Organisme(s) : EDF/MTI/MMN

Manuel de Référence
Fascicule R7.20 : Projection de résultats ou de mesure
Document : R7.20.01

Projection d'un champ sur un maillage

Résumé :

La commande `PROJ_CHAMP` permet de "projeter" des champs connus sur les nœuds d'un maillage (`ma1`) sur les nœuds d'un autre maillage (`ma2`).

Dans ce document, on décrit les 3 méthodes de projection accessibles dans cette commande.

Le paragraphe [§5] donne quelques éléments de validation de ces méthodes.

1 Généralités sur la commande PROJ_CHAMP

La commande PROJ_CHAMP permet de projeter un champ connu aux nœuds (CHAM_NO) d'un maillage (ma1) sur les nœuds d'un autre maillage (ma2) [U4.72.05]. En général, les 2 maillages (ma1 et ma2) sont "incompatibles" ; c'est-à-dire que les nœuds de ma2 ne sont pas confondus géométriquement avec les nœuds de ma1. On ne traite pas les champs "par élément" (CHAM_ELEM).

3 méthodes de projection sont actuellement disponibles :

```
METHODE: 'ELEM'
METHODE: 'NUAGE_DEG_0'
METHODE: 'NUAGE_DEG_1'
```

La méthode 'ELEM' utilise les fonctions de forme des éléments du maillage ma1. Elle est détaillée au paragraphe [§3].

Les 2 autres méthodes utilisent un lissage des valeurs du champ au voisinage du point où l'on veut projeter le champ. Ces 2 méthodes sont détaillées au paragraphe [§4].

2 Fonctionnement général de la commande

Pour les 2 méthodes 'NUAGE_DEG_0/1' la commande ne permet de projeter qu'un seul champ. En revanche, avec la méthode 'ELEM' on projette l'ensemble des champs d'une structure de données resultat (evol_ther, evol_noli, ...).

Quelle que soit la méthode, l'utilisateur a la possibilité de ne projeter qu'un "morceau" de champ sur un "morceau" du maillage ma2. Cette possibilité est offerte par le mot clé facteur VIS_A_VIS. Un morceau de champ est la restriction du champ sur un ensemble de nœuds (ou de mailles) du maillage ma1. Un morceau du maillage ma2 est un sous-ensemble des nœuds de ma2.

Le problème de base à résoudre est donc le suivant :

Soit un champ ch1 connu, sur les nœuds d'un sous-ensemble d'un maillage ma1, comment calculer le champ ch2 sur les nœuds d'un sous-ensemble d'un autre maillage ma2 ?
Dans la suite pour simplifier l'exposé on ne parlera plus de sous-ensemble d'un maillage, on fera comme si l'on projetait tout le maillage ma1 sur tout le maillage ma2.

Remarque sur le vocabulaire :

Le mot "projeter" est parfois ambigu dans ce document.

Quand on dit "projeter" le champ de ma1 vers ma2, on cherche le champ sur ma2 connaissant celui sur ma1 : la projection va de 1 vers 2.

Pour la méthode 'ELEM', il faut trouver pour chaque nœud n2 de ma2 quel est le point de ma1 qui occupe la même position que n2, pour cela on projette le nœud n2 sur le maillage ma1 : la projection va de 2 vers 1.

3 Méthode 'ELEM'

3.1 algorithme mis en oeuvre

On boucle sur tous les nœuds du maillage ma2 :

pour chaque nœud (n2), on procède en 3 étapes :

1) On cherche quelle est la maille m1 de ma1 qui "contient" géométriquement le nœud n2,
2) on détermine la position de n2 dans m1 (i.e. ses coordonnées dans l'élément de référence associé à la maille m1),
3) on utilise les fonctions de forme de la maille m1 pour déterminer la valeur du champ sur n2 connaissant la valeur du champ sur les nœuds de m1.

3.1.1 Remarque

La troisième étape montre que cette méthode suppose que tous les nœuds de la maille m1 connaissent le champ à projeter. Par exemple, on ne saurait pas projeter un champ qui porterait des degrés de liberté différents sur ses nœuds "sommets" et sur ses nœuds "milieux d'arête". La projection d'un tel champ serait possible en revanche avec les 2 autres méthodes de projection [§4].

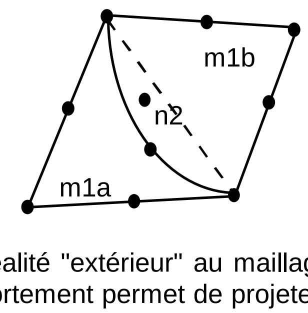
Pour utiliser la méthode 'ELEM', il est donc important que tous les nœuds d'une même maille portent les mêmes composantes dans le champ à projeter. Pratiquement (du fait de la continuité des mailles connectées entre elles), cela veut dire que le champ doit être "homogène" sur le morceau de champ destiné à être projeté.

