

Manuel de Référence
Fascicule R4.03 : Analyse de sensibilité
Document : R4.03.03

Calcul de sensibilité en mécanique

Résumé

Classiquement, les simulations numériques fournissent la réponse d'un système à une sollicitation. Il apparaît actuellement une évolution importante visant à fournir en plus de cette réponse la **tendance** de la réponse à une modification de paramètres d'entrée de la simulation (matériau, chargement, géométrie, ...). Ces **tendances** sont obtenues en calculant la dérivée de la réponse par rapport à des paramètres donnés.

L'objet de cette note est donc la détermination de la sensibilité des résultats d'un calcul de mécanique des solides à différentes données d'entrée par la méthode de différentiation directe. Ces données d'entrée sont les données matériau et les chargements. En outre seront détaillés les cas de calculs linéaires (opérateur MECA_STATIQUE) et non linéaires (opérateurs STAT_NON_LINE et DYNA_NON_LINE).

Table des matières

1 Introduction	3
2 Sensibilité aux données matériaux	4
2.1 Le problème direct	4
2.2 Le calcul dérivé	5
2.2.1 Préliminaires	5
2.2.2 Dérivation de l'équilibre	6
2.2.3 Calcul de la dérivée de la loi de comportement	7
2.2.3.1 Cas de l'élasticité linéaire	7
2.2.3.2 Cas de l'élastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire	7
2.2.3.3 Calcul de la dérivée du déplacement	10
2.2.3.4 Calcul de la dérivée des autres grandeurs	10
2.2.3.5 Synthèse	11
2.3 Implantation informatique	11
3 Sensibilité au chargement	12
3.1 Le problème direct : expression du chargement	12
3.2 Le problème dérivé	12
3.2.1 Dérivation de l'équilibre	12
3.2.2 Calcul de la dérivée de la loi de comportement	13
3.2.2.1 Cas de l'élasticité linéaire	13
3.2.2.2 Cas de l'élastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire	14
3.2.2.3 Calcul de la dérivée du déplacement	15
3.2.2.4 Calcul de la dérivée des autres grandeurs	15
3.2.2.5 Synthèse	16
3.3 Implantation informatique	17
4 Disponibilités au sein du <i>Code_Aster</i>	18
5 Références	18

1 Introduction

Classiquement, les simulations numériques fournissent la réponse d'un système à une sollicitation. Il apparaît actuellement une évolution importante visant à fournir en plus de cette réponse la **tendance** de la réponse à une modification de paramètres d'entrée de la simulation (matériau, chargement, géométrie, ...). Les applications possibles sont importantes :

- calculs probabilistes liés à l'existence d'une incertitude sur la valeur d'un paramètre,
- problèmes inverses, recalage, optimisation pour lesquels la connaissance de la dérivée d'un champ peut être capitale en terme d'efficacité,
- fiabilité des études (quel crédit apporter à une simulation où la réponse du système peut varier fortement suite à une petite variation d'un paramètre ?).

Ces **tendances** sont généralement obtenues en calculant la dérivée de la réponse, ce qui peut se faire de différentes manières : différences finies, différentiation directe ou méthode de l'état adjoint. Les différences finies sont à exclure de par leur faible précision et leur coût numérique important. La méthode de l'état adjoint, quoique performante et précise, nécessite des développements particuliers à chaque étude et elle ne sera pas retenue. Nous nous concentrerons donc ici sur la méthode de différentiation directe, performante, précise, générale et très adaptée aux calculs non linéaires.

L'objet de cette note est donc la détermination de la sensibilité des résultats d'un calcul de mécanique des solides à différentes données d'entrée par la méthode de différentiation directe. Ces données d'entrée seront les données matériau et les chargements.

En outre, le choix a été fait de réaliser notre raisonnement sur les équations du problème mécanique **discrétisé**. Ce choix nous semble important dans la mesure où il assure la cohérence du calcul dérivé par rapport au calcul direct. Nous insistons sur le fait que cette cohérence est indispensable à la précision des résultats obtenus.

Enfin, nous traiterons deux cas modèles dans le cadre du calcul de sensibilité de problèmes linéaires et non linéaires : l'élasticité linéaire et la plasticité de Von Mises à écrouissage isotrope linéaire. Le but de ces exemples est de bien expliciter la différence de nature des problèmes dérivés dans les deux cas précédents. Dans le cas linéaire, le problème dérivé est très **semblable** au problème direct dans la mesure où seul le second membre des équations est modifié. Dans le cas non linéaire, le problème dérivé est sensiblement **différent** du problème direct : le second membre mais aussi la loi de comportement sont modifiés. Néanmoins, dans ces deux cas, le problème dérivé conserve une propriété extrêmement intéressante dans la mesure où il consiste en une suite de problèmes **linéaires** dont les matrices ont déjà été calculées et factorisées (dans le cas de l'utilisation de solveurs directes).

