

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.51

Contact – frottement discret en 2D et 3D

Résumé :

Des modélisations discrètes du contact avec frottement en 2D et 3D, les zones de glissement étant respectivement 1D et 2D, sont proposées à partir d'une formulation variationnelle mixte contraintes-déplacements. Les conditions de contact et de frottement sont traitées aux nœuds des surfaces de contact des solides impliqués avec prise en compte des grands déplacements. La loi de frottement de Coulomb est traitée par les opérateurs `STAT_NON_LINE` et `DYNA_NON_LINE` après définition des conditions de contact et de frottement sous le mot clé `CONTACT` de `AFFE_CHAR_MECA`.

En 2D comme en 3D, diverses méthodes sont utilisables pour la modélisation du problème :

- prise en compte du contact et du frottement à l'aide de multiplicateurs de Lagrange,
- prise en compte du contact à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et du frottement à l'aide de pénalisation,
- prise en compte du contact et du frottement à l'aide de pénalisation.

Les algorithmes sous-jacents sont inspirés des contraintes actives [bib2] [bib9] et des prédicteurs-correcteurs couramment utilisés en plasticité.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Formulation du modèle	4
2.1	Le critère de Coulomb	4
2.2	Formulation générale pour différents critères.....	6
2.3	Formulation par inclusions différentielles	7
2.4	Résolution du problème d'équilibre	8
2.5	Formulation variationnelle	9
3	Contact frottant 2D et 3D dans le <i>Code_Aster</i>	11
3.1	Formulation du problème.....	11
3.2	Dualisation des conditions de contact et de frottement.....	12
3.3	Dualisation des conditions de contact, régularisation des conditions de frottement.....	13
3.4	Régularisation des conditions de contact et de frottement	14
4	Résolution algorithmique	15
4.1	Linéarisation des différents termes.....	15
4.1.1	Forces internes	15
4.1.2	Forces de contact.....	15
4.1.3	Forces de glissement	15
4.1.4	Forces d'adhérence.....	16
4.1.5	Remarque	16
5	Résolution	17
5.1.1	Dualisation des conditions de contact et de frottement en 2D	17
5.1.2	Dualisation des conditions de contact et régularisation du frottement en 2D et 3D	18
5.1.3	Régularisation des conditions de contact et de frottement en 2D et 3D	20
5.1.4	Dualisation des conditions de contact et de frottement en 3D	21
5.1.5	Convergence	23
5.1.6	Remarque	23
6	Compatibilité avec les conditions aux limites de Dirichlet	24
6.1	Ecriture des conditions aux limites	24
6.2	Retour au problème de contact	24
6.3	Illustration sur un exemple simple	25
6.4	Remarque	25
7	Mise en œuvre dans le <i>Code_Aster</i>	26
7.1	Algorithmes	26
7.2	Réactualisation géométrique	27
7.3	Post traitement.....	27
7.4	Précautions d'utilisation	28
8	Conclusion	29
9	Bibliographie	30

1 Introduction

Des modélisations discrètes du contact avec frottement en 2D et 3D, les zones de glissement étant respectivement 1D et 2D, sont proposées à partir d'une formulation variationnelle mixte contraintes-déplacements. Les conditions de contact et de frottement sont traitées aux nœuds des surfaces de contact des solides impliqués avec prise en compte des grands déplacements. La loi de frottement de Coulomb est traitée par les opérateurs `STAT_NON_LINE` et `DYNA_NON_LINE` après définition des conditions de contact et de frottement sous le mot clé `CONTACT` de `AFFE_CHAR_MECA`.

En 2D comme en 3D, diverses méthodes sont utilisables pour la modélisation du problème :

- prise en compte du contact et du frottement à l'aide de multiplicateurs de Lagrange,
- prise en compte du contact à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et du frottement à l'aide de pénalisation,
- prise en compte du contact et du frottement à l'aide de pénalisation.

Les algorithmes sous-jacents couplent la méthode des contraintes actives [bib2] pour déterminer les régions de contact et un algorithme de résolution de Newton inspiré des méthodes de type prédicteur-correcteur, couramment utilisées en plasticité, pour le frottement, afin de déterminer les zones de glissement [bib1] [bib7] [bib10].

En 2D comme en 3D, l'utilisateur dispose d'un ensemble de méthodes panachant dualisation et régularisation par pénalisation :

- dualisation des conditions de contact et de frottement,
- dualisation des conditions de contact et régularisation des conditions de frottement,
- régularisation des conditions de contact et de frottement.

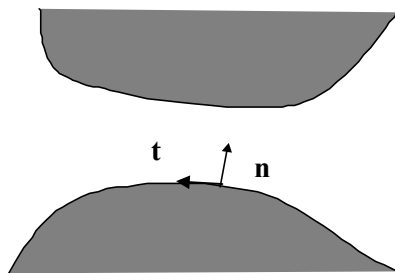
Les intérêts comparés de ces méthodes sont bien connus : la dualisation introduit de nouvelles inconnues mais elle fournit une solution exacte ; la régularisation ne fournit qu'une approximation de la solution dépendante d'un paramètre choisi par l'utilisateur mais elle n'introduit pas de nouvelles inconnues.

Le document débute par une présentation générale des lois de frottement. On présente ensuite la discrétisation de ces lois ainsi que leur linéarisation en vue de leur intégration au sein de la méthode de Newton. On détaille alors les algorithmes permettant de résoudre ces problèmes. La fin du document traite de l'utilisation pratique de ces méthodes au sein du *Code_Aster* et de leur post traitement avant d'aborder les conclusions.

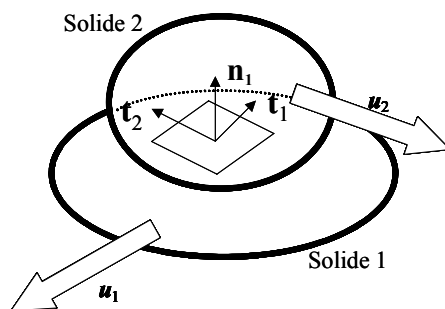
2 Formulation du modèle

2.1 Le critère de Coulomb

Soient 2 solides pouvant entrer en contact frottant :



Soient \mathbf{n} la normale sortante à la surface de contact, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ le déplacement suivant cette normale, g le jeu initial existant entre 2 solides, $\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ la force normale exercée par l'une des surfaces sur l'autre et $\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma_{nn} \mathbf{n}$ le cisaillement.



Plus précisément, pour deux solides (1) et (2) en contact : la zone de contact est soit ponctuelle, soit linéique soit surfacique. La force de cisaillement a alors pour direction dans la zone de contact un vecteur \mathbf{t} situé dans le plan tangent $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ indiqué sur la figure ci-dessus. On définit :

$$\mathbf{r} = (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_1) - ((\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 = r \mathbf{t}, \quad \|\mathbf{r}\| = \|\boldsymbol{\sigma}_t\|$$

la force de cisaillement exercée par le solide (2) sur le solide (1) par unité de surface de contact.

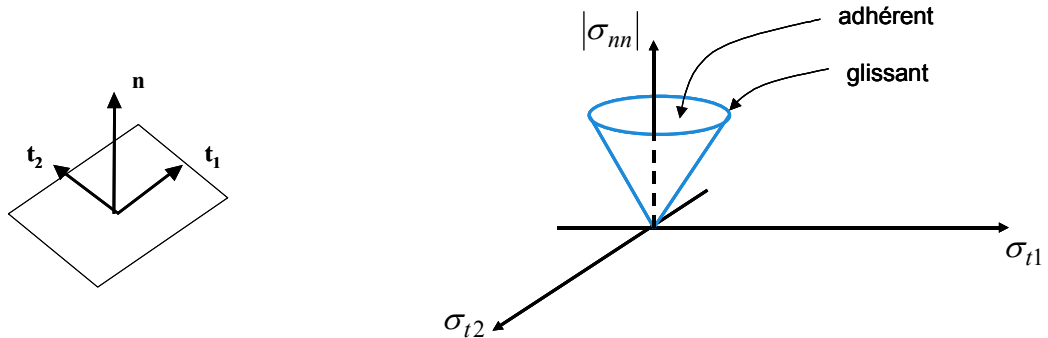
Ecrivons le système d'équations et d'inéquations devant être vérifié par ces grandeurs :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_1 \leq g \\ \sigma_{nn} \leq 0 \\ \sigma_{nn} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 - g) = 0 \\ \|\boldsymbol{\sigma}_t\| - \mu |\sigma_{nn}| \leq 0 \\ \dot{\mathbf{u}}_t = (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{t} = \lambda \mathbf{r} \\ \lambda (\|\boldsymbol{\sigma}_t\| - \mu |\sigma_{nn}|) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

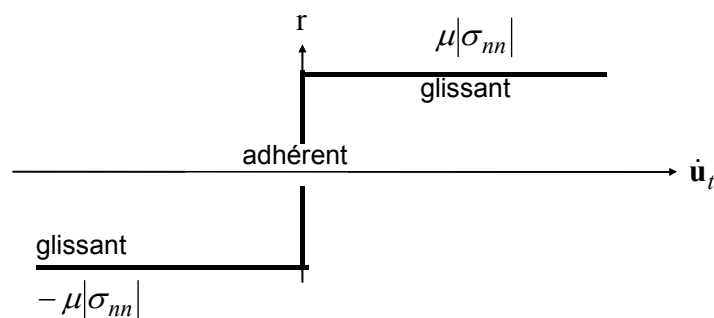
où \mathbf{n}_1 est la normale sortante au solide (1) et \mathbf{n}_2 la normale sortante au solide (2) opposée à \mathbf{n}_1 . Le premier jeu d'équations et d'inéquations correspond à la gestion du contact ; on ne le détaillera pas et nous renvoyons à [bib9]. Le second correspond à la description du frottement obéissant au critère de Coulomb. Il fait intervenir plusieurs champs et les lie entre eux : la pression normale, le cisaillement et le déplacement tangent. Il peut se comprendre comme suit :

- Si $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| < \mu|\sigma_{nn}|$,
 - $\lambda = 0$ et $\dot{\mathbf{u}}_t = 0$
- Si $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| = \mu|\sigma_{nn}|$,
 - $\lambda > 0$ et $\dot{\mathbf{u}}_t = \lambda \mathbf{r}$

On peut donner les interprétations graphiques suivantes :



Dans l'espace des contraintes, l'effort de contact frottant ne peut se trouver qu'à l'intérieur du cône de Coulomb : s'il est strictement à l'intérieur, le contact est adhérent ; s'il est sur la surface du cône, le contact est glissant. On peut donc donner une autre représentation de ce critère pour une situation de contact connue :



Le frottement induit la notion de seuil ; nous allons voir maintenant comment formuler de manière générale d'autres lois de frottement en utilisant cette notion.