3.2 Les difficultés rencontrées et leur traitement

Pour chacune de ces 3 étapes, on va voir que des difficultés nous ont obligé à simplifié le problème et donc à ne le résoudre qu'imparfaitement.

3.2.1 Etape 1

- on ne traite pas l'éventuelle courbure des bords des éléments. Par exemple, dans la figure ci-dessous (problème plan), le nœud n2 sera déclaré appartenir à la maille m1a alors qu'il appartient à la maille m1b,



- si le nœud n2 est en réalité "extérieur" au maillage ma1,on lui affectera la maille m1 la plus proche de lui. Ce comportement permet de projeter, sans s'arrêter en erreur fatale, un champ sur un maillage dont la frontière diffère légèrement de celle du maillage initial (ce qui est toujours le cas dans la pratique).

3.2.2 Etape 2

Pour trouver le point de l'élément de référence qui donnerait par la transformation géométrique le nœud `n2`, il faut en général résoudre un problème non-linéaire, car il n'y a que pour le triangle à 3 nœuds (en 2D) et pour le tétraèdre à 4 nœuds (en 3D) que la transformation géométrique est linéaire.

Pour ne pas résoudre ce problème non-linéaire. On le "linéarise" en découpant les mailles de `ma1` en triangles ou tétraèdres linéaires. La résolution du problème posé est donc approchée.

Remarque :

> *Pour résoudre exactement le problème non-linéaire, on pourrait penser utiliser une méthode itérative de Newton, mais il faudrait remettre en cause l'étape 1 ci-dessus car la maille `m1` sélectionnée n'est peut être pas la bonne.*

3.2.3 Etape 3

On n'utilise pas toujours les vraies fonctions de forme des éléments du maillage initial. En effet, dans le *Code_Aster*, ce sont les éléments finis qui choisissent leurs fonctions de forme : un triangle de thermique n'est pas obligé de choisir les mêmes fonctions de forme qu'un triangle de mécanique. Un élément peut aussi ne pas avoir besoin de fonctions de forme, ou bien il peut choisir des fonctions différentes selon les variables à interpoler. La formulation de l'élément ne fait pas non plus toujours apparaître d'élément de référence et de transformation géométrique associée.

Pour toutes ces raisons et pour que la programmation de `PROJ_CHAMP` soit indépendante des éléments finis présents dans le modèle, on affecte à toutes les mailles de `ma1`, les fonctions de forme des éléments iso-paramétriques 2D ou 3D [R3.01.01].

Remarque :

> *Les mailles linéiques ne sont pas traitées aujourd'hui. On ne peut donc pas projeter un champ connu sur 1 modèle linéique (poutre ou coque linéique).*

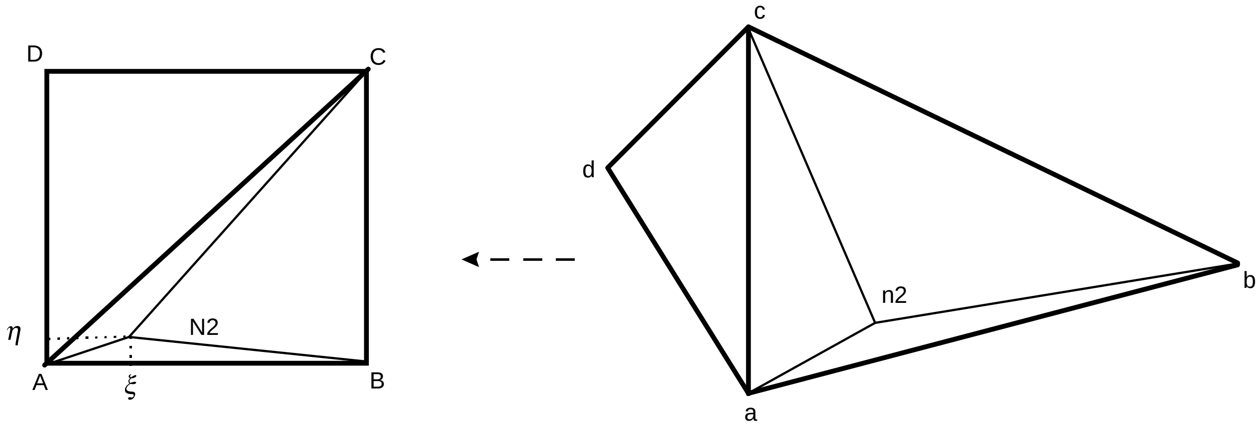
3.3 Détails concernant les étapes 1 et 2