2 Sensibilité aux données matériaux

2.1 Le problème direct

Nous nous plaçons dans cette partie dans le cadre de la résolution de calculs non-linéaires. Nous utilisons les notations de [bib1] et renvoyons à la lecture de ce document pour toute précision sur la technique de résolution abordée dans la suite.

Dans le *Code_Aster*, tout calcul statique non-linéaire est résolu incrémentalement. Il nécessite donc à chaque pas de charge $i \in \{1, I\}$ la résolution du système d'équation non-linéaire :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{u}_i, t_i) + \mathbf{B}^t \lambda_i &= \mathbf{L}_i \\ \mathbf{B} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_i^d \end{cases} \quad \text{éq 2.1-1}$$

avec

$$(\mathbf{R}(\mathbf{u}_i, t_i))_k = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_k) d\Omega \quad \text{éq 2.1-2}$$

- \mathbf{w}_k est la fonction de forme du $k^{\text{ième}}$ degré de liberté de la structure modélisée,
- $(\mathbf{R}(\mathbf{u}_i, t_i))$ est le vecteur des forces nodales.

La résolution de ce système se fait par la méthode de Newton-Raphson :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i^n \delta \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{B}^t \delta \lambda_i^{n+1} &= \mathbf{L}_i - \mathbf{R}(\mathbf{u}_i^n, t_i) + \mathbf{B}^t \lambda_i^n \\ \mathbf{B} \delta \lambda_i^{n+1} &= 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.1-3}$$

où $\mathbf{K}_i^n = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{(\mathbf{u}_i^n, t_i)}$ est la matrice tangente au pas de charge i et à l'itération de Newton n .

La solution est donc donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_{i-1} + \sum_{n=0}^N \delta \mathbf{u}_i^n \\ \lambda_i &= \lambda_{i-1} + \sum_{n=0}^N \delta \lambda_i^n \end{cases}$$

avec N , le nombre d'itérations de Newton qui a été nécessaire pour atteindre la convergence.

2.2 Le calcul dérivé

2.2.1 Préliminaires

Dans le cadre du calcul de sensibilité, il est nécessaire d'insister sur les dépendances d'une grandeur par rapport aux autres. Nous allons ainsi expliciter que les résultats du calcul précédent dépendent d'un paramètre Φ donné (module d'Young, limite d'élasticité, masse volumique, ...) et cela de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\Phi), \lambda_i = \lambda_i(\Phi).$$

Mais cela n'est pas suffisant. Aussi nous plaçons-nous dans le cadre d'un calcul incrémental avec loi de comportement non linéaire élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire [bib2]. Si l'on considère les inter-dépendances des paramètres à un niveau algorithmique, on peut écrire [bib3] :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1}(\Phi), p_{i-1}(\Phi), \Delta \mathbf{u}(\Phi))$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_{i-1}(\Phi) + \Delta \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1}(\Phi), p_{i-1}(\Phi), \Delta \mathbf{u}(\Phi), \Phi)$$

$$p_i = p_{i-1}(\Phi) + \Delta p(\boldsymbol{\sigma}_{i-1}(\Phi), p_{i-1}(\Phi), \Delta \mathbf{u}(\Phi), \Phi)$$

Où $\Delta \mathbf{u}$ est l'incrément de déplacement à convergence au pas de charge i .

Précisons le sens des notations que nous utiliserons pour les dérivées :

- $\frac{\partial X}{\partial Y}$ désigne la dérivée partielle **explicite** de X par rapport à Y ,
- $X_{,Y}$ désigne la variation **totale** de X par rapport à Y .

2.2.2 Dérivation de l'équilibre

Compte tenu des remarques précédentes, exprimons la variation totale de [éq 2.1-1] par rapport à Φ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{,\Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{i-1}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{i-1,\Phi} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{i-1}} \cdot p_{i-1,\Phi} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{i,\Phi} = 0 \\ \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{,\Phi} = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.2.2-1}$$

Remarquons qu'ici $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Phi} = 0$: \mathbf{R} ne dépend pas explicitement de Φ mais implicitement comme nous le verrons en détail dans la suite.

Soit :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i^N \Delta \mathbf{u}_{,\Phi} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{i,\Phi} = -\mathbf{R}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} \\ \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{,\Phi} = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.2.2-2}$$

Où

- \mathbf{K}_i^N est la dernière matrice tangente utilisée pour atteindre la convergence dans les itérations de Newton,
- $\mathbf{R}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)}$ est la variation totale de \mathbf{R} , sans tenir compte de la dépendance de $\Delta \mathbf{u}$ par rapport à Φ .

