Organisme(s) : EDF/MTI/MMN

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.03

Prise en compte de l'hypothèse des contraintes planes dans les comportements non linéaires

Résumé :

Ce document décrit une méthode générale d'intégration des modèles de comportements non linéaires (élastoplastiques, viscoplastiques, endommageants,...) en contraintes planes.

Ceci est réalisé par une méthode de condensation statique due à R. de Borst.

Cette méthode permet d'utiliser la modélisation `C_PLAN`, ou bien les modélisations `COQUE_3D`, `DKT` et `TUYAU` pour tous les modèles de comportements incrémentaux de `STAT_NON_LINE` disponibles en axisymétrique ou en déformations planes. Il n'est pas opérationnel pour le moment dans `DYNA_NON_LINE`.

1 Introduction

On présente ici une méthode générale d'intégration des modèles de comportements non linéaires (plasticité, viscoplasticité, endommagement) en contraintes planes. Elle est activée par le mot clé `ALGO_C_PLAN : 'DEBORST'` de l'opérande des comportements non linéaires incrémentaux `COMP_INCR` de `STAT_NON_LINE`, pour les modélisation `C_PLAN`, `DKT`, `COQUE3D` et `TUYAU`.

2 Difficulté d'intégration des comportements non linéaires en contraintes planes

La modélisation `C_PLAN`, (ainsi que les modélisations `COQUE_3D`, `DKT`, `TUYAU`) suppose que l'état de contraintes local est plan, c'est à dire que $\sigma_{zz} = 0$, z représentant la direction de la normale à la surface. Les tenseurs de contraintes et de déformations ont donc l'allure suivante (en `C_PLAN`) :

$$K^n = \int \hat{B}^T \left(D_{11}^n - \frac{D_{12}^n . D_{21}^n}{D_{22}^n} \right) \hat{B} \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Remarque :

> *Pour les coques, il faut ajouter des termes dus au cisaillement transverse (σ_{xz}, σ_{yz}), mais ceux-ci sont traités élastiquement et n'interviennent pas dans le résolution du comportement local.*

Cette hypothèse implique que la déformation correspondante est a priori indéterminée (contrairement aux autres modélisations bidimensionnelles où l'on fait une hypothèse directement sur ε_{zz}). Elle ne peut être déterminée qu'à l'aide de la relation de comportement. Or la condition $\sigma_{zz} = 0$ n'est pas anodine pour l'intégration du comportement où l'on calcule un accroissement de contrainte $\boldsymbol{\Delta\sigma}$ en fonction de l'accroissement de déformation $\boldsymbol{\Delta\varepsilon}$ fourni par l'algorithme de Newton. Dans le cas de l'élasticité linéaire, la prise en compte de cette condition est simple et permet de trouver :

$$\varepsilon_{zz} \quad = \quad -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)$$

Mais si le comportement est non linéaire, $\Delta\varepsilon_{zz}$ ne peut pas être calculé uniquement à partir de $\boldsymbol{\Delta u}$ et ne se déduit pas simplement des autres composantes du tenseur des déformations. La prise en compte de cette hypothèse doit alors être faite (quand c'est réalisable) d'une façon spécifique à chaque comportement, et amène bien souvent à des difficultés de résolution supplémentaires : c'est le cas en particulier pour le comportement de Von Mises à l'écrouissage isotrope [R5.03.02]. De ce fait, beaucoup de modèles de comportement ne sont pas disponibles en contraintes planes.

La méthode présentée ici a le gros avantage de ne nécessiter aucun développement particulier dans l'intégration du comportement pour satisfaire à l'hypothèse des contraintes planes. Elle est utilisable dès que le modèle de comportement est disponible en axisymétrique ou en déformations planes.

3 Principe du traitement des contraintes planes par la méthode De Borst

L'idée de la méthode due à R. de Borst [bib1] consiste à traiter la condition de contraintes planes non pas au niveau de la loi de comportement mais au niveau de l'équilibre. On obtient ainsi au cours des itérations de l'algorithme de résolution globale de `STAT_NON_LINE` des champs de contraintes qui tendent vers un champ de contraintes planes au fur et à mesure des itérations :

$$\sigma_{zz}^{n} \to 0$$

où n désigne le numéro d'itération de Newton.
On obtient donc la condition de contrainte plane non pas exactement, mais de façon approchée, à convergence des itérations de Newton, pour chaque incrément calculé. On vérifie, comme précisé par la suite, que la composante ci-dessus est inférieure à une tolérance donnée.

