

Manuel de Référence**Fascicule R7.01 : Modélisations pour le Génie Civil et les géomatériaux
Document R7.01.08**

Modèle d'endommagement de Mazars

Résumé :

Cette documentation présente le modèle de comportement de Mazars qui permet de décrire le comportement élastique-endommageable du béton. Ce modèle est 3D, isotrope et s'appuie sur un critère d'endommagement écrit en déformation et décrivant la dissymétrie traction-compression. Il ne prend pas en compte les éventuelles déformations plastiques ou effets visqueux qui peuvent être observés au cours des déformations d'un béton.

Deux versions du modèles sont implantées : la version locale (avec risque de dépendance au maillage) et la version non-locale où l'endommagement est contrôlé par une déformation non-locale. Il est également possible de prendre en compte la dépendance des paramètres de la loi avec la température, l'hydratation et le séchage.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Une loi de comportement élasto-endommageable.....	3
1.2	Limites de l'approche locale et méthodes de régularisation	3
1.3	Couplage avec la thermique	4
1.4	Loi de Mazars en présence d'un champ de séchage ou d'hydratation.....	4
2	Description du modèle	5
2.1	Le modèle de Mazars	5
2.2	Exemple en 1D	6
3	Identification	8
4	Résolution numérique	10
4.1	Evaluation de l'endommagement	10
4.2	Calcul de la contrainte	10
4.3	Calcul de la matrice tangente	10
4.4	Variables internes stockées.....	11
4.5	Modélisations compatibles avec la loi de MAZARS	11
5	Bibliographie	12

1 Introduction

1.1 Une loi de comportement élasto-endommageable

Le modèle de comportement de MAZARS ([bib1]) est un modèle simple, réputé robuste, basé sur la mécanique de l'endommagement [bib2], qui permet de décrire la diminution de la rigidité du matériau sous l'effet de la création de micro-fissures dans le béton. Il s'appuie sur une seule variable interne scalaire D , décrivant l'endommagement de façon isotrope, mais distinguant malgré tout l'endommagement de traction et l'endommagement de compression.

Contrairement au modèle ENDO_ISOT_BETON, ce modèle ne permet pas de traduire le phénomène de refermeture des fissures (restauration de rigidité). Par ailleurs, le modèle de Mazars ne prend pas en compte les éventuelles déformations plastiques ou effets visqueux qui peuvent être observés au cours des déformations d'un béton.

1.2 Limites de l'approche locale et méthodes de régularisation

Comme toutes les lois adoucissantes, le modèle de Mazars pose des difficultés liées au phénomène de localisation des déformations.

Physiquement ([bib3]), l'hétérogénéité de la microstructure du béton induit des interactions à distance entre les fissures formées. Ainsi, les déformations se localisent dans une bande mince, appelée bande de localisation, pour former les macrofissures. L'état des contraintes en un point matériel ne peut plus être uniquement décrit par les caractéristiques au point mais doit aussi prendre en considération son environnement. Dans le cas du modèle local, aucune indication n'est incluse concernant l'échelle de la fissuration. Par conséquent, aucune information n'est donnée sur la largeur de la bande de localisation qui devient alors nulle. Ceci aboutit à un comportement mécanique avec rupture sans dissipation d'énergie, physiquement inacceptable.

Mathématiquement ([bib4]), la localisation rend le problème à résoudre mal posé car l'adoucissement cause une perte d'ellipticité des équations différentielles qui décrivent le processus de déformations. Les solutions numériques ne convergent pas vers des solutions physiquement acceptables malgré les raffinements de maillage.

Numériquement, on observe une dépendance de la solution au maillage fort préjudiciable (cf. [R5.04.02]).

Une méthode de régularisation devient donc nécessaire. Plusieurs sont possibles. Le choix qui a été fait ici est de reprendre l'un des développements déjà faits pour les modèles ENDO_FRAGILE et ENDO_ISOT_BETON, en utilisant un tenseur de déformation non locale qui vérifie l'équation caractéristique [R5.04.02] :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - c \nabla^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

où le scalaire c a la dimension d'une longueur au carrée.

