

Manuel de Référence
Fascicule R7.02 : Mécanique de la rupture
Document R7.02.01

Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire

Résumé :

On présente le calcul du taux de restitution de l'énergie par la méthode thêta en 2D ou en 3D pour un problème thermo-élastique linéaire. On explique comment le champ thêta est introduit dans le *Code_Aster* et comment le taux de restitution d'énergie est implanté.

Des études mécano-fiabilistes d'évaluation de probabilité d'amorçage de la rupture requiert, en plus, sa dérivée par rapport à une variation de domaine pilotée par un autre champ. On détaille l'implantation de cette option dans le code.

Table des matières

1 Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode θ en thermo-élasticité linéaire	4
1.1 Relation de comportement	4
1.2 Energie potentielle et relations d'équilibre	6
1.3 Expression Lagrangienne du taux de restitution d'énergie	6
2 Discrétisation du taux de restitution d'énergie	12
2.1 Méthode θ en dimension 2	12
2.2 Méthode θ en dimension 3	12
2.3 Choix dans <i>Aster</i> de la discrétisation de G en dimension 3	14
2.4 Implantation de G en thermo-élasticité linéaire dans <i>Aster</i>	23
2.4.1 Types d'éléments et de chargements	23
2.4.2 Environnement nécessaire	23
2.4.3 Calculs des différents termes du taux de restitution d'énergie	24
2.4.3.1 Terme classique élémentaire	24
2.4.3.2 Terme force volumique	25
2.4.3.3 Terme force surfacique	25
2.4.3.4 Terme thermique	25
2.4.3.5 Terme déformations et contraintes initiales	25
2.4.4 Normalisation du taux de restitution d'énergie dans <i>Aster</i>	26
2.4.4.1 Axisymétrie	26
2.4.4.2 Autres cas	27
2.5 Paramétrage des commandes	27
3 Introduction du champ θ dans <i>Aster</i>	29
3.1 Conditions à remplir	29
3.2 Choix du champ θ en dimension 3	29
3.2.1 Méthode de construction	29
3.2.2 Algorithmes de calcul	30
3.3 Choix du champ θ en dimension 2	34
3.4 Autre méthode	34
4 Dérivée du taux de restitution d'énergie par rapport à une variation de domaine	35
4.1 Problématique	35
4.2 Remarques préliminaires	37
4.2.1 Théorème de transport	37
4.2.2 Chargements et matériaux	39
4.2.3 Formulaire	40
4.3 Calculs des différents termes de la dérivée du taux de restitution d'énergie	42
4.3.1 Dérivée du terme classique élémentaire	42
4.3.2 Dérivée du terme thermique	44
4.3.3 Dérivée des termes forces volumique et surfacique	44

Titre : Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire

Date : 26/05/05

Auteur(s) : E. GALENNE, O. BOITEAU, E. VISSE

Clé : R7.02.01-D

Page : 3/60

4.3.4 Dérivée du terme déformations et contraintes initiales.....	45
4.4 Implantation dans le Code_Aster.....	46
4.4.1 Périmètre d'utilisation.....	46
4.4.2 Environnement nécessaire	48
4.4.3 Normalisation	48
5 Bibliographie.....	49
Annexe 1 Calcul des dérivées secondes des éléments quadratiques 2D.....	50
Annexe 2 Calcul du terme force surfacique et de sa dérivée en 2D	55

1 Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode thêta en thermo-élasticité linéaire

1.1 Relation de comportement

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Soit :

- \mathbf{u} le champ de déplacement,
- T le champ de température,
- \mathbf{f} le champ de forces volumiques appliquées sur Ω ,
- \mathbf{g} le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
- \mathbf{U} le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.

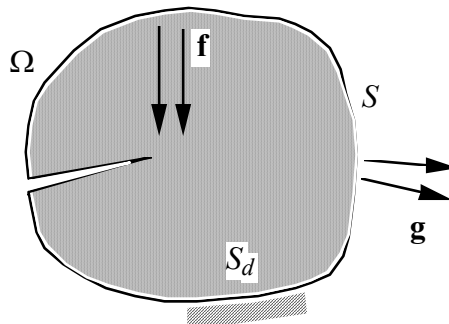


Figure 1.1-a : Solide élastique fissuré

Pour simplifier, on se place en **élasticité linéaire et en petites déformations**, mais cette approche se généralise sans peine à la plasticité [R7.02.07], aux grandes déformations, à la dynamique [R7.02.02]...

On désigne par :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ le tenseur des déformations initiales,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ le tenseur des déformations d'origine thermique,
- $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
- $\boldsymbol{\sigma}^o$ le tenseur des contraintes initiales,
- $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^o, \boldsymbol{\sigma}^o, T)$ la densité d'énergie libre,
- $\boldsymbol{\Lambda}$ le tenseur d'élasticité.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ est relié au champ de déplacement \mathbf{u} par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

La **densité d'énergie libre** $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ, T)$ est identifiée par un essai de traction et de dilatation en petites déformations. $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ, T)$ est une fonction convexe et dérivable.

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ, T) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^\circ) \Lambda (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^\circ) + (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^\circ) \boldsymbol{\sigma}^\circ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\circ \boldsymbol{\sigma}^\circ$$

La loi de comportement d'un matériau élastique s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ, T) = \Lambda (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^\circ) + \boldsymbol{\sigma}^\circ$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{th} = \alpha (T - T_{réf}) \delta_{ij}$

Le terme constant $\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\circ \boldsymbol{\sigma}^\circ$ a une contribution nulle sur le calcul du taux de restitution d'énergie, mais d'un point de vue numérique il permet de retrouver exactement la même valeur pour un calcul élastique de G en ayant n'importe quel état initial élastique intermédiaire : $\boldsymbol{\sigma}^\circ = \Lambda \boldsymbol{\varepsilon}^\circ$.

On retrouve :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ, T) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \Lambda (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \Lambda (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th})$$

Dans le cas où les déformations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ et les contraintes initiales sont nulles, la densité d'énergie libre s'écrit :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{ii})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - 3K \alpha (T - T_{réf}) \varepsilon_{kk} + \frac{9}{2} K \alpha^2 (T - T_{réf})^2$$

La **relation de comportement** s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - 3K \alpha (T - T_{réf}) \delta_{ij}$$

λ et μ sont les coefficients de LAME.

α est le coefficient de dilatation thermique.

$T_{réf}$ est la température de référence.

K , module de compressibilité volumique, est relié aux coefficients de LAME par :
 $3K = 3\lambda + 2\mu$.

La relation de comportement à partir du module d'YOUNG E et du coefficient de POISSON ν est :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (tr \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_{réf}) \delta_{ij}$$

avec :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$3K = \frac{E}{1-2\nu}$$

1.2 Energie potentielle et relations d'équilibre

On définit les espaces des champs cinématiquement admissible V et V_o .

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \text{ admissibles, } \mathbf{v} = \mathbf{U} \text{ sur } S_d \} \\ V_o &= \{ \mathbf{v} \text{ admissibles, } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } S_d \} \end{aligned}$$

Avec les hypothèses du [§1.1] (et pour $\sigma^o = \varepsilon^o = 0$), les **relations d'équilibre en formulation faible** sont :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_S g_i v_i d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V_o \end{cases}$$

Elles sont obtenues en minimisant l'énergie potentielle globale du système :

$$W(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), T) d\Omega - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_S g_i v_i d\Gamma$$

En effet, si cette fonctionnelle est minimale pour le champ de déplacement \mathbf{u} , alors :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta v_i d\Omega - \int_S g_i \delta v_i d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}) d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta v_i d\Omega - \int_S g_i \delta v_i d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta v_i d\Omega - \int_S g_i \delta v_i d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc les équations d'équilibre et la relation de comportement en ayant posé :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

1.3 Expression Lagrangienne du taux de restitution d'énergie

Par définition [bib1] le taux de restitution d'énergie locale G est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au domaine Ω :

$$G = - \frac{\partial W}{\partial \Omega}$$

Ce taux de restitution est calculé dans le *Code_Aster* par la méthode thêta, qui est une **méthode lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle** [bib4] [bib2]. On considère des transformations $F^\eta: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \eta \boldsymbol{\theta}(\mathbf{M})$ du domaine de référence Ω en un domaine Ω^η modélisant des propagations de la fissure, qui à un point matériel \mathbf{P} font correspondre un point spatial \mathbf{M} . Ces transformations ne doivent modifier que la position du fond de fissure Γ_o . Les champs $\boldsymbol{\theta}$ doivent donc être tangents à $\partial\Omega$, c'est-à-dire en notant \mathbf{n} la normale à $\partial\Omega$:

$$\boldsymbol{\theta} \in \Theta = \{ \boldsymbol{\mu} \text{ tels que } \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Remarque

Cette famille de fonctions de transformation doit être suffisamment régulière. En particulier, elle doit être au moins deux fois dérivables par morceaux en \mathbf{P} et en η (pour que les dérivées partielles secondes commutent) et réaliser un difféomorphisme pour chaque valeur du paramètre η (cela assure la réversibilité du processus).

Soit \mathbf{m} la normale unitaire à Γ_o située dans le plan tangent à $\partial\Omega$ (c'est-à-dire tangent au plan de la fissure) et rentrant dans Ω .

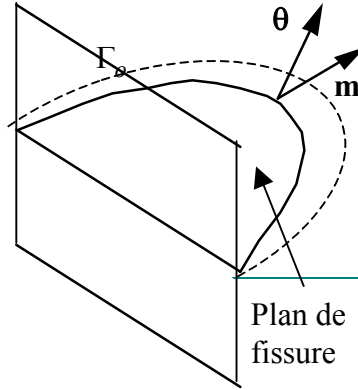


Figure 1.3-a : Fond de fissure en 3D

D'après la proposition 7 de [bib4], le taux de restitution d'énergie locale G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_o} G \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m} = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \quad , \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

où $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle $W(\mathbf{u}(\eta))$ à l'équilibre par rapport à l'évolution initiale du fond de fissure η :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = -\dot{W} = - \left. \frac{d W(\mathbf{u}(\eta))}{d\eta} \right|_{\eta=0}$$

La quantité $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m}$ représente la vitesse normale du fond de fissure. D'autre part, $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ a la même valeur qu'il s'agisse d'une propagation droite [Figure 1.3-b] (a) ou d'une propagation courbe [Figure 1.3-b] (b) dans la mesure où celle-ci a la même tangente au départ (ensuite on en peut rien dire). En revanche, on ne peut rien dire du cas de la propagation dans une direction marquant un angle [bib5] [Figure 1.3-b] (c).

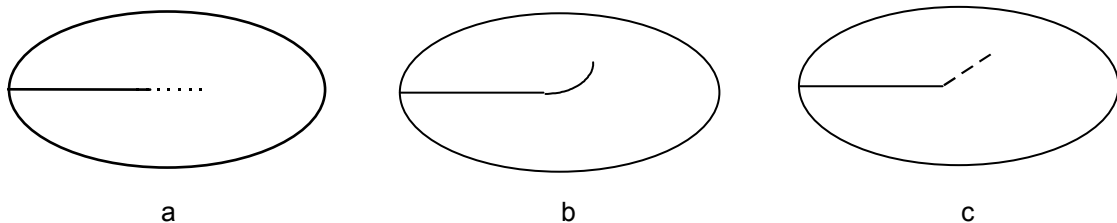


Figure 1.3-b : Différentes géométries de propagations

Par la suite, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on désignera par \cdot la dérivée lagrangienne dans une propagation virtuelle de fissure de vitesse θ . Soit $\varphi(\eta, \mathbf{M})$ un champ spatial (ou eulérien) quelconque défini sur $R^+ \times \Omega$, nous noterons sa représentation matérielle (ou lagrangienne) $\bar{\varphi}(\eta, \mathbf{P}) = \varphi(\eta, F^\eta(\mathbf{P}))$ et sa dérivée particulaire (ou lagrangienne) par rapport à cette propagation virtuelle $\dot{\varphi} = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$.

Remarques [bib6] :

- Le fait d'adopter deux visions différentes (eulérienne et lagrangienne) introduit structurellement des notions de dérivabilités croisées. Ainsi, cette dérivée particulaire d'un champ spatial appelée dérivée lagrangienne consiste à dériver $\varphi(\eta, \mathbf{M})$ en fixant le point matériel $\mathbf{P} = (\mathbf{F}^\eta)^{-1}(\mathbf{M})$. On transpose le champ en représentation lagrangienne, puis on le dérive par rapport à η avant de le reconvertir en représentation eulérienne.
- On rappelle que cette dérivée lagrangienne est liée à la dérivée eulérienne $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ par la relation

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nabla \varphi \cdot \theta$$

Remarque [bib4] :

La dérivée eulérienne $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ ne dépend que de Ω restreint à $\delta\Omega$, c'est-à-dire de la trace de Ω sur le fond de fissure.