Le problème réside maintenant dans le calcul de $\mathbf{R}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)}$.

Remarque :

Dans [éq 2.2.2-2], on a utilisé le fait que $\mathbf{K}_i^N = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_i, t_i)}{\partial \Delta \mathbf{u}}$ alors que dans [éq 2.1-3] on l'a défini par $\mathbf{K}_i^N = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_i, t_i)}{\partial \mathbf{u}_i^N}$. On a bien équivalence de ces deux définitions dans la mesure où $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}$ et que \mathbf{R} dépend effectivement de $\Delta \mathbf{u}$ (et aussi bien sûr de $\boldsymbol{\sigma}_{i-1}$ et p_{i-1}).

Remarque :

Si on dérive par rapport à Φ directement [éq 2.1-3], on trouve $\mathbf{K}^n = \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \Phi} + \mathbf{B}^t \boldsymbol{\lambda}_{,\Phi} = -\mathbf{R}_{,\Phi / \Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u} / \Phi} - \mathbf{K}^n_{,\Phi} \delta \mathbf{u}^{n+1}$. Ce qui est la même chose à convergence et fait apparaître que l'erreur sur $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Phi}$ dépend de $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_{,\Phi}$.

2.2.3 Calcul de la dérivée de la loi de comportement

Dans la suite, par souci de clarté, nous abandonnerons les indices $i = 1$.

D'après [éq 2.1-2], on peut réécrire $\mathbf{R}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)}$ sous la forme :

$$\mathbf{R}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_{,\Phi} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_k) d\Omega \quad \text{éq 2.2.3-1}$$

On doit donc calculer $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)}$. Pour ce faire, nous allons utiliser les expressions qui interviennent dans l'intégration numérique de la loi de comportement.

2.2.3.1 Cas de l'élasticité linéaire

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la loi de comportement s'exprime par :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}) \\ \text{Tr}(\Delta \boldsymbol{\sigma}) = 3K \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \end{cases}$$

ou bien :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}) + K \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{Id} \quad \text{éq 2.2.3.1-1}$$

où \mathbf{Id} est le tenseur identité d'ordre 2.

Alors, en calculant la variation totale de [éq 2.2.3.1-1] par rapport à Φ , on obtient :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\Phi} = 2\mu_{,\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}) + K_{,\Phi} \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{Id} + 2\mu \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}_{,\Phi}) + K \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_{,\Phi})) \cdot \mathbf{Id} \quad \text{éq 2.2.3.1-2}$$

Soit :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} = 2\mu_{,\Phi} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}) + K_{,\Phi} \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{Id}$$

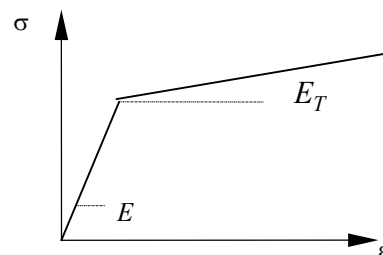
2.2.3.2 Cas de l'élastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire

La loi de comportement élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) - \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \Delta p \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma})_{eq}} \\ (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma})_{eq} \leq R' \cdot (p + \Delta p) \end{cases}$$

où \mathbf{S} est le tenseur des souplesses élastiques et R' est la pente d'écrouissage définie par :

$$R' = \frac{E \cdot E_T}{E - E_T} \quad \text{où}$$



En termes numériques, cette loi de comportement est intégrée à l'aide d'un algorithme de retour radial : on fait une prédiction élastique (notée σ^e) que l'on corrige si le seuil est violé. Avec les notations de [bib4], on écrit donc :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\sigma} &= 2\mu \cdot \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) - 3\mu \cdot \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \tilde{\sigma}^e \\ Tr(\Delta \sigma) &= 3K \cdot Tr(\varepsilon(\Delta \mathbf{u})) \\ \Delta p &= \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{R' + 3\mu} \end{cases} \quad \text{éq 2.2.3.2-1}$$

Nous allons distinguer deux cas.