2.2 Formulation générale pour différents critères

Les critères de frottement choisis sont de la forme :

$$g(\mathbf{r}) \leq 0$$

où $g(\mathbf{r})$ est une fonction convexe. Le domaine de non glissement est défini par l'intérieur du convexe.

Deux critères de frottement de la forme $g(\mathbf{r}) \leq 0$ sont particulièrement utilisés :

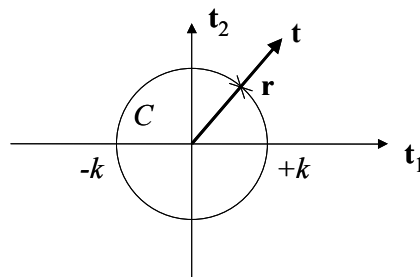
- le critère de Tresca où :

$$g(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\| - k \leq 0 \text{ et } k = \text{constante}$$

On note C le disque convexe C de rayon k centré à l'origine défini par :

$$C = \{ \mathbf{r} \mid \|\mathbf{r}\| \leq k \}.$$

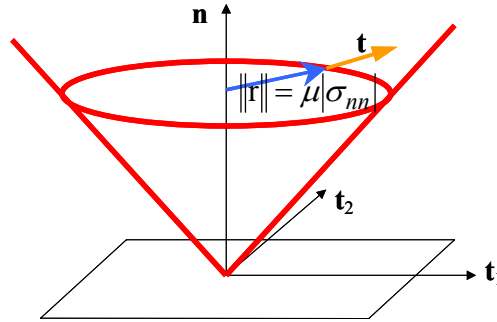
La condition de non glissement est alors définie par l'appartenance de \mathbf{r} à l'intérieur de C . En cas de glissement, pour \mathbf{r} situé sur la frontière de C , la direction de glissement \mathbf{t} de $\dot{\mathbf{u}}$ est donnée par la normale au critère en \mathbf{r} , comme indiqué ci-dessous :



- le critère de Coulomb où :

$$g(\mathbf{r}, \mu, \sigma_{nn}) = \|\mathbf{r}\| - k(\mu, \sigma_{nn}) \leq 0 \text{ et } k = \mu |\sigma_{nn}|$$

La valeur de k dépend de $\sigma_{nn} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \leq 0$ la composante normale de la force exercée par l'une des surfaces sur l'autre et de μ , le coefficient de frottement de Coulomb. En cas de glissement, pour \mathbf{r} situé sur la frontière de g qui est un cône, la direction de glissement \mathbf{t} de $\dot{\mathbf{u}}$ n'est pas donnée par la normale au critère en \mathbf{r} , mais par la normale au disque convexe C de rayon $k = \mu |\sigma_{nn}|$.



Détermination de la direction de glissement pour le critère de Coulomb dans le repère des vecteurs (t_1, t_2)

- le critère de Mohr-Coulomb où :

$$g(\mathbf{r}, \mu, \sigma_{nn}, c) = \|\mathbf{r}\| - k(\mu, \sigma_{nn}, c) \leq 0 \text{ et } k = c + \mu|\sigma_{nn}|$$

Il est particulièrement utilisé pour caractériser le comportement d'interfaces de géomatériaux (argiles notamment). c est la cohésion du matériau et μ le coefficient de friction ($\mu = \tan \phi$, où ϕ est l'angle de friction). De nouveau $\sigma_{nn} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} < 0$ pour que le contact reste maintenu.

2.3 Formulation par inclusions différentielles

On note V l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles du problème. La relation entre la vitesse de glissement relatif $\dot{\mathbf{u}}$ et la contrainte de cisaillement \mathbf{r} traduit les deux états possibles du système : non glissement ou glissement relatif suivant la direction normale au disque convexe C . Pour les trois critères présentés, la fonction $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ et sa réciproque $\mathbf{r}(\dot{\mathbf{u}})$ appartiennent toutes deux aux sous-différentiels de deux pseudo-potentiels conjugués, de telle sorte que l'on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{u}} \in \partial \Psi_c(\mathbf{r}) \text{ et } \mathbf{r} \in \partial \Psi_c^*(\dot{\mathbf{u}}).$$

L'apparition des inclusions différentielles provient du caractère non-différentiable des lois de contact-frottement. En effet, Ψ_c désigne la fonction indicatrice du disque convexe C de rayon k , centré à l'origine, précédemment défini. Elle est telle que :

$$\Psi_c(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{r} \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\partial\Psi_c(\mathbf{r})$ est alors le sous-différentiel de Ψ_c en \mathbf{r} . Il se confond avec la normale extérieure à C en \mathbf{r} . $\Psi_c^*(\dot{\mathbf{u}}) = k\|\dot{\mathbf{u}}\|$, où k est le seuil de résistance au frottement, est la conjuguée de Fenchel de la fonction indicatrice Ψ_c . $\Psi_c^*(\dot{\mathbf{u}})$ est positivement homogène de degré 1. Cette fonction s'interprète comme la densité de puissance dissipée dans le glissement. Utilisant les notions de sous-différentiel, on peut établir les relations suivantes pour $\dot{\mathbf{u}}$ et \mathbf{r} associés :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} \in \partial\Psi_c(\mathbf{r}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \Psi_c(\mathbf{r}) = 0 \\ \dot{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \leq 0, \forall \mathbf{r}' \in C \end{cases}; \\ \mathbf{r} \in \partial\Psi_c^*(\dot{\mathbf{u}}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \in V \\ \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) \leq \Psi_c^*(\dot{\mathbf{v}}) - \Psi_c^*(\dot{\mathbf{u}}), \forall \dot{\mathbf{v}} \in V \end{cases}; \\ \Psi_c^*(\dot{\mathbf{u}}) + \Psi_c(\mathbf{r}) &= \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} = k\|\dot{\mathbf{u}}\|. \end{aligned}$$

Remarques :

- 1) Les deux pseudo-potentiels conjugués présentés sont non différentiables.
- 2) Une fois connue la réaction normale pour le critère de Coulomb, on se ramène localement à un critère de frottement de Tresca dont le seuil vaut $k = \mu|\sigma_m|$.
- 3) Les critères locaux adoptés ayant une forme circulaire on en déduit que $\dot{\mathbf{u}} \in \partial\Psi_c(\mathbf{r})$ implique qu'il existe λ réel positif tel que $\dot{\mathbf{u}} = \lambda \mathbf{r}$.
- 4) La formulation du problème en vitesse suggère une résolution numérique incrémentale du problème du frottement. La résolution du problème d'équilibre sera donc présentée sous forme incrémentale.

2.4 Résolution du problème d'équilibre.

On considère deux solides de volume total Ω dont la surface de contact est Γ_c . Pour simplifier, on supposera l'existence d'une énergie de déformation différentiable pour caractériser la réponse des deux solides séparés à des sollicitations externes. En fait, on peut démontrer que les résultats donnés ci-après sont indépendants de cette hypothèse. On note V l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles, contraints par le respect des conditions de contact et de frottement sur l'interface.

L'équilibre des deux solides en l'absence de frottement s'écrit :

Trouver \mathbf{U} champ de déplacement cinématiquement admissible tel que :

$$\left\{ \mathbf{U} = \underset{\mathbf{v} \in V}{\operatorname{argmin}} [\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) - W(\mathbf{v})] \right\} \Leftrightarrow \{ \Phi(\mathbf{U}) - W(\mathbf{U}) \leq \Phi(\mathbf{v}) - W(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V \}.$$

En élasticité, $\Phi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega$ est l'énergie de déformation. La fonction $W(\mathbf{v})$ représente le travail des forces externes. Une condition nécessaire et qui devient suffisante si Φ est strictement convexe pour que cet équilibre soit vérifié est que :

$$D\Phi(\mathbf{U}) - DW(\mathbf{U}) = D\Phi(\mathbf{U}) - \mathbf{L}_{ext} = \mathbf{0}$$

où D est l'opérateur dérivée Gâteaux et \mathbf{L}_{ext} est la forme linéaire associée aux forces externes.

