

Manuel de Référence**Fascicule R3.06 : Éléments mécaniques et thermiques pour les milieux continus****Document R3.06.08**

Éléments finis traitant la quasi-incompressibilité

Résumé :

Dans certaines situations, le comportement mécanique du matériau impose que la dilatation volumique reste nulle, autrement dit que la déformation se fasse à volume constant : élasticité isotrope avec coefficient de POISSON égal à 0.5, écoulements plastiques parfaits en analyse limite ...

On propose ici de traiter cette condition d' « incompressibilité » ou de « quasi-incompressibilité » en utilisant une formulation valable aussi bien dans le cas compressible que dans le cas quasi-incompressible. Pour cela, on utilise une formulation variationnelle à 3 champs où les inconnues sont le déplacement, la déformation volumique et le multiplicateur de Lagrange associé (qui correspondrait à la pression dans le cas incompressible). On propose deux versions de cette formulation : l'une pour les petites déformations, l'autre valable en présence de grandes déformations.

Après quelques rappels sur les difficultés que posent la résolution des problèmes incompressibles, on décrit l'élément fini mixte implanté (en 3D et en 2D, plan et axisymétrique), et on présente également les grandes lignes de l'intégration dans le *Code_Aster* (modélisation INCO).

Cette modélisation est nécessaire pour pratiquer les analyses limites et pour modéliser des comportements élastiques pour des coefficients de Poisson proche de 0.5. Elle peut aussi être utile dans le cas de modélisations engendrant de fortes déformations plastiques et pour lesquelles les modélisations traditionnelles peuvent être insuffisantes et engendrer des oscillations de contraintes.

Table des matières

1	Difficultés liées au traitement de l'incompressibilité	3
1.1	Les comportements «incompressibles» et «quasi-incompressibles»	3
1.2	Quelques solutions numériques possibles	4
1.3	Option retenue et cadres d'application	5
2	Formulation variationnelle mixte du problème	6
2.1	Formulation dans le cadre des petites déformations	6
2.2	Formulation en grandes déformations	7
3	Discretisation par éléments finis mixtes	8
3.1	Choix de la discrétisation	8
3.2	Ecriture du problème discret	9
3.2.1	Ecriture en petites déformations	9
3.2.2	Ecriture en grandes transformations	10
4	Intégration dans le <i>Code_Aster</i> des éléments finis incompressibles	11
4.1	Présentation générale de l'élément incompressible	11
4.2	Emploi de la modélisation	12
4.3	Formulation des termes élémentaires du second membre	12
4.4	Calcul des déformations et des contraintes	12
5	Validation	13
5.1	Cas élastique incompressible	13
5.2	Cas élasto-plastique	13
6	Bibliographie	15

1 Difficultés liées au traitement de l'incompressibilité

Dans certaines situations, le comportement mécanique du matériau impose que la déformation se fasse à volume constant. Les matériaux possédant cette propriété de non-dilatance sont souvent qualifiés de matériaux « incompressibles ». Nous allons voir que ces problèmes posent deux types de difficultés. La première difficulté est liée à l'écriture de la condition d'incompressibilité, la deuxième est liée aux problèmes numériques qu'engendre cette contrainte. Ces difficultés se retrouvent lorsque le matériau est quasi-incompressible.

On raisonne ici en petites perturbations mais le problème reste le même dans le cadre des transformations finies.

1.1 Les comportements « incompressibles » et « quasi-incompressibles »

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, une déformation de type isochore est caractérisée par le fait que le gradient de la transformation \mathbf{F} est tel que $\det \mathbf{F} = 1$. Si on se place dans le cadre des petites perturbations, la condition précédente se ramène à :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donc uniquement déviatorique : $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^D$.

Il en résulte que dans le cas de matériaux isotropes, l'invariant $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$ (ou $\det \mathbf{F}$) n'intervient pas dans l'expression de la densité d'énergie libre φ ; ainsi dans le cas de l'élasticité incompressible en HPP, on a simplement :

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu \boldsymbol{\varepsilon}^D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D$$

Cette densité permet d'exprimer uniquement la partie déviatorique du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}^D = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^D$$

De fait, la contrainte est définie à une constante près p , qui est l'opposée de la pression moyenne :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^D + p \mathbf{Id} \quad \text{éq 1.1-1}$$

Remarque :

- l'élasticité isotrope incompressible est bien sûr un cas limite de l'élasticité isotrope avec un coefficient de Poisson $\nu = \frac{E}{2\mu} - 1$ tendant vers 0.5.