1^{er} cas : $\Delta p = 0$

Ce qui revient à dire que lors du présent pas de charge, le point de Gauss considéré n'a pas vu d'accroissement de sa plastification. On se retrouve alors dans le cas de l'élasticité linéaire :

$$\Delta \sigma_{,\Phi} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} = 2\mu_{,\Phi} \cdot \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) + K_{,\Phi} \cdot Tr(\varepsilon(\Delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{Id}$$

2^{ème} cas : $\Delta p > 0$

Compte tenu des dépendances entre variables dans [éq 2.2.3.2-1], on peut écrire :

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{,\Phi} &= \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Phi} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\Phi} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial p} \cdot p_{,\Phi} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \varepsilon(\Delta \mathbf{u})} \cdot \varepsilon(\Delta \mathbf{u})_{,\Phi} \\ \Delta p_{,\Phi} &= \frac{\partial \Delta p}{\partial \Phi} + \frac{\partial \Delta p}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\Phi} + \frac{\partial \Delta p}{\partial p} \cdot p_{,\Phi} + \frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon(\Delta \mathbf{u})} \cdot \varepsilon(\Delta \mathbf{u})_{,\Phi} \end{cases} \quad \text{éq 2.2.3.2-2}$$

En outre, en accord avec l'intégration algorithmique de la loi, nous allons séparer parties déviatorique et hydrostatique.

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{,\Phi} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} &= \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Phi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \Phi} \cdot \mathbf{Id} \\ &+ \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\Phi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{Id} \cdot \sigma_{,\Phi} \\ &+ \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial p} \cdot p_{,\Phi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial p} \cdot \mathbf{Id} \cdot p_{,\Phi} \\ \Delta p_{,\Phi} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} &= \frac{\partial \Delta p}{\partial \Phi} + \frac{\partial \Delta p}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\Phi} + \frac{\partial \Delta p}{\partial p} \cdot p_{,\Phi} \end{cases}$$

Et donc, on calcule :

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Phi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Phi} = & \frac{\partial 2\mu}{\partial \Phi} \cdot \tilde{\epsilon}(\Delta \mathbf{u}) - \frac{\partial 3\mu}{\partial \Phi} \cdot \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \tilde{\sigma}^e - 3\mu \cdot \frac{\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Phi} - \frac{\partial \sigma^y}{\partial \Phi} - \frac{\partial R'}{\partial \Phi} \cdot p}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \tilde{\sigma}^e \\ & + 3\mu \cdot \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{((R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e)^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial R'}{\partial \Phi} + \frac{\partial 3\mu}{\partial \Phi} \right) \cdot \sigma_{eq}^e + (R' + 3\mu) \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Phi} \right) \cdot \tilde{\sigma}^e \\ & - 3\mu \cdot \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}^e}{\partial \Phi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \Phi} = \frac{\partial 3K}{\partial \Phi} \cdot Tr(\epsilon(\Delta \mathbf{u}))$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{-3\mu}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{\sigma_{eq}^e} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \sigma} \otimes \tilde{\sigma}^e - 3\mu \cdot \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \mathbf{J}$$

où \mathbf{J} est l'opérateur déviatorique défini par : $\mathbf{J} : \sigma = \tilde{\sigma}$

$$\frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial p} = \frac{3\mu \cdot R'}{(R' + 3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \tilde{\sigma}^e$$

$$\frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial p} = 0$$

$$\Delta p_{,\Phi}$$

On utilise le fait que : $\sigma_{eq} = R' \cdot (p + \Delta p) + \sigma^y$

$$p_{,\Phi} + \Delta p_{,\Phi} = \frac{1}{R'} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{(\tilde{\sigma}_{,\Phi} + \Delta \tilde{\sigma}_{,\Phi}) : (\tilde{\sigma} + \Delta \tilde{\sigma})}{\sigma_{eq}} - \frac{\partial R'}{\partial \Phi} \cdot (p + \Delta p) - \frac{\partial \sigma^y}{\partial \Phi} \right)$$

Remarque :

Dans ces calculs ont été ou doivent être utilisés les résultats suivants :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^e}{\partial \Phi} = \frac{\partial 2\mu}{\partial \Phi} \cdot \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})$$

Tenseur d'ordre 2

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Phi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(\frac{\partial 2\mu}{\partial \Phi} \cdot \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) : (\tilde{\sigma} + 2\mu \cdot \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}))}{\sigma_{eq}^e}$$

Scalaire

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}^e}{\sigma_{eq}^e}$$

Tenseur d'ordre 2

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^e}{\partial \sigma} = \mathbf{J}$$

Tenseur d'ordre 4

2.2.3.3 Calcul de la dérivée du déplacement

Une fois $\Delta \sigma_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)}$ calculé, on peut constituer le second membre $\mathbf{R}_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)}$ en utilisant [éq 2.2.3-1]. On résout alors le système [éq 2.2.2-2] et l'on obtient l'incrément de déplacement dérivé par rapport à Φ .