Avec l'introduction du frottement, le problème doit être abordé sous forme incrémentale. On est conduit [bib3] [bib4] au problème de minimisation suivant sur l'ensemble \bar{V} des champs cinématiquement admissibles contraints par le respect des conditions de contact et de frottement sur l'interface :

$$\begin{aligned} & \mathbf{U} \text{ connu, trouver } \Delta \mathbf{U} \in \bar{V} \text{ tel que :} \\ & \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U} = \underset{\Delta \mathbf{v} \in \bar{V}}{\operatorname{argmin}} [\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v})) + \Psi_c^*(\Delta \mathbf{v}_t) - W(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v})]. \end{aligned}$$

$\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$ est ainsi solution de :

$$\min_{\Delta \mathbf{v} \in \bar{V}} \left[\int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v})) d\Omega + \int_{\Gamma_c} k |\Delta \mathbf{v}_t| d\Gamma_c - W(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v}) \right].$$

où $\Delta \mathbf{v}_t$ est la composante tangentielle de l'incrément de déplacement relatif du solide 2 par rapport au solide 1 le long de la surface de contact, avec les conventions adoptées au [§2.1].

Utilisant les relations $\Psi_c^*(\Delta \mathbf{v}_t) = k |\Delta \mathbf{v}_t|$ et $\Psi_c^*(\Delta \mathbf{v}_t) \geq \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}_t$ si $\mathbf{r} \in C$ on en déduit que $\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$ est solution du problème de MinMax suivant, sur l'espace V des champs cinématiquement admissibles :

$$\underset{\Delta \mathbf{v} \in V}{\operatorname{Min}} \underset{\mathbf{r}}{\operatorname{Max}} J(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v}, \mathbf{r})$$

où :

$$J(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v})) d\Omega + \int_{\Gamma_c} (\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}_t - \Psi_c(\mathbf{r})) d\Gamma_c - W(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{v})$$

La présence de la fonction indicatrice dans cette expression indique que le cisaillement \mathbf{r} sur la surface de contact Γ_c appartient au disque convexe de frottement C .

2.5 Formulation variationnelle

Si φ est convexe, le problème de *MinMax* à résoudre se met de façon équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \Delta \mathbf{U} \in V \text{ et } \mathbf{r} \in C, \text{ ensemble de variables indépendantes tel que :} \\ & \delta J(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}, \mathbf{r}) \ni 0 \end{aligned}$$

Ceci revient à résoudre le système d'équations à l'équilibre suivant :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U})) \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{r} \delta \mathbf{v}_t d\Gamma_c - \mathbf{L}_{ext} \delta \mathbf{v} = 0, \\ & \int_{\Gamma_c} \delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{U}_t d\Gamma_c - \partial \Psi_c(\mathbf{r}) \ni 0, \end{aligned}$$

ou encore de manière équivalente :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U})) \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega + (\mathbf{L}_{frot} - \mathbf{L}_{ext}) \delta \mathbf{v} &= 0, \\ \Delta \mathbf{U}_t &\in \partial \Psi_c(\mathbf{r}), \\ \mathbf{r} &= (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{t} \text{ sur } \Gamma_c. \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente, \mathbf{L}_{ext} est la forme linéaire associée aux forces externes. La forme linéaire \mathbf{L}_{frot} est associée aux forces de cisaillement exercées par le solide 2 sur la surface de contact du solide 1. On notera aussi que la formulation variationnelle permet de retrouver non seulement les équations d'équilibre du système mais aussi l'appartenance de $\Delta \mathbf{U}_t$ au sous-différentiel de Ψ_c .

3 Contact frottant 2D et 3D dans le Code_Aster

Nous avons vu précédemment la formulation continue du problème de contact frottant. Nous allons maintenant examiner comment il s'exprime sous forme discrète.

3.1 Formulation du problème

A chaque pas de temps n , on cherche à vérifier l'équilibre global de la structure :

$$\mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n) = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{cont} - \mathbf{L}_{frot}$$

où :

- \mathbf{L}_{int} est l'opérateur de calcul des forces internes
- \mathbf{L}_{ext} est le vecteur des forces extérieures
- \mathbf{L}_{cont} est le vecteur des forces de contact
- \mathbf{L}_{frot} est le vecteur des forces de frottement

En outre, le champ de déplacement \mathbf{U}_n est soumis à un ensemble de conditions égalité et inégalité qui se comprennent liaison par liaison :

- $\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{U}_n) \leq \mathbf{d}_{nc}$
- $\mathbf{A}_c(\mathbf{U}_n) = \mathbf{d}_c$
- $\mathbf{A}_{sg}(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{A}_g(\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}) = \lambda \mathbf{L}_{frot}$ où $\lambda \geq 0$

où

- L : ensemble des liaisons de contact possibles (actives et non actives)
- NC : ensemble des nœuds de surfaces potentielles de contact qui ne sont pas en contact (liaisons non actives)
- C : ensemble des nœuds effectivement en contact (liaisons actives)
- SG : ensemble des nœuds de contact adhérents
- G : ensemble des nœuds de contact glissants
- $C = SG \oplus G$, $C \cap NC = \emptyset$, $L = C \oplus NC$
- \mathbf{A}_c est la matrice des nœuds en contact
- \mathbf{A}_{sg} est la matrice des nœuds en contact adhérent
- \mathbf{A}_g est la matrice des nœuds en contact glissant

Du fait de la nature incrémentale de la résolution de l'équilibre, on peut réécrire ces équations et inéquations sous la forme :

$$\mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{cont}^i - \mathbf{L}_{frot}^i$$

soumis à :

- $\mathbf{A}_c(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \mathbf{d}_c$ soit $\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_c^{i-1}$ avec
 $\mathbf{d}_c^{i-1} = \mathbf{d}_c - \mathbf{A}_c(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}) = \mathbf{d}_c - \mathbf{A}_c \mathbf{U}_n^{i-1} = \mathbf{d}_c^{i-2} - \mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}_n^{i-1}$
- $\mathbf{A}_{sg}(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \mathbf{0}$ soit $\mathbf{A}_{sg} \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_{sg}^{i-1}$
- $\mathbf{A}_g(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \lambda \mathbf{L}_{frot}^i$ où $\lambda \geq 0$

Nous disposons de la formulation discrétisée d'un problème de contact frottant. Nous allons voir les différentes manières de prendre en compte l'ensemble de conditions (ou contraintes) égalité et inégalité qui portent sur le champ de déplacements : dualisation ou régularisation.

3.2 Dualisation des conditions de contact et de frottement

Pour prendre en compte les contraintes portant sur le champ de déplacements, il est possible de les dualiser *i.e.* de les faire intervenir dans l'équilibre au travers de multiplicateurs de Lagrange (comme cela est fait pour les conditions aux limites cinématiques dans le code). Sont introduits 3 ensembles de multiplicateurs de Lagrange :

- μ_c portant sur les conditions de contact
- μ_{sg} portant sur les conditions d'adhérence
- μ_g portant sur les conditions de glissement

L'équilibre s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) + \mathbf{A}_c^T \mu_c^i + \mathbf{A}_{sg}^T \mu_{sg}^i + \mathbf{A}_g^T \mu_g^i = \mathbf{L}_{ext}$$

soumis à :

- $\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_c^{i-1}$
- $\mathbf{A}_{sg} \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_{sg}^{i-1}$
- $\mathbf{A}_g (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \lambda \mu_g^i$ où $\lambda \geq 0$ et $\|\mu_g^i\| = k_g^i = \mu \|\mu_c^i\|$

Ce système permet l'interprétation suivante des multiplicateurs de Lagrange :

- $\mathbf{A}_c^T \mu_c^i$ est l'ensemble des forces nodales de contact
- $\mathbf{A}_{sg}^T \mu_{sg}^i$ est l'ensemble des forces nodales d'adhérence
- $\mathbf{A}_g^T \mu_g^i$ est l'ensemble des forces nodales de glissement

Remarque :

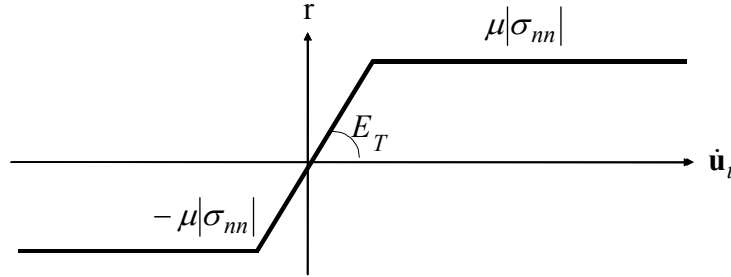
- 1) Dans l'expression de l'équilibre, la condition de contact est devenue une égalité. En effet, cette équation est écrite pour les nœuds vraiment en contact (pour les liaisons actives). C'est une logique qui s'inspire de la méthode des contraintes actives implantée dans le code pour le traitement du contact unilatéral [bib9]. Il est néanmoins impératif de vérifier la condition :

$$\mu_c^i > 0$$

- 2) En effet : Pour une liaison l'opérateur \mathbf{A}_c associe aux champs de déplacements \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 la somme des déplacements relatifs $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2$ par rapport aux normales à la surface de contact soit le scalaire $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_1$. L'opérateur \mathbf{A}_c^T associe au scalaire μ_c les forces nodales $\mu_c \mathbf{n}_1$ et $\mu_c \mathbf{n}_2$ s'appliquant aux solides (1) et (2) respectivement. Ces forces nodales sont équivalentes à des forces extérieures $-\mu_c \mathbf{n}$ s'appliquant aux solides (1) et (2) respectivement, ce qui revient à transférer le terme $\mathbf{A}_c^T \mu_c^i$ de l'équation d'équilibre de gauche à droite. A un terme scalaire surfacique près $-\mu_c \mathbf{n}$ est équivalent à $\sigma_{nn} \mathbf{n}$ ce qui implique la positivité de μ_c en cas de contact.
- 3) On vérifie aussi que pour les liaisons non actives on a bien : $\mathbf{A}_{nc} \delta \mathbf{U}^i \leq \mathbf{d}_{nc}^{i-1}$.
- 4) Les matrices $\mathbf{A}_{nc}, \mathbf{A}_c, \mathbf{A}_{sg}, \mathbf{A}_g$ varient au cours des itérées. Nous expliciterons ces variations plus en détail au [§4].