Informatiquement, les étapes 1 et 2 sont réalisées simultanément. Nous allons discuter successivement de la façon de traiter les 3 problèmes suivants :

- traitement d'un nœud `n2` se retrouvant à l'intérieur de la frontière du maillage `ma1` (cas le plus fréquent),
- traitement d'un nœud `n2` à l'extérieur de la frontière de `ma1`,
- traitement du cas des maillages de type "coque" (surfaces plongées dans R3).

3.3.1 Nœud n2 "intérieur"

Pour comprendre le traitement d'un nœud intérieur, prenons le cas d'une maille 2D `QUAD8` (`abcd`). On commence par oublier ses nœuds milieux (et donc leur éventuelle courbure) puis on la découpe en 2 triangles (`abc` et `acd`). Ce découpage est arbitraire (il dépend de la numérotation locale des nœuds du `QUAD8`). Notons que l'autre découpage possible (autre diagonale) donnerait en général un autre point dans l'élément de référence.



Elément de référence Elément réel

`n2` appartient au triangle `abc`. On cherche ses coordonnées barycentriques dans ce triangle. Ce sont les 3 nombres `xa`, `xb`, `xc` tels que l'on puisse écrire : `n2= xa * a + xb * b + xc * c`

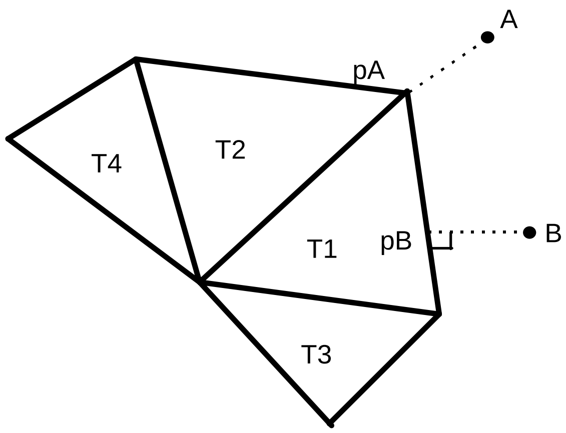
Le point `N2` de l'élément de référence retenu par l'algorithme sera :
`N2 = xa * A + xb * B + xc * C`

Pour les mailles volumiques (Hexaèdres, Pentaèdres, Pyramides et Tétraèdres), on procède de la même façon : on oublie les nœuds milieux et on découpe les mailles non tétraèdriques en tétraèdres.

3.3.2 Nœud n2 "extérieur"

Un nœud `n2` est déclaré extérieur au maillage `ma1` si on n'a trouvé aucune maille pour laquelle il soit intérieur. Lorsque ceci est constaté, on recherche la maille `m1` la plus proche de `n2`. La distance calculée est celle qui sépare le nœud `n2` et la frontière de la maille `m1`. Appelons `p2` le point de `m1` le plus proche de `n2`. Ce point peut être sur une face d'un élément volumique ou sur une arête ou sur un sommet.

Exemple (en 2D) :



Au nœud B, on associe le point pB obtenu ici par projection orthogonale de B sur une arête de T1.

Au nœud A, on associe le point pA du triangle T1. On aurait pu tout aussi bien lui associer le point pA du triangle T2, mais cela n'aurait rien changé puisque le champ à projeter est connu aux nœuds du maillage. Il est donc continu entre les éléments adjacents.

Une fois trouvé le point p2 de la maille m1 qui réalise le minimum de la distance avec n2, on se ramène au problème précédent : le point N2 de l'élément de référence qui sera associé à n2 sera le correspondant de p2 par la procédure du paragraphe [§3.3.1].

Remarques :

> *Pour un triangle (ou un tétraèdre) donné T, il n'y a qu'un point p2 réalisant la distance minimale entre n2 et T car T est convexe. Cette propriété disparaîtrait si on tenait compte de la courbure des bords des mailles. On voit là que les deux simplifications de l'implémentation (oubli des nœuds milieux et découpage des mailles en triangles linéaires) sont liées entre elles.*
>
> *Un point extérieur aura toujours une valeur interpolée entre les valeurs des nœuds du maillage ma1 et jamais extrapolée ; ce qui n'est pas le cas des 2 méthodes NUAGE_DEG_0/1.*

3.3.3 Cas des maillages "coque"

Lorsque l'on cherche à projeter les nœuds d'un maillage surfacique sur un autre maillage surfacique, on tombe en général systématiquement sur le cas des points "extérieurs" ci-dessus. En effet, l'imprécision sur les coordonnées des nœuds fait qu'un nœud n2 n'est jamais rigoureusement dans le plan des triangles des mailles de ma1.