Remarque :

Signalons que ce modèle non-local ne correspond pas à la version initialement proposée par J. Mazars et G. Pijaudier-Cabot [bib5] et qui est notamment implantée dans Castem 2000. La délocalisation est obtenue en utilisant comme déformation équivalente, la moyenne de la déformation équivalente locale sur un volume V :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \frac{1}{V_r(x)} \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}(x-s) \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}(s) ds$$

où Ω est le volume de la structure

$$V_r(x) \text{ est le volume représentatif au point } x : V_r = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}(x-s) ds$$

$$\psi(x-s) \text{ est une fonction de pondération : } \psi(x-s) = \exp\left(-\frac{4\|x-s\|^2}{l_c^2}\right)$$

l_c est la longueur interne du milieu non-continu (traditionnellement estimée à trois fois la taille du plus gros agrégat).

Des tests numériques ont permis de relier les 2 paramètres de délocalisation l_c et c dans le cas du modèle de Mazars. La relation suivante a été obtenue :

$$4\sqrt{c} \equiv l_c$$

Le modèle de Mazars est donc disponible dans *Code_Aster* sous 2 versions :

- la version locale du modèle pour laquelle la dépendance de la solution au maillage est observable comme pour tous les modèles adoucissants.
- une version non locale qui utilise un tenseur de déformation non locale.

1.3 Couplage avec la thermique

Pour certaines études, il peut être intéressant de pouvoir prendre en compte la modification des paramètres matériaux sous l'effet de la température. Ceci est possible dans *Aster* (MAZARS_FO combiné ou non avec ELAS_FO). Les hypothèses faites pour le couplage avec la thermique sont les suivantes :

- la dilatation thermique est supposée linéaire soit $\varepsilon^{th} = \alpha(T - T_{ref})\mathbf{I}_d$ avec α = constante ou fonction de la température,
- on ne prend pas en compte d'interactions thermo-mécaniques, c'est-à-dire qu'on ne modélise pas l'effet de l'état de contrainte mécanique sur la déformation thermique du béton,
- concernant l'évolution des paramètres matériaux avec la température, on considère que ceux-ci dépendent non pas de la température courante mais de la température maximale vue par le matériau au cours de son histoire,
- seule la déformation élastique (mécanique) induit de l'endommagement.

Remarque :

En raison de contraintes informatiques, la valeur initiale de Tmax est initialisée à 0. En conséquence, on ne peut pas utiliser les paramètres matériaux définis pour des températures négatives (si nécessaire, on peut toutefois contourner ce problème en rentrant toutes les températures en Kelvin au lieu de °C)

On présente dans un premier temps l'écriture du modèle puis quelques données sur l'identification des paramètres. Pour finir, on expose les principes de l'intégration numérique dans *Code_Aster*.

1.4 Loi de Mazars en présence d'un champ de séchage ou d'hydratation

L'utilisation de ELAS_FO et/ou MAZARS_FO sous l'opérateur DEFI_MATERIAU permet de faire dépendre les paramètres matériaux du séchage ou de l'hydratation.

Par ailleurs, les déformations liées aux retrait de dessiccation et au retrait endogène sont prises en compte dans le modèle, sous la forme suivante :

$$\varepsilon^{re} = -\beta\xi\mathbf{I}_d \text{ et } \varepsilon_{rd} = -\kappa(C_{ref} - C)\mathbf{I}_d$$

où ξ est l'hydratation, C , la concentration en eau (champ de séchage dans la terminologie *Code_Aster*), C_{ref} la concentration en eau initiale (ou séchage de référence). Enfin β est le coefficient de retrait endogène et κ le coefficient de retrait de dessiccation à renseigner dans DEFI_MATERIAU, mot-clé facteur ELAS_FO, opérandes B_ENDO et K_DESSIC. Comme on l'a dit au paragraphe précédent, le choix qui a été fait dans l'implantation du modèle de Mazars, c'est que seule la déformation élastique induit de l'endommagement. En conséquence, si on modélise une éprouvette en béton qui sèche librement ou qui s'hydrate librement, on obtiendra bien un champ de déformation non nul et un champ de contrainte parfaitement nul.