2.2.3.4 Calcul de la dérivée des autres grandeurs

Maintenant que l'on dispose de $\Delta \mathbf{u}_{,\Phi}$, on doit calculer la dérivée des autres grandeurs. On sépare encore deux cas :

Elasticité linéaire

D'après [éq 2.2.3.2-1], on calcule comme suit la dérivée de l'incrément de contrainte :

$$\Delta \sigma_{,\Phi} = \Delta \sigma_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} + 2\mu \cdot \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_{,\Phi}) + K \cdot \text{Tr}(\varepsilon(\Delta \mathbf{u}_{,\Phi})) \cdot \mathbf{Id}$$

L'incrément de déformation plastique cumulée, quant à lui, ne voit pas d'évolution :

$$\Delta p_{,\Phi} = 0$$

Elastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire

Si $\Delta p = 0$, on retrouve le cas précédent.

Sinon, on obtient d'après [éq 2.2.3.2-2] :

$$\Delta \sigma_{,\Phi} = \Delta \sigma_{,\Phi} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\Phi)} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \varepsilon(\Delta \mathbf{u})} : \varepsilon(\Delta \mathbf{u}_{,\Phi})$$

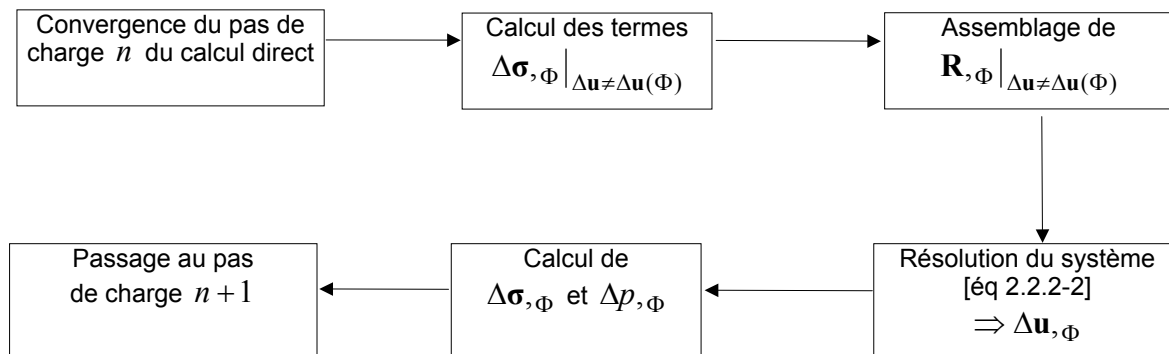
Et pour la déformation plastique cumulée :

$$p_{,\Phi} + \Delta p_{,\Phi} = \frac{1}{R'} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{(\tilde{\sigma}_{,\Phi} + \Delta \tilde{\sigma}_{,\Phi}) : (\tilde{\sigma} + \Delta \tilde{\sigma})}{\sigma_{eq}} - \frac{\partial R'}{\partial \Phi} \cdot (p + \Delta p) - \frac{\partial \sigma^y}{\partial \Phi} \right)$$

Une fois que tous ces calculs sont terminés, on réactualise toutes les grandeurs dérivées et on passe au pas de charge suivant.

2.2.3.5 Synthèse

Pour résumer les paragraphes précédents, on représente les différentes étapes du calcul par le diagramme suivant :



2.3 Implantation informatique

Pour chaque élément fini du *Code_Aster*, il est nécessaire de créer deux nouvelles options de calculs pour permettre les calculs ci-dessus :

- pour le calcul de $\Delta\sigma_{,\Phi} |_{\Delta u \neq \Delta u(\Phi)}$,
- pour le calcul de $\Delta\sigma_{,\Phi}$ et $\Delta p_{,\Phi}$.

Le calcul dérivé est piloté par une routine qui lance les calculs élémentaires de $\Delta\sigma_{,\Phi} |_{\Delta u \neq \Delta u(\Phi)}$, réalise l'assemblage de ces termes pour créer le second membre, résout le système linéaire [éq 2.2.2-2], puis lance le calcul de $\Delta\sigma_{,\Phi}$ et $\Delta p_{,\Phi}$. Cette routine est appelée par OP0070 après que la convergence a été détectée.

Remarque :

Pour l'utilisateur, l'enchaînement des différents calculs sera transparent. La définition des variables sensibles se fera suivant le schéma [bib5] :

```

...
v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur du paramètre > )
mate = DEFI_MATERIAU ( VMIS_ISOT_LINE = _F ( SY = v ), ...)
chmat = AFFE_MATERIAU ( AFFE = _F ( GROUP_MA = < groupe(s) > ,
                                MATER = mate ))
...
resu = STAT_NON_LINE ( CHAM_MATER = chmat ,
                      SENSIBILITE = ( v ),
                      ...)
...

