)

Vérification (i) : (l'ensemble des liaisons actives est-il trop petit ?)

On va calculer pour toutes les liaisons supposées non actives la quantité :

$$\rho_j = \frac{[\mathbf{d}_0 - \mathbf{A}_k (\mathbf{u}^- + \delta \mathbf{u}^k)]_j}{[\mathbf{A}_k \delta^{k+1}]_j} = \frac{[\mathbf{d}^- - \mathbf{A}_k \delta \mathbf{u}^k]_j}{[\mathbf{A}_k \delta^{k+1}]_j}$$

- si $[\mathbf{A}_k \delta^{k+1}]_j$ est négatif, le jeu pour la liaison j va augmenter, et donc la liaison supposée non active reste dans cet état lorsqu'on écrit $\delta \mathbf{U}^{k+1} = \delta \mathbf{U}^k + \delta^{k+1}$,
- si $[\mathbf{A}_k \delta^{k+1}]_j$ est positif, ρ_j devrait être supérieur strictement à 1 pour une liaison non active (situation (b)). On examine donc $\bar{\rho} = \min_j \rho_j$ sur l'ensemble des liaisons j déclarées non actives. Si $\bar{\rho} < 1$, cela indique qu'une liaison au moins est violée (situation (3)) : on rajoute alors à la liste des liaisons actives le numéro de la liaison la plus violée, c'est-à-dire celle qui réalise le minimum de ρ_j , et on écrit $\delta \mathbf{U}^{k+1} = \delta \mathbf{U}^k + \bar{\rho} \delta^{k+1}$ (ça correspond à un jeu nul pour la liaison rajoutée). Dans ce cas on shunte la vérification (ii).

Remarque :

Si toutes les liaisons sont actives, la vérification (i) n'a pas lieu d'être. Dans ce cas, on pose $\bar{\rho} = 1$ et on passe directement à la vérification (ii).

Vérification (ii) : (l'ensemble des liaisons actives est-il trop grand ?)

On se place maintenant dans le cas où $\bar{\rho} \geq 1$: on prend $\delta \mathbf{U}^{k+1} = \delta \mathbf{U}^k + \delta \mathbf{U}^{k+1}$.

- si aucune liaison n'est active, la méthode a convergé vers un état sans contact,
- s'il y a des liaisons supposées actives :
 - si tous les multiplicateurs de Lagrange μ sont positifs ou nuls, on a également convergé vers un état avec contact effectif,
 - s'il existe des multiplicateurs de Lagrange μ négatifs, les liaisons correspondantes ne devraient pas être actives : on retire de l'ensemble des liaisons actives la liaison dont le multiplicateur négatif est le plus grand en valeur absolue.

Remarque :

On enlève et on rajoute les liaisons actives une par une (et non pas toutes celles qui contredisent les hypothèses) afin d'assurer la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'itérations, comme démontré dans [bib2] et [bib3]. Cependant, on pourrait prendre le risque de rajouter toutes les liaisons qui semblent actives d'un coup, ou de désactiver toutes les liaisons à multiplicateur négatif d'un coup, afin d'accélérer la convergence de la méthode (c'est ce qui est fait pour le traitement du frottement, cf. [R5.03.51]). Même si la convergence n'est pas théoriquement assurée, une telle variante semble marcher en pratique.

4.3 Redécoupage du pas de temps

Sur le plan théorique, la convergence de la méthode des contraintes actives est assurée en un nombre fini d'itérations. Dans la pratique, certains artefacts numériques peuvent rendre cette convergence délicate. Aussi une stratégie a-t-elle été mise au point pour assurer la robustesse de l'algorithme.

Lors de calculs de contact, notamment si les pas de charge effectués sont trop importants, des phénomènes indésirables peuvent apparaître :

- matrice de contact $\mathbf{A}_k \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_k^T$ singulière,
- oscillation de la méthode des contraintes actives : un noeud est détecté alternativement « collé » puis « décollé ».