La méthode consiste à décomposer les champs (de déformations ou de contraintes) en une partie purement plane (spécifiée par un “ chapeau ”) et une composante suivant z. On fait alors apparaître explicitement la composante σ_{zz} dans l'expression de l'opérateur tangent en plasticité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

L'opérateur tangent $d\boldsymbol{\sigma} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right] d\boldsymbol{\varepsilon} = D.d\boldsymbol{\varepsilon}$ devenant $d\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_{11}} & \mathbf{D_{12}} \\ \mathbf{D_{21}} & D_{22} \end{bmatrix} .d\boldsymbol{\varepsilon}$

où $d\boldsymbol{\sigma}$ et $d\boldsymbol{\varepsilon}$ désignent des accroissements infinitésimaux, et où par définition $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_{11}} & \mathbf{D_{12}} \\ \mathbf{D_{21}} & D_{22} \end{bmatrix}$ est la matrice tangente cohérente au **comportement sans l'hypothèse de contraintes planes**, soit en axisymétrie, soit en déformation plane – voir par exemple [R5.03.02] pour les modèles de Von Mises).

4 Mise en œuvre de la méthode

La méthode consiste en chaque point d'intégration de chaque élément à :

1) utiliser la relation de comportement axysimétrique ou déformation planes (elles sont identiques) pour calculer les contraintes à partir des déformations,
2) effectuer une condensation statique sur la relation contrainte - déformation
3) écrire les accroissements infinitésimaux $d\boldsymbol{\sigma}$ et $d\boldsymbol{\varepsilon}$ qui sont reliés ci-dessus par l'opérateur tangent sous la forme d'accroissement entre deux itérations de Newton n et n+1 :

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n+1}} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}^{-} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n+1}} - \left(\boldsymbol{\sigma}^{-} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}\right) = \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n+1}} - \Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$$

et de même pour $d\boldsymbol{\varepsilon}$. A convergence, cet écart doit tendre vers zéro.

En écrivant $\sigma_{zz}^{n+1} = \sigma_{zz}^{n} + d\sigma_{zz} = 0$ on obtient, pour l'itération n+1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d\hat{\sigma}} \\ d\sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n+1}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n}} \\ \sigma_{zz}^{n+1} - \sigma_{zz}^{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n+1}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n}} \\ -\sigma_{zz}^{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{n}{}_{\mathbf{11}} & \mathbf{D}^{n}{}_{\mathbf{12}} \\ \mathbf{D}^{n}{}_{\mathbf{21}} & D^{n}{}_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{d\hat{\varepsilon}^{n+1}} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^{\mathbf{n+1}} \end{bmatrix}$$

ce qui, en utilisant la dernière équation de ce système, nous permet de nous ramener à :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n} + \mathbf{D}_{11}^{n} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}} - \mathbf{D}_{12}^{n} . \left(D_{22}^{n}\right)^{-1} \left(\sigma_{zz}^{n} + \mathbf{D}_{21}^{n} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}}\right) = 0 \\ d\varepsilon_{zz}^{n} = -\left(D_{22}^{n}\right)^{-1} \left(\sigma_{zz}^{n} + \mathbf{D}_{21}^{n} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}}\right) \end{cases}$$

avec le champ de contraintes qui s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} = \left(\mathbf{D}_{11}^{n} - \dfrac{\mathbf{D}_{12}^{n} . \mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\right) d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n} - \dfrac{\mathbf{D}_{12}^{n}}{D_{22}^{n}} \sigma_{zz}^{n} \\ \Delta\varepsilon_{zz}^{n+1} = \Delta\varepsilon_{zz}^{n} - \dfrac{\sigma_{zz}^{n}}{D_{22}^{n}} + \dfrac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n}} - \dfrac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}} \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}} \end{cases}$$

En utilisant l'expression précédente du champ de contraintes , on trouve alors :

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{B}^{\mathbf{t}} . \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dv = \int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{t}} . \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1} dv = \mathbf{L} = \\ &\int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \left\{ \left(\mathbf{D}_{11}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n} . \mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}}\right) d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n}}{D_{22}} \sigma_{zz}^{n} \right\} dv \\ &= \int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \left(\mathbf{D}_{11}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n} . \mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}}\right) \hat{\mathbf{B}} . d\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}} dv + \int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n}}{D_{22}} \sigma_{zz}^{n}\right) dv \\ &= \mathbf{K}^{\mathbf{n}} d\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}} + \int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n}}{D_{22}} \sigma_{zz}^{n}\right) dv \end{aligned}$$

On constate donc que la prise en compte des contraintes planes intervient à deux niveaux :

- dans la matrice de rigidité tangente, par un terme correctif (deuxième terme de l'expression ci-dessous) par rapport à l'expression 2D de la matrice tangente :

$$\mathbf{K}^{\mathbf{n}} = \int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \left(\mathbf{D}_{11}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n} . \mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\right) \hat{\mathbf{B}}\ dv$$