- il n'y a pas que les matériaux élastiques dont le coefficient de Poisson est égal ou légèrement inférieur à 0.5 qui font intervenir la condition d'incompressibilité. Ainsi, elle intervient également dans le cas de matériau rigide plastique $\left(\frac{\partial g}{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}} = 0 \right)$. En effet, on

$$\text{a dans ce cas : } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} ; \quad \lambda \geq 0 ; \quad g \leq 0 ; \quad \lambda g = 0$$

Ce qui conduit à la condition d'incompressibilité $\operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$.

Par ailleurs, dans le cas de l'élastoplasticité, lorsque les déformations plastiques deviennent largement supérieures aux déformations élastiques, on se retrouve dans un cas quasiment incompressible avec $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \cong 0$.

Enfin, les matériaux vérifiant une relation de comportement de type NORTON-HOFF (loi utilisée pour les calculs d'analyse limite [R7.07.01]) présentent aussi la caractéristique d'incompressibilité :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \alpha \left(\boldsymbol{\sigma}_{eq} \right)^{n-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } \alpha > 0$$

$$\text{où } \boldsymbol{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D} \text{ est la contrainte équivalente de Von Mises.}$$

1.2 Quelques solutions numériques possibles

Si l'on veut traiter exactement la condition d'incompressibilité, nous l'avons vu, la contrainte n'est pas totalement déterminée à partir de la déformation (cf. [éq 1.1-1]). Il est donc nécessaire d'utiliser une formulation mixte, c'est-à-dire d'introduire (au moins) une autre inconnue du problème qui permettra de déterminer complètement le tenseur des contraintes. Plusieurs variantes sont possibles, la plus simple consistant à imposer la condition d'incompressibilité à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, qui est alors la pression p .

Remarque :

Si l'on opte pour une procédure de pénalisation, on se ramène au cas quasi-incompressible et donc aux difficultés évoquées ci-dessous.

On peut également, notamment dans le cas de l'élasticité linéaire, choisir de rendre le matériau légèrement compressible. De cette façon, la contrainte est entièrement définie à partir du déplacement et l'utilisation d'une formulation mixte n'est plus indispensable. En revanche, la résolution de ces problèmes avec les éléments finis classiques en déplacement, pose des difficultés numériques. En effet, la contrainte cinématique que représente une déformation à volume constant est très forte, voire trop forte si les degrés de liberté de l'élément ne sont pas assez importants. Ainsi, le triangle à 3 nœuds peut présenter des phénomènes de blocage, c'est-à-dire que le « maillage » ne peut pas se déformer. De façon moins extrême, la plupart des éléments classiques, notamment linéaires, se comporte de manière anormalement rigide. De nouveaux éléments doivent donc être utilisés afin de « relâcher » le système. Ces éléments peuvent s'appuyer sur différents types de formulation :

- uniquement en déplacement
- mixte : déplacements / contraintes, déplacements / pressions, déformations / contraintes, déplacements / pressions / dilatations volumiques ...

Dans tous les cas, si on n'y prend pas garde, on peut avoir des difficultés numériques. Plusieurs pistes sont utilisées pour faciliter la déformation des éléments :

- utiliser la sous-intégration permet d'améliorer les résultats mais elle présente un inconvénient : elle peut conduire à l'apparition de modes parasites ou hourglass. Pour résoudre ce problème, on peut soit enrichir la matrice de rigidité grâce à des matrices de stabilisation qui viennent neutraliser les modes hourglass, soit utiliser des méthodes de projection qui consistent à projeter dans un espace plus petit la condition d'incompressibilité de façon à éliminer les phénomènes de blocage. La plus connue est la méthode B-Bar [bib1],
- enrichir l'élément à l'aide de degrés de liberté supplémentaires : on parle alors de méthodes à déformations augmentées, modes incompatibles.] [bib2] ...

1.3 Option retenue et cadres d'application

Nous avons choisi ici d'opter pour une formulation qui couvre aussi bien le quasi-incompressible (jusqu'à l'incompressible) que le compressible. Pour cela, le terme $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ est traité comme une variable indépendante. Avec le multiplicateur de Lagrange associé, cela conduit à une formulation à 3 champs. Une version grandes déformations a également été développée sur le même principe. Dans ce cas, la variable indépendante liée à la condition d'incompressibilité n'est plus $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ mais $\det \mathbf{F}$.

L'avantage de cette formulation est qu'elle permet d'utiliser de façon transparente toutes les lois de comportement élasto-plastiques disponibles dans Aster (pas besoin de séparer la partie déviatorique et la partie sphérique du tenseur des contraintes). Elle n'est donc pas limitée à l'élasticité ou à l'élastoplasticité de Von Mises. En revanche, on ne pourra pas traiter le cas où le coefficient de Poisson est strictement égal à 0.5, car on utilise pour le calcul de la contrainte élastique le terme

$$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ dont le dénominateur est nul quand } \nu = 0.5.$$

En conséquence, cette formulation INCO **doit être utilisée** :

- pour traiter les problèmes d'analyse limite pour lesquels on suppose que l'écoulement se fait à volume constant [R7.07.01],
- pour traiter des problèmes élastiques dont le coefficient de Poisson est supérieur à 0.45.