2 Description du modèle

2.1 Le modèle de Mazars

Le modèle de Mazars a été élaboré dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{éq 2.1-1}$$

avec : \mathbf{A} la matrice de Hooke

D la variable d'endommagement

$\boldsymbol{\varepsilon}^e$ la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^{rd} - \boldsymbol{\varepsilon}^{re}$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_{ref})\mathbf{I}_d$ la dilatation thermique

$\boldsymbol{\varepsilon}^{re} = -\beta\xi\mathbf{I}_d$ le retrait endogène (lié à l'hydratation)

$\boldsymbol{\varepsilon}^{rd} = -\kappa(C_{ref} - C)\mathbf{I}_d$ le retrait de dessiccation (lié au séchage)

La variable d'endommagement D résulte d'une combinaison d'un endommagement de traction D_t et d'un endommagement de compression D_c :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t)^\beta D_c \quad \text{éq 2.1-2}$$

- Le coefficient β est un paramètre matériau qui permet, lorsqu'il est supérieur à 1, d'améliorer la réponse en cisaillement.
- Les endommagements de traction et compression sont définis par les équations suivantes dès lors que $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{d0}$:

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})]} \quad (\text{borné entre 0 et 1})$$

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})]} \quad (\text{borné entre 0 et 1})$$

où A_c , A_t , B_c , B_t , ε_{d0} sont des paramètres matériaux à identifier.

- L'endommagement est piloté par la déformation équivalente ε_{eq} qui permet de traduire un état triaxial par une équivalence à un état uniaxial. Comme les extensions sont primordiales dans le phénomène de fissuration du béton, la déformation équivalente introduite est définie à partir des valeurs propres positives du tenseur des déformations, soit :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad \text{ou dans le repère principal du tenseur de déformations}$$

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$$

sachant que la partie positive $\langle \cdot \rangle_+$ est définie de telle sorte que si ε_i est la déformation principale dans la direction i

$$\begin{cases} \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_i \geq 0 \\ \langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 & \text{si } \varepsilon_i < 0 \end{cases}$$

Remarque :

Dans le cas d'un chargement thermomécanique, seule la déformation élastique

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \text{ contribue à l'évolution de l'endommagement d'où : } \varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle_+}.$$

- Le coefficient α_t qui réalise le couplage entre traction et endommagement est telle que en l'absence totale de traction, $\alpha_t = 0$ et en l'absence totale de compression $\alpha_t = 1$. Il est défini par la relation suivante :

$$\alpha_t = \frac{\sum_{i=1}^3 [\langle \varepsilon_i \rangle_+ \varepsilon_{ti}]}{\varepsilon_{eq}^2} \quad (\text{borné entre 0 et 1})$$

où ε_{ti} est la déformation créée par les contraintes principales positives soit :

$$\varepsilon_t = \frac{1+\nu}{E} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} tr(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+)$$

2.2 Exemple en 1D

On montre ici la réponse obtenue avec le modèle de Mazars (version locale ou non-locale) lorsqu'on soumet un élément de volume à un chargement uniaxial.

Les paramètres matériaux utilisés sont les suivants :

$$E = 32\,000 \text{ MPa}, \nu = 0.2, \varepsilon_{d0} = 9.375 \cdot 10^{-5}, A_c = 1.15, A_t = 0.8, B_c = 1391.3, B_t = 10\,000, \beta = 1$$

Le chargement est appliqué en plusieurs étapes :

- 1) compression jusqu'à -0.3 %
- 2) décharge
- 3) compression jusqu'à -0.4%
- 4) décharge puis traction jusqu'à 0.035 %
- 5) décharge
- 6) traction jusqu'à 0.07 %
- 7) décharge

Sur la figure suivante, on a représenté la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale ainsi qu'en fonction de la déformation latérale. La rigidité initiale a également été représentée afin de mieux visualiser l'effet de l'endommagement.