3.3 Dualisation des conditions de contact, régularisation des conditions de frottement

Il est possible de dualiser les conditions de contact et de régulariser les conditions de frottement. On entend par là le fait de faciliter le traitement du frottement en supprimant de son graphe la pente infinie en 0 i.e. :



Ce graphe appelle plusieurs commentaires :

- la notion d'adhérence à proprement parlé a disparu, tous les nœuds glissent. On la définit néanmoins par :
le nœud i est « adhérent » si, étant donné $\mathbf{r} = E_T \dot{\mathbf{u}}_t$, $\|\mathbf{r}\| < \mu |\sigma_{nn}|$
- plus la pente E_T est forte, plus le graphe régularisé se rapproche du graphe non régularisé
- en fait de régularisation des conditions de frottement, il s'agit plutôt de régularisation des conditions d'adhérence

Compte tenu des remarques précédentes, on réécrit l'équilibre sous la forme :

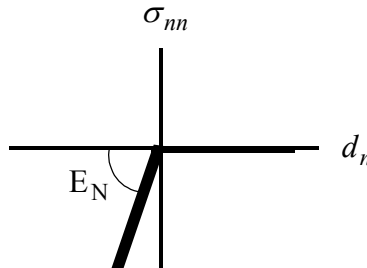
$$\mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) + \mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\mu}_c^i + E_T \mathbf{A}_{sg}^T \mathbf{A}_{sg} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) + \mathbf{A}_g^T \boldsymbol{\mu}_g^i = \mathbf{L}_{ext}$$

soumis à :

- $\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_c^{i-1}$
- $\|E_T \mathbf{A}_{sg} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\| < \mu \|\boldsymbol{\mu}_c^i\|$
- $\mathbf{A}_g (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \lambda \boldsymbol{\mu}_g^i$ où $\lambda \geq 0$ et $\|\boldsymbol{\mu}_g^i\| = k_g^i = \mu \|\boldsymbol{\mu}_c^i\|$

3.4 Régularisation des conditions de contact et de frottement

Avec la même logique qu'au paragraphe précédent, on définit le graphe de la loi de contact régularisée :



Et on en déduit la forme de l'équilibre :

$$\mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) + E_N \mathbf{A}_c^T (\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1}) + E_T \mathbf{A}_{sg}^T \mathbf{A}_{sg} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) + \mathbf{A}_g^T \boldsymbol{\mu}_g^i = \mathbf{L}_{ext}$$

soumis à :

- $\|E_T \mathbf{A}_{sg} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\| < \mu \|E_N (\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1})\|$
- $\mathbf{A}_g (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \lambda \boldsymbol{\mu}_g^i$ où $\lambda \geq 0$ et $\|\boldsymbol{\mu}_g^i\| = k_g^i = \mu \|E_N (\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1})\|$

Remarque :

Le terme $E_N \mathbf{A}_c^T (\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1})$ n'est calculé que pour les liaisons actives. L'utilisation de l'opérateur partie positive $[x]^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ permet une écriture compacte de la loi de contact régularisée pour toutes les liaisons possibles sous la forme $E_N \mathbf{A}_c^T [\mathbf{A}_c \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1}]^+$. Il serait possible de l'utiliser pour écrire la loi d'adhérence régularisée. Nous avons préféré conserver la partition entre les différents états des liaisons car cette présentation est plus proche de l'intégration numérique dans le code.

4 Résolution algorithmique

4.1 Linéarisation des différents termes

C'est la méthode de Newton qui est utilisée dans le *Code_Aster* pour la résolution des problèmes non linéaires [bib8]. Il est de fait nécessaire de linéariser les différents termes apparaissant dans l'expression de l'équilibre.

4.1.1 Forces internes

La linéarisation de l'opérateur de forces internes par rapport à $\delta \mathbf{U}^i$ conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) &\approx \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{L}_{int}}{\partial \delta \mathbf{U}^i} \right|_{\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}} \cdot \delta \mathbf{U}^i \\ &\approx \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_{n-1} + \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}) + \mathbf{K}_n^i \cdot \delta \mathbf{U}^i \end{aligned}$$

\mathbf{K}_n^i est la matrice tangente cohérente qui inclut les non-linéarités comportementale et géométrique.

4.1.2 Forces de contact

En l'absence de régularisation des forces de contact, on ne procède à aucune linéarisation. Dans le cas contraire, on a la linéarisation :

$$\mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\mu}_c^i \approx \mathbf{A}_c^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_c^i \approx E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{A}_c^{i-1} \delta \mathbf{U}^i - E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{d}_c^{i-1}$$

Remarques :

- Lors de la linéarisation de $\mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\mu}_c^i$ est apparu l'indice $i-1$ dans la matrice de contact \mathbf{A}_c^{i-1} . En effet, lors de la détermination de $\delta \mathbf{U}^i$, seul l'état de contact frottant à l'itération $i-1$ est connu.
- Le terme $E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{A}_c^{i-1}$ apporte une nouvelle contribution à la matrice tangente du problème, tandis que le terme $E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{d}_c^{i-1}$ apporte une nouvelle contribution au second membre.

4.1.3 Forces de glissement

Compte tenu de la définition des forces de glissement, elles peuvent s'exprimer :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_g^i &= \mu \left| \boldsymbol{\mu}_c^i \right| \frac{\mathbf{A}_g(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\left\| \mathbf{A}_g(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) \right\|} \\ &= k_g^i \frac{\mathbf{A}_g(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\left\| \mathbf{A}_g(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) \right\|} \end{aligned}$$

Elles vérifient en effet les conditions :

$$\mathbf{A}_g(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) = \lambda \boldsymbol{\mu}_g^i \text{ où } \lambda \geq 0 \text{ et } \left\| \boldsymbol{\mu}_g^i \right\| = k_g^i = \mu \left| \boldsymbol{\mu}_c^i \right|$$

et font apparaître les deux inconnues $\left| \boldsymbol{\mu}_c^i \right|$ et $\delta \mathbf{U}^i$.

Dans la pratique, cependant, on considère que la connaissance du seuil de glissement est acquise à l'itération précédente, ce qui revient à se ramener à un critère de Tresca pour chaque itération. A convergence le seuil est évidemment fixe : il n'y a donc plus de différences entre les seuils au cours des itérations. Une autre approche, utilisée dans [R5.03.52], revient à résoudre, pour chaque état de contact, la solution avec frottement et ainsi considérer que le seuil de glissement est un point fixe. Notre approche s'inspire de ce type de méthode en étant moins contraignante et donc moins coûteuse en temps CPU mais peut être moins robuste.

μ_g^i est donc approximé par :

$$\begin{aligned}\mu_g^i &\approx \mu_c^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1}(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\|\mathbf{A}_g^{i-1}(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\|} \\ &\approx k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1}(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\|\mathbf{A}_g^{i-1}(\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\|}\end{aligned}$$

La linéarisation de μ_g^i par rapport à $\delta \mathbf{U}^i$ dans l'expression donnée précédemment conduit à la formulation suivante :

$$\mu_g^i \approx k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} + k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \delta \mathbf{U}^i}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} - k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} \cdot \mathbf{A}_g^{i-1} \delta \mathbf{U}^i}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|^2}$$

qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}\mu_g^i &\approx k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} + k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \delta \mathbf{U}^i}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} - k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} \frac{\Delta \mathbf{U}_n^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1} \delta \mathbf{U}^i}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|^2} \\ &\approx \mu_g^{i-1} + k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \delta \mathbf{U}^i}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} - k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} \frac{\Delta \mathbf{U}_n^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1} \delta \mathbf{U}^i}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|^2}\end{aligned}$$

Remarques :

- Les termes $k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} - k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} \frac{\Delta \mathbf{U}_n^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|^2}$ apportent de nouvelles contributions à la matrice tangente du problème.
- En 2D, μ_g^i se linéarise en $k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} = \mu_g^{i-1}$ qui est indépendant de $\delta \mathbf{U}^i$, il n'y a donc pas de nouvelles contributions à la matrice tangente.

4.1.4 Forces d'adhérence

En l'absence de régularisation des forces d'adhérence, on ne procède à aucune linéarisation. Dans le cas contraire, on a la linéarisation :

$$\mathbf{A}_{sg}^T \mu_g^i \approx \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mu_g^i \approx E_T \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mathbf{A}_{sg}^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + E_T \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mathbf{A}_{sg}^{i-1} \delta \mathbf{U}^i$$

4.1.5 Remarque

Les matrices de contact \mathbf{A}_c , de glissement \mathbf{A}_g et de non glissement \mathbf{A}_{sg} sont amenées à être modifiées au cours des itérations de Newton si des contacts changent de statut ou si une réactualisation géométrique a lieu : elles sont donc indicées \mathbf{A}_c^i , \mathbf{A}_g^i et \mathbf{A}_{sg}^i . Dans le cas contraire \mathbf{A}_c^i , \mathbf{A}_g^i et \mathbf{A}_{sg}^i ne varient pas au cours des itérées.

5 Résolution

La résolution à proprement parler est abordée dans cette partie. Seront présentés le système global résolu dans le cadre de la méthode de Newton et l'algorithme de traitement du contact frottant (sous-itération). L'état initial à l'itération $i=1$ pour toutes ces méthodes correspond à la résolution d'un problème sans contact ni frottement. S'il n'y a effectivement pas de contact détecté, cet état initial correspond à la solution du problème dans le cas élastique linéaire par exemple, sinon il est modifié dès cette itération afin de prendre en compte les liaisons qui violeraient les conditions de contact unilatéral.

