

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R4.06 : Sous-structuration**  
**Document : R4.06.03**

# Réponse harmonique par sous-structuration dynamique classique

---

## Résumé :

Après avoir fait quelques rappels concernant les méthodes de synthèse modale et introduit la base de Craig-Bampton harmonique, nous présentons les bases théoriques des méthodes de calcul de réponse harmonique par sous-structuration. Dans un premier temps, nous établissons les équations dynamiques vérifiées par les sous-structures séparément. Puis, la prise en compte des conditions d'assemblage entre sous-structures, nous permet de déterminer les équations dynamiques vérifiées par la structure globale. En particulier, nous nous attachons à bien mettre en évidence le traitement de la matrice d'amortissement et du vecteur des efforts extérieurs, qui interviennent dans le calcul de réponse harmonique par sous-structuration.

## Table des matières

|   |    |
|---|----|
| 1 Introduction .....  | 3  |
| 2 Réponse harmonique par sous-structuration.....                            | 4  |
| 2.1 Base de Craig-Bampton harmonique .....                                  | 4  |
| 2.2 Equations dynamiques vérifiées par les sous-structures séparément ..... | 5  |
| 2.3 Assemblage des sous-structures .....                                    | 7  |
| 2.4 Equations dynamiques vérifiées par la structure globale .....           | 9  |
| 2.5 Mise en œuvre dans le Code_Aster.....                                   | 9  |
| 2.5.1 Etude des sous-structures séparément .....                            | 9  |
| 2.5.2 Assemblage et résolution .....  | 10 |
| 2.5.3 Restitution sur base physique .....                                   | 10 |
| 3 Conclusion .....  | 10 |
| 4 Bibliographie .....   | 11 |

## 1 Introduction

Après avoir développé dans le *Code\_Aster* des modules de calcul modal par sous-structuration dont les bases théoriques sont présentées en référence [R4.06.02], les opérateurs de calcul de réponse harmonique par synthèse modale ont été implémentés.

Les méthodes de synthèse modale qui consistent à condenser les degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis sur des champs de déplacement particuliers à chaque sous-structure, se traduisent par des gains importants en temps de calcul et en place mémoire.

Pour les problèmes harmoniques, le système étudié est soumis à une force spatialement quelconque, mais sinusoïdale dans le temps. La forme du chargement, la fréquence d'excitation et les propriétés modales, jouent chacune un rôle essentiel. Il faut également tenir compte de la dissipation dans le solide, que l'on peut traduire par l'introduction d'une matrice d'amortissement. La méthode de calcul harmonique par sous-structuration, programmée dans le *Code\_Aster*, qui permet de remplacer le problème global par un problème simplifié, procède en quatre temps. Tout d'abord, des modes propres et des déformées statiques sont calculés sur chacune des sous-structures composant le système. Ensuite, le problème global est projeté sur ces champs, et on tient compte des couplages entre les sous-structures, au niveau de leurs interfaces. On peut alors résoudre classiquement le problème réduit obtenu. Finalement, il ne reste plus qu'à en déduire la solution d'ensemble par reconstitution.

### Notations générales :

|                    |   |
|--------------------|---|
| $\omega$           | : Pulsation ( $\text{rad.s}^{-1}$ )                                     |
| $j$                | : Imaginaire pur unitaire ( $j^2 = -1$ )                                |
| $N_s$              | : Nombre de sous-structures   |
| $\mathbf{M}$       | : Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis              |
| $\mathbf{K}$       | : Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis           |
| $\mathbf{C}$       | : Matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis       |
| $\mathbf{q}$       | : Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis |
| $\mathbf{f}_{ext}$ | : Vecteur des forces extérieures au système                             |
| $\mathbf{f}_L$     | : Vecteur des forces de liaison appliquées au système                   |
| $\Phi$             | : Matrice des vecteurs de la base des sous-structures                   |
| $\eta$             | : Vecteur des degrés de liberté généralisés                             |
| $\mathbf{B}$       | : Matrice d'extraction des degrés de liberté d'interface                |
| $\mathbf{L}$       | : Matrice de liaison  |

### Remarque :

L'exposant  $k$  caractérise les grandeurs relatives à la sous-structure  $S^k$  et les grandeurs généralisées sont surmontées d'une barre : par exemple  $\overline{\mathbf{M}}^k$  est la matrice de masse généralisée de la sous-structure  $S^k$ .