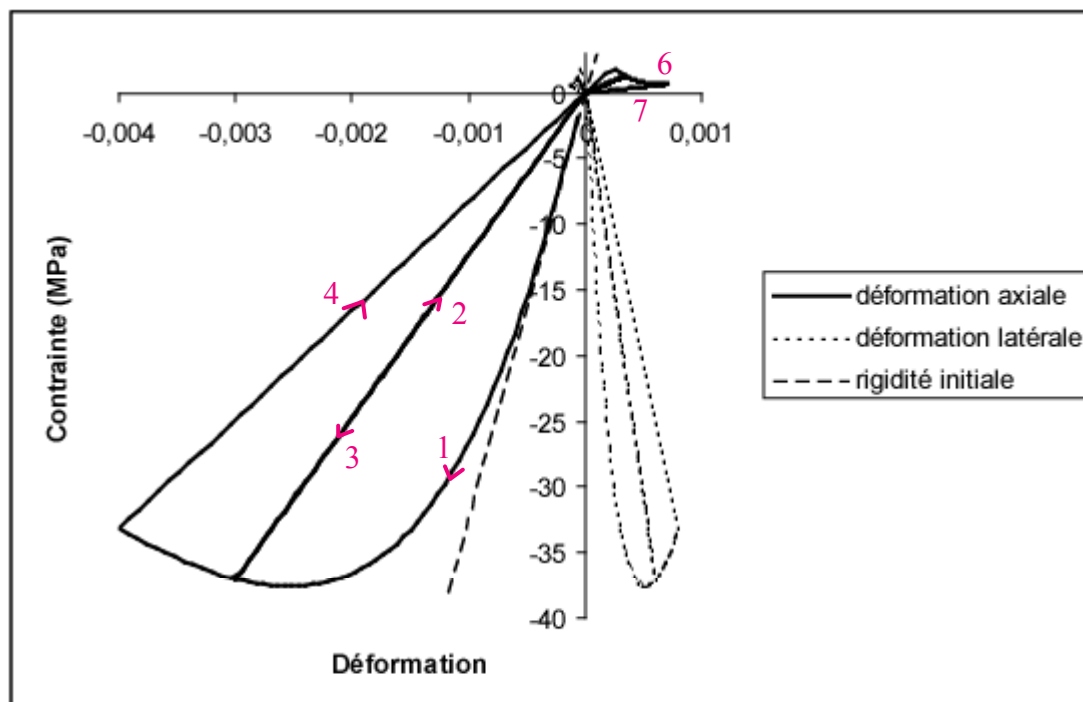


Figure 2.2-a : Réponse contrainte déformation du modèle de Mazars pour une sollicitation 1D

La figure précédente permet de visualiser un certain nombre de caractéristiques du modèle de Mazars, à savoir :

- l'endommagement affecte la rigidité du béton,
- il n'y a pas de déformations irréversibles,
- les réponses en traction et en compression sont bien dissymétriques,
- bien que l'on distingue l'endommagement dû à la compression et celui dû à la traction, la variable d'endommagement effective est bien une combinaison linéaire des deux. En conséquence, lorsqu'on préendommage le matériau en compression (resp. en traction), et qu'on charge ensuite en traction (resp. en compression), c'est bien la rigidité avec endommagement qui est observée et pas la rigidité initiale.

3 Identification

Outre les paramètres thermo-élastiques E , ν , α , le modèle de Mazars fait intervenir 6 paramètres matériau : A_c , B_c , A_t , B_t , ε_{d0} et β .

- ε_{d0} est le seuil d'endommagement. Il agit évidemment sur la contrainte au pic mais également sur la forme de la courbe post-pic. En effet, la chute de contrainte est d'autant moins brutale que ε_{d0} est petit. En général ε_{d0} est compris en 0.5 et $1.5 \cdot 10^{-4}$.

Les coefficients A et B permettent de moduler la forme de la courbe post-pic :

- A introduit une asymptote horizontale qui est l'axe des ε pour $A = 1$ et l'horizontale passant par le pic pour $A = 0$ (cf. [Figure 3-a]). En général, A_c est compris entre 1 et 1.15 et A_t entre 0.7 et 1 .
- B selon sa valeur peut correspondre à une chute brutale de contrainte ($B > 10\,000$) ou une phase préliminaire d'accroissement de contrainte suivie, après passage par un maximum, d'une décroissance plus ou moins rapide comme on peut le voir sur la [Figure 3-b]. En général B_c est compris entre 1000 et 2000 et B_t entre $10\,000$ et $100\,000$.