Avec ces notations, le taux de restitution d'énergie dans cette propagation θ s'écrit (en utilisant le théorème de transport de Reynolds cf. [§4.2.1]) :

$$-G(\theta) = \int_{\Omega} \left(\overline{\dot{\psi} - f_i u_i} \right) + (\psi - f_i u_i) \theta_{k,k} d\Omega - \int_S \left(\overline{\dot{g}_i u_i} + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right) \right) d\Gamma$$

Or

$$\dot{\psi}(\varepsilon, \varepsilon^\circ, \sigma^\circ, T) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^\circ} \dot{\varepsilon}_{ij}^\circ + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}^\circ} \dot{\sigma}_{ij}^\circ + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T}$$

$T, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \sigma^\circ, \varepsilon^\circ$ étant supposés indépendants de η , c'est-à-dire étant la restriction à Ω (ou $\mathcal{A}\Omega$) de champs définis sur R^3 , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{T} &= T_{,k} \theta_k \\ \dot{f}_i &= f_{i,k} \theta_k \\ \dot{g}_i &= g_{i,k} \theta_k \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^\circ &= \varepsilon_{ij,k}^\circ \theta_k \\ \dot{\sigma}_{ij}^\circ &= \sigma_{ij,k}^\circ \theta_k \end{aligned}$$

En effet, si on considère des chargements et des matériaux φ qui sont la **restriction sur la géométrie** Ω (ou une partie de sa frontière) de champs définis sur \mathbb{R}^3 tout entier :

$$\exists \Phi / \varphi = \Phi|_{\Omega}$$

La dérivation par rapport au paramètre η commutant avec cette restriction, on a le résultat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{|_{\Omega}} = 0|_{\Omega} = 0$$

Remarques :

- Cette hypothèse n'est vérifiée que pour des champs suffisamment réguliers (par exemple appartenant à des espaces de Sobolev de Ω). Leur définition ne doit pas être impactée par la variation de frontière.
- Dans le cas de la dérivation du taux de restitution d'énergie par rapport à une variation de domaine (cf. [§4]) la dérivée eulérienne du champ de température ne pourra plus être négligée.

D'autre part, on a aussi supposé que les **dérivées eulériennes des caractéristiques matériaux** φ sont nulles, ce qui n'est vrai que sur le problème discrétisé avec les fonctionnalités actuelles de l'opérateur `DEFI_MATERIAU`. Leur gradient sur chaque élément est aussi nul par construction (elles sont discrétisées P_0 c'est-à-dire constantes par éléments finis), il en découle que la dérivée lagrangienne est nulle :

$$\dot{\varphi} = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}_{=0} + \underbrace{\nabla \varphi \cdot \theta}_{=0} \quad \text{pour } \varphi \in \{E, \nu, \alpha, T_{ref}\}$$

Attention :

Avec des caractéristiques matériaux variables au sein d'éléments finis de la couronne θ de calcul, cette simplification n'est plus licite.

Comme $\psi(\varepsilon, \varepsilon^\circ, \sigma^\circ, T) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^\circ) \Lambda (\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^\circ) + (\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^\circ) \sigma^\circ + \frac{1}{2} \varepsilon^\circ \sigma^\circ$

on a
$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \Lambda_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th} - \varepsilon_{kl}^\circ) + \sigma_{ij}^\circ = \sigma_{ij} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^\circ} &= -\Lambda_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th} - \varepsilon_{kl}^\circ) - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\circ = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\circ - \sigma_{ij} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}^\circ} &= (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \varepsilon_{ij}^\circ) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^\circ = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^\circ \end{aligned}$$

d'où
$$\dot{\psi} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^\circ - \sigma_{ij} \right) \varepsilon_{ij,k}^\circ \theta_k + \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^\circ \right) \sigma_{ij,k}^\circ \theta_k + \frac{\partial \psi}{\partial T} T_{,k} \theta_k$$

D'autre part, d'après la proposition 2 de [bib4] : $\left(\dot{\varphi}_{i,j} \right) = \dot{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,p} \theta_{p,j}$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) - \frac{1}{2} (u_{i,p} \theta_{p,j} + u_{j,p} \theta_{p,i})$$

Et on peut éliminer $\dot{\mathbf{u}}$ de l'expression de $G(\boldsymbol{\theta})$ en remarquant que $\dot{\mathbf{u}}$ est cinématiquement admissible et en utilisant l'équation d'équilibre :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \dot{u}_i d\Omega + \int_S g_i \dot{u}_i d\Gamma + \int_{S_d} \sigma_{ij} n_j U_{i,k} \theta_k d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned} -G(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega} \dot{\psi} - f_i \dot{u}_i - \dot{f}_i u_i + (\psi - f_i u_i) \theta_{k,k} d\Omega - \int_S (g_i \dot{u}_i + \dot{g}_i u_i) d\Gamma \\ &\quad - \int_S g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} - f_i \dot{u}_i d\Omega - \int_S g_i \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,p} \theta_{p,j} + u_{j,p} \theta_{p,i}) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + (\psi - f_i u_i) \theta_{k,k} d\Omega - \int_S \dot{g}_i u_i + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\circ} - \sigma_{ij} \right) \varepsilon_{ij,k}^{\circ} \theta_k + \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{\circ} \right) \sigma_{ij,k}^{\circ} \theta_k d\Omega \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} - \psi \theta_{k,k} - \frac{\partial \psi}{\partial T} T_{,k} \theta_k d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\circ} \right) \varepsilon_{ij,k}^{\circ} \theta_k - \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{\circ} \right) \sigma_{ij,k}^{\circ} \theta_k d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} f_i u_i \theta_{k,k} + f_{i,k} \theta_k u_i d\Omega \\ &\quad + \int_S g_{i,k} \theta_k u_i + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right) d\Gamma \\ &\quad - \int_{S_d} \sigma_{ij} n_j U_{i,k} \theta_k d\Gamma \end{aligned}$$

Remarques :

- En déformations d'Euler-Lagrange le premier intégrande devient $h_{i,p} \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j}$ avec $h_{i,j} = \delta_{i,j} + u_{i,j}$.
- En axisymétrie, on a l'analogie formelle $(x,y) \Leftrightarrow (r,z)$ et toutes les composantes des gradients impliquant la composante orthoradiale sont nulles sauf $\varphi_{\theta,\theta} = \frac{\varphi_r}{r}$. De plus l'élément de surface est multiplié par r pour prendre en compte le calcul de l'intégrale pour une unité de radian.
- La possibilité de prendre en compte des champs de déplacements imposés n'a pas été développée. Ceux-ci ne sont d'ailleurs pas contraints par la propagation de fissure puisqu'ils apparaissent via la condition d'équilibre.
- Dans le terme surfacique on a des dérivations normales à la surface qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans le Code_Aster. On a donc recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes pour mieux appréhender cette intégrande sur la surface de calcul (cf. [Annexe 2]).

2 Discrétisation du taux de restitution d'énergie

2.1 Méthode thêta en dimension 2

On rappelle que le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_o} G(s) \theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = G(\theta) \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$

où :

- \mathbf{m} est la normale unitaire au fond de fissure Γ_o situé dans le plan tangent à $\partial\Omega$ et rentrant dans Ω ,
- $\Theta = \{\mu \text{ tels que } \mu \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

En dimension 2, le **fond de fissure** Γ_o se ramène à un point \mathbf{M}_0 , et on peut choisir un champ θ unitaire au voisinage de ce point, de telle sorte que : $G(\mathbf{M}_0) = G(\theta)$

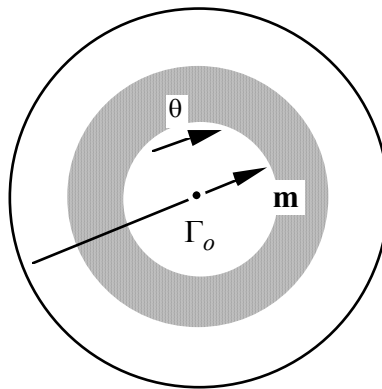


Figure 2.1-a : Fond de fissure en 2D

2.2 Méthode thêta en dimension 3

La dépendance de $G(\theta)$ vis-à-vis du champ θ sur le fond de fissure est plus complexe. Le champ scalaire $G(s)$ peut être discrétisé sur une base que nous noterons $(p_j(s))_{1 \leq j \leq N}$.

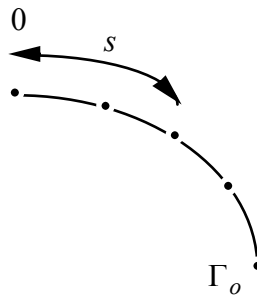


Figure 2.2-a : Discrétisation du fond de fissure en 3D (abscisse curviligne)

Soit G_j les composantes de $G(s)$ dans cette base :

$$G(s) = \sum_{j=1}^N G_j p_j(s)$$

De même, les champs θ^i (appartenant à Θ) peuvent être discrétisés sur une base que nous noterons $(q_k(s))_{1 \leq k \leq M}$. Désignons par $\bar{\theta}^i$ la trace du champ θ^i sur le fond de fissure Γ_o : $\bar{\theta}^i(s) = \theta^i|_{\Gamma_o}(s)$ et par θ_k^i les composantes de $\bar{\theta}^i(s)$ dans cette base :

$$\bar{\theta}^i(s) = \sum_{k=1}^M \theta_k^i q_k(s)$$

$G(s)$ étant solution de l'équation variationnelle $\int_{\Gamma_o} G(s) \theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$, les G_j

vérifient :

$$\int_{\Gamma_o} \sum_{j=1}^N G_j p_j(s) \sum_{k=1}^M (\theta_k^i q_k(s)) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\theta^i) \quad , \quad \forall i \in [1, P]$$

soit :

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^M \theta_k^i \int_{\Gamma_o} p_j(s) q_k(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds \right) G_j = \mathcal{G}(\theta^i) \quad , \quad \forall i \in [1, P]$$

Les G_j peuvent donc être déterminés en résolvant le système linéaire à P équations et N inconnues :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{ij} G_j = b_i \quad , \quad i = 1, P \\ \text{avec} \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^M \theta_k^i \int_{\Gamma_o} p_j(s) q_k(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds \\ b_i = \mathcal{G}(\theta^i) \end{cases}$$

Ce système a une solution si on choisit P champs θ^i indépendants tels que : $P \geq N$ et si $M \geq N$. Il peut comporter plus d'équations que d'inconnues, auquel cas il est résolu au sens des moindres carrés.

2.3 Choix dans Aster de la discrétisation de G en dimension 3

En dimension 2, il n'y a pas de problème car en choisissant un champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure, on obtient la relation $G = \mathcal{G}(\theta)$. Le taux de restitution de l'énergie est indépendant du champ θ .

En dimension 3, la dépendance de $\mathcal{G}(\theta)$ vis-à-vis du champ θ sur le fond de fissure est plus complexe. Dans le Code_Aster, on peut calculer :

- La valeur de $\mathcal{G}(\theta)$ pour un champ θ donné par l'utilisateur (cf. commande CALC_G_THETA_T [U4.82.03]). Il est intéressant de choisir le champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure et tel que :

$$\theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) = 1, \quad \forall s \text{ abscisse curviligne de } \Gamma_o$$

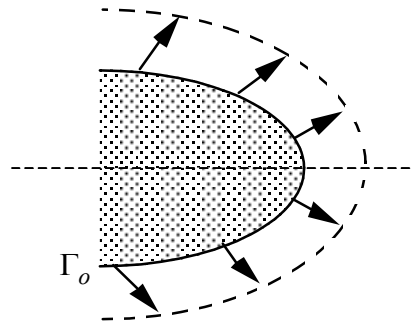


Figure 2.3-a : Discrétisation du fond de fissure en 3D (normale)

On obtient dans ce cas un taux de restitution global \bar{G} correspondant à une progression uniforme de la fissure tel que :

$$\bar{G}l = \int_{\Gamma_o} G(s) ds = \mathcal{G}(\theta)$$

où l est la longueur de la lèvres supérieure ou inférieure de la fissure.

- Le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ solution de l'équation variationnelle

$$\int_{\Gamma_o} G(s) \theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

Dans ce cas, l'utilisateur ne donne pas de champ θ , les champs θ^i nécessaires au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement (cf. commande CALC_G_LOCAL_T [U4.82.04]).

Dans le Code_Aster, on a choisi **deux familles de bases** (cf. [§2.2]) :

- Les **polynômes de LEGENDRE** $\gamma_j(s)$ de degré j ($0 \leq j \leq \text{Deg}_{\max}$).
- Les **fonctions de forme** du nœud k de Γ_o : $\varphi_k(s)$ ($1 \leq k \leq \text{NNO} = \text{nombre de nœuds de } \Gamma_o$) (de degré 1 pour les éléments linéaires et de degré 2 pour les éléments quadratiques).

Rappelons que les polynômes de LEGENDRE constituent une famille orthogonale non normée. Ils sont obtenus par la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0$$

En particulier :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}$$

$$P_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2}$$

Dans Code_Aster, on les norme sous la forme :

$$\gamma_j(s) = \sqrt{\frac{2j+1}{l}} P_j\left(\frac{2s}{l} - 1\right)$$

où :

- s est l'abscisse curviligne de Γ_o ,
- l la longueur du fond de fissure Γ_o .