5.1.1 Dualisation des conditions de contact et de frottement en 2D

Méthode de Newton :

- A l'itération i , au niveau global, résolution du système (on ne fait volontairement pas apparaître les conditions de Dirichlet) :

$$\mathbf{K}_n^i \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_c^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_c^i - \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_{sg}^i - \mathbf{A}_g^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_g^{i-1}$$

Algorithme de contact frottant :

- Détermination des liaisons en contact
 - Etat initial : $NC_n^0 = L$, $C_n^0 = \emptyset$, $SG_n^0 = \emptyset$, $G_n^0 = \emptyset$. Tous les points de la surface potentielle de contact sont non-contactant.
 - Si $i=1$ premier calcul élastique sans prise en compte du contact. Soit alors $C_n^1 = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^1 = \mathbf{d}_{nc}^0 - \mathbf{A}_{nc} \delta \mathbf{U}^1 < 0 \}$. Si $C_n^1 = \emptyset$ la solution sans contact est valide. Si $C_n^1 \neq \emptyset$ alors $SG_n^1 = C_n^1$, $G_n^1 = \emptyset$ et résolution du système d'équations ci-dessus avec les nouvelles conditions pour l'itération 1.
 - Si réactualisation géométrique $C_n^i = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^i < 0 \}$, $G_n^i = G_n^{i-1} \cap C_n^i$ et $SG_n^i = C_n^i - G_n^i$.
 - Sinon $C_n^i = C_n^{i-1}$, $SG_n^i = SG_n^{i-1}$, $G_n^i = G_n^{i-1}$
- Résolution du système

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n^i \delta \mathbf{U}^i + \mathbf{A}_{c+sg}^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_{c+sg}^i &= \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_g^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_g^{i-1} \\ \mathbf{A}_{c+sg}^{i-1} \delta \mathbf{U}^i &= \mathbf{d}_{c+sg}^{i-1} \end{aligned}$$

On effectue pour cela une résolution par blocs :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{c+sg}^{i-1} \mathbf{K}_n^{i-1} \mathbf{A}_{c+sg}^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_{c+sg}^i &= \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_g^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_g^{i-1} \\ \delta \mathbf{U}^i &= \mathbf{K}_n^{i-1} (\mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_g^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_g^{i-1} - \mathbf{A}_{c+sg}^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_{c+sg}^i) \end{aligned}$$

- Vérification de l'état des liaisons glissantes
 - Si pour une liaison j $\mu_g^{i-1T} \cdot \mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) < 0$, $G_n^i = G_n^i - \{j\}$ et $SG_n^i = SG_n^i + \{j\}$
 - Sinon $\mu_g^i = \mu \left| \mu_c^i \right| \frac{\mathbf{A}_g^i (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\left\| \mathbf{A}_g^i (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) \right\|}$
 - Si au moins une liaison a changé d'état, retour à la résolution du système d'équations pour la même itération i , mais avec les liaisons non glissantes repérées ci-dessus.
- Vérification de l'état des liaisons adhérentes
 - Si pour une liaison j $\left\| \mu_{sg}^i \right\| \geq \mu \left| \mu_c^i \right|$, $\mu_g^i = \mu \left| \mu_c^i \right| \frac{\mu_{sg}^i}{\left\| \mu_{sg}^i \right\|}$, $SG_n^i = SG_n^i - \{j\}$ et $G_n^i = G_n^i + \{j\}$
- Vérification de l'état des liaisons de contact
 - Si la liaison j supposée non active est active, la plus violée, i.e. celle dont le jeu est le plus négatif, est rajoutée à l'ensemble des liaisons actives, $C_n^i = C_n^i + \{j\}$ et $G_n^i = G_n^i + \{j\}$, retour à la résolution du système d'équations pour la même itération i , mais avec les liaisons non glissantes repérées ci-dessus.
 - Si pour une liaison j $\mu_c^i < 0$, $C_n^i = C_n^i - \{j\}$ $SG_n^i = SG_n^i - \{j\}$ $G_n^i = G_n^i - \{j\}$ (en fonction du type de la liaison)
- Mise à jour $\delta \mathbf{U}^i$, μ_c^i , μ_g^i , μ_{sg}^i , \mathbf{A}_{c+sg}^i et \mathbf{A}_g^i .

5.1.2 Dualisation des conditions de contact et régularisation du frottement en 2D et 3D

Pour cette modélisation, l'algorithme est le même pour le 2D et le 3D.

Méthode de Newton :

- A l'itération i , au niveau global, résolution du système :

$$(\mathbf{K}_n^i + \mathbf{K}_n^{Fi}) \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_c^{i-1T} \mu_c^i - \mathbf{A}_g^{i-1T} \mu_g^{i-1} - \overline{\mathbf{K}}_n^{Fi} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}$$

Remarques :

- La matrice $\mathbf{K}^{F^i}_n$ contient les contributions de termes de glissement et d'adhérence soit :

$$\mathbf{K}^{F^i}_n = E_T \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mathbf{A}_{sg}^{i-1} + k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} - \theta k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} \frac{\Delta \mathbf{U}_n^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|^2}$$

- Dans l'expression précédente, une contribution est précédée du signe -. L'ordre des termes de cette contribution est le même que celui des autres termes. L'effet de cette contribution est particulièrement déstabilisant pour le comportement global de la matrice tangente au système, plus particulièrement lorsque l'on est loin de l'équilibre et donc au début de la résolution à chaque nouveau pas de temps. On décide donc de ne le prendre en compte que partiellement en l'affectant d'un coefficient $\theta \in [0,1]$. On conseille d'utiliser une valeur initiale de 0.5 pour ce coefficient et de le diminuer si la convergence n'est pas obtenue. Dans le cas où $\theta = 0$ la convergence semble toujours être obtenue mais est particulièrement lente. Lorsque l'on est proche de la solution, il est par contre très utile d'avoir une valeur de ce coefficient égale à 1 de façon à accélérer la convergence. Cela est fait automatiquement dans le code lorsque le résidu `RESI_GLOB_RELA` est inférieur à 10^{-3} .
- La matrice $\overline{\mathbf{K}}^{F^i}_n$ contient les contributions des nouveaux seconds membres d'adhérence, soit :

$$\overline{\mathbf{K}}^{F^i}_n = E_T \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mathbf{A}_{sg}^{i-1}$$

Algorithme de contact frottant :

- Détermination des liaisons en contact
 - Etat initial : $NC_n^0 = L$, $C_n^0 = \emptyset$, $SG_n^0 = \emptyset$, $G_n^0 = \emptyset$. Tous les points de la surface potentielle de contact sont non-contactant.
 - Si $i=1$ premier calcul élastique sans prise en compte du contact. Soit alors $C_n^1 = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^1 = \mathbf{d}_{nc}^0 - \mathbf{A}_{nc} \delta \mathbf{U}^1 < 0 \}$, $G_n^1 = C_n^1$, $SG_n^1 = \emptyset$. Si $C_n^1 = \emptyset$ la solution sans contact est valide. Si $C_n^1 \neq \emptyset$ alors $SG_n^1 = C_n^1$, $G_n^1 = \emptyset$ et résolution du système avec les nouvelles conditions pour l'itération 1.
 - Si réactualisation géométrique $C_n^i = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_n^i < 0 \}$, $G_n^i = G_n^{i-1} \cap C_n^i$ et $SG_n^i = C_n^i - G_n^i$.
 - Sinon $C_n^i = C_n^{i-1}$, $SG_n^i = SG_n^{i-1}$, $G_n^i = G_n^{i-1}$
- Résolution du système

$$(\mathbf{K}_n^i + \mathbf{K}^{F^i}_n) \delta \mathbf{U}^i + \mathbf{A}_c^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_c^i = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_g^{i-1T} \boldsymbol{\mu}_g^{i-1} - \overline{\mathbf{K}}^{F^i}_n \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}$$

$$\mathbf{A}_c^{i-1} \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_c^{i-1}$$

On effectue comme précédemment une résolution par blocs.

- Pour toutes les liaisons, $\boldsymbol{\mu}_g^i = \mu \left| \boldsymbol{\mu}_c^i \right| \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\|}$

- Vérification de l'état des liaisons de contact
 - Si la liaison j supposée non active est active, la plus violée, i.e. celle dont le jeu est le plus négatif, est rajoutée à l'ensemble des liaisons actives $C_n^i = C_n^i + \{j\}$ et $G_n^i = G_n^i + \{j\}$, retour à la résolution du système d'équations pour la même itération i , mais avec les liaisons non glissantes repérées ci-dessus.
 - Si pour une liaison j $\mu_c^i < 0$, $C_n^i = C_n^i - \{j\}$ $G_n^i = G_n^i - \{j\}$
- Vérification de l'état des liaisons glissantes et « adhérentes »
 - Si pour une liaison j $E_T \|\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\| < \mu \|\mu_c^i\| = \|\mu_g^i\|$, alors $\mu_{sg}^i = E_T \mathbf{A}_{sg}^i (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)$, $SG_n^i = SG_n^i + \{j\}$ et $G_n^i = G_n^i - \{j\}$.
- Calcul des matrices tangentes \mathbf{K}_n^{Fi} et $\bar{\mathbf{K}}_n^{Fi}$ (si RESI_GLOB_RELA < 1.E-3, $\theta = 1.$)
- Mise à jour $\delta \mathbf{U}^i$, μ_c^i , μ_g^i , μ_{sg}^i , \mathbf{A}_c^i , \mathbf{A}_{sg}^i et \mathbf{A}_g^i .