C'est donc la procédure du [§3.3.2] qui s'applique :
Pour chaque nœud n2 :

- recherche du triangle (ou du tétraèdre) qui réalise le minimum de distance avec n2. Identification du point p2 qui réalise cette distance,
- calcul du point N2 de l'élément de référence qui correspond à p2 par la procédure du [§3.3.1].

4 Méthode 'NUAGE_DEG_0' ou 'NUAGE_DEG_1'

4.1 Principe de la méthode

Ces 2 méthodes sont basées sur le même principe : on choisit a priori des fonctions de base Fi (x,y,z) (ici des polynômes de degré 0 ou 1). On cherche dans l'espace vectoriel engendré par ces fonctions de base, la fonction F=Σ (αi Fi) qui réalise la distance minimum (au sens des moindres carrés) avec le "nuage" des points connus. Une fois cette fonction trouvée, on l'évalue au point cherché.

Pour alléger les notations, on se place en 2D (mais les calculs peuvent être faits de la même façon en dimension 3 ou plus ...). Le champ à projeter est un ensemble de couples (Xj,Vj) où Xj=(xj,yj) est un nœud du maillage ma1 et Vj est un réel (valeur du champ sur ce nœud). Ce champ constitue le nuage des points connus.

Soit un nœud n2 (x,y) du maillage ma2 pour lequel on veut calculer la valeur du champ (V).

Choix des fonctions de base :

NUAGE_DEG_0 : une seule fonction : F1= 1
NUAGE_DEG_1 : 3 fonctions : F1= 1 ; F2=x ; F3=y

Dans la suite de ce paragraphe, on choisira NUAGE_DEG_1 pour que les formules ne dégénèrent pas trop.

La fonction cherchée est F = $\alpha 1$ F1 + $\alpha 2$ F2 + $\alpha 3$ F3. On définit une sorte de "distance" entre F et les couples (Xj,Vj) :

D = Σ wj (F(Xj) - Vj) ^{2}
où les wj sont les poids affectés à chaque couple (Xj,Vj).

On veut minimiser D par rapport aux 3 variables $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$. D est une fonction quadratique de $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$. Minimiser D revient à annuler ses dérivées et donc à résoudre un système linéaire à 3 inconnues : $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$.

Lorsque ce problème est résolu, on calcule :

V= $\alpha 1$ + $\alpha 2$ x + $\alpha 3$ y

4.2 Choix de la pondération des points du nuage

Toute l' "astuce" de ces méthodes se trouve dans le choix (difficile) des poids wj affectés aux points du nuage.

- on décide a priori que le poids d'un point (Xj) ne dépend que de la distance (d) séparant ce point du nœud n2 (pondération isotrope),
- si wj est une constante, le problème ne dépend plus du nœud inconnu n2. La fonction F est unique (pour tous les nœuds de ma2) : c'est "la droite de régression linéaire" du nuage,
- si wj(d) est une fonction trop peu décroissante, la fonction F est trop "lissée" : les "accidents" locaux sont "gommés" par le grand nombre de points lointains pris en compte,
- si wj(d) est une fonction trop décroissante, on prend le risque de n' "attraper" aucun point du nuage. La conséquence numérique est que le système linéaire à résoudre devient singulier (et donc insoluble).

Nous avons choisi d'écrire w(d) comme un exponentielle décroissante paramétrée par 2 paramètres : $dref$ et β :

$$w(d) = e^{-(d/dref)^{2\beta}}$$

$dref$ est une distance de référence (dépendant du nœud n2). Nous allons voir ci-dessous comment elle est calculée. β est une constante choisie pour annuler plus ou moins rapidement le poids des points distants de n2. Dans le code, β a été choisi à 0.75.

$dref$ est la distance à partir de laquelle on souhaite voir le poids des points diminuer rapidement. Dans la programmation, $dref$ est calculée comme le produit d'une distance d1 par un coefficient C1. Aujourd'hui, nous avons choisi C1 = 0.45.

d1 est défini comme suit :

- en 3D, d1 est le rayon de la plus petite boule de centre n2 qui contient 4 points du nuage non co-planaires,
- en 2D, d1 est le rayon de la plus petite boule de centre n2 qui contient 3 points du nuage non alignés.