Cette formulation peut aussi être utilisée :

- pour traiter les problèmes où les déformations plastiques sont importantes, ce qui engendre des oscillations au niveau des contraintes (exemple : dans le cas de calculs sur éprouvettes entaillées). Bien sûr, cette formulation étant plus coûteuse que la formulation en déplacement classique, elle est à réserver aux cas posant problème et où on s'intéresse aux valeurs des contraintes.

2 Formulation variationnelle mixte du problème

2.1 Formulation dans le cadre des petites déformations

Soit un solide Ω soumis à :

- un champ de déplacement \mathbf{u}^D sur Γ_D
- un champ d'effort \mathbf{g} sur Γ_N
- un champ volumique d'effort \mathbf{f} sur Ω

Dans le cas classique des éléments finis en déplacement (modélisation 3D ou D_PLAN ou AXIS dans Code_Aster), lorsque le problème dérive d'une énergie, le problème résolu est le suivant :

trouver $\mathbf{u} \in V^D$ avec σ vérifiant la relation de comportement, qui minimise l'énergie potentielle :

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \mathbf{u} \, d\Gamma$$

Comme nous l'avons expliqué au [§1], cette formulation ne convient pas lorsqu'on cherche à se rapprocher de la solution incompressible, c'est-à-dire de la condition $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ou $\text{tr } \varepsilon = 0$. Pour contourner cette difficulté, une solution est de traiter séparément la partie sphérique du tenseur des déformations ε (la partie qui pose des problèmes numériques) et sa partie déviatorique. On aura donc :

$$\varepsilon(\mathbf{u}, g) = \varepsilon^D(\mathbf{u}) + \frac{g}{3} \mathbf{I}_d \quad \text{où} \quad \varepsilon^D(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}) - \frac{1}{3} (\text{tr } \varepsilon(\mathbf{u})) \mathbf{I}_d \quad \text{et} \quad g = \text{tr } \varepsilon(\mathbf{u}) \quad \text{éq 2.1-1}$$

Le problème précédent se ramène donc à la résolution d'un problème à 2 variables, \mathbf{u} et g , sous la contrainte $g = \text{tr } \varepsilon$. Il peut être ramené à la résolution d'un problème sans contrainte en introduisant un multiplicateur de Lagrange p ; il s'écrit :

trouver $\mathbf{u} \in V^D$, p et g (problème de point-selle), tels que :

$$L(\mathbf{u}, p, g) = \int_{\Omega} \left[\sigma : \left(\varepsilon^D(\mathbf{u}) + \frac{g}{3} \mathbf{I}_d \right) + p (\text{div } \mathbf{u} - g) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \mathbf{u} \, d\Gamma \quad \text{éq 2.1-2}$$

Ce problème peut être résolu, en écrivant les conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega} (\sigma^D + p \mathbf{I}_d) : \delta \varepsilon \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p} = \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u} - g) \delta p \, d\Omega = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial g} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{3} \text{tr } \sigma - p \right) \delta g \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.1-3}$$

Remarques :

- la première équation correspond à l'équation d'équilibre,
- la deuxième équation traduit la relation cinématique liant g à u ,
- la troisième équation donne l'expression du multiplicateur de Lagrange p ,
- lorsque le problème ne dérive pas d'une énergie, on peut directement utiliser le système d'équations [éq 2.1-3].

2.2 Formulation en grandes déformations

Il est possible d'étendre la formulation variationnelle précédente [éq 2.1-2] aux grandes déformations. Le principe est identique, mais on s'appuie dans ce cas sur la décomposition du tenseur gradient de la transformation \mathbf{F} proposée par Flory [bib3] :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^S \bar{\mathbf{F}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}^S = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}_d \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \text{et} \quad J = \det \mathbf{F}$$

Le problème se ramène là encore à un problème de point selle :
trouver $\mathbf{u} \in V^D$, g et p point selle du lagrangien :

$$L(\mathbf{u}, p, g) = \int_{\Omega^-} [W(\Delta g^{\frac{1}{3}} \Delta \bar{\mathbf{F}})] d\Omega^- + \int_{\Omega_0} p(J - g) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \mathbf{u} d\Gamma \quad \text{éq 2.2-1}$$

où W est l'énergie de déformation exprimée en fonction de la variation du gradient de la transformation \mathbf{F} .