5.1.3 Régularisation des conditions de contact et de frottement en 2D et 3D

Pour cette modélisation, l'algorithme est le même pour le 2D et le 3D.

Méthode de Newton :

- A l'itération i , au niveau global, résolution du système :

$$(\mathbf{K}_n^i + \mathbf{K}_n^{Fi}) \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_g^{i-1T} \mu_g^{i-1} - \bar{\mathbf{K}}_n^{Fi} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{d}_c^{i-1}$$

Remarques :

- La matrice \mathbf{K}_n^{Fi} contient les contributions de termes de contact, de glissement et d'adhérence soit :

$$\mathbf{K}_n^{Fi} = E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{A}_c^{i-1} + E_T \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mathbf{A}_{sg}^{i-1} + k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} - \theta k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|} \frac{\Delta \mathbf{U}_n^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1}}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}\|^2}$$

- La matrice $\bar{\mathbf{K}}_n^{Fi}$ contient les contributions des nouveaux seconds membres d'adhérence, soit :

$$\bar{\mathbf{K}}_n^{Fi} = E_T \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mathbf{A}_{sg}^{i-1}$$

- Le terme $-E_N \mathbf{A}_c^{i-1T} \mathbf{d}_c^{i-1}$ contient les contributions des nouveaux seconds membres de contact.

Algorithme de contact frottant :

- Détermination des liaisons en contact
 - Etat initial : $NC_n^0 = L$, $C_n^0 = \emptyset$, $SG_n^0 = \emptyset$, $G_n^0 = \emptyset$. Tous les points de la surface potentielle de contact sont non-contactant.
 - Si $i=1$ premier calcul élastique sans prise en compte du contact. Soit alors $C_n^1 = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^1 = \mathbf{d}_{nc}^0 - \mathbf{A}_{nc} \delta \mathbf{U}^1 < 0 \}$, $G_n^1 = C_n^1$, $SG_n^1 = \emptyset$ et $\mu_c^1 = E_N (\mathbf{A}_c^1 \delta \mathbf{U}^1 - \mathbf{d}_c^0)$.
 - Si réactualisation géométrique $C_n^i = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^i < 0 \}$, $G_n^i = C_n^i$, $SG_n^i = \emptyset$
 - Sinon soit $C_n^i = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^i < 0 \}$, $\mu_c^i = E_N (\mathbf{A}_c^i \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1})$, $G_n^i = C_n^i$, $SG_n^i = \emptyset$
- Pour toutes les liaisons, $\mu_g^i = \mu \left| E_N (\mathbf{A}_c^i \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1}) \right| \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\left\| \mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) \right\|}$
- Vérification de l'état des liaisons glissantes et « adhérentes »
 - Si pour une liaison j $\left\| E_T \mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) \right\| < \mu \left| E_N (\mathbf{A}_c^i \delta \mathbf{U}^i - \mathbf{d}_c^{i-1}) \right|$, alors $\mu_{sg}^i = E_T \mathbf{A}_{sg}^i (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)$, $SG_n^i = SG_n^i + \{j\}$ et $G_n^i = G_n^i - \{j\}$
- Calcul des matrices tangentes \mathbf{K}_n^{Fi} et $\bar{\mathbf{K}}_n^{Fi}$ (si $\text{RESI_GLOB_RELA} < 1.E-3$, $\theta = 1$)
- Mise à jour $\delta \mathbf{U}^i$, μ_c^i , μ_g^i , μ_{sg}^i , \mathbf{A}_c^i , \mathbf{A}_{sg}^i et \mathbf{A}_g^i .

5.1.4 Dualisation des conditions de contact et de frottement en 3D

Pour la résolution de ce problème, on définit le statut des liaisons à l'aide de régularisation : initialement toutes les liaisons adhérentes sont traitées par régularisation avec un terme de pénalisation E_T déterminé par le code. On augmente ensuite itérativement la valeur de E_T par $E_T = 10 E_T$ et on enlève les liaisons ne vérifiant pas la condition $E_T \left\| \mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i) \right\| < \mu \left| \mu_c^i \right|$. Lorsque le processus est stabilisé, les liaisons adhérentes et les liaisons glissantes sont traitées par multiplicateurs de Lagrange et la pénalisation n'apparaît pas.

Méthode de Newton :

- A l'itération i , au niveau global, résolution du système (on ne fait volontairement pas apparaître les conditions de Dirichlet) :

$$(\mathbf{K}_n^i + \mathbf{K}_n^{Fi}) \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_c^{i-1T} \mu_c^i - \mathbf{A}_{sg}^{i-1T} \mu_{sg}^i - \mathbf{A}_g^{i-1T} \mu_g^{i-1}$$

Remarque :

- La matrice \mathbf{K}_n^{Fi} contient les contributions de termes de glissement soit :

$$\mathbf{K}_n^{Fi} = k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1}}{\left\| \mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} \right\|} - \theta k_g^{i-1} \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1}}{\left\| \mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} \right\|} \frac{\Delta \mathbf{U}_n^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1T} \mathbf{A}_g^{i-1}}{\left\| \mathbf{A}_g^{i-1} \Delta \mathbf{U}_n^{i-1} \right\|^2}$$

Algorithme de contact frottant :

- Détermination des liaisons en contact
 - Etat initial : $NC_n^0 = L$, $C_n^0 = \emptyset$, $SG_n^0 = \emptyset$, $G_n^0 = \emptyset$. Tous les points de la surface potentielle de contact sont non-contactant.
 - Si $i=1$, $C_n^1 = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^1 = \mathbf{d}_{nc}^0 - \mathbf{A}_{nc} \delta \mathbf{U}^1 < 0 \}$, $SG_n^1 = C_n^1$, $G_n^1 = \emptyset$,
 $E_T = (\text{Max}\{\text{termes diagonaux de } \mathbf{K}_n^1\})^{0.25}$
 - Si réactualisation géométrique, $C_n^i = \{ \text{liaisons t.q. } \mathbf{d}_{nc}^i < 0 \}$, $G_n^i = G_n^{i-1} \cap C_n^i$ et
 $SG_n^i = C_n^i - G_n^i$.
 - Sinon $C_n^i = C_n^{i-1}$, $SG_n^i = SG_n^{i-1}$, $G_n^i = G_n^{i-1}$

- Résolution du système

$$\mathbf{K}_n^i \delta \mathbf{U}^i + \mathbf{A}_{c+sg}^{i-1 T} \boldsymbol{\mu}_{c+sg}^i = \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) - \mathbf{A}_g^{i-1 T} \boldsymbol{\mu}_g^{i-1}$$

$$\mathbf{A}_{c+sg}^{i-1} \delta \mathbf{U}^i = \mathbf{d}_{c+sg}^{i-1}$$

On effectue pour cela une résolution par blocs comme précédemment.

- Vérification de l'état des liaisons de contact
 - Si la liaison j supposée non active est active, la plus violée, i.e. celle dont le jeu est le plus négatif, est rajoutée à l'ensemble des liaisons actives, $C_n^i = C_n^i + \{j\}$ et $G_n^i = G_n^i + \{j\}$, retour à la résolution du système d'équations pour la même itération i , mais avec les liaisons non glissantes repérées ci-dessus.
 - Si pour une liaison j $\boldsymbol{\mu}_c^i < 0$, $C_n^i = C_n^i - \{j\}$, $SG_n^i = SG_n^i - \{j\}$, $G_n^i = G_n^i - \{j\}$ (en fonction du type de la liaison)
- Vérification de l'état des liaisons adhérentes
 - Si pour une liaison j $\|\boldsymbol{\mu}_{sg}^i\| \geq \mu \|\boldsymbol{\mu}_c^i\|$, $\boldsymbol{\mu}_g^i = \mu \|\boldsymbol{\mu}_c^i\| \frac{\boldsymbol{\mu}_{sg}^i}{\|\boldsymbol{\mu}_{sg}^i\|}$, $SG_n^i = SG_n^i - \{j\}$ et
 $G_n^i = G_n^i + \{j\}$
- Vérification de l'état des liaisons glissantes
 - Si pour une liaison j $E_T \|\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\| < \mu \|\boldsymbol{\mu}_c^i\|$, $G_n^i = G_n^i - \{j\}$ et
 $SG_n^i = SG_n^i + \{j\}$
 - Sinon $\boldsymbol{\mu}_g^i = \mu \|\boldsymbol{\mu}_c^i\| \frac{\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)}{\|\mathbf{A}_g^{i-1} (\Delta \mathbf{U}_n^{i-1} + \delta \mathbf{U}^i)\|}$
 - Si au moins une liaison a changé d'état, i.e. on a détecté une liaison adhérente parmi les liaisons supposées glissantes, alors $E_T = 10 E_T$ et retour à la résolution du système d'équations pour la même itération i , mais avec les liaisons non glissantes repérées ci-dessus.

- Calcul des matrices tangentes $\mathbf{K}_n^{F^i}$ (si $\text{RESI_GLOB_RELA} < 1.E-3$, $\theta = 1$).
- Mise à jour $\delta \mathbf{U}^i$, μ_c^i , μ_g^i , μ_{sg}^i , \mathbf{A}_{c+sg}^i et \mathbf{A}_g^i .