- dans l'écriture du second membre par un terme correctif (deuxième terme de l'expression ci-dessous) par rapport à l'expression 2D du tenseur des contraintes :

$$\mathbf{R}\left(\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}}\right) = \int \hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n} - \frac{\mathbf{D}_{12}^{n}}{D_{22}^{n}} \sigma_{zz}^{n}\right) dv$$

Pour mettre en œuvre la méthode De Borst pour l'ensemble des comportements incrémentaux, il suffit donc de calculer ces termes correctifs et de les ajouter aux contraintes et matrices tangentes obtenues par l'intégration 2D (en fait axisymétrique ou déformation plane) de ces comportements. Pour ce faire, il faut stocker quelques informations supplémentaires au cours des itérations de Newton. On ajoute donc (de façon transparente pour l'utilisateur) 4 variables internes au comportement utilisé.

La réalisation informatique est la suivante :

1) au cours de l'itération n+1 de l'algorithme de Newton, on a en entrée de la routine calculant le comportement : $\Delta\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{-}, \alpha^{-}$ et les 4 variables internes supplémentaires suivantes issues de l'itération précédente : 1 variable scalaire $-\frac{\sigma_{zz}^{n}}{D_{22}^{n}}+\frac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n}}$ et 3 variables $-\frac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}$,
2) avant d'effectuer l'intégration des comportements non linéaires (qui sera faite en axisymétrique), on calcule $\Delta\varepsilon_{zz}^{n+1}=\Delta\varepsilon_{zz}^{n}-\frac{\sigma_{zz}^{n}}{D_{22}^{n}}+\frac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n}}-\frac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}}$,
3) On laisse les routines d'intégration du comportement calculer les contraintes ainsi que le comportement tangent D à partir de $\left|\begin{array}{l}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n+1}}\\ \Delta\varepsilon_{zz}^{n+1}\end{array}\right.$ comme si la modélisation était axisymétrique ou de déformation plane,
4) on modifie en sortie le second membre et la matrice tangente (si la réactualisation de la matrice tangente a été demandée) de telle sorte que : $\mathbf{K}^{\mathbf{n}}=\int\hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{D}_{11}^{n}-\frac{\mathbf{D}_{12}^{n}.\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\right)\hat{\mathbf{B}}dv$ et

$$\mathbf{R}\left(\Delta\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}}\right)=\int\hat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{n}-\frac{\mathbf{D}_{12}^{n}}{D_{22}^{n}}\sigma_{zz}^{n}\right)dv,$$

5) on stocke les nouvelles variables internes $-\frac{\sigma_{zz}^{n}}{D_{22}^{n}}+\frac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{n}}$ et $-\frac{\mathbf{D}_{21}^{n}}{D_{22}^{n}}$.

Pour vérifier la convergence, on vérifie, toujours au niveau de chaque point d'intégration de chaque élément fini si $\left\|\sigma_{zz}^{\mathbf{n+1}}\right\|<\eta$, où $\eta=\xi\left\|\sigma^{\mathbf{n+1}}\right\|$ avec ξ fourni par l'utilisateur sous le mot clé `RESI_INTE_RELA`. La valeur par défaut est 10^{-6}.

Au moment de tester la convergence des itérations globales de Newton (définie par `RESI_GLOB_RELA` et `RESI_GLOB_MAXI`) on examine si tous les points d'intégration vérifient la condition $\left\|\sigma_{zz}^{\mathbf{n+1}}\right\|<\eta$. Si ce n'est pas le cas, on effectue des itérations de Newton supplémentaires jusqu'à vérification complète de cette condition.

5 Aspects pratiques d'utilisation

Pour utiliser cette méthode, il faut préciser sous le mot clé facteur `COMP_INCR` le mot clé `ALGO_C_PLAN :'DEBORST'`. Il faut également que la modélisation (spécifiée dans `AFFE_MODELE`) des éléments concernés par ce comportement soit " `C_PLAN` " ou un modèle de type coque à plasticité locale : `COQUE_3D, DKT, TUYAU`.

En pratique, cela augmente (automatiquement) de 4 le nombre de variables internes du comportement.

Pour bien converger, il est conseillé de réactualiser la matrice tangente (si possible, à toutes les itérations : `REAC_ITER : 1,` ou toutes les n itérations, avec n petit).

Cette méthode permet donc une grande souplesse d'utilisation par rapport aux comportements : il suffit qu'un comportement soit disponible en axisymétrie ou en déformation plane pour qu'il soit aussi utilisable en contraintes planes.

Comme pour toutes les intégrations de modèles de comportements non linéaire, il est vivement conseillé de donner un critère de convergence η petit (laisser la valeur par défaut à 10^{-6}.).

6 Bibliographie

[1] R de Borst " the zero normal stress condition in plane stress and shell elastoplasticity " Communications in applied numerical methods, Vol 7, 29-33 (1991)