Le choix qui a été fait ici est d'écrire l'énergie de déformation sur la configuration Ω^- c'est-à-dire au début du pas de temps. On note classiquement :

- \mathbf{F}^- le gradient de la transformation de Ω_0 à Ω^-
- $\Delta \mathbf{F}$ le gradient de la transformation de Ω^- à Ω .

On a alors : $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^-$ et $J = \Delta J J^-$

Ce problème peut être résolu comme en petites déformations en écrivant les conditions d'optimalité. La dérivation ne pose pas de difficultés particulières à condition de se rappeler que :

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{\Pi} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{F}^t, \quad \mathbf{\Pi} \text{ étant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.}$$

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{\frac{1}{3}} \boldsymbol{\sigma}^D + p \mathbf{I}_d \right] \cdot \nabla_x \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p} = \int_{\Omega_0} (J - g) \delta p d\Omega_0 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial g} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{3} \frac{J^-}{g^-} \left(\frac{\Delta J}{\Delta g} \right)^{\frac{2}{3}} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} - p \right) \delta g d\Omega_0 = 0 \end{cases}$$

En ce qui concerne l'obtention de la matrice tangente, elle demande bien sûr un peu plus de calcul qu'en petites déformations.

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{up} & K_{ug} \\ K_{up} & K_{pp} & K_{pg} \\ K_{ug} & K_{pg} & K_{gg} \end{bmatrix}$$

Pour le terme K_{uu} , la méthode utilisée est la même que celle utilisée dans [bib4] ou [R5.03.21]. Le principe consiste à dériver à configuration fixe, puis à choisir comme configuration celle qui coïncide avec la configuration actuelle à l'instant de calcul, c'est-à-dire Ω . Cette matrice n'est a priori pas symétrique. Mais en pratique, on utilise une matrice tangente symétrique. Les autres dérivations ne posent pas de problèmes particuliers.

Pour simplifier l'écriture des différents termes, on est amené à définir les tenseurs suivants :

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \left(\left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{1/3} \Delta \mathbf{F} \right)}$$
 la matrice tangente algorithmique donnée par la loi de comportement

$\mathbf{P} = \mathbf{H} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_d \otimes (\mathbf{I}_d : \mathbf{H})$ qui correspond en quelque sorte à la partie déviatorique de la matrice tangente algorithmique

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} : \Delta \mathbf{F} + \left(\frac{\Delta J}{\Delta g} \right)^{1/3} \boldsymbol{\sigma}^D$$

Finalement, la matrice tangente est composée des termes suivants :

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \int_{\Omega} \left[\text{div} \delta u \sigma_{eq} - \sigma_{eq} \nabla_x \delta u \right] : \nabla_x \delta v \, d\Omega \quad (\text{rigidité géométrique}) \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{2/3} \left[\mathbf{P} : \nabla_{x^-} \delta u - \frac{1}{3} \text{div} \delta u \, \mathbf{T} \right] : \nabla_x \delta v \, d\Omega \quad (\text{rigidité de comportement}) \\ K_{up} &= \int_{\Omega} \text{tr}(\nabla_x \delta u) \delta p \, d\Omega \\ K_{ug} &= \int_{\Omega} \frac{1}{3\theta} \left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{2/3} \mathbf{T} : \nabla_{x^+} \delta u \, \delta g \, d\Omega \\ K_{pp} &= 0 \\ K_{pg} &= \int_{\Omega_o} -\delta p \, \delta g \, d\Omega_o \\ K_{gg} &= \int_{\Omega} \frac{1}{9g} \left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{2/3} \left(\frac{g^-}{J^-} \right) \left[-2 \text{tr} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Id} : \mathbf{H} \Delta \mathbf{F} \times \left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{1/3} \right] d\Omega \end{aligned}$$

3 Discrétisation par éléments finis mixtes

3.1 Choix de la discrétisation

Lorsqu'on utilise une formulation mixte, il est nécessaire de discrétiser à la fois l'espace des déplacements, du multiplicateur de Lagrange p et du « gonflement » g . L'expérience acquise sur les éléments mixtes, notamment à 2 champs pour les éléments incompressibles, permet de savoir que la discrétisation de ces champs ne peut être quelconque, sous peine d'obtenir des phénomènes d'oscillations (notamment au niveau des pressions) ou des phénomènes de blocage (éléments ne pouvant pas se déformer ou trop rigides). Ainsi il est nécessaire d'avoir un nombre de points de Gauss de pression suffisamment important pour vérifier la condition d'incompressibilité presque partout et un nombre de points de Gauss de pression suffisamment faible pour avoir plus de degrés de liberté à calculer que de contraintes à vérifier. Une des conditions nécessaires pour obtenir des résultats satisfaisants est la vérification par l'élément fini considéré de la condition LBB (LADYJENSKAIA, BREZZI, BABUSKA). On peut trouver dans [bib5] et [bib6] des exemples d'éléments satisfaisant la condition LBB.