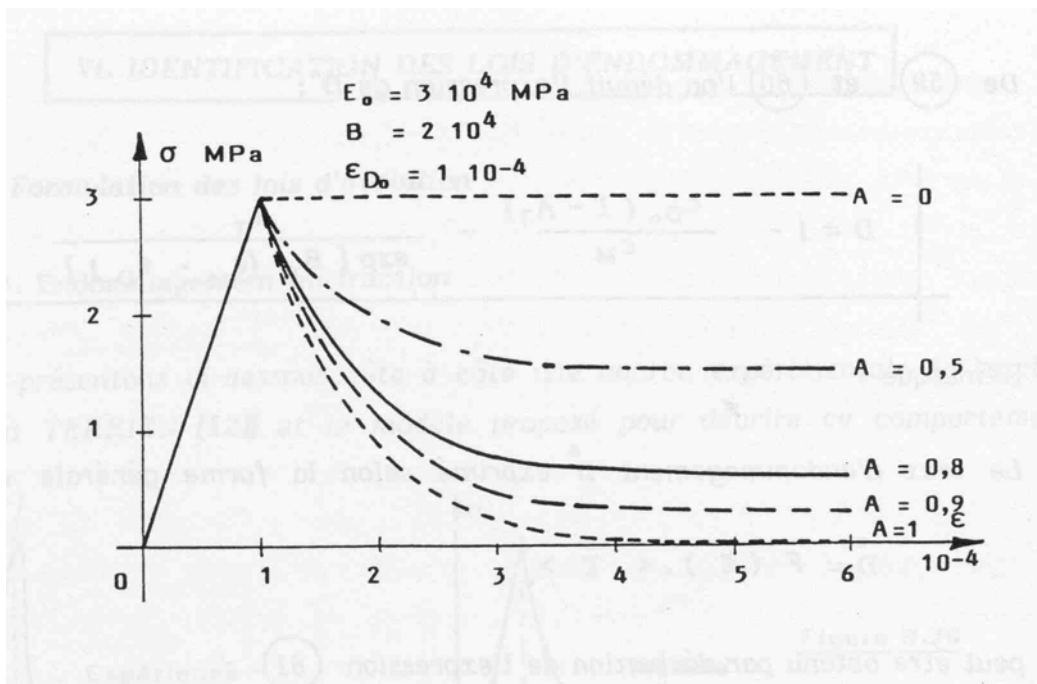


Figure 3-a : Influence des paramètres A [bib1]