```

3 Sensibilité au chargement

3.1 Le problème direct : expression du chargement

Jusqu'à maintenant nous avons exprimé le problème direct sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{u}_i, t_i) + \mathbf{B}^t \lambda_i &= \mathbf{L}_i \\ \mathbf{B} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_i^d \end{cases} \quad \text{éq 3.1-1}$$

Les chargements sont rassemblés au second membre et comprennent les forces imposées \mathbf{L}_i et les déplacements imposés \mathbf{u}_i^d .

Supposons que le chargement en force imposée \mathbf{L}_i dépende d'un paramètre scalaire α de la manière suivante :

$$\mathbf{L}_i(\alpha) = \mathbf{L}_i^1 + \mathbf{L}_i^2(\alpha) \quad \text{éq 3.1-2}$$

Où

- \mathbf{L}_i^1 est un vecteur indépendant de α ,
- \mathbf{L}_i^2 dépend linéairement de α .

On désire calculer la sensibilité des résultats du calcul direct à une variation du paramètre α .

3.2 Le problème dérivé

3.2.1 Dérivation de l'équilibre

Comme dans le chapitre précédent, en tenant compte des dépendances entre les différents champs, on dérive l'équilibre [éq 3.1-1] par rapport α :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{,\alpha} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma_{i-1}} \cdot \sigma_{i-1,\alpha} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p_{i-1}} \cdot p_{i-1,\alpha} + \mathbf{B}'^t \lambda_{i,\alpha} &= \mathbf{L}_i^2(1) \\ \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{,\alpha} &= -\mathbf{B} \mathbf{u}_{i-1,\alpha} \end{cases} \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

On a utilisé le fait que \mathbf{L}_i^2 dépend linéairement de α .

Soit :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i^N \Delta \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{B}'^t \lambda_{i,\alpha} &= \mathbf{L}_i^2(1) - \mathbf{R}_{,\alpha} \Big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)} \\ \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{,\alpha} &= -\mathbf{B} \mathbf{u}_{i-1,\alpha} \end{cases}$$

Où

- \mathbf{K}_i^N est la dernière matrice tangente utilisée pour atteindre la convergence dans les itérations de Newton,
- $\mathbf{R}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)}$ est la variation totale de \mathbf{R} , sans tenir compte de la dépendance de $\Delta \mathbf{u}$ par rapport à α .

Le problème réside comme précédemment dans le calcul de $\mathbf{R}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)}$.

Remarque :

Si on cherche à calculer la sensibilité par rapport au chargement de Dirichlet, le système à résoudre devient :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i^N \Delta \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{B}' \boldsymbol{\lambda}_{i,\alpha} &= -\mathbf{R}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)} \\ \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{,\alpha} &= \mathbf{u}_i^{2^d}(1) - \mathbf{B} \mathbf{u}_{i-1,\alpha} \end{cases}$$

Où $\mathbf{u}_i^{2^d}$ est la partie du chargement de Dirichlet qui dépend linéairement de α .

3.2.2 Calcul de la dérivée de la loi de comportement

D'après [éq 2.1-2], on peut réécrire $\mathbf{R}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)}$ sous la forme :

$$\mathbf{R}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_{,\alpha} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_k) d\Omega \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

Pour ce faire, nous allons utiliser les expressions qui interviennent dans l'intégration numérique de la loi de comportement pour calculer $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)}$.

3.2.2.1 Cas de l'élasticité linéaire

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la loi de comportement s'exprime par :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}) + K \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{Id} \quad \text{éq 3.2.2.1-1}$$

où \mathbf{Id} est le tenseur identité d'ordre 2.

Alors, en calculant la variation totale de [éq 3.2.2.1-1] par rapport à α , on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\alpha} &= 2\mu_{,\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}) + K_{,\alpha} \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \cdot \mathbf{Id} + 2\mu \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}_{,\alpha}) + K \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_{,\alpha})) \cdot \mathbf{Id} \\ &= 0. \quad \quad \quad + 0. \quad \quad \quad + 2\mu \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta \mathbf{u}_{,\alpha}) + K \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_{,\alpha})) \cdot \mathbf{Id} \end{aligned} \quad \text{éq 3.2.2.1-2}$$

Soit :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{,\alpha}|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)} = 0.$$

3.2.2.2 Cas de l'élastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire

Comme précédemment, nous allons distinguer deux cas.