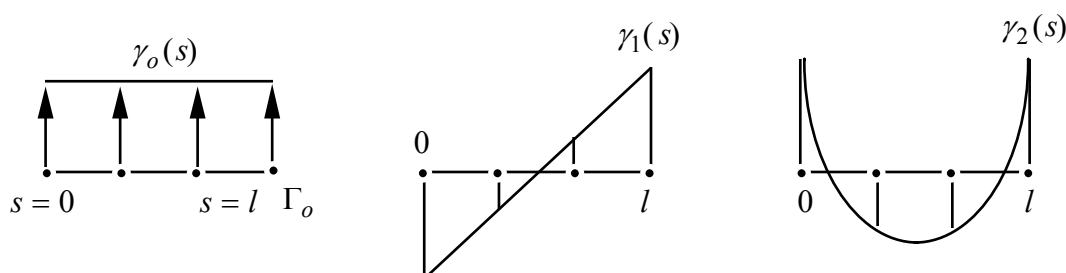


Figure 2.3-b : Polynômes de Legendre

Dans Code_Aster, on se limite à $Deg_{\max} = 7$ comme degré maximal.

Les fonctions de formes $\varphi_k(s)$ sont associées à la discrétisation de Γ_o .

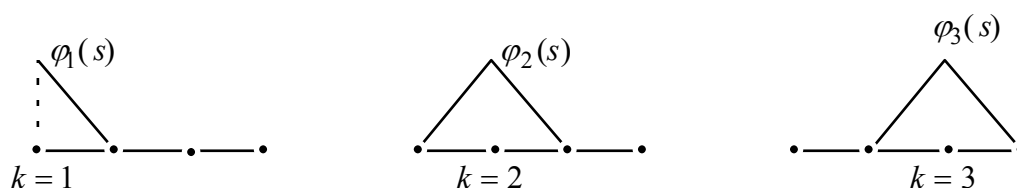


Figure 2.3-c : Fonctions de forme du fond de fissure (éléments linéaires)

Rappelons qu'on est amené à discrétiser $G(s)$ et les champs $\bar{\theta}^i(s)$ (trace du champ θ^i sur le fond de fissure Γ_o).

$$G(s) = \sum_{j=1}^N G_j p_j(s)$$

$$\bar{\theta}^i(s) = \sum_{k=1}^M \theta_k^i q_k(s)$$

Il existe donc plusieurs choix possibles de discrétisations, résumés dans le tableau ci-dessous :

	Polynômes de LEGENDRE	Fonctions de forme
$G(s)$	$\sum_{j=0}^{NDEG} G_j \gamma_j(s)$	$\sum_{j=1}^{NNO} G_j \varphi_j(s)$
$\bar{\theta}^i(s)$	$\sum_{k=0}^{NDEG} \theta_k^i \gamma_k(s)$	$\sum_{k=1}^{NNO} \theta_k^i \varphi_k(s)$

Tableau 2.3-1 : Choix de la discrétisation

NNO : nombre de nœuds du fond de fissure Γ_o
 $NDEG$: degré maximal des polynômes de LEGENDRE choisi par l'utilisateur
 $(NDEG \leq Deg_{\max} = 7)$

Dans la commande CALC_G_LOCAL_T (cf. [U4.82.04]) les mots-clés LISSAGE_THETA et LISSAGE_G permettent de choisir la discrétisation de $\bar{\theta}^i$ et G .

Les options disponibles dans Aster sont résumées dans le tableau suivant :

		$\bar{\theta}^i(s)$	
		Polynômes de LEGENDRE	Fonctions de forme
$G(s)$	Polynômes de LEGENDRE	LISSAGE_THETA : 'LEGENDRE' LISSAGE_G : 'LEGENDRE' (1 ^{er} cas)	LISSAGE_THETA : 'LAGRANGE' LISSAGE_G : 'LEGENDRE' (2 nd cas)
	Fonctions de forme	Non disponible	LISSAGE_THETA : 'LAGRANGE' LISSAGE_G : 'LAGRANGE' ou 'LAGRANGE_NO_NO' (3 ^{ème} cas)

Tableau 2.3-2 : Options de discrétisation du Code_Aster

Premier cas :

$G(s)$ et les champs $\bar{\theta}^i(s)$ sont décomposés suivant les polynômes de LEGENDRE.

$$G(s) = \sum_{j=0}^{NDEG} G_j \gamma_j(s)$$

$$\bar{\theta}^i(s) = \sum_{k=0}^{NDEG} \theta_k^i \gamma_k(s)$$

Les $NDEG$ composantes G_j sont déterminées en résolvant le système linéaire à P équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{NDEG} a_{ij} G_j = b_i \quad , \quad i = 1, P \\ \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \sum_{k=0}^{NDEG} \int_{\Gamma_o} \gamma_j(s) \gamma_k(s) \theta_k^i \cdot \mathbf{m}(s) ds \\ b_i = G(\theta^i) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On fait le choix dans le *Code_Aster* de prendre, comme champs $\bar{\theta}^i$, les $NDEG$ champs $\bar{\theta}^i$ tels que :

$$\bar{\theta}^i(s) \cdot \mathbf{m}(s) = \gamma_i(s)$$

où $\gamma_i(s)$ est le polynôme de LEGENDRE de degré i .

Le système linéaire se simplifie alors en un système de $P = NDEG$ équations à $NDEG$ inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{NDEG} a_{ij} G_j = G(\theta^i) \quad , \quad i = 1, NDEG \\ \text{avec} \quad a_{ij} = \int_{\Gamma_o} \gamma_j(s) \gamma_i(s) \cdot ds = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

car les polynomes de Legendre forment une base orthonormée sur Γ_o .

Ainsi $G_j = G(\theta^j)$ et donc $G(s) = \sum_{j=0}^{NDEG} G(\theta^j) \gamma_j(s)$.

Second cas :

$G(s)$ est décomposé suivant les polynômes de LEGENDRE.

$\bar{\theta}^i(s)$ est défini par les fonctions de forme des nœuds du fond de fissure.

$$G(s) = \sum_{j=0}^{NDEG} G_j \gamma_j(s)$$

$$\bar{\theta}^i(s) = \sum_{k=1}^{NNO} \theta_k^i \varphi_k(s)$$

On fait le choix dans le *Code_Aster* de prendre, comme champs $\bar{\theta}^i$, les *NNO* champs $\bar{\theta}^i$ tels que :

$$\bar{\theta}^i(s) \cdot \mathbf{m}(s) = \varphi_i(s)$$

où $\varphi_i(s)$ est la fonction de forme du nœud i du fond de fissure.

Soit :

$$\sum_{k=1}^{NNO} \theta_k^i \varphi_k(s) \cdot \mathbf{m}(s) = \varphi_i(s)$$

et on a *NNO* équations à *NDEG* inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{NDEG} a_{ij} G_j = b_i, \quad i = 1, NNO \\ \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \int_{\Gamma_o} \gamma_j(s) \varphi_i(s) dS \\ b_i = G(\theta^i) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on doit avoir $NDEG \leq NNO$, soit $NDEG \leq \min(7, NNO)$ où *NNO* est le nombre de nœuds du fond de fissure.

Troisième cas :

$G(s)$ et $\bar{\theta}^i(s)$ sont définis par les fonctions de forme des nœuds du fond de fissure.

$$\left\{ \begin{array}{l} G(s) = \sum_{j=1}^{NNO} G_j \varphi_j(s) \\ \bar{\theta}^i(s) = \sum_{k=1}^{NNO} \theta_k^i \varphi_k(s) \end{array} \right.$$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{NNO} a_{ij} G_j = \mathcal{G}(\theta_i) & (i=1, NNO) \\ \text{avec } a_{ij} = \int_{\Gamma_0} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds \end{cases}$$

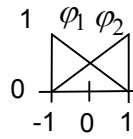
NNO : nombre de nœuds du fond de fissure

φ_i : fonction de forme du nœud i

Si on a des éléments linéaires :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(1-x)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(1+x)$$



Elément de référence

$$a_{i(i-j)} = a_{i(i+j)} = 0, \text{ si } j \geq 2$$

$$\begin{aligned} a_{i(i-1)} &= \int_{\Gamma_0} \varphi_i(s) \varphi_{i-1}(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi_i(s) \varphi_{i-1}(s) ds \\ &= \frac{(s_i - s_{i-1})}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \frac{(s_i - s_{i-1})}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1-x^2) dx = \frac{1}{6} (s_i - s_{i-1}) \\ a_{ii} &= \frac{(s_i - s_{i-1})}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_2^2(x) dx + \frac{(s_{i+1} - s_i)}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_1^2(x) dx \\ &= \frac{(s_i - s_{i-1})}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+x)^2 dx + \frac{(s_{i+1} - s_i)}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1-x)^2 dx = \frac{1}{3} [(s_{i+1} - s_i) + (s_i - s_{i-1})] \end{aligned}$$

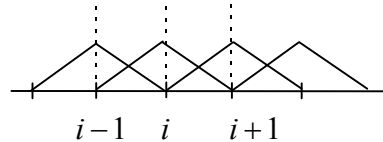


Figure 2.3-d : Fonctions de forme linéaires

La matrice A_{ij} s'écrit donc :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2(s_2 - s_1) & (s_2 - s_1) & 0 & 0 & \cdots \\ (s_2 - s_1) & 2(s_3 - s_1) & (s_3 - s_2) & 0 & \cdots \\ 0 & (s_3 - s_2) & 2(s_4 - s_2) & (s_4 - s_3) & \cdots \\ 0 & 0 & (s_4 - s_3) & 2(s_5 - s_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Si on a des éléments quadratiques :

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$

$$\varphi_3(x) = (1-x)(1+x)$$

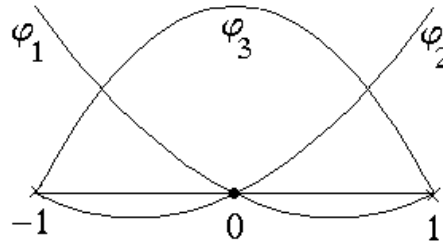


Figure 2.3-e : Fonctions de forme quadratiques (Element de référence)

Il faut distinguer nœud sommet et nœud milieu

- i = nœud sommet :

$$a_{i(i-j)} = a_{i(i+j)} = 0, \text{ si } j \geq 3$$

$$\begin{aligned} a_{i(i-2)} &= \int_{\Gamma_o} \varphi_i(s) \varphi_{i-2}(s) ds = \int_{s_{i-2}}^{s_i} \varphi_i(s) \varphi_{i-2}(s) ds \\ &= \frac{(s_i - s_{i-2})}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \frac{(s_i - s_{i-2})}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} x^2 (x^2 - 1) dx \\ &= -\frac{(s_i - s_{i-2})}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{i(i-1)} &= \int_{\Gamma_o} \varphi_i(s) \varphi_{i-1}(s) ds = \int_{s_{i-2}}^{s_i} \varphi_i(s) \varphi_{i-1}(s) ds = \frac{(s_i - s_{i-2})}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_2(x) \varphi_3(x) dx \\ &= \frac{(s_i - s_{i-2})}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} x(x+1)^2 (1-x) dx = +\frac{(s_i - s_{i-2})}{15} \end{aligned}$$

$$a_{ii} = \frac{s_i - s_{i-2}}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_2^2(x) dx + \frac{(s_{i+2} - s_i)}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_1^2(x) dx = \frac{2}{15} (s_{i+2} - s_{i-2})$$

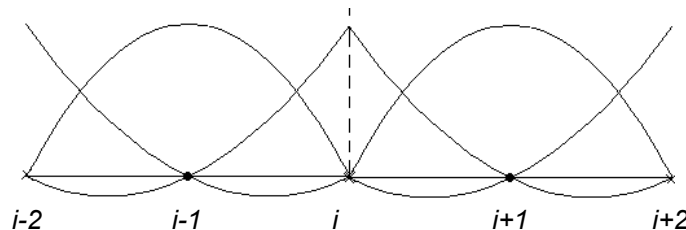


Figure 2.3-f : Nœud sommet

- i = nœud milieu :

$$a_{(ii-j)} = a_{i(i+j)} = 0 \quad \text{si } j \geq 2$$

$$\begin{aligned} a_{i(i-1)} &= \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \varphi_i(s) \varphi_{i-1}(s) ds \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{(s_{i+1} - s_{i-1})}{2} \varphi_3(x) \varphi_1(x) dx = \frac{(s_{i+1} - s_i)}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} x(x-1)(1-x)(1+x) dx \\ &= \frac{(s_{i+1} - s_{i-1})}{15} \\ a_{ii} &= \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \varphi_i^2(s) ds = \frac{(s_{i+1} - s_i)}{2} \int_{-1}^{+1} (1-x)^2 (1+x)^2 dx = \frac{8}{15} (s_{i+1} - s_{i-1}) \end{aligned}$$

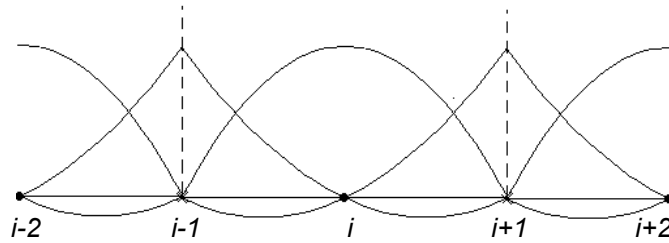
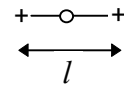


Figure 2.3-g : Nœud milieu

La matrice A_{ij} s'écrit :

$$\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 4(s_3 - s_1) & 2(s_3 - s_1) & -(s_3 - s_1) & 0 & 0 & \dots \\ 2(s_3 - s_1) & 16(s_3 - s_1) & 2(s_3 - s_1) & 0 & 0 & \dots \\ -(s_3 - s_1) & 2(s_3 - s_1) & 4(s_5 - s_1) & 2(s_5 - s_3) & -(s_5 - s_3) & 0 \\ 0 & 0 & 2(s_5 - s_3) & 16(s_5 - s_3) & 2(s_5 - s_3) & 0 \\ 0 & 0 & -(s_5 - s_3) & 2(s_5 - s_3) & 4(s_7 - s_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Cas particulier : $s_{i+2} - s_i = cste = l$ = longueur d'un élément



$$\frac{l}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{nœud sommet de bord} \\ \leftarrow \text{nœud milieu} \\ \leftarrow \text{nœud sommet} \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Méthode "nœud par nœud" :

Cette méthode est issue de la méthode Lagrange-Lagrange mais elle est simplifiée : on remplace la résolution du système linéaire en multipliant les valeurs $G(\theta^i)$ par un coefficient de pondération.