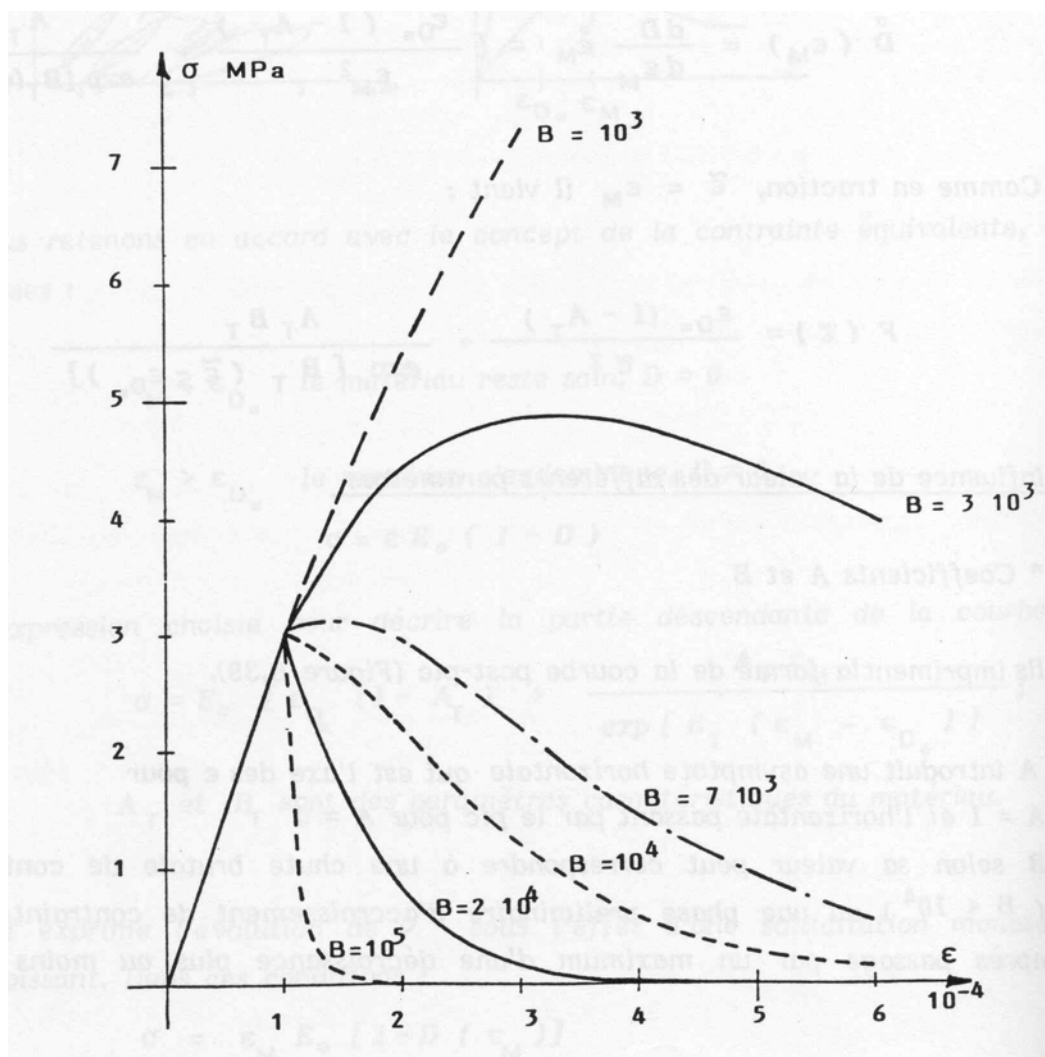


Figure 3-b : Influence des paramètres B [bib1]

- β est un facteur correctif permettant d'améliorer la réponse en cisaillement par rapport à la version initiale du modèle (qui correspond à $\beta=1$). La valeur conseillée est 1.06.

Un moyen simple d'obtenir un jeu de paramètres est de disposer des résultats d'essais uniaxiaux en compression et d'essais de flexion (pour plusieurs tailles de poutres pour déterminer le paramètre c en non-local)

4 Résolution numérique

4.1 Evaluation de l'endommagement

La procédure d'obtention de l'endommagement est simple. Les étapes sont les suivantes :

- calcul des déformations élastiques et thermiques
- calcul de la déformation équivalente
- calcul de α_t , D_c et D_t pour cet état de déformation
- calcul de $D^{test} = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t)^\beta D_c$
 - si $D^{test} \leq D^-$, alors le critère n'est pas atteint et $D^+ = D^-$
 - si $D^{test} > D^-$, alors le critère est atteint et $D^+ = D^{test}$
 - si $D^{test} = 1$, alors le matériau est totalement endommagé et $D^+ = 1$ (en fait $(1 - \varepsilon)$ pour éviter les problèmes numériques).

4.2 Calcul de la contrainte

Après évaluation de D , on calcule simplement :

$$\sigma = (1 - D)A\varepsilon^e$$

4.3 Calcul de la matrice tangente

On cherche le tenseur \mathbf{M} tel que $\dot{\sigma} = \mathbf{M}\dot{\varepsilon}$ sachant que $\sigma = (1 - D)A\varepsilon$. La matrice est donc la somme de deux termes, l'un à endommagement constant, l'autre dû à l'évolution de l'endommagement :

$$\dot{\sigma} = (1 - D)A\dot{\varepsilon} - A\varepsilon\dot{D}$$

Le premier terme est facile, il s'agit simplement de l'opérateur de Hooke, multiplié par $(1 - D)$.

Le deuxième nécessite l'évaluation de l'incrément d'endommagement \dot{D} .