## 2 Réponse harmonique par sous-structuration

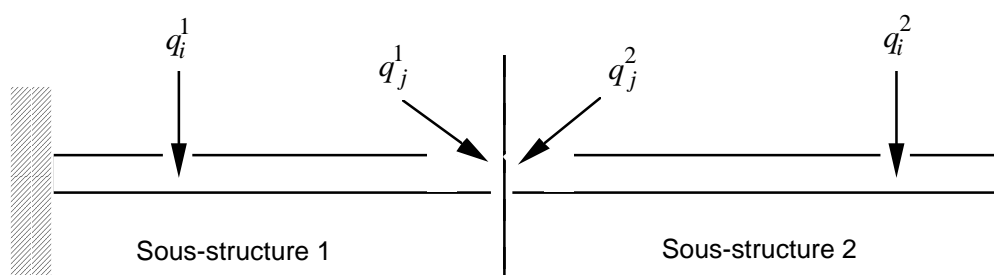
### 2.1 Base de Craig-Bampton harmonique

Les méthodes de synthèse modale (cf. [R4.06.02]), quels que soient leurs domaines d'application (modal, harmonique et/ou transitoire) associent les techniques de sous-structuration à celles de recombinaison modale. Réaliser un calcul par sous-structuration signifie que la structure est découpée en plusieurs éléments et que son déplacement se calcule comme la réponse aux forces de liaison qui la relient aux autres composants et aux forces extérieures qui lui sont appliquées. D'autre part, la réponse de chaque sous-structure est calculée par recombinaison modale. Ainsi, tous les composants sont définis par une base de projection composée de modes propres et de modes d'interface. Deux bases de projection introduites dans le *Code\_Aster* ont été présentées dans la documentation de référence [R4.06.02] :

- base de Craig-Bampton,
- bases de Mac Neal sans/avec correction statique.

Une troisième base de projection a été introduite dans le cadre des développements concernant le calcul de réponse harmonique par sous-structuration dynamique classique. Il s'agit de la base de Craig-Bampton harmonique.

Nous présentons cette nouvelle base de projection à l'aide de l'exemple simple suivant :



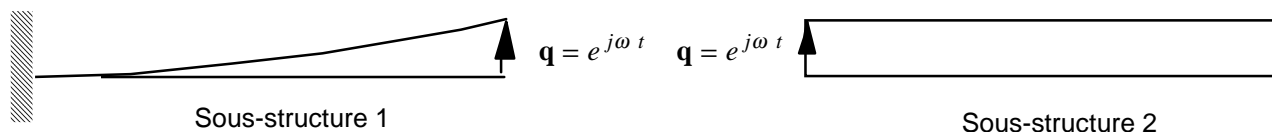
$$\mathbf{q}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^k \\ \mathbf{q}_j^k \end{Bmatrix}$$

Le vecteur des degrés de liberté de la sous-structure est caractérisé par un exposant qui définit le numéro de la sous-structure, et un indice qui permet de distinguer les degrés de liberté internes (indice i), des degrés de liberté de frontière (indice j).

La base de Craig-Bampton harmonique est constituée de modes propres à interfaces bloquées et de modes contraints harmoniques [bib6]. Ces derniers sont joints aux modes normaux à interfaces bloquées pour corriger les effets dus à leurs conditions aux limites. Un mode contraint harmonique est défini par la réponse de la sous-structure non amortie à un déplacement harmonique, d'amplitude unité et de fréquence donnée, imposé sur un degré de liberté de liaison, les autres degrés de liberté de liaison étant bloqués.



Modes propres à interfaces bloquées



Modes contraints harmoniques

Cette base modale est plus particulièrement appropriée aux problèmes d'interactions fluides-structures, pour lesquels les chargements statiques ne sont pas applicables dans le *Code\_Aster* (non prise en compte de l'effet de masse ajoutée). Elle peut être utilisée pour tout type de calcul (modal, harmonique et transitoire).