Le problème est dit "2D" si tous les nœuds du maillage ma1 ont la même coordonnée z, il est dit "3D" sinon.

4.3 Restriction actuelle de la programmation

Les 2 méthodes de projection `NUAGE_DEG_0/1` ne sont programmées que pour les champs réels (et non pour les champs complexes)

5 éléments de validation

Pour valider les 3 méthodes proposées, nous allons traiter l'exemple de la projection d'un champ de température "unidimensionnel" $T = T(x)$.

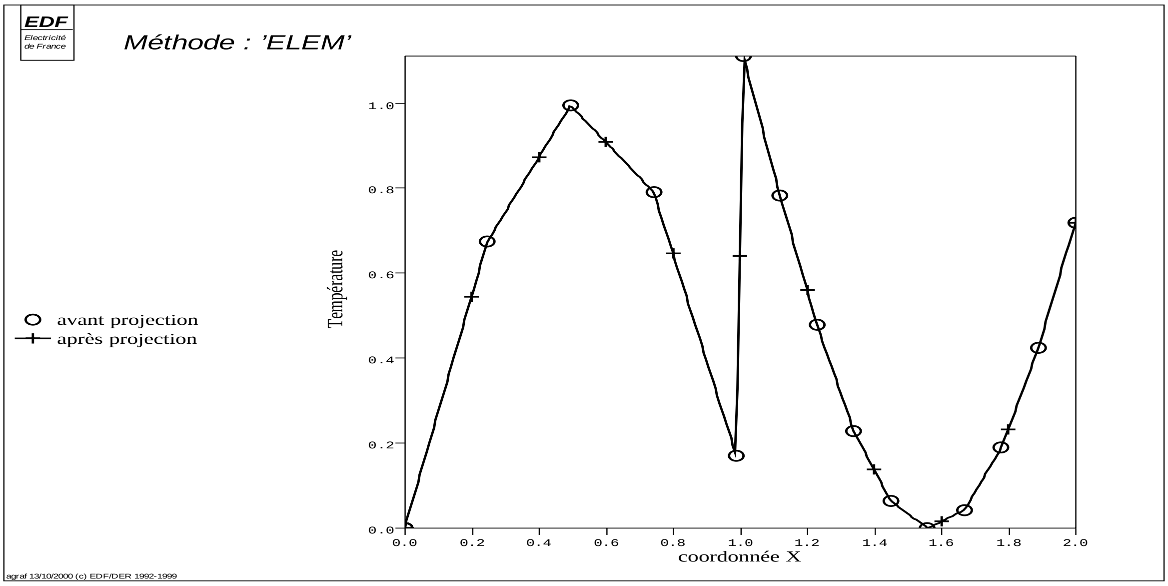
Le champ à projeter vaut :

$$T(x) = \sin(3x) + Heavyside(x-1)$$

Ce champ est affecté sur les nœuds d'un maillage (`ma1`) linéaire assez grossier (14 mailles) du segment [0,2]. Ce champ possède la propriété d'être discontinu (en théorie) au point x=1. Du fait de la discrétisation sur le maillage `ma1`, le champ semble seulement varier très brutalement entre les 2 points x=0.99 et x=1.01

On projette ce champ sur un maillage (`ma2`) très fin du même segment (300 éléments de longueur 2/300).