1^{er} cas : $\Delta p = 0$

Ce qui revient à dire que lors du présent pas de charge, le point de Gauss considéré n'a pas vu d'accroissement de sa plastification. On se retrouve alors dans le cas de l'élasticité linéaire :

$$\Delta \sigma_{,\alpha} \big|_{\Delta u \neq \Delta u(\alpha)} = 0.$$

2^{ème} cas : $\Delta p > 0$

Compte tenu des dépendances entre variables, on peut écrire :

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{,\alpha} = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\alpha} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial p} \cdot p_{,\alpha} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \varepsilon(\Delta u)} \cdot \varepsilon(\Delta u)_{,\alpha} \\ \Delta p_{,\alpha} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta p}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\alpha} + \frac{\partial \Delta p}{\partial p} \cdot p_{,\alpha} + \frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon(\Delta u)} \cdot \varepsilon(\Delta u)_{,\alpha} \end{cases}$$

En outre, en accord avec l'intégration algorithmique de la loi, nous allons séparer parties déviatorique et hydrostatique.

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{,\alpha} \big|_{\Delta u \neq \Delta u(\alpha)} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \alpha} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \alpha} \cdot Id \\ + \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \sigma} \cdot Id \cdot \sigma_{,\alpha} \\ + \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial p} \cdot p_{,\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial p} \cdot Id \cdot p_{,\alpha} \\ \Delta p_{,\alpha} \big|_{\Delta u \neq \Delta u(\alpha)} = \frac{\partial \Delta p}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta p}{\partial \sigma} \cdot \sigma_{,\alpha} + \frac{\partial \Delta p}{\partial p} \cdot p_{,\alpha} \end{cases}$$

Et donc, on calcule :

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \alpha}}$$

Dans la mesure où l'on n'a pas de dépendance explicite de $\Delta \sigma$ par rapport à α , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \alpha} &= 0. \\ \frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \sigma}}$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{-3\mu}{(R'+3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{\sigma_{eq}^e} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \sigma} \otimes \tilde{\sigma}^e - 3\mu \cdot \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma^y - R' \cdot p}{(R'+3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \mathbf{J}$$

où \mathbf{J} est l'opérateur déviatorique.

$$\frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial \sigma} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial p}}$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial p} = \frac{3\mu \cdot R'}{(R'+3\mu) \cdot \sigma_{eq}^e} \cdot \tilde{\sigma}^e$$

$$\frac{\partial Tr(\Delta \sigma)}{\partial p} = 0$$

$$\boxed{\Delta p, \alpha}$$

On utilise le fait que : $\sigma_{eq} = R' \cdot (p + \Delta p) + \sigma^y$

$$p, \alpha + \Delta p, \alpha = \frac{1}{R'} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\tilde{\sigma}, \alpha + \Delta \tilde{\sigma}, \alpha) : (\tilde{\sigma} + \Delta \tilde{\sigma})}{\sigma_{eq}}$$

3.2.2.3 Calcul de la dérivée du déplacement

Une fois $\Delta \sigma, \alpha \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)}$ calculé, on peut constituer le second membre $\mathbf{R}, \alpha \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)}$. On résout alors le système [éq 3.2.1-1] et l'on obtient l'incrément de déplacement dérivé par rapport à α .

3.2.2.4 Calcul de la dérivée des autres grandeurs

Maintenant que l'on dispose de $\Delta \mathbf{u}, \alpha$, on doit calculer la dérivée des autres grandeurs. On sépare encore deux cas :

Elasticité linéaire

D'après [éq 3.2.2.1-1], on calcule comme suit la dérivée de l'incrément de contrainte :

$$\Delta \sigma, \alpha = 0. + 2\mu \cdot \tilde{\epsilon}(\Delta \mathbf{u}, \alpha) + K \cdot Tr(\epsilon(\Delta \mathbf{u}, \alpha)) \cdot \mathbf{Id}$$

L'incrément de déformation plastique cumulée, quant à lui, ne voit pas d'évolution :

$$\Delta p_{,\alpha} = 0$$

Elastoplasticité à écrouissage isotrope linéaire

Si $\Delta p = 0$, on retrouve le cas précédent.