## 2.2 Equations dynamiques vérifiées par les sous-structures séparément

Nous allons considérer une structure  $S$  composée de  $N_s$  sous-structures notées  $S^k$ . Nous supposons que chaque sous-structure est modélisée en éléments finis. Nous avons vu que dans un calcul par sous-structuration dynamique, le comportement vibratoire des sous-structures résulte des forces extérieures qui lui sont appliquées, et des forces de liaison qu'exercent sur elles les autres sous-structures. Ainsi, au niveau de la sous-structure  $S^k$ , nous pouvons écrire :

$$\mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{C}^k \dot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{K}^k \mathbf{q}^k = \mathbf{f}_{ext}^k + \mathbf{f}_L^k \quad \text{éq 2.2-1}$$

où :

|   |  |
|---|--|
| $\mathbf{M}^k$  | est la matrice de masse issue de la modélisation éléments finis de $S^k$                       |
| $\mathbf{C}^k$  | est la matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis de $S^k$                |
| $\mathbf{K}^k$  | est la matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis de $S^k$                    |
| $\mathbf{f}_{ext}^k$  | est le vecteur des forces extérieures appliquées à $S^k$                                       |
| $\mathbf{f}_L^k$  | est le vecteur des forces de liaison appliquées à $S^k$  |
| $\mathbf{q}^k, \dot{\mathbf{q}}^k$ et $\ddot{\mathbf{q}}^k$ | sont les vecteurs déplacement vitesse et accélération issus de la modélisation éléments finis. |

Dans un problème harmonique, on impose un chargement dynamique, spatialement quelconque, mais sinusoïdal dans le temps. On s'intéresse alors à la réponse stabilisée du système, sans tenir compte de la partie transitoire.

Le champ des forces extérieures s'écrit :

$$\mathbf{f}_{ext}^k(t) = \{\mathbf{f}_{ext}^k\} e^{j\omega t}$$

Le champ des forces de liaison s'écrit :

$$\mathbf{f}_L^k(t) = \{\mathbf{f}_L^k\} e^{j\omega t}$$

Le champ des déplacements s'écrit :

$$\mathbf{q}^k(t) = \{\mathbf{q}^k\} e^{j\omega t}$$

Les champs de vitesse et d'accélération s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}^k(t) &= j\omega \{\mathbf{q}^k\} e^{j\omega t} \\ \ddot{\mathbf{q}}^k(t) &= -\omega^2 \{\mathbf{q}^k\} e^{j\omega t}\end{aligned}$$

Finalement la sous-structure  $S^k$  vérifie l'équation suivante :

$$(\mathbf{K}^k + j\omega \mathbf{C}^k - \omega^2 \mathbf{M}^k) \{\mathbf{q}^k\} = \{\mathbf{f}_{ext}^k\} + \{\mathbf{f}_L^k\} \quad \text{éq 2.2-2}$$

La méthode de synthèse modale consiste à rechercher le champ de déplacement inconnu, issu de la modélisation éléments finis, sur un espace approprié, de dimension réduite (transformation de Ritz). Nous avons vu que pour chaque sous-structure, cet espace est composé de modes propres dynamiques et de déformées statiques :

$$\mathbf{q}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^k & \boldsymbol{\psi}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^k \\ \boldsymbol{\eta}_j^k \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}^k \boldsymbol{\eta}^k \quad \text{éq 2.2-3}$$

$\boldsymbol{\varphi}^k$  sont les vecteurs modaux associés aux modes propres dynamiques de  $S^k$ ,

$\boldsymbol{\psi}^k$  sont les vecteurs modaux associés aux déformées statiques de  $S^k$ ,

$\boldsymbol{\eta}_i^k$  est le vecteur des coordonnées généralisées associées aux modes propres de  $S^k$ ,

$\boldsymbol{\eta}_j^k$  est le vecteur des coordonnées généralisées associées aux déformées statiques de  $S^k$ ,

$\boldsymbol{\eta}^k$  est le vecteur des coordonnées généralisées de  $S^k$ .

L'équation [éq 2.2-2] est projetée sur la base de  $S^k$  en tenant compte de [éq 2.2-3]. Ceci nous permet d'écrire :

$$(\bar{\mathbf{K}}^k + j\omega \bar{\mathbf{C}}^k - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}^k) \{\boldsymbol{\eta}^k\} = \{\bar{\mathbf{f}}_{ext}^k\} + \{\bar{\mathbf{f}}_L^k\} \quad \text{éq 2.2-4}$$

où :

$$\bar{\mathbf{M}}^k = \boldsymbol{\Phi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\Phi}^k$$

est la matrice de masse généralisée de  $S^k$ ,

$$\bar{\mathbf{C}}^k = \boldsymbol{\Phi}^{kT} \mathbf{C}^k \boldsymbol{\Phi}^k$$

est la matrice d'amortissement généralisé de  $S^k$ ,

$$\bar{\mathbf{K}}^k = \boldsymbol{\Phi}^{kT} \mathbf{K}^k \boldsymbol{\Phi}^k$$

est la matrice de rigidité généralisée de  $S^k$ ,

$$\{\bar{\mathbf{f}}_{ext}^k\} = \boldsymbol{\Phi}^{kT} \{\mathbf{f}_{ext}^k\}$$

est le vecteur des forces extérieures harmoniques généralisées appliquées à  $S^k$ ,

$$\{\bar{\mathbf{f}}_L^k\} = \boldsymbol{\Phi}^{kT} \{\mathbf{f}_L^k\}$$

est le vecteur des forces de liaison généralisées appliquées à  $S^k$ ,

$$\{\boldsymbol{\eta}^k\}_o$$

est le vecteur des déplacements harmoniques généralisés.