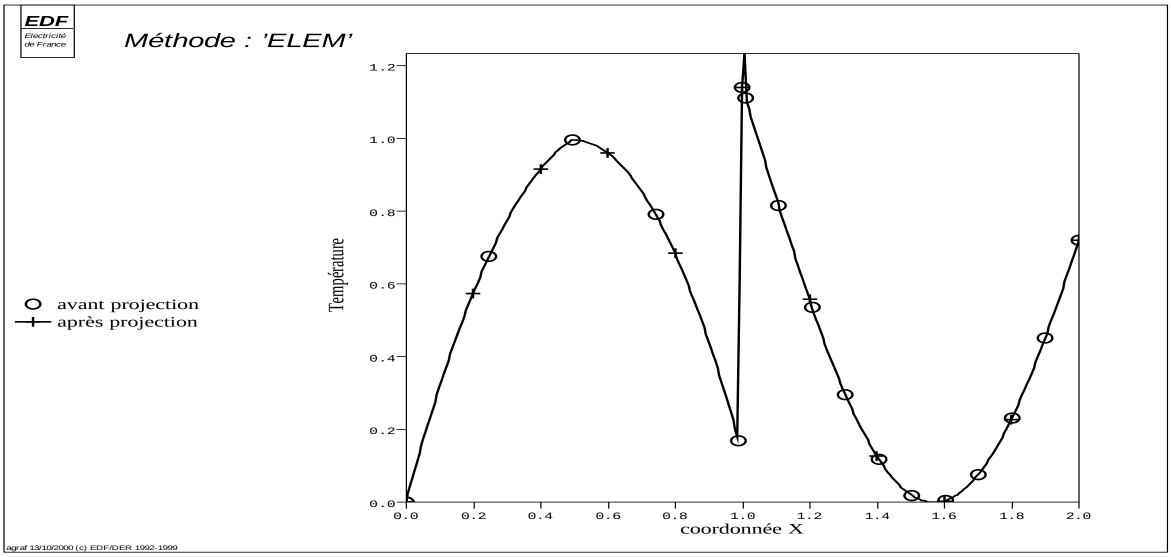
5.1 Méthode : `'ELEM'`



On constate qu'avec cette méthode, le champ projeté est sans surprise : la valeur obtenue par projection est toujours l'interpolée linéaire entre les 2 nœuds de ma1 où le champ est connu.

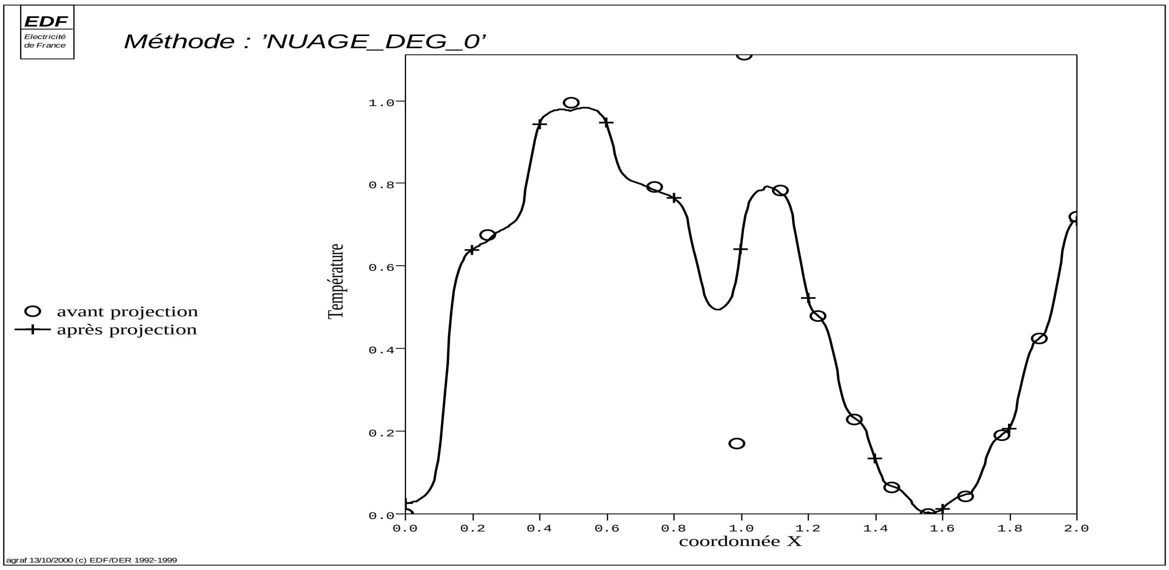
5.1.1 Maillage initial quadratique

Si on refait le même calcul en remplaçant le maillage linéaire `ma1` par un maillage quadratique (contenant environ 2 fois moins de mailles), on trouve :



On constate que l'interpolation du champ est maintenant parabolique entre les nœuds de ma1. On approche donc mieux la forme de la fonction initiale.