Sinon, on obtient :

$$\Delta \sigma_{,\alpha} = \Delta \sigma_{,\alpha} \big|_{\Delta \mathbf{u} \neq \Delta \mathbf{u}(\alpha)} + \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \varepsilon(\Delta \mathbf{u})} : \varepsilon(\Delta \mathbf{u}_{,\alpha})$$

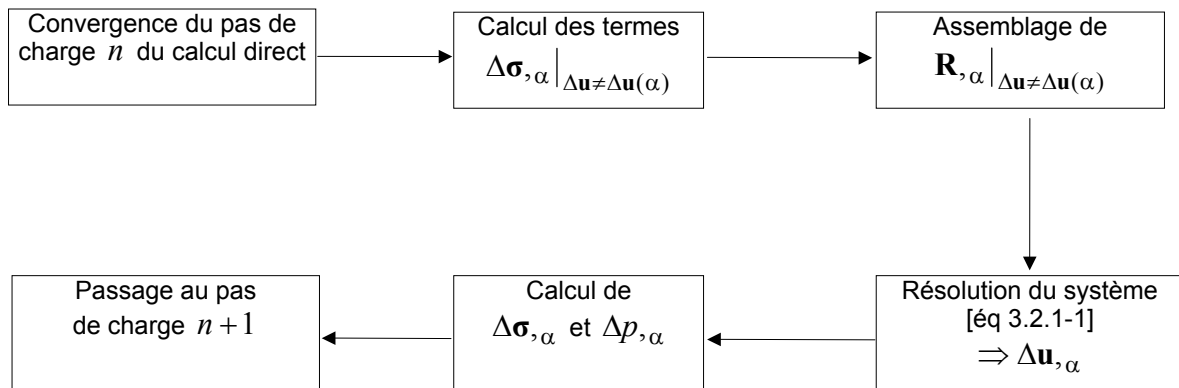
Et pour la déformation plastique cumulée :

$$p_{,\alpha} + \Delta p_{,\alpha} = \frac{1}{R'} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(\tilde{\sigma}_{,\alpha} + \Delta \tilde{\sigma}_{,\alpha}) : (\tilde{\sigma} + \Delta \tilde{\sigma})}{\sigma_{eq}}$$

Une fois que tous ces calculs sont terminés, on réactualise toutes les grandeurs dérivées et on passe au pas de charge suivant.

3.2.2.5 Synthèse

Pour résumer les paragraphes précédents, on représente les différentes étapes du calcul par le diagramme suivant :



3.3 Implantation informatique

L'implantation informatique est en tout point semblable à la précédente dans la mesure où l'on ajoute les deux options :

- pour le calcul de $\Delta\sigma_{,\alpha}|_{\Delta u \neq \Delta u(\alpha)}$,
- pour le calcul de $\Delta\sigma_{,\alpha}$ et $\Delta p_{,\alpha}$.

Remarquons que l'organisation du calcul des chargements (où toutes les contributions sont sommées dans un seul vecteur) oblige à la réévaluation de la force par rapport à laquelle on calcule les sensibilités.

Remarque :

La définition des variables sensibles se fera comme précédemment :

```
...  
v = DEFI_PARA_SENSI ( VALE = < valeur du paramètre > )  
force = AFFE_CHAR_MECA ( PRES_REP=_F( GROUP_MA=< groupe(s) > ,  
                                     PRES= v ), ...)  
...  
resu = STAT_NON_LINE ( EXCIT = force ,  
                      SENSIBILITE = ( v ),  
                      ... )  
...
```

4 Disponibilités au sein du Code_Aster

Le tableau suivant récapitule les dérivées disponibles dans *Code_Aster*. Il est mis à jour au fur et à mesure des développements des dérivés.

	Mécanique linéaire (opérateur MECA_STATIQUE)	Mécanique non linéaire (opérateurs STAT_NON_LINE et DYNA_NON_LINE)
Sensibilité aux données matériaux en élasticité linéaire isotrope	Tous les éléments milieux continus	Non
Sensibilité aux données matériaux en élasticité linéaire orthotrope	Tous les éléments milieux continus	Non
Sensibilité aux données matériaux en élasticité linéaire isotrope transverse	Tous les éléments milieux continus	Non
Sensibilité aux chargements	<ul style="list-style-type: none"> • forces nodales • force répartie volumique en 3D • force répartie surfacique en 3D • force répartie linéique en 3D • force répartie surfacique en 2D • force répartie linéique en 2D • force répartie linéique en 1D • force répartie pour les coques "2D" • force répartie pour les coques "3D" • pression répartie <p>Sans restriction d'éléments finis.</p>	Non

5 Références

- [1] Algorithme non linéaire quasi-statique, Documentation de Référence du *Code_Aster* [R5.03.01]
- [2] Tangent Operators and Design Sensitivity Formulations for Transient Nonlinear Coupled Problems with Applications to Elastoplasticity, P. Michaleris et al., Int. J. Num. Meth. Eng. 1994
- [3] Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics, M.Kleiber et al., Wiley 1997
- [4] Intégration Numérique des Relations de Comportement Elastoplastique, Documentation de Référence du *Code_Aster* [R5.03.02]
- [5] Impact des calculs d'incertitudes sur l'architecture d'Aster, G.Nicolas, J.Pellet, Note HI-72/01/009/A