En supposant que les modes propres dynamiques et les déformées statiques sont organisés comme le montre la formule [éq 2.2-3] et en considérant que les vecteurs propres associés aux modes dynamiques sont normés par rapport à la masse modale unitaire, les matrices de masse et de rigidité généralisées prennent la forme suivante :

$$\overline{\mathbf{M}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Id} & \boldsymbol{\varphi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\psi}^k \\ \boldsymbol{\psi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\varphi}^k & \boldsymbol{\psi}^{kT} \mathbf{M}^k \boldsymbol{\psi}^k \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{K}}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^k & \boldsymbol{\varphi}^{kT} \mathbf{K}^k \boldsymbol{\psi}^k \\ \boldsymbol{\psi}^{kT} \mathbf{K}^k \boldsymbol{\varphi}^k & \boldsymbol{\psi}^{kT} \mathbf{K}^k \boldsymbol{\psi}^k \end{bmatrix}$$

où :

$\mathbf{Id}$  est la matrice Identité,

$\boldsymbol{\lambda}^k$  est la matrice diagonale des carrés des pulsations propres de la base.

On démontre, dans le cas de la méthode de Craig-Bampton, que les modes normaux et les modes contraints sont orthogonaux vis à vis de la matrice de rigidité dont les termes extra-diagonaux sont, dès lors, nuls [R4.06.02]. Cependant, cette propriété n'est pas utilisée dans l'algorithme programmé dans le *Code\_Aster*.

Nous ne considérons, comme type de dissipation, que l'amortissement visqueux (c'est le seul qui est supporté par les outils de sous-structuration dans le *Code\_Aster*). Deux méthodes sont utilisables pour prendre en compte cet amortissement :

- l'amortissement de Rayleigh appliqué au niveau élémentaire qui consiste à supposer que la matrice d'amortissement élémentaire  $\mathbf{C}_e$  associée à chaque élément fini du modèle est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité élémentaires  $\mathbf{K}_e$  et  $\mathbf{M}_e$  :

$$\mathbf{C}_e = \alpha_e \mathbf{K}_e + \beta_e \mathbf{M}_e$$

La matrice d'amortissement est alors assemblée  $\mathbf{C}^k$  puis projetée sur la base [éq 2.2-3] :

$$\overline{\mathbf{C}}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{kT} \mathbf{C}^k \boldsymbol{\varphi}^k & \boldsymbol{\varphi}^{kT} \mathbf{C}^k \boldsymbol{\psi}^k \\ \boldsymbol{\psi}^{kT} \mathbf{C}^k \boldsymbol{\varphi}^k & \boldsymbol{\psi}^{kT} \mathbf{C}^k \boldsymbol{\psi}^k \end{bmatrix}$$

- l'amortissement proportionnel appliqué aux modes propres dynamiques de chaque sous-structure. La matrice résultante est donc une diagonale incomplète (on ne sait pas associer d'amortissement proportionnel aux déformées statiques) :

$$\overline{\mathbf{C}}^k = \begin{bmatrix} \xi^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Assemblage des sous-structures

Après avoir étudié chaque sous-structure séparément, on se propose d'établir les équations qui régissent leur assemblage. Considérons deux sous-structures  $S^k$  et  $S^l$  reliées entre elles au niveau de l'interface  $S^k \cap S^l$ . Elles sont représentées par leur modélisation éléments finis et on admet que leurs maillages respectifs sont compatibles. Ainsi, au niveau de l'interface, les nœuds coïncident et les mailles en vis à vis sont identiques. Dès lors, la loi d'action-réaction et la continuité des déplacements aux interfaces, qui traduisent l'assemblage de  $S^k$  et  $S^l$ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k &= -\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^l \\ \mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k &= \mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^l \end{aligned}$$

où :

$\mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k$  est le vecteur des forces de liaison appliquées à la sous-structure  $S^k$ , au niveau de l'interface  $S^k \cap S^l$ ,

$\mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k$  est le vecteur des degrés de liberté de l'interface  $S^k \cap S^l$  issus de la modélisation éléments finis de la sous-structure  $S^k$ .