Ici le problème est un peu différent puisque la formulation contient 3 champs. Nous nous sommes inspirés des usages de ce genre de formulation (ex. [bib7]), en utilisant un élément de type P2/P1/P1. Autrement dit, le déplacement est quadratique, la pression et le gonflement sont tous les deux linéaires.

Les éléments finis utilisés sont donc les suivants :

en 2D :	u	triangle à 6 nœuds	\	quadrilatère à 8 nœuds
	p, g	triangle à 3 nœuds	\	quadrilatère à 4 nœuds
en 3D :	u	tétraèdre à 10 nœuds	\	cube à 20 nœuds \ pentaèdre à 15 nœuds
	p, g	tétraèdre à 4 nœuds	\	cube à 8 nœuds \ pentaèdre à 6 nœuds

Pour chaque type d'élément, on utilise une seule famille de points de Gauss :

- 3 points pour les triangles
- 9 points pour les quadrilatères
- 4 points pour les tétraèdres
- 27 points pour les cubes
- 6 points pour les pentaèdres

3.2 Ecriture du problème discret

Soit \mathbf{U}^e , \mathbf{p}^e et \mathbf{g}^e , les vecteurs des inconnues nodales élémentaires (resp. déplacement, pression et gonflement). Si \mathbf{N}_q et \mathbf{N}_l sont les fonctions de formes (respectivement quadratique et linéaire) associées à l'élément fini considéré :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{N}_q \mathbf{U}^e \\ p &= \mathbf{N}_l \mathbf{p}^e \\ g &= \mathbf{N}_l \mathbf{g}^e\end{aligned}$$

3.2.1 Ecriture en petites déformations

\mathbf{B} est la matrice de dérivation classique permettant de passer de \mathbf{U}^e à $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U}^e$$

Dans la formulation, on distingue $\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{dil}$, ce qui nous amène à définir les opérateurs \mathbf{B}_{dev} et \mathbf{B}_{dil} tels que : $\boldsymbol{\varepsilon}^D = \mathbf{B}_{dev} \mathbf{U}^e$ et $\frac{\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}}{3} = \mathbf{B}_{dil} \mathbf{U}^e$

La forme discrétisée des équations du problème [éq 2-3] s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_u &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^D + p \mathbf{I}_d) d\Omega = \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{F}_p &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_l^T (\mathbf{B}^{dil} \mathbf{U} - \mathbf{N}^l \mathbf{g}) d\Omega = 0 \\ \mathbf{F}_g &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_l^T (\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} - p) d\Omega = 0\end{aligned}$$

La matrice tangente du problème est symétrique et s'appuie sur les termes suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{uu} &= \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{U}^e} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{dev^T} \mathbf{D} \mathbf{B}^{dev} d\Omega \\
 \mathbf{K}_{up} &= \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}^e} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{dil^T} \mathbf{N}_l d\Omega \\
 \mathbf{K}_{ug} &= \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{g}^e} = \frac{1}{3} \int_{\Omega} Tr(\mathbf{B}^{dev^T} \mathbf{D}) \mathbf{N}_l d\Omega \\
 \mathbf{K}_{pp} &= \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{p}^e} = 0 \\
 \mathbf{K}_{pg} &= \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{g}^e} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_l^T \mathbf{N}_l d\Omega \\
 \mathbf{K}_{gg} &= \frac{\partial \mathbf{F}_g}{\partial \mathbf{g}^e} = \frac{1}{9} \int_{\Omega} \mathbf{N}_l^T tr(\mathbf{D}) \mathbf{N}_l d\Omega
 \end{aligned}$$

3.2.2 Ecriture en grandes transformations

On note \mathbf{D} la matrice des dérivées des fonctions de forme (quadratiques) sur la configuration actuelle et \mathbf{D}^- sur la configuration Ω^- , soit :

$$\nabla_x u = D \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad \nabla_{x^-} u = D^- \mathbf{U}^e$$

Par ailleurs, on définit la contrainte d'équilibre σ_{eq} et la grandeur Q par les relations suivantes :

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{\Delta g}{\Delta J} \right)^{1/3} \sigma^D + p \mathbf{I}_d \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3} \frac{J^-}{g^-} \left(\frac{\Delta J}{\Delta g} \right)^{2/3} tr \sigma - p$$

σ est ici le tenseur des contraintes issu de la loi de comportement.