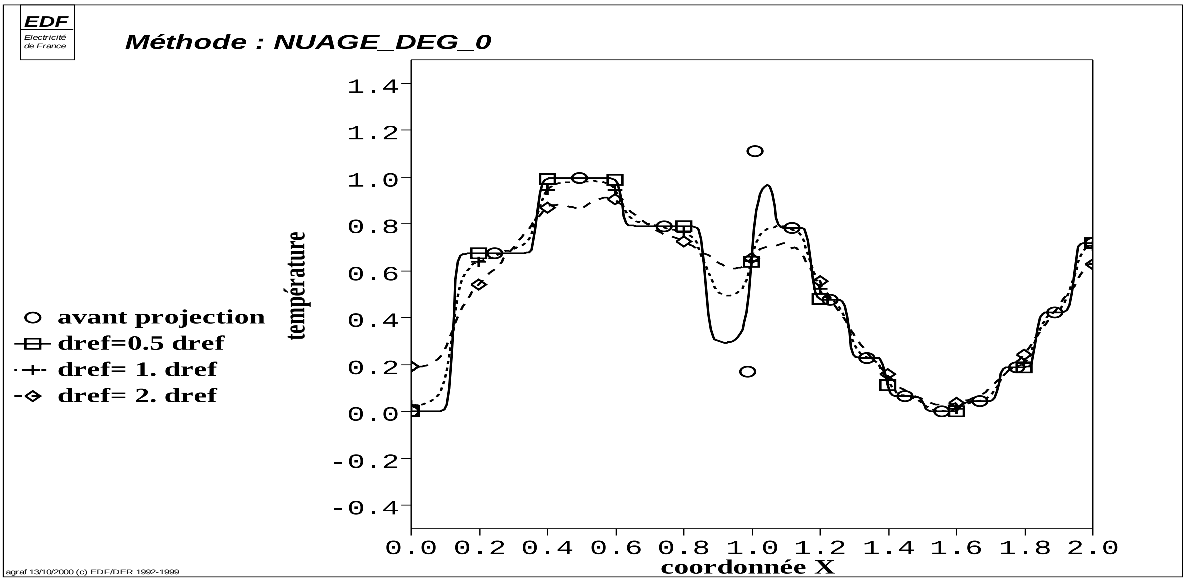
5.2 Méthode : `'NUAGE_DEG_0'`



On constate qu'avec cette méthode, le champ projeté se présente comme une succession de petits "paliers" horizontaux reliés entre eux. Cet aspect en escalier est lié aux paramètres (β et C1) choisis en "dur" dans le code pour la forme de la décroissance exponentielle du poids des points. On voit également que la discontinuité du champ initial est très fortement gommée.

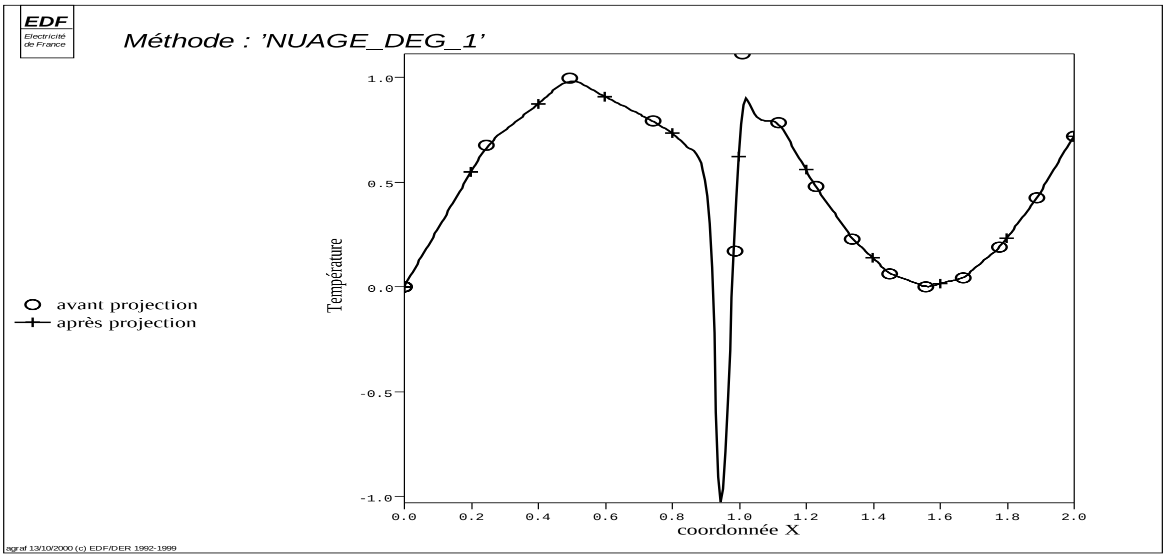
5.2.1 Influence de la forme des exponentielles décroissantes

Sur la figure suivante, nous avons modifié un paramètre de l'exponentielle décroissante de la méthode `'NUAGE_DEG_0'` : le paramètre dref (ou C1 ce qui revient au même) a été multiplié par 0.5 ou 2. par rapport à la valeur retenue par le code.



On constate que le choix de $dref$ influe beaucoup sur le résultat. S'il est trop grand, on ne voit plus la discontinuité. S'il est trop petit, la forme en marche d'escalier s'accentue.