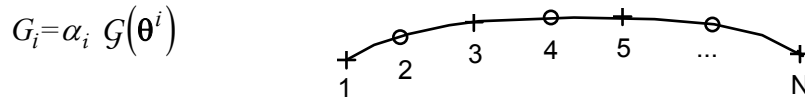
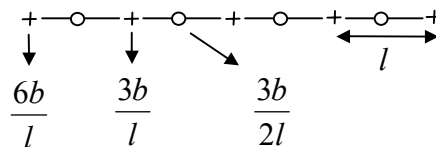


Figure 2.3-h : Méthode « nœud par nœud »

De plus si $G(\theta) = cte = b$, $\forall i$ et que l'on considère un G constant par élément (cette méthode n'a pas de signification vectorielle), on a :

- nœud sommet de bord : $\frac{l}{30}(4+2-1)G = b$ soit $G = \frac{6}{l}b$
- nœud sommet : $\frac{l}{30}(-1+2+2+8-1)G = b$ soit $G = \frac{3}{l}b$
- nœud milieu : $\frac{l}{30}(2+16+2)G = b$ soit $G = \frac{3}{2l}b$



Ce qui donne dans le cas où les éléments n'ont pas de longueurs constantes :

- nœud sommet de bord : $\alpha_1 = \frac{6}{(s_3 - s_1)}$ ou $\alpha_N = \frac{6}{(s_N - s_{N-2})}$
- nœud sommet : par exemple $\alpha_3 = \frac{6}{(s_3 - s_1) + (s_5 - s_3)} = \frac{6}{(s_5 - s_1)}$

$$\text{soit : } \alpha_i = \frac{6}{(s_{i+2} - s_{i-2})}$$

$$\text{ou encore : } \alpha'_i = \frac{3}{(s_{i+1} - s_i)} \approx \alpha_i$$

- nœud milieu : $\alpha_i = \frac{3}{2(s_{i+1} - s_i)}$

Pour activer cette méthode il faut préciser dans CALC_G_LOCAL_T :

LISSAGE_G : 'LAGRANGE_NO_NO'
LISSAGE_THETA : 'LAGRANGE'

2.4 Implantation de G en thermo-élasticité linéaire dans Aster

2.4.1 Types d'éléments et de chargements

Dans le Code_Aster, il est possible de calculer en **thermo-élasticité linéaire** :

- le taux de restitution d'énergie $G(\theta)$ en 2D et en 3D, associé à un champ de propagation virtuel de la fissure θ (donné par l'utilisateur à l'aide de la commande `CALC_THETA` [U4.82.02]) : commande `CALC_G_THETA_T` [U4.82.03],
- le taux de restitution d'énergie locale $G(s)$ en 3D, où s est l'abscisse curviligne du fond de fissure : commande `CALC_G_LOCAL_T` [U4.82.04].

Ces calculs sont valables pour les **modélisations suivantes** :

- D_PLAN
- C_PLAN
- AXIS
- 3D

et pour les chargements thermo-mécaniques suivants s'appliquant sur un milieu bidimensionnel (affecté à des triangles à 3 ou 6 nœuds, des quadrangles à 4, 8 ou 9 nœuds et des segments à 2 ou 3 nœuds) ou sur un milieu tridimensionnel (affecté à des hexaèdres à 8, 20 nœuds ou 27 nœuds, des pentaèdres à 6 ou 15 nœuds, des tétraèdres à 4 ou 10 nœuds, des faces à 3 ou 6 nœuds et des faces à 4, 8 ou 9 nœuds) :

- \mathbf{f} , champ de forces volumiques appliquées sur Ω (charges mécaniques du type PESANTEUR, ROTATION, FORCE_INTERNE),
- \mathbf{g} , champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$ (y compris sur les lèvres de la fissure : PRES_REP, FORCE_FACE),
- \mathbf{U} , champ de déplacements imposés sur partie S_d de $\partial\Omega$ (Non développé à ce jour),
- T , champ de température (TEMP_CALCULEE) ,
- ε , champ de déformation initial (EPSI_INIT).

Ces **chargements** peuvent dépendre du temps et de l'espace.

Les **caractéristiques du matériau** (E , ν et α) peuvent dépendre de la température T et de l'espace tout en restant constantes par éléments.

2.4.2 Environnement nécessaire

Pour le calcul du taux de restitution d'énergie $G(\theta)$ par la méthode θ dans le cas d'un problème thermo-élastique, le champ θ doit obligatoirement avoir été créé auparavant (soit par la commande `CALC_THETA` [U4.82.02], soit par la commande `AFFE_CHAM_NO` [U4.44.11]).

Pour le calcul du taux de restitution d'énergie locale $G(s)$, les champs θ^i nécessaires au calcul sont générés automatiquement.

Dans les deux cas, il s'agit d'un post-traitement uniquement à partir du champ de déplacement solution du calcul sur le modèle considéré. En particulier, la densité d'énergie libre et les contraintes sont calculées à partir du champ de déplacement et des caractéristiques du matériau.

Pour le calcul en 3D, il faut définir, à partir d'une liste ordonnée de nœuds, un fond de fissure d'un maillage 3D, et à partir de deux listes de mailles, la lèvre supérieure et la lèvre inférieure de cette fissure commande `DEFI_FOND_FISS` [U4.82.01]. Cet opérateur crée un concept utilisable par les opérateurs `CALC_THETA` et `CALC_G_LOCAL_T`. En 2D, le fond de fissure est réduit à un point et cet opérateur n'est pas nécessaire pour le calcul de $G(\theta)$.

2.4.3 Calculs des différents termes du taux de restitution d'énergie

L'expression complète de $G(\theta)$ est donnée au [§1.3]. Nous allons détailler chaque terme. Le champ θ est nul en dehors d'un disque de rayon $R_{\text{sup}}(s)$ défini dans le chapitre 3 [Figure 3.3-a]. Remarquons que comme tous les termes font intervenir θ ou son gradient, les termes élémentaires sont nuls en dehors de ce disque de rayon $R_{\text{sup}}(s)$. Dans les commandes `CALC_G_THETA_T` et `CALC_G_LOCAL_T`, il n'est ainsi pas nécessaire de préciser les chargements qui ne s'appliquent pas dans cette zone.

2.4.3.1 Terme classique élémentaire

$$TCLA = \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} - \psi(\varepsilon(u), T) \theta_{k,k}$$

La densité d'énergie élastique $\psi(\varepsilon(u), T)$ s'écrit en thermo-élasticité linéaire :

- en 3D et en `AXIS` :

$$\psi(\varepsilon(u), T) = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{ii})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \psi_{th}$$

- en `DP` :

$$\psi(\varepsilon(u), T) = \frac{(1-\nu) E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^2 - \psi_{th}$$

- en `CP` :

$$\psi(\varepsilon(u), T) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^2 - \psi_{th}$$

$$\text{avec } \psi_{th} = 3K\alpha(T - T_{ref}) \varepsilon_{ii} - \frac{9}{2} K\alpha^2 (T - T_{ref})^2$$

où :

$$3K = \frac{E}{1-2\nu} ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

E : module d'YOUNG

ν : coefficient de POISSON

λ, μ : coefficients de LAME

α : dilatation thermique

La densité d'énergie élastique $\psi(\varepsilon(u), T)$ peut s'écrire de façon générale sous la forme :

$$\psi(\varepsilon(u), T) = \frac{1}{2} K \left(\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T - T_{ref}) \right)^2 + \frac{2\mu}{3} \varepsilon_{eq}^2$$

$$\text{avec } \varepsilon_{eq}^2 = \frac{3}{2} \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\text{soit } \varepsilon_{eq}^2 = \frac{1}{2} (3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}^2)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \psi(\varepsilon(u), T) &= \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2 - 3K\alpha(T - T_{réf})\varepsilon_{kk} + \frac{9}{2} K\alpha^2(T - T_{réf})^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\mu}{3} \varepsilon_{kk}^2 \\ &= \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk}^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - 3K\alpha(T - T_{réf})\varepsilon_{kk} + \frac{9}{2} K\alpha^2(T - T_{réf})^2 \end{aligned}$$

2.4.3.2 Terme force volumique

$$TFOR = f_i u_i \theta_{k,k} + f_{i,k} \theta_k u_i$$

2.4.3.3 Terme force surfacique

$$TSUR = g_{i,k} \theta_k u_i + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right)$$

Remarque :

Dans ce terme surfacique on a des dérivations normales à la surface qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans le Code_Aster. On a donc recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes pour mieux appréhender cet intégrande sur la surface de calcul (cf. [Annexe 2]).

2.4.3.4 Terme thermique

$$THER = - \frac{\partial \psi}{\partial T} T_k \theta_k$$

avec :

$$\frac{\partial \psi}{\partial T}(\varepsilon(u), T) = \left[\frac{1}{2} \frac{dK(T)}{dT} (\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T - T_{réf})) - 3K \left(\alpha + \frac{d\alpha(T)}{dT} (T - T_{réf}) \right) \right] (\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T - T_{réf}))$$

2.4.3.5 Terme déformations et contraintes initiales

$$TINI = \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\circ \right) \varepsilon_{ij,k}^\circ - \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^\circ \right) \sigma_{ij,k}^\circ \right] \theta_k$$

On peut remarquer que si $\sigma^\circ = \Lambda \varepsilon^\circ$ alors :

$$\sigma = \Lambda(\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^\circ) + \sigma^\circ = \Lambda(\varepsilon - \varepsilon^{th}) \text{ et } TINI = 0$$

Remarque :

Compte tenu des divers traitements numériques effectués lors de l'implantation dans le source de l'opérateur, il n'est pas licite de cumuler des champs de contraintes et de déformations initiales, car ce terme ne s'annule alors pas. L'utilisateur devra rentrer soit des contraintes initiales, soit des déformations initiales mais pas les deux.

2.4.4 Normalisation du taux de restitution d'énergie dans Aster

2.4.4.1 Axisymétrie

$G(\theta)$ tel qu'il est implanté ici, calcule la restitution de l'énergie dans la cinématique définie par θ . Il peut être nécessaire de le **normaliser (à la main ! ce n'est pas fait automatiquement dans le code)** pour pouvoir comparer à une valeur intrinsèque au matériau, notamment en axisymétrie. Considérons le cas d'une fissure inclinée, dont le fond de fissure est à une distance R de l'axe de symétrie :

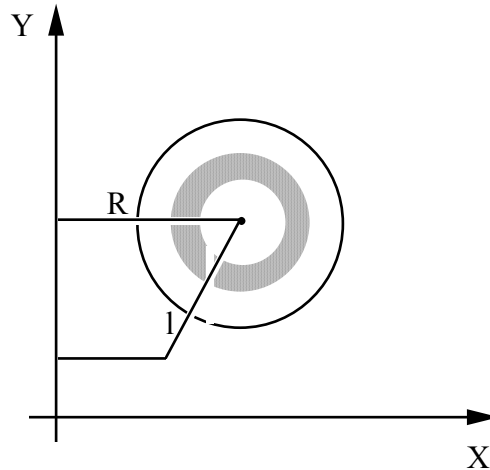


Figure 2.4.4.1-a : Fond de fissure en axisymétrie

Dans Aster, l'axe OY est l'axe de symétrie en modélisation 'AXIS' et le taux de restitution de l'énergie calculé est :

$$G(\theta) = - \frac{dW}{dl}$$

où W est l'énergie potentielle par unité de radian.

Or la valeur intrinsèque du taux de restitution d'énergie est :

$$G = - \frac{dW_{totale}}{dA}$$

où :

- W_{totale} est l'énergie potentielle totale,
- dA est la variation de surface de la fissure.

avec :

$$W_{totale} = 2\pi W$$

$$dA = 2\pi R dl$$

d'où :

$$\frac{dW_{totale}}{dA} = 2\pi \frac{dW}{dl} \frac{dl}{dA} = \frac{1}{R} \frac{dW}{dl}$$

et donc $G = \frac{1}{R} G(\theta)$ en axisymétrie.