Le vecteur des forces intérieures s'écrit sous forme la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_u &= \int_{\Omega} \sigma_{eq} D d\Omega \\
 \mathbf{F}_p &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_l^T (J - \mathbf{N}^l \mathbf{g}) d\Omega_0 \\
 \mathbf{F}_g &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_l^T Q d\Omega_0
 \end{aligned}$$

4 Intégration dans le Code_Aster des éléments finis incompressibles

4.1 Présentation générale de l'élément incompressible

Les éléments finis sont intégrés dans le *Code_Aster* en 2D déformations planes, en 2D axisymétrique et en 3D. Les 3 modélisations sont accessibles en utilisant les options suivantes pour *AFFE_MODELE* :

- '3D_INCO' pour le 3D,
- 'D_PLAN_INCO' pour le 2D en déformations planes,
- 'AXIS_INCO' pour le 2D axisymétrique.

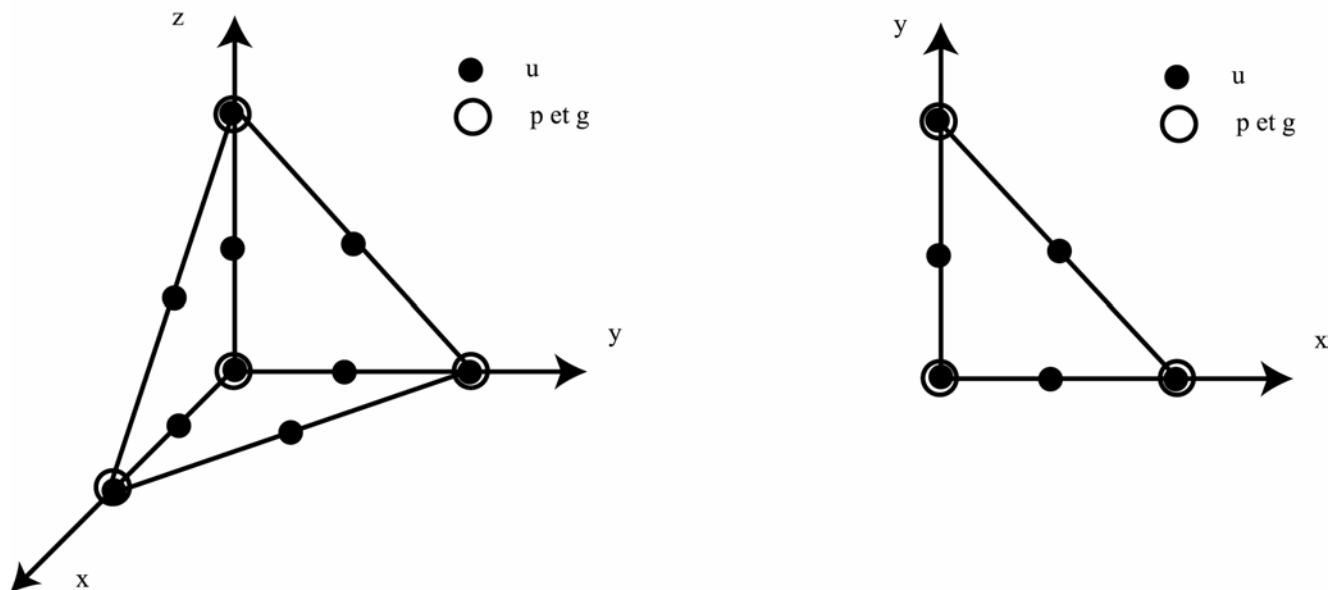
Dans le catalogue des éléments, les éléments incompressibles peuvent s'appliquer sur les mailles :

Mailles	Nombre de nœuds en déplacements	Nombre de nœuds en pression
TRIA6	6	3
QUAD8	8	4
HEXA20	20	8
TETRA10	10	4
PENTA15	15	6

Dans les routines d'initialisations des éléments incompressibles, on définit :

- 1 seule famille de points de GAUSS (la première famille de points de GAUSS) [R3.01.01],
- 2 familles de fonctions de formes associées respectivement aux déplacements (fonctions de formes de degré 2) et aux termes de pression (fonctions de formes de degré 1).

Prenons comme exemple l'élément tétraédrique à 10 nœuds : les degrés de liberté en déplacement sont portés par tous les nœuds, en revanche, seuls les 4 nœuds sommets possèdent les degrés de liberté *p* et *g*.



Les composantes accessibles pour le champ *DEPL* sont donc

- les déplacements : *DX*, *DY* et *DZ* en 3D à tous les nœuds,
- la pression : *PRES* pour les nœuds sommet,
- le gonflement : *GONF* pour les nœuds sommet.

4.2 Emploi de la modélisation

Par choix, la modélisation INCO n'est accessible qu'avec STAT_NON_LINE et l'option COMP_INCR. Sous ce mot-clé, la version petites déformations est accessible en utilisant DEFORMATION='PETIT', la version grandes déformations en utilisant DEFORMATION='SIMO_MIEHE'.