Pour pallier ces difficultés, la stratégie suivante a été adoptée. Si :

- la matrice de contact $\mathbf{A}_k \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_k^T$ est singulière,
- le nombre d'itérations de contraintes actives est supérieur à une limite qui dépend du nombre de liaisons potentielles

Alors on redécoupe le pas de temps *i.e.* on revient au pas de charge précédent et au lieu d'essayer d'atteindre le niveau de chargement suivant en un pas comme on vient de le faire, on en fait plusieurs (Pour plus de précisions sur cette fonctionnalité de l'opérateur STAT_NON_LINE, voir la documentation [U4.51.03]).

Dans la pratique, cette fonctionnalité se montre très utile pour l'utilisateur.

5 Précautions d'utilisation

Un exemple d'utilisation et les conseils associés sont donnés dans [bib6].

Les principaux conseils ou mises en garde sont les suivants :

- vérifier que les normales aux surfaces de contact sont sortantes (se méfier notamment si on a utilisé des opérateurs de symétrisation dans le mailleur gibi),
- attention au contact en 3D quadratique si les mailles de bord sont des QUAD8 (éviter d'utiliser des HEXA20 pour mailler le volume ou bien raffiner "suffisamment") : utiliser de préférence des HEXA27, ou bien des PENTA15 dont les côtés TRIA6 sont les mailles en contact,
- supprimer, par des conditions aux limites de Dirichlet appropriées, les mouvements de corps rigide : il ne faut pas que la structure ne « tienne » que par le contact. En d'autres termes, cela veut dire qu'un calcul fait en élasticité avec la commande `MECA_STATIQUE` (sans traiter le contact donc) doit passer,
- en cas de structure « tenue » uniquement par le contact, on peut ajouter un ressort de faible rigidité pour la maintenir. Cette rigidité ne devra pas perturber le champ de déformations de la structure supposé nul (puisque il y a mouvement de corps rigide), mais empêcher un déplacement à l'infini. Dans la pratique, son choix s'avère délicat et nécessite un recalage préalable,
- utiliser le mot-clé `SANS_NOEUD` ou `SANS_GROUP_NO` pour exclure de la liste des futurs nœuds esclaves ceux qui sont soumis par ailleurs à des conditions aux limites de Dirichlet (`DDL_IMPO`, `FACE_IMPO`, `LIAISON_...`) dans la direction attendue du contact,
- le calcul des efforts de contact peut être effectué dans la commande `POST_RELEVE_T` en calculant la résultante des forces nodales sur le groupe de mailles représentant une des surfaces de contact,
- le contact et la recherche linéaire de `STAT_NON_LINE` ne font pas bon ménage ensemble lorsque l'on converge en plus d'une itération. Grosso modo, cela veut dire que l'on ne peut pas utiliser la recherche linéaire excepté pour des calculs élastiques sans réactualisation géométrique, ce qui est assez restreint.

6 Bibliographie

- [1] N. Tardieu, I. Vautier, E. Lorentz, « Algorithme non linéaire quasi-statique », Documentation de Référence du *Code_Aster* n° [R5.03.01].
- [2] G. Dumont, « La méthode des contraintes actives appliquées au contact unilatéral », Note interne EDF n° HI-75/93/016
- [3] G. Dumont, « Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement », Revue européenne des éléments finis, Vol. 4 n°1/1995, pp. 55-73
- [4] I. Vautier, « Quelques méthodes pour traiter les problèmes de contact unilatéral en présence de grands glissements », Note interne EDF n° HI-75/97/013
- [5] I. Vautier, « Évaluation des difficultés de modélisation du contact unilatéral pour des maillages 3D quadratiques », Compte-rendu interne EDF n° MMN/97/023
- [6] I. Vautier, « Exemple d'utilisation des fonctionnalités de contact en grands déplacements dans le *Code_Aster* », Note interne EDF n° HI-75/97/034/A