5.3 Méthode : `'NUAGE_DEG_1'`

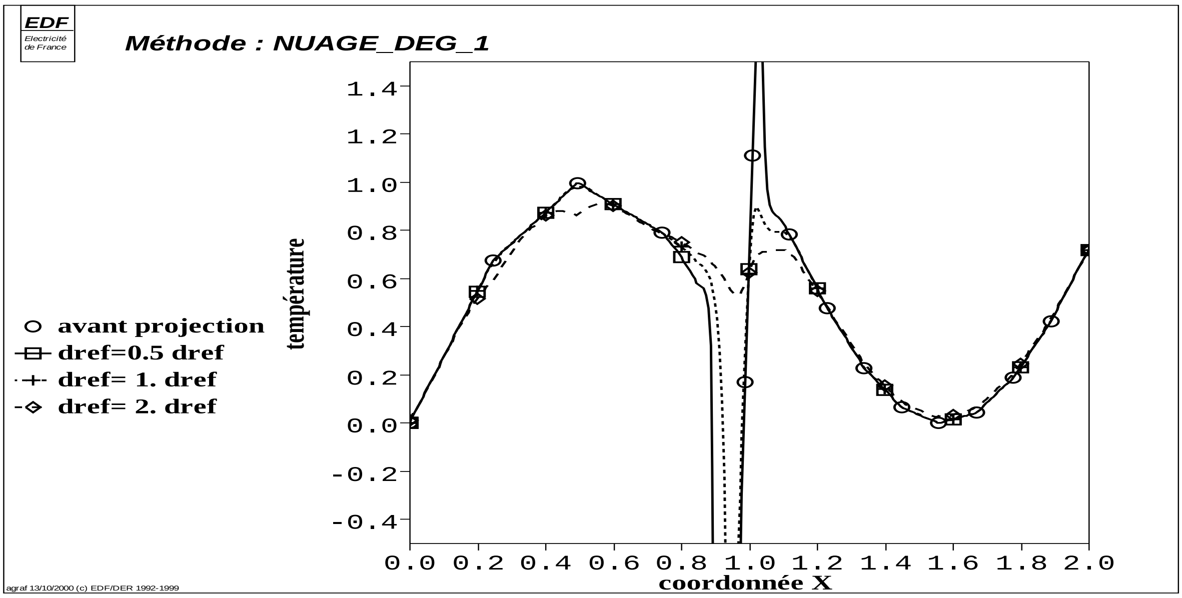


On constate qu'avec cette méthode, le champ projeté est correct dans les 2 zones régulières (x<0.99 et x>1.01).
En revanche la discontinuité du champ entre ces 2 valeurs est fortement exagérée. Cet exemple illustre bien la faculté qu'à cette méthode à extrapoler les valeurs des points initiaux (du fait de l'estimation du gradient du champ).

Dans les 2 parties régulières, le champ projeté est assez voisin de celui obtenu avec la méthode `'ELEM'`. On remarque simplement que la méthode `'NUAGE_DEG_1'` arrondit un peu les angles

5.3.1 Influence de la forme des exponentielles décroissantes

Sur la figure suivante, nous avons modifié un paramètre de l'exponentielle décroissante de la méthode `'NUAGE_DEG_1'` : le paramètre $dref$ (ou C1 ce qui revient au même) a été multiplié par 0.5 ou 2. par rapport à la valeur retenue par le code.



Là encore, on constate que le choix de $dref$ est crucial pour le résultat : trop grand, la discontinuité est gommée, trop petit, la discontinuité est exagérée.

5.4 Choix de la meilleure méthode de projection

Au vu des quelques courbes précédentes, il parait clair que la méthode `'ELEM'` est en général préférable aux méthodes `NUAGE_DEG_0/1`. Cette méthode est "naturelle" dans le cadre des éléments finis et elle ne dépend d'aucun coefficient numérique d'ajustement.

Les méthodes `NUAGE_DEG_0/1` doivent être réservées, à notre avis, pour des utilisations un peu spéciales :

- cas d'un maillage `ma1` "inexistant" : on ne dispose que des nœuds mais pas des mailles (par exemple, les "nœuds" de `ma1` sont en fait des capteurs de mesure),
- cas d'un champ (résultat d'un calcul ou obtenu par des mesures) que l'on veut lisser volontairement. Mais dans ce cas, il faudrait que les 2 paramètres numériques (C1 et β) soient accessibles à l'utilisateur ce qui n'est pas le cas aujourd'hui.

6 Bibliographie

[1] I. VAUTIER : "Eléments iso-paramétriques" , Documentation de Référence du *Code_Aster* n° [R3.01.00]