Introduisons les matrices d'extraction des degrés de liberté de l'interface  $S^k \cap S^l$  :

$$\mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k = \mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^k \mathbf{q}^k$$

$$\mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^l = \mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^l \mathbf{q}^l$$

En utilisant l'équation de projection [éq 2.2-3] et la formulation ci-dessus appliquées aux deux sous-structures soumises à un chargement harmonique, on obtient :

$$\mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^k \Phi^k \{\boldsymbol{\eta}^k\} = \mathbf{B}_{S^k \cap S^l}^l \Phi^l \{\boldsymbol{\eta}^l\}$$

Soit :

$$\mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^k \{\boldsymbol{\eta}^k\} = \mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^l \{\boldsymbol{\eta}^l\} \quad \text{éq 2.3-1}$$

où :

$\mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^k$  est la matrice de liaison de l'interface  $S^k \cap S^l$  de la sous-structure  $S^k$ ,

$\mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^l$  est la matrice de liaison de l'interface  $S^k \cap S^l$  de la sous-structure  $S^l$ .

Ce traitement peut être réalisé au niveau de toutes les interfaces de la structure globale. En particulier, on note que le travail des forces de liaison est nul sur l'interface  $S^k \cap S^l$  ; il est donc nul sur la structure globale :

$$W_{S^k \cap S^l} = \mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^k \mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^k + \mathbf{f}_{L_{S^k \cap S^l}}^l \mathbf{q}_{S^k \cap S^l}^l = 0$$



## 2.4 Equations dynamiques vérifiées par la structure globale

Les équations dynamiques que vérifie la structure globale sont :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{K}}^1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \bar{\mathbf{K}}^k & \\ & & & \dots \\ & & & & \bar{\mathbf{K}}^{N_s} \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}}^1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \bar{\mathbf{C}}^k & \\ & & & \dots \\ & & & & \bar{\mathbf{C}}^{N_s} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{M}}^1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \bar{\mathbf{M}}^k & \\ & & & \dots \\ & & & & \bar{\mathbf{M}}^{N_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}^{N_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{ext}^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_{ext}^k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_{ext}^{N_s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}_L^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_L^k \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_L^{N_s} \end{pmatrix}$$

Auxquelles, il faut ajouter les équations de liaison (d'après [éq 2.3-1]) :

$$\forall k, l \quad \mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^k \{ \boldsymbol{\eta}^k \} = \mathbf{L}_{S^k \cap S^l}^l \{ \boldsymbol{\eta}^l \}$$

Ce système est résolu par double dualisation des conditions aux limites [R3.03.01]. Sa formulation finale fait donc intervenir le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  et peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{K}} + j\omega \bar{\mathbf{C}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}) \{ \boldsymbol{\eta} \} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda} &= \{ \bar{\mathbf{f}}_{ext} \} \\ \mathbf{L} \{ \boldsymbol{\eta} \} &= 0 \end{aligned} \quad \text{éq 2.4-1}$$

Le problème défini par l'équation [éq 2.4-1] est symétrique. D'autre part, sa dimension est déterminée par le nombre de modes pris en considération (modes dynamiques et déformées statiques). On est donc amené à résoudre un problème harmonique classique, de taille réduite, auquel est associée une équation de contrainte linéaire. Sa résolution ne pose donc pas de problème.

## 2.5 Mise en œuvre dans le Code\_Aster

### 2.5.1 Etude des sous-structures séparément

Les paramètres  $\alpha_e$  et  $\beta_e$  de l'amortissement de Rayleigh sont introduits, le cas échéant, par l'opérateur `DEFI_MATERIAU` [U4.23.01].

Les traitements des sous-structures sont identiques au cas du calcul modal [R4.06.02]. Les modes propres dynamiques sont calculés avec les opérateurs : `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.02] ou `MODE_ITER_INV` [U4.52.01]. Les conditions aux interfaces de liaison sont appliquées avec l'opérateur `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01]. L'opérateur `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.55.03] permet de définir les interfaces de connexion de la sous-structure. L'opérateur `DEFI_BASE_MODAL` [U4.55.04] permet de calculer la base de projection complète de la sous-structure.