2.4.4.2 Autres cas

En dimension 3, la valeur de $G(\theta)$ pour un champ θ donné par l'utilisateur est telle que :

$$G(\theta) = \int_{\Gamma_o} G(s) \theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds$$

Dans la commande CALC_THETA [U4.82.02], l'utilisateur définit la direction du champ θ en fond de fissure. Par défaut, c'est la normale au fond de fissure dans le plan des lèvres. En choisissant un champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure, on a :

$$\theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) = 1, \quad \forall s \text{ abscisse curviligne de } \Gamma_o$$

et :

$$G(\theta) = \int_{\Gamma_o} G(s) d\Gamma$$

Soit G le taux de restitution de l'énergie global. Pour avoir sa valeur par unité de longueur, il faut diviser la valeur obtenue par la longueur de la fissure l :

$$G = \frac{G(\theta)}{l} \quad \text{en 3D}$$

En dimension 2 (C_PLAN et D_PLAN), le fond de fissure est réduit à un point et la valeur de $G(\theta)$ est indépendante du choix du champ θ (avec $\theta \in \Theta$ et θ unitaire au voisinage du fond de fissure).

$$G = G(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

2.5 Paramétrage des commandes

Le tableau ci-dessous propose un récapitulatif du paramétrage des commandes CALC_G_LOCAL_T CALC_G_THETA_T. Pour plus de précision on se référera à [U4.82.03] et [U4.82.04].

Commandes	Mot-clé	Valeur par défaut	Réf.
CALC_G_LOCAL_T	MODELE		[§2.4]
	'D_PLAN'		
	'C_PLAN'		
	'AXIS'		
	'3D'		
	CHAM_MATER		[§2.4.1]
	FOND		[§2.4.1]
	DEPL		
	RESULTAT		
	EXCIT		[§2.4.1]
	SYME_CHAR	'SANS'	Type charg.
	'SANS'		
	'SYME'		
	'ANTI'		
	LISSAGE_THETA	'LEGENDRE'	[§2.2]
	'LEGENDRE'		
	'LAGRANGE'		
	LISSAGE_G	'LEGENDRE'	[§2.2]
	'LEGENDRE'		
	'LAGRANGE'		
	'LAGRANGE_NO_NO'		

Titre : Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire Date : 26/05/05
Auteur(s) : E. GALENNE, O. BOITEAU, E. VISSE Clé : R7.02.01-D Page : 28/60

	DEGRE	5	[§2.2]	
	INFO	1		
	TITRE			
	OPTION	'CALC_G'		
		'CALC_G'	[§2.4]	
		'CALC_G_LGLO'		
	R_INF		[§3.2]	
	R_SUP		[§3.2]	
	R_INF_FO		[§3.2]	
	R_SUP_FO		[§3.2]	
	COMP_ELAS			
	COMP_INCR			
	ETAT_INIT		[§2.4.3]	
CALC_G_THETA_T	MODELE		[§2.4]	
		'D_PLAN'		
		'C_PLAN'		
		'AXIS'		
		'3D'		
	CHAM_MATER		[§2.4.1]	Def. matériaux
	THETA		[§2.4.2]	Def. theta
	FOND		[§2.4.1]	Def. du fond de fissure
	DEPL			Recup. d'un champ de depl.
	RESULTAT			
	EXCIT		[§2.4.1]	Type charg.
	SYME_CHAR	'SANS'		
		'SANS'		
		'SYME'		
		'ANTI'		
	INFO	1		
	TITRE			
	OPTION	'CALC_G'		
		'CALC_G'	[§2.4]	
		'CALC_G_LAGR'		
		'CALC_K_G'		
		'G_BILINEAIRE'		
		'CALC_G_MAX'		
		'CALC_DG'	[§4]	Comportement
	COMP_ELAS			
	COMP_INCR			
	ETAT_INIT		[§2.4.3]	

Tableau 2.5-1 : Paramétrage des commandes

3 Introduction du champ thème dans Aster

3.1 Conditions à remplir

Le champ thème est un champ de vecteurs, défini sur le solide fissuré, qui représente la transformation du domaine lors d'une propagation de fissure au sens du [§1]. La transformation ne doit modifier que la position du fond de fissure et pas le bord du domaine $\partial\Omega$, c'est-à-dire : $\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (\mathbf{n} normale à $\partial\Omega$). De plus, le **champ thème doit être régulier** sur Ω [bib4].

En raison de la singularité du champ de déplacement, il est intéressant du point de vue numérique d'utiliser des champs θ constants dans un voisinage de Γ_o , annulant ainsi dans ce voisinage les termes singuliers $\psi \theta_{k,k} - \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,k}$ dans $G(\theta)$.

3.2 Choix du champ thème en dimension 3

3.2.1 Méthode de construction

On doit construire un champ θ vérifiant :

$$\begin{cases} \theta_n = \theta \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur le bord du domaine } \partial\Omega \text{ (} \mathbf{n} \text{ est la normale à } \partial\Omega \text{)} \\ \bar{\theta} = \bar{\theta}_o & \text{donné sur le fond de fissure } \Gamma_o \end{cases}$$

où $\bar{\theta}$ représente la trace de θ sur Γ_o .

On se donne deux volumes T et S (cylindres déformés) entourant le fond de fissure Γ_o .

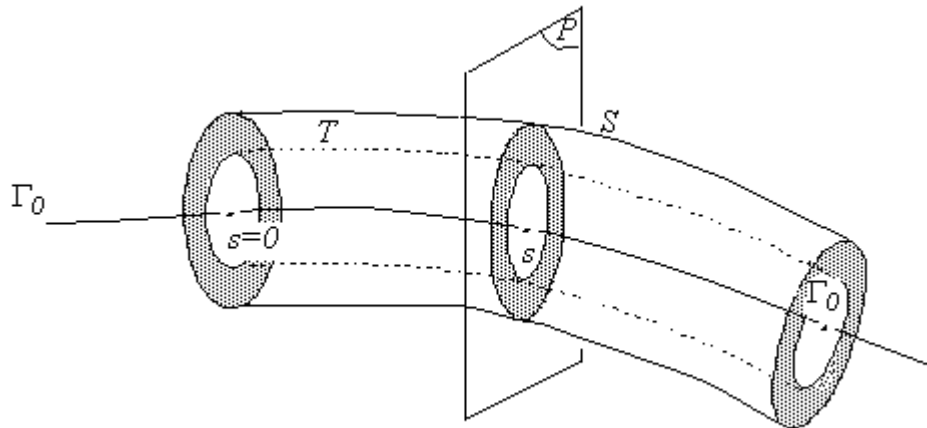


Figure 3.2.1-a : Construction du champ thème en 3D (vue d'ensemble)

On note $R_{\inf}(s)$ le rayon variable de T et $R_{\sup}(s)$ celui de S .

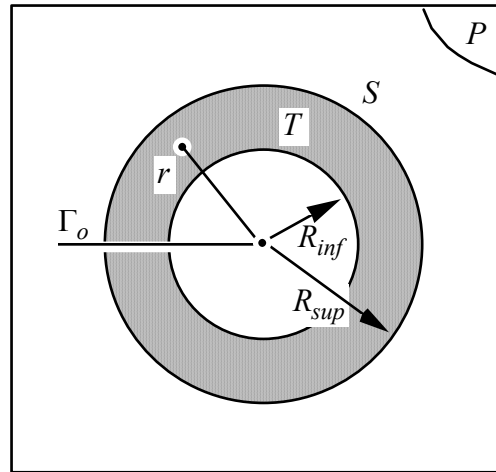


Figure 3.2.1-b : Construction du champ θ en 3D (plan de coupe)

En tout point de Γ_o , repéré par son abscisse curviligne s , on peut définir un plan normal P dans lequel le champ θ est introduit de la façon suivante :

- $\theta_n(r(s)) = \bar{\theta}_o(s)$ pour $0 \leq r(s) \leq R_{\inf}(s)$
- $\theta_n(r(s)) = 0$ pour $r(s) \geq R_{\sup}(s)$
- θ_n varie linéairement par rapport au rayon $r(s)$ dans la couronne $S(R_{\sup}(s)) \setminus T(R_{\inf}(s))$
- θ_n est continu dans $S(R_{\sup}(s))$.

Cette manière d'introduire θ est géométrique. Elle revient à se donner deux rayons $R_{\inf}(s)$ et $R_{\sup}(s)$, et à effectuer des calculs de distance d'un point courant au fond de fissure pour déterminer la valeur de θ en ce point.

3.2.2 Algorithmes de calcul

La méthode nécessite la donnée du champ θ_o sur le fond de fissure Γ_o et des deux rayons $R_{\inf}(s)$ et $R_{\sup}(s)$ qui peuvent dépendre de la position du point sur Γ_o . L'utilisateur introduit ces données nœud par nœud sur Γ_o de la façon suivante :

Nœuds de Γ_o	$ \theta_o $	R_{\inf}	R_{\sup}
N_1			
\vdots			
N_i	$ \theta_{o_i} $	$R_{\inf i}$	$R_{\sup i}$
\vdots			

Tableau 3.2.2-1 : Données pour la construction du champ θ en 3D

Le programme se charge de calculer le champ θ en tout point de Γ_o selon la procédure suivante :

- Calcul du champ θ en chaque point de Γ_o : Le module $|\theta_o|$ étant donné (par l'utilisateur ou par la méthode θ , voir [§2.3]), le problème est de déterminer la direction de θ_o . θ doit être localement dans le plan tangent aux lèvres de la fissure et normal à l'arête à laquelle il appartient. θ étant calculé aux nœuds, dans le cas général (fond de fissure non plan) la direction de θ sera moyennée sur les 2 arêtes de Γ_o ayant le nœud en commun.

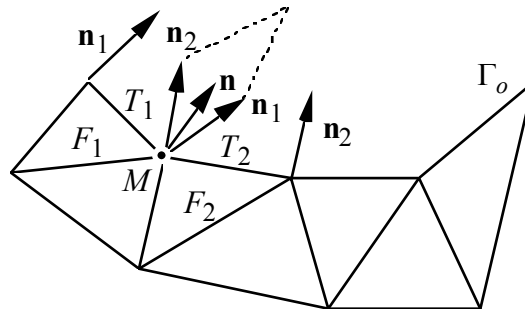


Figure 3.2.2-a : Construction du champ θ en 3D (normales)

Soient F_1 et F_2 deux faces appartenant aux lèvres de la fissure et comprenant les arêtes successives T_1 et T_2 de Γ_o . On calcule d'abord la normale \mathbf{n}_1 à l'arête T_1 dans le plan de la face F_1 puis la normale \mathbf{n}_2 à l'arête T_2 dans le plan de la face F_2 .

\mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 étant des normales unitaires, on en déduit $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{2}$ puis $\theta(M) = |\theta(M)| \mathbf{n}$ pour $M \in \Gamma_o$.

On considère que les faces F_i sont droites :

- Dans le cas où F_i est un triangle, le plan de la face F_i est défini.
- Dans le cas où F_i est un quadrangle, on découpe F_i en 2 triangles F_{i1} et F_{i2} . On doit alors calculer les équations des deux plans contenant les faces F_{i1} et F_{i2} et faire deux calculs de normale par arête T_i .

Ce calcul nécessite de connaître les faces appartenant aux lèvres de la fissure et comprenant une arête de Γ_o . Dans le Code_Aster, l'utilisateur rentre tous les éléments surfaciques appartenant aux lèvres de la fissure. Ces faces figurent dans un ou plusieurs groupes de mailles et sont décrites dans les connectivités des éléments de surfaces. L'algorithme trie ces faces pour ne conserver que celles ayant 2 sommets sur Γ_o . Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- 1) Pour chaque nœud de Γ_o , on extrait les mailles appartenant aux lèvres de la fissure,
- 2) De ces mailles, on tri celles ayant deux nœuds sur Γ_o ,
- 3) On récupère le type de la face (TRIA ou QUAD) et on calcule l'équation du ou des plan(s) tangent(s),
- 4) Pour chaque arête de Γ_o de sommets N_i , N_{i+1} calcul des normales $\mathbf{n}_{i,1}$, $\mathbf{n}_{i+1,1}$, $\mathbf{n}_{i,2}$ et $\mathbf{n}_{i+1,2}$.