5.1.5 Convergence

La convergence de l'algorithme avec multiplicateurs de Lagrange pour le contact sans frottement en un nombre fini d'itérations a été démontrée dans [bib2]. Pour les problèmes avec frottement, des résultats de convergence avec unicité de la solution pour le problème discrétisé sont établis dans [bib6] pour de faibles valeurs du coefficient de frottement de Coulomb. Les résultats sont établis en utilisant un algorithme de point fixe associé à une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Pour chaque problème de contact résolu, on étudie le problème de frottement associé. Une fois celui-ci résolu, on résout un nouveau problème de contact et ainsi de suite. Ces méthodes sont cependant différentes de celles présentées ici et l'on ne peut donc pas présenter de résultats de convergence théorique pour ces dernières.

La condition de rattachement des points qui viennent en contact est particulièrement importante pour assurer la convergence de la méthode avec multiplicateurs de Lagrange. En effet lorsqu'un point revient au contact au cours des itérées son déplacement tangentiel reste libre. Une condition de non glissement serait par trop contraignante. L'algorithme oscillerait alors entre deux états avec ou sans contact dans des exemples du type de celui présenté en [V6.04.105]. Le point qui est rattaché est donc considéré comme libre du point de vue du glissement. On peut alors calculer la réaction normale ainsi que la réaction tangentielle en utilisant l'hypothèse de glissement et une estimée de l'incrément de déplacement de glissement initial.

L'utilisation de la pénalisation seule permet d'éviter ces oscillations en permettant de relâcher les contraintes sur le système précédent. Couplée avec une méthode de multiplicateurs de Lagrange, on retrouve la pathologie signalée ci-dessus.

5.1.6 Remarque

La méthode de recherche linéaire `RECH_LINEAIRE` usuelle de `STAT_NON_LINE` n'est pas utilisable dans le cas présent. En effet, une correction a déjà lieu sur le champ de déplacement, qui est supposée être optimale pour la réalisation des conditions de contact. On risque donc si on corrige ce champ au cours des itérations de Newton de ne plus avoir compatibilité entre déplacements et réactions, ce qui rend la méthode particulièrement instable et entraîne une absence de convergence.

6 Compatibilité avec les conditions aux limites de Dirichlet

Dans le cas des méthodes avec multiplicateurs de Lagrange, on peut observer des incompatibilités avec le fait d'imposer des conditions aux limites de type Dirichlet. En effet, il faut que physiquement le problème ait un sens. On ne peut pas traiter un problème de contact dans la direction de l'axe z si tous les points ont un déplacement nul suivant z . Comme nous allons le voir, traiter un tel problème conduit à une singularité des matrices du type $\mathbf{A}_c \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_c^T$ avec le traitement des conditions aux limites de Dirichlet par double lagrange du *Code_Aster*.

6.1 Ecriture des conditions aux limites

En s'inspirant de la documentation de référence [R5.03.01] de *STAT_NON_LINE*, la dualisation des conditions aux limites de Dirichlet $\mathbf{BU} = \mathbf{U}^d(t)$ conduit au système d'équations suivant à résoudre :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \delta \mathbf{U}^i + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{L}_{ext} - \mathbf{L}_{int}(\mathbf{U}_n^{i-1}) \\ \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^i &= \mathbf{U}^d - \mathbf{BU}_n^{i-1} \end{aligned}$$

On note alors \mathbf{K} la matrice de rigidité du système telle que :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Cette matrice possède un inverse de la forme :

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

tel que : $\mathbf{EB}^T = \mathbf{0}$.

On vérifie ainsi que pour chaque condition aux limites i on a la propriété $\mathbf{EB}_i^T = \mathbf{0}$.

6.2 Retour au problème de contact

La matrice $\mathbf{A}_c \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_c^T$ peut aussi s'écrire $\mathbf{A}_c \mathbf{EA}_c^T$ puisque les vecteurs de liaison \mathbf{A}_c ne font intervenir que les degrés de liberté de déplacement.

- Il en résulte alors que si un vecteur de liaison j de la matrice \mathbf{A}_c est une combinaison linéaire des conditions aux limites de type Dirichlet il vérifie la propriété suivante : $\mathbf{EA}_{c,j}^T = \mathbf{0}$. La matrice $\mathbf{A}_c \mathbf{EA}_c^T$ est alors singulière car elle possède une colonne de zéros. Dans la pratique, sans traitement particulier, on finit dans le code sur un message d'arrêt du type `ARRET SUR MATRICE DE CONTACT-FROTTEMENT SINGULIERE`. La détection de ces colonnes singulières a été mise en oeuvre dans le code de façon à éliminer des relations de contact-frottement ce type de relations et éviter l'arrêt précédemment décrit.
- Il en résulte alors que si un vecteur de liaison j de la matrice \mathbf{A}_c contient une combinaison linéaire des conditions aux limites de type Dirichlet et s'écrit $\mathbf{A}_{c,j} = \sum \alpha_i \mathbf{B}_i + \overline{\mathbf{A}}_{c,j}$, il vérifie la propriété suivante : $\mathbf{EA}_{c,j}^T = \mathbf{E} \overline{\mathbf{A}}_{c,j}^T$. On peut alors avoir une matrice $\mathbf{A}_c \mathbf{EA}_c^T$ singulière car elle possède deux lignes identiques. Cette détection n'est pour le moment pas disponible dans le code et on finit dans le code sur un message d'arrêt du type `arrêt sur matrice de contact-frottement singulière`.

6.3 Illustration sur un exemple simple

Les deux situations précédentes peuvent se rencontrer pour le même exemple d'étude. Soit une surface pouvant glisser dans le plan xOy . On la suppose bloquée dans la direction x . Si la direction de blocage correspond à l'une des directions principales de glissement que l'utilisateur peut donner dans le fichier de commande on se retrouve dans le cas 1 du [§7.2]. Si la direction de blocage est inclinée par rapport aux directions principales de glissement alors on se retrouve dans le cas 2 du [§7.2]. Une des deux directions de glissement est de trop pour caractériser le système physique.

6.4 Remarque

Ce problème de compatibilité entre le contact-frottement et les conditions aux limites n'apparaît pas avec les méthodes régularisées dans la mesure où l'on rajoute de la rigidité à la rigidité globale et que l'on ne fait pas d'élimination comme dans le calcul des lagranges.

7 Mise en œuvre dans le Code_Aster

L'appel aux routines pour le contact avec frottement dans le *Code_Aster* a lieu au même endroit dans `STAT_NON_LINE` que pour le contact unilatéral sans frottement. La phase de prédiction au pas de temps n est basée sur l'incrément de charge entre les pas de temps $n-1$ et n .

7.1 Algorithmes

Ces développements sont accessibles sous la commande `STAT_NON_LINE`. Ils sont activés par le mot-clé `CONTACT` de la commande `AFFE_CHAR_MECA` avec lequel on définit les zones de contact possibles. L'ensemble des paramètres du modèle est fourni dans `CONTACT` sous le mot-clé `FROTTEMENT` :

```
FROTTEMENT= 'SANS'  
            'COULOMB'
```

Les différents algorithmes sont choisis par le mot-clé `METHODE` selon la logique :

```
METHODE= 'LAGRANGIEN'  
          ⇒Dualisation contact frottement 2D et 3D  
          'PENALISATION'  
          ⇒si E_T renseigné, dualisation contact, régularisation frottement  
          ⇒si E_T et E_N renseignés, régularisation contact et frottement
```

On introduit aussi les mots-clés `COULOMB` pour la valeur du coefficient de frottement de Coulomb, et `COEF_MATR_FROT` le coefficient de prise en compte de la composante négative de la matrice tangente de frottement compris entre 0 et 1. L'utilisateur peut ainsi définir le chargement de la manière suivante :

```
CHA =AFFE_CHAR_MECA( MODELE= MO,  
                     CONTACT= _F(GROUP_MA_1 = ISOL1, GROUP_MA_2 = ISOL2
```

Si la méthode utilisée est `'LAGRANGIEN'`, aucune autre indication n'est nécessaire en 2D et il faut fournir `COEF_MATR_FROT` en 3D. Dans le cas des méthodes pénalisées il faut donner la valeur du coefficient de pénalisation `E_T`, `E_N` et le `COEF_MATR_FROT` dans tous les cas.

Le chargement ainsi défini est alors utilisé dans `STAT_NON_LINE` :

```
RESU = STAT_NON_LINE (  MODELE = MO,    CHAM_MATER = CHMAT,  
                       EXCIT = _F(CHARGE = CHA),  
                       NEWTON=_F(REAC_ITER=1),  
                       SOLVEUR= (METHODE = 'LDLT')    etc...);
```

On remarque que l'on recalcule la matrice tangente à toutes les itérations de Newton (`NEWTON=_F(REAC_ITER=1)`).

Remarque :

Avec GCPC comme méthode de résolution, on ne peut faire que du contact sans frottement pour le moment. On ne recommande cependant pas de le faire car les performances en terme de temps calcul ne sont pas bonnes avec cette méthode. On recommande l'emploi de MULT_FRONT avec une renumérotation de type 'METIS'.

7.2 Réactualisation géométrique

L'évolution géométrique est une des non-linéarités constitutives du contact frottant. Au sein du *Code_Aster*, sa prise en compte se fait par une méthode de point fixe (pour plus de précisions, se reporter à [bib9]). On rappelle l'utilisation du mot clé :

```
REAC_GEOM= 'SANS' pas de réactualisation
           'AUTOMATIQUE' réactualisation gérée par le code
           'CONTROLE' n réactualisations en début de pas de temps, puis après
                        chaque convergence jusqu'à la n-1ème. n est défini par :
NB_REAC_GEOM=n
```

7.3 Post traitement

Différents post traitements sont possibles. Par exemple, le calcul des efforts de contact peut être effectué dans la commande `POST_RELEVE_T` en calculant la résultante des forces nodales sur le groupe de mailles représentant une des surfaces de contact.