L'opérateur `MACR_ELEM_DYNA` [U4.55.05] calcule les matrices généralisées de rigidité, de masse et éventuellement d'amortissement de la sous-structure, ainsi que les matrices de liaison. L'amortissement de Rayleigh est pris en compte en complétant l'opérande `MATR_AMOR`. L'amortissement proportionnel est introduit par l'opérande `AMOR_REDUIT`.

Le chargement harmonique est défini, au niveau de la sous-structure, par les opérateurs `AFFE_CHAR_MECA` [U4.25.01] (application de la force sur le maillage), `CALC_VECT_ELEM` [U4.41.02] (calcul des vecteurs élémentaires associés) et `ASSE_VECTEUR` [U4.42.03] (assemblage du vecteur de chargement sur le maillage de la sous-structure).

## 2.5.2 Assemblage et résolution

Comme dans le cas du calcul modal [R4.06.02], le modèle de la structure complète est défini par l'opérateur `DEFI_MODELE_GENE` [U4.55.06]. Sa numérotation est réalisée par l'opérateur `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07]. Les matrices de masse, de rigidité et éventuellement d'amortissement généralisées de la structure complète sont assemblées en fonction de cette numérotation avec l'opérateur `ASSE_MATR_GENE` [U4.55.08].

Les chargements sont projetés sur les bases des sous-structures auxquelles ils sont appliqués, puis assemblés à partir de la numérotation issue de `NUME_DDL_GENE` [U4.55.07] par l'opérateur `ASSE_VECT_GENE` [U4.55.09].

Le calcul de la réponse harmonique de la structure complète est réalisé par l'opérateur `DYNA_LINE_HARM` [U4.54.02].

## 2.5.3 Restitution sur base physique

La restitution des résultats sur base physique est identique au cas du calcul modal [R4.06.02]. Elle fait intervenir l'opérateur `REST_BASE_PHYS` [U4.64.01] et éventuellement l'opérateur `DEFI_SQUELETTE` [U4.75.01] (création d'un maillage "squelette").

# 3 Conclusion

La méthode de calcul de réponse harmonique par synthèse modale disponible dans le *Code\_Aster* s'appuie sur celle de sous-structuration modale, également programmée. Elle consiste à exprimer l'ensemble des équations dans un espace de dimension réduite, constitué de modes des différentes sous-structures, par une méthode de Rayleigh-Ritz. La définition de ces champs est celle utilisée pour la sous-structuration modale et comprend des modes normaux ainsi que d'autres statiques ou harmoniques. La procédure employée se traduit par une projection des matrices et du second membre sur l'espace restreint.

Dans le document, nous avons présenté les fondements de cette méthode. Nous avons montré comment les équations projetées étaient obtenues à partir du problème posé dans l'espace continu. La base de Craig-Bampton harmonique qui sert essentiellement pour résoudre les problèmes d'interaction fluides-structures a été présentée. La formulation des conditions de raccord a également été évoquée. Nous avons ainsi obtenu les équations réduites, en fonction des coordonnées généralisées, qui permettent de résoudre le problème de façon modulaire, avec des coûts moindres. Par ailleurs, la prise en compte des phénomènes d'amortissement a été examinée. Elle conduit à l'introduction dans le calcul par sous-structuration des amortissements de Rayleigh ou des amortissements modaux propres à chaque sous-structure.

## 4 Bibliographie

---

- [1] C. VARE : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Méthodes d'analyse" [R4.06.02] "Calcul modal par sous-structuration dynamique classique et cyclique"
- [2] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration cyclique en éléments finis" Rapport EDF HP-61/91.156
- [3] P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dans le *Code\_Aster*" Rapport EDF HP-61/92.149
- [4] R. ROY, J. CRAIG & M. C. BAMPION : "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis" - AIAA Journal, (July 1968), Vol. 6, N° 7, p. 1313-1319.
- [5] R. H. Mac Neal : "A hybrid method of component mode synthesis" Computers and Structures, (1971), Vol. 1, p. 581-601.
- [6] T. KERBER : "Cahier des charges : mise en oeuvre de la sous-structuration harmonique" - Rapport D.E.R. HP-61/93.053
- [7] T. KERBER : "Sous-structuration harmonique dans le *Code\_Aster*" - Rapport D.E.R. HP-61/93.104
- [8] J. PELLET : "Code de Mécanique Aster - Manuel de Référence : Les éléments finis dans Aster" - [R3.03.01] "Dualisation des conditions aux limites"

Page laissée intentionnellement blanche.