Enfin, θ est calculé suivant l'algorithme suivant :

Boucle sur les sommets N_i de Γ_o :

$$\mathbf{n}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{i,1} + \mathbf{n}_{i,2})$$

$$\theta(N_i) = |\theta(N_i)| \mathbf{n}_i$$

Fin de la boucle sur les sommets N_i de Γ_o

Algorithme 1 : Calcul de θ

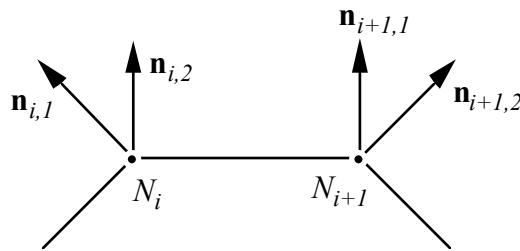


Figure 3.2.2-b : Notations des normales au fond de fissure

- Calcul du champ θ en chaque point de Ω :

Boucle sur les nœuds M

Calcul de la projection \bar{M} de M sur Γ_o

(Donne en fait les nœuds \bar{M}_i et \bar{M}_{i+1} tels que $\bar{M} \in [\bar{M}_i, \bar{M}_{i+1}]$ et $s \in [0,1]$ tel que $\bar{M} = s \bar{M}_i + (1-s) \bar{M}_{i+1}$)

- Calcul de $d = d(M, \bar{M})$

- Calcul de $\theta(\bar{M})$ par interpolation linéaire :

$$\theta(\bar{M}) = (1-s) \theta(\bar{M}_i) + s \theta(\bar{M}_{i+1})$$

- Calcul de $R_{\inf}(s)$ et $R_{\sup}(s)$ par interpolation linéaire :

$$R_{\inf}(s) = (1-s) R_{\inf i} + s R_{\inf i+1}$$

$$R_{\sup}(s) = (1-s) R_{\sup i} + s R_{\sup i+1}$$

- / Si $d > R_{\sup}(s)$, $\theta(M) = 0$

/ Si $d < R_{\inf}(s)$, $\theta(M) = \theta(\bar{M})$

/ Si $R_{\inf}(s) \leq d \leq R_{\sup}(s)$, $\alpha = \frac{d - R_{\inf}(s)}{R_{\sup}(s) - R_{\inf}(s)}$ et $\theta(M) = (1-\alpha) \theta(\bar{M})$

F_{insi}

Algorithme 2 : Calcul du champ θ en 3D

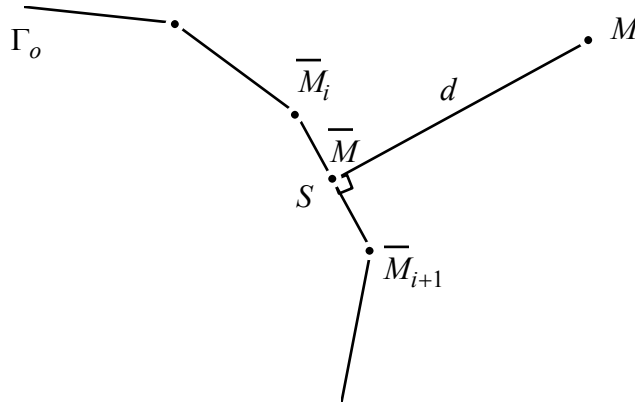


Figure 3.2.2-c : Calcul du champ θ en 3D

Nous détaillons ci-dessous le calcul de la projection \bar{M} de M sur Γ_o :

Pour chaque nœud M :

- Récupération des coordonnées de M
- Boucle sur les nœuds M_i de Γ_o ($i = 1, NNO - 1$)
Récupération des coordonnées de M_i et M_{i+1}

$$\text{Calcul de } s_i = \frac{\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathbf{M}_i \mathbf{M}}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}\|}$$

$$/ s_i < 0 : s_i = 0$$

$$/ s_i > 1 : s_i = 1$$

$$\text{Calcul des coordonnées de } \bar{M}_i : \mathbf{O}\bar{\mathbf{M}}_i = \mathbf{O}\mathbf{M}_i + s_i \mathbf{M}_i \mathbf{M}_{i+1}$$

$$\text{Calcul de } d_i = d(M, \bar{M}_i)$$

Fin boucle

- Récupération de j tel que $d_j = \min_i (d_i)$
- Connaissant j on récupère M_j , M_{j+1} , s_j et la projection \bar{M} de M sur Γ_o telle que :

$$\mathbf{M}_j \bar{\mathbf{M}} = s_j \mathbf{M}_j \mathbf{M}_{j+1}$$

Algorithme 3 : Calcul des projections sur le fond de fissure

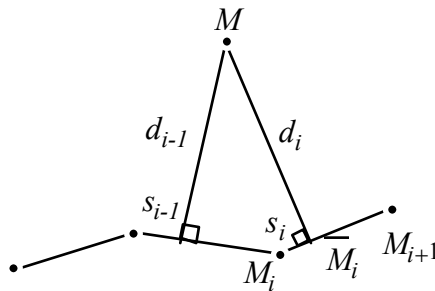


Figure 3.2.2-d : Projection des points sur le fond de fissure

3.3 Choix du champ θ en dimension 2

Il s'agit d'un cas particulier de la dimension 3. Γ_o se limite à un point, l'utilisateur choisit les rayons R_{inf} et R_{sup} , le module θ en fond de fissure $|\theta_o|$ et le champ θ est construit de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\theta(r) &= 0 \text{ si } r \geq R_{sup} \\ \theta(r) &= |\theta_o| \mathbf{n} \text{ si } r \leq R_{inf} \\ \theta(r) &= \frac{R_{sup} - r}{R_{sup} - R_{inf}} |\theta_o| \mathbf{n} \text{ si } R_{inf} \leq r \leq R_{sup}\end{aligned}$$

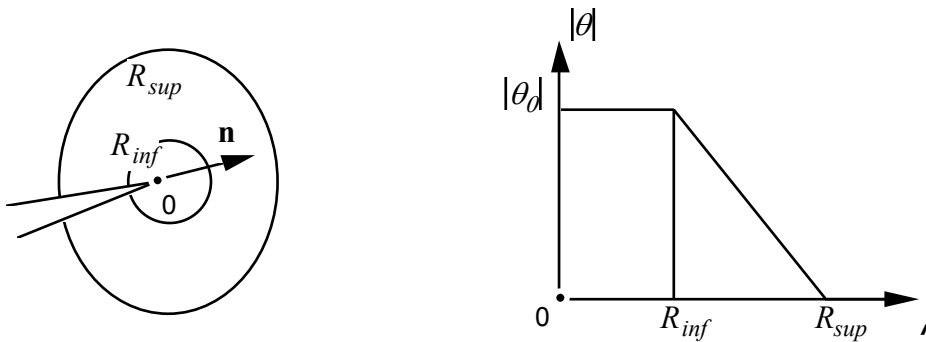


Figure 3.3-a : Calcul du champ θ en 2D

3.4 Autre méthode

L'utilisateur peut entrer lui-même le champ θ , en utilisant la commande AFFE_CHAM_NO [U4.44.11] du Code_Aster qui permet d'affecter θ nœud par nœud ou par groupe de nœuds.

4 Dérivée du taux de restitution d'énergie par rapport à une variation de domaine

Dans un premier temps on rappelle la problématique mécano-fiabiliste justifiant l'introduction de cette option puis on résume, au travers d'un exemple, son mode opératoire dans le *Code_Aster*. Après quelques préliminaires sur les implications théoriques de la dérivation mise en place (complétant celles

du [§1.3]) on détaille le calcul de chacun des termes intégraux de $\left(\frac{\mathcal{G}(\theta^f)}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0}$ où θ^f est le champ

thêta utilisé dans les paragraphes précédents. Pour conclure, on s'intéresse à l'implantation de cette fonctionnalité dans le code et à son périmètre d'utilisation.

4.1 Problématique

Des **études mécano-fiabilistes** requièrent la dérivée du taux de restitution d'énergie par rapport à une variation de domaine. En couplant le *Code_Aster* avec le logiciel PROBAN, on peut ainsi connaître la **probabilité d'amorçage de la rupture pour une distribution de variation de domaine donnée**. Par exemple, dans le cadre du projet PROMETE [bib7], on a cherché à déterminer la probabilité de rupture d'une cuve REP en considérant l'épaisseur de son revêtement intérieur comme une variable aléatoire.

Jusqu'à présent ce type d'application nécessitait de coûteuses études paramétriques pour déterminer, à chaque pas de calcul de PROBAN, la sensibilité des champs thermo-mécaniques et du taux de restitution d'énergie à une variation d'épaisseur du revêtement. Désormais, avec cette option du *Code_Aster*, on détermine en un seul calcul la valeur de ces dérivées.

Au delà de l'aspect **performance**, cela simplifie grandement le processus d'obtention des dérivées et améliore leur **fiabilité**. On évite ainsi d'avoir à remailler et à requalifier des variantes infinitésimales de la structure initiale. On n'a plus d'états d'âme à avoir quant à la pertinence du paramètre ε de variation d'épaisseur. En effet, le calcul par différences finies (paradoxalement, pour valider la démarche analytique sur des cas réels, on est bien obligé d'y avoir recours !) peut dépendre de la variable à différencier, être sensible au maillage et, de manière générale, aux erreurs de tout ordre (éléments finis, discontinuité, conditionnement, programmation...).

La technique de dérivation retenue est complètement analytique (compte tenu de son architecture logicielle, le *Code_Aster* ne peut être différencié par des outils automatiques (tel ODYSSEE) pour résoudre ce type de problème) et repose sur la dérivation directe des équations exprimées sous forme variationnelle. La **variation de domaine est alors modélisée par une fonction thêta sensibilité** notée θ^s , à ne pas confondre avec la fonction thêta fissure notée θ^f . En pratique, bien qu'on ne s'intéresse qu'à des dérivées eulériennes, on manipule aussi des dérivées lagrangiennes car elles interviennent naturellement dans les résultats de dérivation d'intégrale (théorèmes de transport de Reynolds). D'ailleurs, on calcule les premières à l'aide des secondes.

Ces études de sensibilité ne sont pour l'instant accessibles qu'en **2D** pour des **modélisations planes ou axisymétriques** en thermo-élasticité linéaire et avec des chargements (et des matériaux) indépendants de la température et de la variation de domaine. Mais elles peuvent se généraliser au 3D, à l'élasticité non-linéaire, à la plasticité...

Considérons ainsi une structure plane soumise à une pression répartie sur son bord supérieur et à des déplacements et des températures imposées. Avant de réaliser le calcul thermo-mécanique, il faut définir le champ thêta sensibilité. Dans notre exemple, il décroît entre les abscisses x_1 et x_2 de son support vertical et il est orienté suivant l'axe des abscisses. Il regroupe tous les points matériels de la configuration qui vont se déplacer virtuellement suivant la transformation :

$$F_s^\eta : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \eta_s \theta^s(\mathbf{M})$$

Celle-ci répond aux mêmes propriétés de régularité que la transformation liée au champ θ^f fissure que nous noterons dorénavant $F_f^\eta: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \eta_f \theta^f(\mathbf{M})$ (cf. [§1.3]). On matérialise ainsi la variation de domaine sur le bord gauche de la structure.

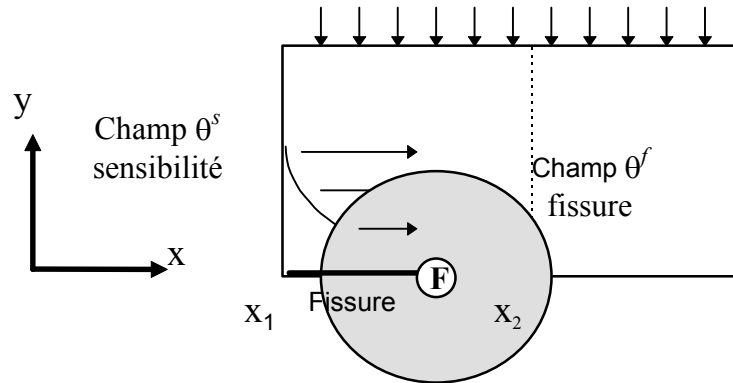


Figure 4.1-a : Dérivée de $G(\theta^f)$ par rapport à une variation de domaine pilotée par θ^s

Ensuite, on fournit ce champ θ^s sensibilité aux opérateurs thermique et mécanique qui vont résoudre, en plus de leurs problème directs, des « pseudo » systèmes adjoints construits par dérivation termes à termes des premiers [R4.03.01]. La résolution de ces systèmes permet d'exhumer les dérivées lagrangiennes de la température et du déplacement, notées respectivement, \dot{T} et $\dot{\mathbf{U}}$.

En assemblant ces dérivées lagrangiennes lors du calcul du taux de restitution d'énergie, on en déduit alors la dérivée par rapport à la variation de domaine. N'interviennent bien-sûr que les parties des supports des champs inclus dans la couronne de calcul.

Sur la figure ci-dessus cette couronne est centrée sur le fond de fissure \mathbf{F} et elle correspond à une décroissance linéaire du module du θ^f fissure, radialement, du centre vers le pourtour.

Remarque :

Cette technique de dérivation est connexe de la technique déployée en représentation lagrangienne de variation de domaine [R7.02.04]. Dans les deux cas, on évite de coûteuses études paramétriques en utilisant un maillage fixe de référence et en modélisant les variations virtuelles de domaine par des fonctions θ appropriées.