On attire l'attention sur la structure de données `VALE_CONT` qui est produite pour chaque calcul impliquant du contact frottant. Elle s'imprime comme suit sous forme de table :

```
MATABLE=POST_RELEVE_T (ACTION= F (INTITULE='INFOS FROTTMNT',
                                GROUP_NO='ESCLAVE',
                                RESULTAT=U,
                                INST=10.,
                                TOUT_CMP='OUI',
                                NOM_CHAM='VALE_CONT',
                                OPERATION='EXTRACTION',),),);

IMPR_TABLE (TABLE=MATABLE);
```

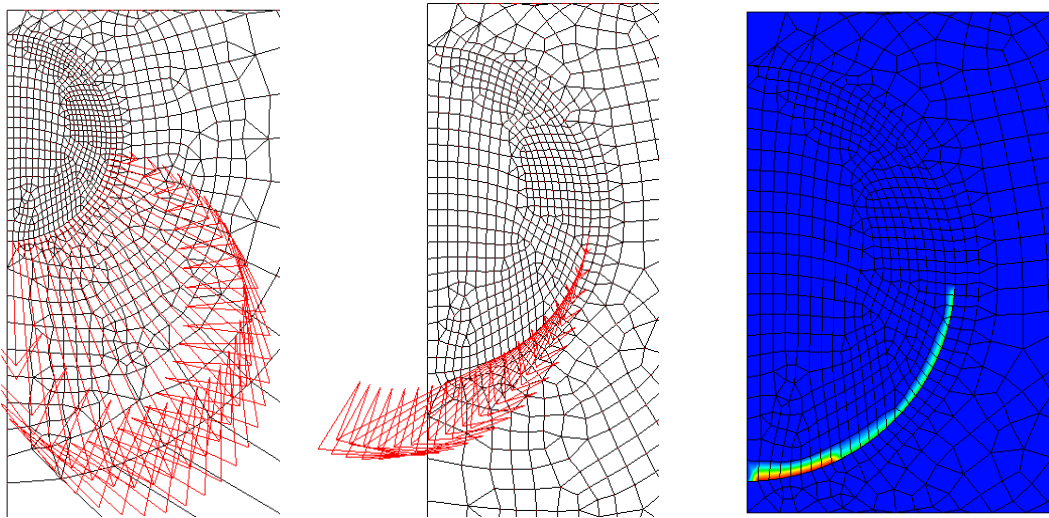
Les informations imprimées en chaque nœud esclave sont les suivantes :

- `CONT` : indicateur de contact frottant
 - 0 : pas de contact
 - 1 : contact glissant
 - 2 : contact adhérent
- `JEU` : valeur du jeu
- `RN` : norme de la réaction normale de contact
- `RNX` : composante suivant DX de la réaction normale de contact
- `RNY` : composante suivant DY de la réaction normale de contact
- `RNZ` : composante suivant DZ de la réaction normale de contact
- `GLIX` : composante suivant t_1 du glissement tangentiel (repère local)
- `GLIY` : composante suivant t_2 du glissement tangentiel (repère local)
- `GLI` : norme du glissement tangentiel
- `RTAX` : composante suivant DX de la force tangentielle d'adhérence
- `RTAY` : composante suivant DY de la force tangentielle d'adhérence
- `RTAZ` : composante suivant DZ de la force tangentielle d'adhérence
- `RTGX` : composante suivant DX de la force tangentielle de glissement
- `RTGY` : composante suivant DY de la force tangentielle de glissement
- `RTGZ` : composante suivant DZ de la force tangentielle de glissement
- `RX` : composante suivant DX de la force de contact frottant ($RNX+RTAX+RTGX$)
- `RY` : composante suivant DY de la force de contact frottant ($RNY+RTAY+RTGY$)
- `RZ` : composante suivant DZ de la force de contact frottant ($RNZ+RTAZ+RTGZ$)
- `R` : norme de la force de contact frottant

En outre, il est possible de tracer ces informations pour un post traitement graphique :

```
IMPR_RESU (MODELE=MO,  
          RESU=_F (FORMAT='CASTEM' ou 'GMSH' ou 'IDEAS',  
                  RESULTAT=U,  
                  NOM_CHAM='VALE_CONT',  
                  NOM_CMP=('CONT', 'RNX', 'RNY', 'RNZ', etc..)),);
```

On présente ci-dessous un cylindre dans un alésage avec interaction de contact frottant. On a tracé les forces normales de contact, les forces tangentielles d'adhérence et l'indicateur de contact.



7.4 Précautions d'utilisation

Ces précautions d'utilisation sont à peu près les mêmes que celles énoncées dans [R5.03.50]. On les rappelle ici :

- vérifier que les normales aux surfaces de contact sont sortantes (se méfier notamment si on a utilisé des opérateurs de symétrisation dans le mailleur gibi),
- attention au contact frottement en 3D quadratique si les mailles de bord sont des QUAD8 (éviter d'utiliser des HEXA20 pour mailler le volume) : utiliser de préférence des HEXA27, ou bien des PENTA15 dont les côtés TRIA6 sont les mailles de contact,
- supprimer, par des conditions aux limites de Dirichlet appropriées, les mouvements de corps rigide ; il ne faut pas que la structure ne tienne que par le contact ou le frottement. En d'autres termes, cela veut dire qu'un calcul fait en élasticité avec la commande STAT_NON_LINE sans traiter le contact doit passer,
- en cas de structure « tenue » uniquement par le contact, on peut ajouter un ressort de faible rigidité pour la maintenir,
- ne pas utiliser de méthode de recherche linéaire, de STAT_NON_LINE incompatible avec le traitement des conditions de contact-frottement

8 Conclusion

Des modélisations discrètes du contact-frottement avec surfaces de glissement 1D et 2D ont été implantées dans le *Code_Aster*. Ces modélisations utilisables avec `STAT_NON_LINE` et `DYNA_NON_LINE` sont accessibles sous `AFFE_CHAR_MECA` par l'opérateur de contact avec frottement en grands déplacements `CONTACT`.

Contrairement à [bib5] les modélisations proposées ne s'appuient pas sur des éléments finis dédiés. Elles s'appuient sur les maillages des surfaces venant en contact et permettent de retranscrire nœud à nœud les conditions de contact frottement entre les surfaces après discrétisation de la formulation variationnelle correspondante. La méthode s'étend alors sans difficulté des petits déplacements au cas des grands déplacements. En effet, l'absence d'utilisation d'éléments finis, entre les surfaces pouvant venir en contact, évite la grande distorsion de ces derniers, dans le cas de grands déplacements. On peut alors utiliser soit des conditions de liaisons nœuds à nœuds directes pour des maillages initialement compatibles, soit des conditions de liaisons nœuds à nœuds pondérées suivant une approche par projection de type maître-esclave pour des maillages incompatibles. Les différentes conditions de liaison sont développées dans la documentation [R5.03.50] disponible sur le traitement du contact sans frottement en grands déplacements.

Dans le cas de surfaces de glissement 1D on a pu développer un algorithme n'utilisant que des multiplicateurs de Lagrange. La convergence finie de ce type d'algorithme est prouvée pour le contact unilatéral sans frottement [bib2] et dans le cas avec frottement pour de faibles valeurs du coefficient de frottement de Coulomb [bib6]. Dans le cas de surfaces de glissement 2D, le contact frottant est traité soit par dualisation soit par régularisation avec différents panachages.

On conseille toujours l'utilisation de la dualisation sur le contact et le frottement pour le 2D : la méthode ne fait pas intervenir de nouvelles matrices tangentes et elle ne présente pas de difficultés majeures en terme d'utilisation excepté la compatibilité avec les conditions de Dirichlet, cf. [§6]. En 3D, on conseille toujours d'utiliser la dualisation sur le contact et le frottement ; néanmoins il peut après coup être intéressant de tester la méthode avec dualisation du contact et pénalisation du frottement : les problèmes de compatibilité avec les conditions de Dirichlet sont alors moindres et les temps de calcul peuvent être réduits. On insiste par contre sur la très forte dépendance du résultat avec la valeur des termes de pénalisation. Pour des études systématiques, on peut néanmoins tester la validité de la solution régularisée par rapport à la solution avec dualisation, utilisée comme référence sur une étude type.

9 Bibliographie

- [1] BEN DHIA H., MASSIN P., TARDIEU N., ZARROUG M. : Différents algorithmes pour des problèmes de contact frottement 2D et 3D en grands déplacements, GIENS 2001.
- [2] DUMONT G. : Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol 4, n°1, 1995
- [3] DUVAUT G., LIONS J.L. : Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- [4] EKELAND I., TEMAM R. : Analyse convexe et problèmes variationnels, Bordas, 1974.
- [5] G. JACQUART : Un élément fini de contact avec frottement, Documentation de Référence du *Code_Aster* [R5.03.41].
- [6] LICHT C., PRATT E., RAOUS M. : Remarks on a numerical method for unilateral contact including friction, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 101, 1991, pp. 129-144.
- [7] MASSIN P., BEN DHIA H. : 2D and 3D algorithms for frictional problems with small displacements, Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000, Barcelona, 11-14 septembre 2000.
- [8] TARDIEU N. : Algorithme Non Linéaire Quasi Statique, Documentation de Référence du *Code_Aster* [R5.03.01].
- [9] TARDIEU N. : Contact unilatéral par des conditions cinématiques, Documentation de Référence du *Code_Aster* [R5.03.50].
- [10] ZHONG Z. : Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems. Oxford University Press, p.146-148, 1993.