Il n'est donc pas possible d'utiliser la modélisation INCO avec les commandes :

- MECA_STATIQUE
- CALC_MATR_ELEM/CALC_VECT_ELEM/ASSE_MATRICE/ASSE_VECTEUR / RESO_LDLT
- STAT_NON_LINE (COMP_ELAS = ...)

Remarque :

Pour l'instant, seule la matrice tangente peut être utilisée pour la phase de prédiction. Toutefois, de nouveaux développements dans Code_Aster, devrait rendre la matrice élastique bientôt accessible.

4.3 Formulation des termes élémentaires du second membre

Les charges peuvent être la pesanteur, des forces surfaciques réparties, des pressions. Les termes élémentaires sont calculés de façon classique pour les degrés de liberté de déplacement et on affecte la valeur nulle pour les degrés de liberté de pression et de gonflement.

4.4 Calcul des déformations et des contraintes

Dans cette formulation, il convient de distinguer le champ de contrainte issu de la loi de comportement σ_{lde} , du champ de contrainte qui vérifie l'équilibre et qui est défini par la relation $\sigma = \sigma_{lde}^D + p\mathbf{Id}$ c'est ce dernier champ qui est stocké dans SIEF_ELGA ainsi que la relation liant le multiplicateur p et σ_{lde} .

En résumé, les composantes de SIEF_ELGA sont :

- SIXX, SIYY, SIZZ, SIXY en 2D ainsi que SIXZ et SIYZ en 3D : composantes du tenseur $\sigma = \sigma_{lde}^D + p\mathbf{Id}$,

- SIP qui est égal à $\left(\frac{1}{3} \text{tr } \sigma_{lde} - p \right)$ en petites déformations,

$$\text{ou } \frac{1}{3} \frac{J^-}{g^-} \left(\frac{\Delta J}{\Delta g} \right)^{2/3} \text{tr } \sigma_{lde} - p \text{ en grandes transformations.}$$

Il est également possible de recalculer EPSI_ELGA_DEPL, qui est le champ de déformation au sens classique.

On peut également réaliser un calcul de charge limite avec POST_ELEM.

5 Validation

5.1 Cas élastique incompressible

Le test SSLV130 (cf. [V3.04.130]) permet de vérifier la validité de la modélisation dans le cas d'un cylindre élastique incompressible soumis à une pression interne. Son équivalent en grandes déformations existent également : test SSNV112 (cf. [V6.04.112]).

5.2 Cas élasto-plastique

Le but de cet exemple est d'illustrer l'apport de la modélisation `INCO` dans le cas où les déformations plastiques sont importantes par rapport aux déformations élastiques. On étudie pour cela une éprouvette entaillée en axisymétrie, soumise à un déplacement imposé. La géométrie et le chargement sont représentés sur la figure ci-dessous. Le maillage est constitué de 548 TRI6.

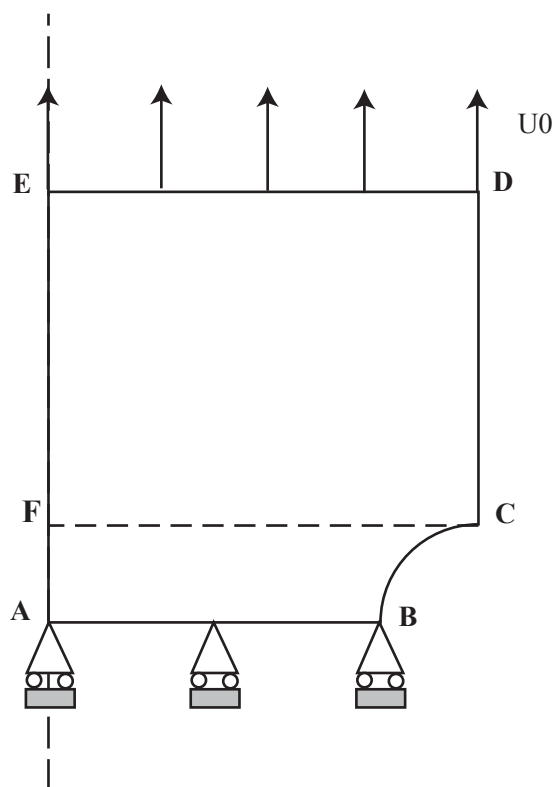


Figure 5.2-a : Géométrie et conditions aux limites

Le comportement du matériau est de type élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire (`VMIS_ISOT_LINE`). Les paramètres sont les suivants :

- $E = 200\,000\text{ MPa}$
- $\nu = 0.3$
- $\sigma_y = 200\text{ MPa}$
- $E_T = 1000\text{ MPa}$

Sur la figure [Figure 5.2-b], on compare la contrainte σ_{yy} obtenue sur le chemin FC (cf. [Figure 5.2-a]) avec la modélisation classique AXIS et la modélisation AXIS_INCO.