Le mode opératoire (cf. [§4.4.1]) d'un calcul de sensibilité peut ainsi se schématiser sous la forme suivante :

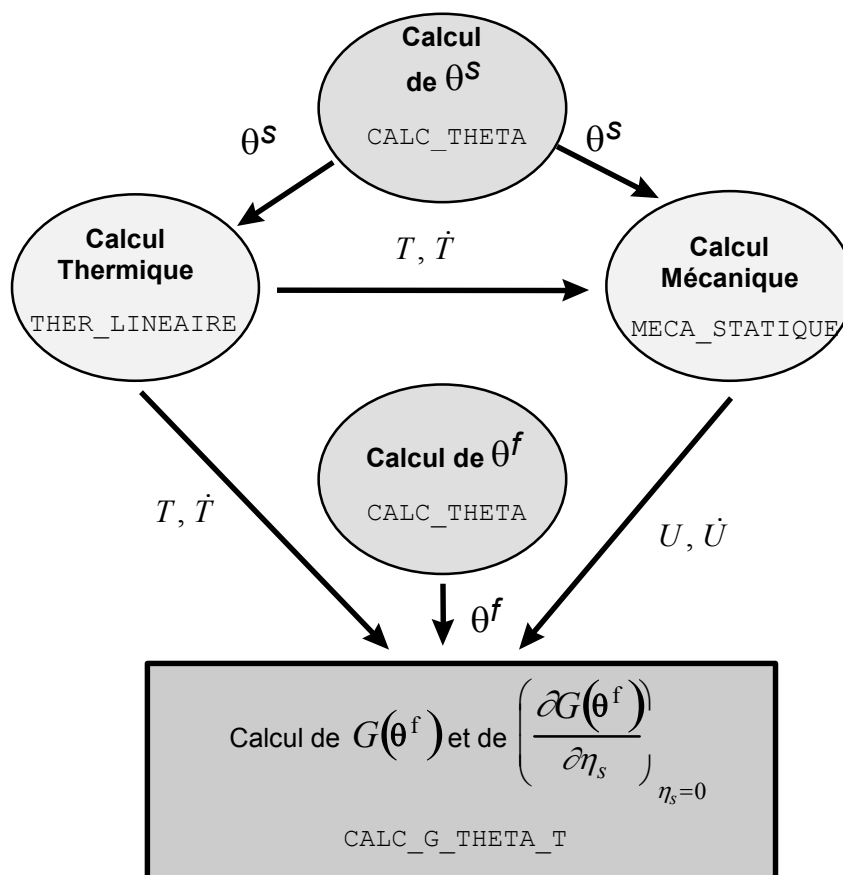


Figure 4.1-b : Mode opératoire de la dérivation de G

4.2 Remarques préliminaires

4.2.1 Théorème de transport

L'expression de $G(\theta^f)$ implantée dans le code comporte cinq termes intégraux conformément à la définition du [§2.4.3] du type (ou son pendant en surfacique) :

$$I^{\eta_s} = \int_{\Omega^{\eta_s}} \varphi \, dv$$

Pour les dériver par rapport à leur support (au voisinage du support de référence), on utilise une des variantes du **théorème de transport de Reynolds** en supposant que toutes les conditions de régularité soient vérifiées : il faut que la transformation F^{η_s} modélisant le mouvement de la frontière du volume en mouvement $\partial\Omega^{\eta_s}$, et l'intégrande (tenseur d'ordre 0, 1 ou 2) φ soient tous de classe C^1 .

On a alors, en notant $\dot{\varphi}^s$ la dérivée lagrangienne (au voisinage de l'origine) par rapport au champ θ sensibilité :

$$\left(\frac{\partial I^{\eta_s}}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0} = \int_{\Omega} \left(\dot{\varphi}^s + \varphi \operatorname{div} \left(\frac{\partial F^{\eta_s}}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0} \right) dv$$

Ce théorème se décline en plusieurs versions, selon que l'on considère un volume matériel ou spatial et que l'on se place en description lagrangienne ou eulérienne. Cependant comme on dérive au

voisinage de l'origine $\left(\frac{\partial I^{\eta_s}}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0}$ toutes ces variantes sont équivalentes (« Philosophiquement » ce

résultat est rassurant car il permet de ne privilégier ni l'élongation de matière (volume géométrique), ni l'apparition de matière (volume matériel), dans l'interprétation de cette variation de domaine).

Les **régularités théoriques requises** sont loin d'être vérifiées en pratique, mais ces bémols sont la plupart du temps « noyés » dans les erreurs dues à l'arithmétique finie, à la méthode des éléments finis et aux intégrations numériques. Ainsi la frontière en mouvement, comme dans l'exemple ci-dessus, présente souvent des « coins » et la transformation F^{η_f} n'est pas toujours C^1 (F^{η_s} l'est, mais pas F^{η_f} , qui présente deux surfaces de discontinuité sur les frontières R_{\inf} et R_{\sup} de la couronne).

En effet, le champ θ fissure est défini sous forme d'un polynôme du premier ordre dans la couronne et d'un polynôme constant à l'extérieur (il est donc C^0) alors que le champ θ sensibilité est une combinaison de monômes du troisième ordre qui le rendent C^2 sauf au milieu de son support (où il est juste C^1). Lors du calcul de G on fait appel directement aux dérivées premières du champ θ fissure, alors que pour l'obtention de sa dérivée on utilise indirectement les dérivées secondes du θ sensibilité (pour l'obtention de la dérivée lagrangienne du tenseur des déformations, cf p.44). Un **compromis** a donc été trouvé entre l'ordre théorique requis par les dérivations et la précision des éléments finis modélisant le calcul (Il ne fallait pas pénaliser le calcul de G avec des éléments linéaires). On utilise des fonctions θ d'un ordre de régularité juste inférieur à l'ordre théorique.

Remarques :

- Lors d'essais numériques on a substitué aux fonctions θ sensibilité et fissure une spline cubique naturelle particulière (avec condition de raccord de type dérivée première nulle aux bords) due à R.Wodicka (R.Wodicka. Report of the instituts für Geometrie and Praktische mathematik, RWTH Aachen, 1977), qui remplit toutes les conditions de régularité souhaitées. Mais celle-ci n'apporte que des gains marginaux à moins de raffiner à l'extrême le maillage et de circonscrire la zone de calcul autour des discontinuités des champs θ utilisés.
- En pratique, pour mieux appréhender les variations cubiques de la fonction θ sensibilité et assurer une meilleure convergence de la solution, l'utilisateur est obligé de conduire son calcul de sensibilité avec des éléments finis quadratiques complets ou incomplets (SEG3, TRIA6, QUAD8 et QUAD9). Quel que soit leur ordre, ces éléments de type Lagrange ne nous garantissent qu'une régularité C^0 aux frontières. L'usage d'éléments de Hermite aurait été plus approprié pour amener cette continuité au niveau des dérivées premières.
- La dérivation de l'intégrale fait apparaître deux termes : le premier correspond à la dérivée de l'intégrande calculée comme si son paramétrage était distinct de celui définissant le support de l'intégrale; le second évalue le taux de φ au travers de la frontière mobile (terme de convection de la dérivée particulière).
- Le résultat est inchangé lorsque l'intégrale est surfacique (ou linéique dans un problème PLAN ou AXIS). Il faut juste remplacer la divergence volumique par une surfacique. D'un point de vue

numérique, il vaut d'ailleurs mieux calculer cette dernière via des dérivées contravariantes sur la surface :

$$\operatorname{div}_s \varphi = \varphi^\alpha \Big|_\alpha$$

que de l'approximer, par une divergence et une dérivée normale volumiques ramenées à la surface de calcul :

$$\operatorname{div}_s \varphi = \operatorname{div} \varphi - (\nabla \varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$$

En effet, ce terme fait apparaître des dérivations normales à la surface qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans le Code_Aster. Il faudrait les approximer en projetant des calculs volumiques sur l'élément surfacique. Pour y remédier on a recours aux dérivées contravariantes qui permettent d'exprimer cette divergence à l'aide uniquement de grandeurs surfaciques. On retrouve cette problématique dans tous les calculs surfaciques mis en place dans le taux de restitution d'énergie et de sa dérivée.

Les termes du taux de restitution d'énergie, hors fonction θ , peuvent poser problème. C'est pour cette raison que la fonction θ fissure revêt la forme d'une couronne de valeur constante en son centre. Cela permet d'endiguer les discontinuités du gradient de champ de déplacement sur le fond de fissure susceptibles de pénaliser le terme classique élémentaire.

Par la suite, tant que la confusion ne sera pas possible, nous noterons par un simple point $\dot{\varphi}$ la dérivée lagrangienne liée à la variation de domaine. On ne s'intéressera plus qu'à cette transformation. Par contre on continuera à distinguer les différents champs θ . Avant d'aborder les calculs nous allons clore ces remarques plutôt qualitatives en examinant les chargements et les matériaux.

4.2.2 Chargements et matériaux

Reprenons les mêmes remarques que celles formulées au [§1.3]. Nous rappelons donc que :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_i &= \nabla \mathbf{f}_i \theta^s, & \dot{\mathbf{g}}_i &= \nabla \mathbf{g}_i \theta^s, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^\circ &= \nabla \varepsilon_{ij}^\circ \theta^s, & \dot{\sigma}_{ij}^\circ &= \nabla \sigma_{ij}^\circ \theta^s, \\ \dot{E} &= \nabla E \theta^s, & \dot{\nu} &= \nabla \nu \theta^s, \\ \dot{\alpha} &= \nabla \alpha \theta^s, & \dot{T}_{ref} &= \nabla T_{ref} \theta^s \end{aligned}$$

En effet, soit φ le chargement ou le matériau considéré, alors il existe un champ Φ de \mathbb{R}^3 tel que :

$$\exists \Phi / \varphi = \Phi|_\Omega$$

La dérivation par rapport au paramètre η commutant avec cette restriction, on a le résultat :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_\Omega = 0|_\Omega = 0$$

Remarque :

Cette hypothèse n'est vérifiée que pour des champs suffisamment réguliers (par exemple appartenant à des espaces de Sobolev de Ω). Leur définition ne doit pas être impactée par la variation de frontière.

Par contre, pour cette dérivation, la **dérivée eulérienne du champ de température est non nulle**, car la trace de θ^s sur le bord de la structure en mouvement ne peut plus être négligée [bib4].

Les **dérivées lagrangiennes des caractéristiques matériaux sont nulles** pour le problème discrétisé compte tenu de la remarque précédente et du fait qu'on les définit constantes par éléments finis. Lorsqu'on leur permettra de dépendre de la température, leur dérivée lagrangienne ne sera plus nulle. On aura, par exemple, pour le module d'Young :

$$\dot{E}(T) = \frac{\partial E}{\partial \eta} + \underbrace{\nabla E \cdot \theta}_{=0} = \frac{\partial E}{\partial T} (\dot{T} - \nabla T \cdot \theta^s)$$

Remarques :

- On peut utiliser des caractéristiques matériaux variables au sein d'éléments finis ou dépendantes de la température, pourvu que cela soit en dehors de $\text{supp}(\theta^f) \cap \text{supp}(\theta^s)$.
- Pour le calcul de la dérivée de G , les dérivées lagrangiennes des chargements (et même celles de leurs gradients) n'interviennent pas en dehors de $\text{supp}(\theta^f) \cap \text{supp}(\theta^s)$.
- Pour l'instant, on ne prend pas en compte des chargements dont la définition est impactée par la variation de domaine. C'est par exemple le cas pour une fonction dont le support est défini en fonction de caractéristiques géométriques de la frontière mouvante, ou, pour un champ de déformations initiales construit à partir du déplacement résultant d'un calcul thermo-mécanique. On pourrait prévoir des options de calculs spécifiques dans les opérateurs concernés pour exhumers les dérivées eulériennes manquantes et les instiller dans l'opérateur `CALC_G_THETA_T` via un deuxième opérande du mot-clé `SENSIBILITE`.

4.2.3 Formulaire

Mise à part la relation entre les dérivées lagrangienne et eulérienne :

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nabla \varphi \cdot \theta^s \quad \text{éq 4.2.3-1}$$

on n'utilise que la formule donnant la dérivée lagrangienne du gradient d'un champ en fonction des gradients du champ et de sa dérivée lagrangienne :

$$\dot{\nabla} \varphi = \nabla \dot{\varphi} - \nabla \varphi \cdot \nabla \theta^s \quad \text{éq 4.2.3-2}$$

En **coordonnées cartésiennes**, on peut appliquer ces formules composante par composante lorsque le champ est représenté par un vecteur ou une matrice. Le deuxième terme est alors un simple produit matrice-vecteur (en théorie, il s'agit du produit contracté de deux tenseurs). Par exemple dans le cas d'un vecteur ou d'un tenseur on a :

$$\begin{aligned} \overbrace{\dot{\varphi}_{i,j}}^{\bullet} &= \dot{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,k} \theta_{k,j}^s \\ \overbrace{\dot{\varphi}_{ij,k}}^{\bullet} &= \dot{\varphi}_{ij,k} - \varphi_{ij,l} \theta_{l,k}^s \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.3-3}$$

d'où la dérivée lagrangienne de la divergence :

$$\overbrace{\dot{\text{div}} \varphi}^{\bullet} = \dot{\varphi}_{i,i} - \varphi_{i,k} \theta_{k,i}^s \quad \text{éq 4.2.3-4}$$

En **coordonnées cylindriques**, les choses se compliquent un peu si le champ considéré est un tenseur d'ordre 1 ou 2. Il faut alors tenir compte de la composante orthoradiale des gradients. Par exemple, pour un tenseur d'ordre 1 la première relation comporte le terme complémentaire $\frac{\varphi_r}{r}$ qui n'intervient finalement pas car il est multiplié par la composante orthoradiale du champ θ_r sensibilité qui est nulle. Par contre, dans la seconde, un terme complémentaire apparaît dû à la dérivation du $\frac{\varphi_r}{r}$ précédent :

$$\dot{\nabla} \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{r,r} & 0 & \varphi_{r,z} \\ 0 & \frac{\varphi_r}{r} & 0 \\ \varphi_{z,r} & 0 & \varphi_{z,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{r,r} & 0 & \dot{\varphi}_{r,z} \\ 0 & \frac{\dot{\varphi}_r}{r} & 0 \\ \dot{\varphi}_{z,r} & 0 & \dot{\varphi}_{z,z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{r,r} \theta_{r,r}^s + \varphi_{r,z} \theta_{z,r}^s & 0 & \varphi_{r,r} \theta_{r,z}^s + \varphi_{r,z} \theta_{z,z}^s \\ 0 & \frac{\varphi_r \theta_r^s}{r^2} & 0 \\ \varphi_{z,r} \theta_{r,r}^s + \varphi_{z,z} \theta_{z,r}^s & 0 & \varphi_{z,r} \theta_{r,z}^s + \varphi_{z,z} \theta_{z,z}^s \end{bmatrix} \quad \text{éq 4.2.3-5}$$

Remarques :

- Dans le calcul de la dérivée de G , cette relation n'intervient que pour la dérivée particulière du gradient du θ_r fissure (donc de celle de sa divergence) et pour celle du gradient des déplacements (donc pour celles des tenseurs des déformations et des contraintes), car tous les autres gradients sont multipliés par la composante orthoradiale du θ_r fissure qui est nulle.
- En axisymétrie, moyennant les termes complémentaires, les formules cartésiennes peuvent s'appliquer directement avec l'analogie formelle $(x,y) \Leftrightarrow (r,z)$. De plus l'élément de surface est multiplié par r pour prendre en compte le calcul de l'intégrale pour une unité de radian.