Sachant que l'endommagement est défini par la relation $D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t)^\beta D_c$, il vient

$$\dot{D} = \alpha_t^\beta \dot{D}_t + (1 - \alpha_t)^\beta \dot{D}_c + \frac{\dot{\alpha}_t}{\alpha_t} \alpha_t^\beta D_t + \frac{\dot{\alpha}_t}{1 - \alpha_t} (1 - \alpha_t)^\beta D_c$$

Si on suppose que le chargement est radial $\dot{\alpha}_t = 0$ ([bib1]), il suffit alors d'exprimer $\dot{D}_{c,t}$.

$$\dot{D}_{c,t} = \frac{\partial D_{c,t}}{\partial \tilde{\varepsilon}} \text{Tr} \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \right)$$

$$\text{avec } \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} = \frac{\langle \varepsilon \rangle_+}{\tilde{\varepsilon}}$$

$$\text{d'où } \dot{D}_{c,t} = \left(\frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_{c,t})}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_{c,t}B_{c,t}}{\exp[B_{c,t}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \right) \text{Tr} \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_+}{\tilde{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \right)$$

Remarques :

1. Etant donné les simplifications faites, dans le cas général la matrice tangente n'est pas consistante. Aussi, il peut arriver que la réactualisation de la matrice tangente au cours des itérations de Newton n'aide pas à la convergence. Dans ce cas, il suffit d'utiliser uniquement la matrice sécante en imposant `STAT_NON_LINE(NEWTON = F(REAC_ITER = 0))`.
2. Dans le cas général, la matrice tangente est non-symétrique. En version 6, la matrice tangente était symétrisée. Ce n'est plus le cas à partir de la version 7 (même s'il est toujours possible de le faire grâce au mot-clé `SOLVEUR=F(SYME = 'OUI')` de `STAT_NON_LINE`).
3. Concernant l'approche non locale, le traitement des conditions aux limites est tel que l'on pourra être amené, dans le cas de structures symétriques, à traiter le calcul de l'ensemble de la structure et non de la partie « représentative » (cf. [R5.04.02]).
4. L'expression analytique de la matrice tangente n'est valide que pour des chargements radiaux ($d\alpha_t = d\alpha_c = 0$). Dans les autres cas, la convergence quadratique de la méthode n'est plus garantie.
Sachant que de toutes façons, l'utilisation de la loi d'endommagement sous forme directement intégrée (Éq 2.1-2) n'est théoriquement valable que sous cette même hypothèse, dans le cas de chargements non radiaux, on préférera d'autres modèles au modèle de Mazars, en particulier des modélisations prenant en considération l'anisotropie du comportement ou l'effet de refermeture des fissures (solicitations alternées), plus adaptées à ce type de chargement.

4.4 Variables internes stockées

Nous indiquons dans le tableau suivant les variables internes stockées en chaque point de Gauss pour le modèle de Mazars :

Variable interne	Sens physique
V1	D : variable d'endommagement
V2	indicateur d'endommagement (0 si élastique, 1 si endommagé c'est-à-dire dès que D n'est plus nul)
V3	θ : température maximum atteinte au point de gauss

4.5 Modélisations compatibles avec la loi de MAZARS

La loi de Mazars est utilisable dans Aster avec différentes modélisations :

- version classique : 3D, D_PLAN, AXIS, C_PLAN,
- version non-locale : 3D_GRAD_EPSI, D_PLAN_GRAD_EPSI, C_PLAN_GRAD_EPSI,
- couplé avec les modèles de THHM (cf. [R7.01.11]).

5 Bibliographie

- [1] Mazars J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI.
- [2] Lemaitre J. et Chaboche J.L. (1988). Mécanique des matériaux solides. Ed. Dunod.
- [3] H. Askes, Advanced spatial discretisation strategies for localised failure, mesh adaptivity and meshless methods, PhD thesis, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, 2000.
- [4] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. de Vree, I. Spee, Some observations on localisation in non local and gradient damage models, Eur. J. Mech. A/Solids, 15, N°6, 937-953, 1996.
- [5] Pijaudier-Cabot G., Mazars J. and Pulikowski J. (1991). Steel-concrete bond analysis with non local continuous damage, J. Structural Engrg ASCE 117 , 862-882.