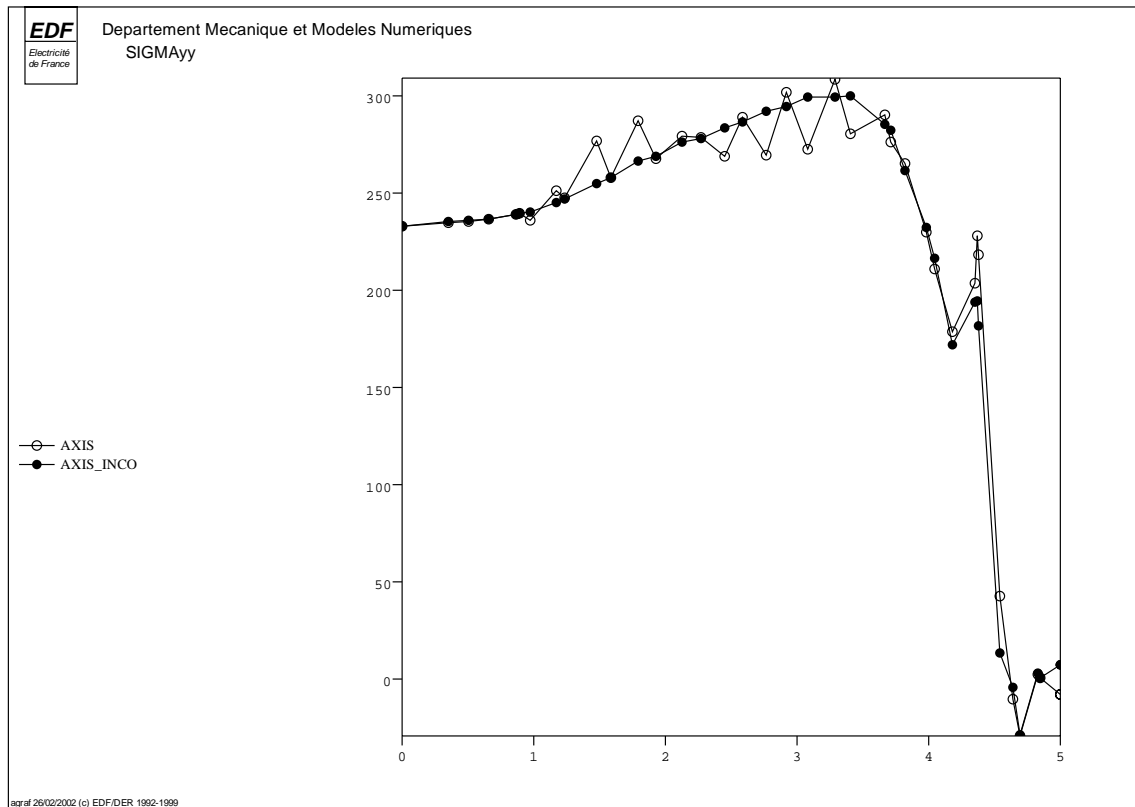


Figure 5.2-b : σ_{yy} le long de la ligne FC

On voit très clairement que la solution obtenue avec la formulation INCO permet de s'affranchir des oscillations parasites.

6 Bibliographie

- [1] J.R. HUGUES : The finite element method, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N-J. 07632, 1987.
- [2] J.C. SIMO, M.S. RIFAI : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, Int. Jnal Num. Meth. Engg, Vol. 29, pp1595-1638, 1990.
- [3] R.J. FLORY : Thermodynamic relations of high elastic materials. Trans. Faraday Soc., vol.57, 1961, pp. 829-838.
- [4] V. CANO, E. LORENTZ : Introduction dans le *Code_Aster* d'un module de comportement en grandes déformations élastoplastique avec écrouissage isotrope. Note EDF/DER HI-74/98/006/0 du 26/08/1998
- [5] M. GIRAULT, P. RAVIART : Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Springer Verlag, 1986.
- [6] P. MIALON, B. THOMAS : Incompressibilité en plasticité : sous-intégration et autres techniques numériques. Note EDF/DER HI-72/6404 du 19/01/1990.
- [7] A.G.K. JINKA, M. BELLET, L. FOURMENT : A new three-dimensional finite element model for the simulation of powder forging processes : application to hot forming of P/M connecting rod. Int. Jnal Num. Meth. Engg, Vol. 40, pp3955-3978, 1997.

Page laissée intentionnellement blanche.