Lorsqu'on s'intéresse à la dérivée lagrangienne du gradient d'un chargement tel qu'il est pris en compte actuellement, des **dérivées secondes apparaissent**. Ainsi, dans le cas d'un vecteur φ il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{i,j} &= \dot{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,l} \theta_{l,j}^s \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} + \varphi_{i,k} \theta_k^s \right)_{,j} - \varphi_{i,l} \theta_{l,j}^s \\ &= \varphi_{i,kj} \theta_k^s \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.3-6}$$

Les dérivées secondes des fonctions de forme des éléments quadratiques n'étant pas disponibles dans le code, il a donc fallu les mettre en place. Leur introduction sur l'élément de référence est quasi-immédiate, mais leur transcription sur l'élément réel 2D est plus laborieuse (cf. [Annexe 1]). Sur les éléments 1D (pour les chargements surfaciques), on a recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes pour mieux appréhender les intégrandes sur la surface de calcul (cf. [Annexe 2] et [§4.2.1]).

Remarques :

- On aurait pu s'affranchir de cette implantation en effectuant des intégrations par parties (via le théorème de Green), mais celles-ci devant s'appliquer sur des facteurs constitués de trois termes, cela compliquait beaucoup la formulation (sans compter la prise en compte des intégrales de frontière).
- Malgré la faible régularité des éléments utilisés, des tests numériques ont montré la bonne qualité de ces dérivées secondes (pour des champs polynomiaux).
- Le calcul analytique de ces dérivées secondes a été mis en place pour les éléments quadratiques en modélisations plane ou axisymétrique liées aux phénomènes mécaniques et thermiques. Ce calcul ne concerne que la première famille de points de Gauss et, pour des raisons de stabilité informatique, les valeurs de ces dérivées secondes (aux points de Gauss) ont été stockées à la fin de l'objet JEVEUX dédié aux fonctions de formes.

4.3 Calculs des différents termes de la dérivée du taux de restitution d'énergie

On souhaite calculer les différents termes de $\left(\frac{\partial \mathcal{G}(\theta^f)}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0}$. On reprend la nomenclature du [§2.4.3]

en ne manipulant que les intégrandes et en détaillant tout d'abord chaque terme en coordonnées cartésiennes (indifféremment 2D ou 3D) et en petits déplacements. Par la suite, au cas par cas, on spécifie les éventuelles modifications justifiées par l'axisymétrie et les grands déplacements.

Remarquons qu'ils font tous intervenir $\dot{\theta}^f$ ou son gradient : ils sont donc nuls en dehors du disque de rayon R_{sup} . Dans la commande `CALC_G_THETA_T` il n'est ainsi pas nécessaire de préciser les chargements qui ne s'appliquent pas dans cette zone.

4.3.1 Dérivée du terme classique élémentaire

D'après le théorème de transport du [§4.2.1], l'intégrande correspondant à la dérivée du terme classique élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial TCLA}{\partial \eta_s}(\theta^f) \right)_{\eta_s=0} &= \overbrace{\sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j}^f - \psi(\varepsilon(u), T) \operatorname{div} \theta^f}^{\dot{\quad}} + TCLA \operatorname{div} \dot{\theta}^s \\ &= \left(\dot{\sigma}_{ij} u_{i,p} + \sigma_{ij} \overbrace{\dot{u}_{i,p}}^{\dot{\quad}} \right) \theta_{p,j}^f + \sigma_{ij} u_{i,p} \overbrace{\dot{\theta}_{p,j}^f}^{\dot{\quad}} \\ &\quad - \dot{\psi} \operatorname{div} \theta^f - \psi \overbrace{\operatorname{div} \dot{\theta}^f}^{\dot{\quad}} + TCLA \operatorname{div} \dot{\theta}^s \end{aligned}$$

Il faut donc calculer $\dot{\sigma}_{ij}$, $\overbrace{\dot{u}_{i,p}}^{\dot{\quad}}$, $\overbrace{\dot{\theta}_{p,j}^f}^{\dot{\quad}}$, $\dot{\psi}$ et $\overbrace{\operatorname{div} \dot{\theta}^f}^{\dot{\quad}}$.

Tout d'abord, compte tenu de la régularité de F_s^η , on peut montrer [bib4], [bib9] qu'il existe un champ lagrangien (cette remarque simplifie beaucoup les calculs et consiste à changer formellement de θ fissure pour chaque η_s) Θ^f représentant le θ fissure tel que :

$$\Theta^f(\mathbf{P}) = \theta^f(F_s^\eta(\mathbf{P})) \quad \forall \mathbf{P} \in \Omega$$

ainsi la dérivée lagrangienne du θ fissure est nulle :

$$\dot{\theta}^f = \left(\frac{\partial \theta^f(F_s^\eta(\mathbf{P}))}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0} = \left(\frac{\partial \Theta^f(\mathbf{P})}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0} = 0$$

[éq 4.2.3-6] conduit alors à :

$$\dot{\theta}_{p,j}^f = -\theta_{p,l}^f \theta_{l,j}^s \quad \text{et} \quad \dot{\text{div}} \theta^f = -\theta_{k,l}^f \theta_{l,k}^s$$

En appliquant [éq 4.2.3-3] au champ de déplacement il advient :

$$\dot{u}_{i,p} = (\dot{u}_i)_{,p} - u_{i,k} \theta_{k,p}^s$$

d'où le calcul du tenseur des déformations qui va nous permettre d'obtenir les dérivées lagrangiennes du champ de contraintes et de la densité d'énergie libre :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{PD} = \frac{1}{2} \left[(\dot{u}_i)_{,j} + (\dot{u}_j)_{,i} \right] - \frac{1}{2} (u_{i,k} \theta_{k,j}^s + u_{j,k} \theta_{k,i}^s) \quad (\text{petites déformations})$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{GD} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{PD} + \frac{1}{2} \left[\left((\dot{u}_i)_{,k} - u_{i,p} \theta_{p,k}^s \right) u_{j,k} + \left((\dot{u}_j)_{,k} - u_{j,p} \theta_{p,k}^s \right) u_{i,k} \right] \quad (\text{grandes déformations})$$

Puisqu'on s'est limité à l'élasticité linéaire et compte tenu des remarques précédentes sur les chargements et de [éq 4.2.3-3] :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \Lambda_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \alpha \dot{T} \delta_{kl} - \varepsilon_{kl,m}^0 \theta_m^s) + \sigma_{ij,m}^0 \theta_m^s \\ \dot{\psi} &= K (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{T}) (\varepsilon_{kk} - 3\alpha (T - T_{ref})) + \frac{4\mu}{3} \varepsilon_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq} \\ \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{3\sqrt{6}}{12} \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^D}{\sqrt{\varepsilon_{ij}^D}} & (\text{tenseur équivalent}) \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^D = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{kl} & (\text{tenseur déviatorique}) \end{cases} \end{aligned}$$

En axisymétrie, conformément aux remarques du paragraphe [§4.2.3], on applique les formules cartésiennes sur les deux premières variables avec l'analogie formelle $(x, y) \Leftrightarrow (r, z)$, que l'on complète par les termes « orthoradiaux » suivants :

$$\begin{aligned} \theta_{\theta,\theta}^f &= \frac{\theta_r^f}{r}, \quad \theta_{\theta,\theta}^s = \frac{\theta_r^s}{r}, \quad u_{\theta,\theta} = \frac{u_r}{r} \\ \dot{\theta}_{\theta,\theta}^f &= -\frac{\theta_r^f \theta_r^s}{r^2} \quad \text{et} \quad \dot{u}_{\theta,\theta} = \frac{1}{r} \left(\dot{u}_r - \frac{u_r \theta_r^s}{r} \right) \end{aligned}$$

d'où la dérivée lagrangienne de la composante 3x3 du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}\overbrace{\varepsilon_{\theta\theta}}^{PD} &= \overbrace{u_{\theta,\theta}}^{\bullet} \quad (\text{petites déformations}) \\ \overbrace{\varepsilon_{\theta\theta}}^{GD} &= \overbrace{\varepsilon_{\theta\theta}}^{PD} + \overbrace{u_{\theta,\theta}}^{\bullet} \frac{u_r}{r} \quad (\text{grandes déformations})\end{aligned}$$

4.3.2 Dérivée du terme thermique

D'après le théorème de transport du [§4.2.1], l'intégrande correspondant à la dérivée du terme thermique s'écrit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial THER}{\partial \eta_s} (\theta^f) \right)_{\eta_s=0} &= - \overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial T} T_{,k} \theta_k^f}^{\bullet} + THER \operatorname{div} \theta^s \\ &= - \left(\overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial T} T_{,k}}^{\bullet} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \left((\dot{T})_{,k} - T_{,l} \theta_{l,k}^s \right) \right) \theta_k^f + THER \operatorname{div} \theta^s\end{aligned}$$

Il nous reste donc à calculer la dérivée lagrangienne de la dérivée par rapport à la température de la densité d'énergie libre :

$$\overbrace{\frac{\partial \psi}{\partial T}}^{\bullet} = -3\alpha K (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{T})$$

4.3.3 Dérivée des termes forces volumique et surfacique

D'après le théorème de transport du [§4.2.1], l'intégrande correspondant à la dérivée du terme force volumique s'écrit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial TFOR}{\partial \eta_s} (\theta^f) \right)_{\eta_s=0} &= \overbrace{u_i \left(f_{i,k} \theta_k^f + f_i \operatorname{div} \theta^f \right)}^{\bullet} + TFOR \operatorname{div} \theta^s \\ &= \dot{u}_i \left(f_{i,k} \theta_k^f + f_i \operatorname{div} \theta^f \right) + u_i \left(\overbrace{\dot{f}_{i,k} \theta_k^f}^{\bullet} + f_{i,l} \theta_l^s \operatorname{div} \theta^f + \overbrace{f_i \operatorname{div} \theta^f}^{\bullet} \right) \\ &\quad + TFOR \operatorname{div} \theta^s\end{aligned}$$

Le seul terme qu'il reste à calculer est la dérivée lagrangienne du gradient des forces volumiques :

$$\overbrace{f_{i,k}}^{\bullet} = \dot{f}_{i,jk} \theta_j^s$$

Remarque :

Le théorème de transport surfacique conduit à remplacer le divergence volumique par une divergence surfacique. Celle-ci et la dérivée lagrangienne de l'intégrande font apparaître des dérivations normales à la surface qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans le Code_Aster. On a donc recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes pour mieux appréhender les intégrandes sur la surface de calcul (cf. [Annexe 2]).

4.3.4 Dérivée du terme déformations et contraintes initiales

D'après le théorème de transport du [§4.2.1], l'intégrande correspondant à la dérivée du terme « déformations et contraintes initiales » s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial TINI}{\partial \eta_s}(\theta^f) \right)_{\eta_s=0} &= \overbrace{\left[\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \right) \varepsilon_{ij,k}^0 + \left(\varepsilon_{ij} - \alpha(T - T_{ref}) \delta_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \right) \sigma_{ij,k}^0 \right] \theta_k^f}^{\bullet} + TINI \operatorname{div} \theta^s \\ &= \theta_k^f \left[\left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \right) \varepsilon_{ij,k}^0 + \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \right) \overbrace{\varepsilon_{ij,k}^0}^{\bullet} + \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha \dot{T} \delta_{ij} - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^0 \right) \sigma_{ij,k}^0 \right] + \\ &\quad \theta_k^f \left(\varepsilon_{ij} - \alpha(T - T_{ref}) \delta_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \right) \overbrace{\sigma_{ij,k}^0}^{\bullet} + TINI \operatorname{div} \theta^s \end{aligned}$$

Les seules dérivées qui n'ont pas encore été exhumées sont celles des gradients des tenseurs des déformations et des contraintes initiales qui, d'après [éq 4.2.3-6], s'écrivent :

$$\begin{aligned} \overbrace{\varepsilon_{ij,k}^0}^{\bullet} &= \varepsilon_{ij,lk}^0 \theta_l^s \\ \overbrace{\sigma_{ij,k}^0}^{\bullet} &= \sigma_{ij,lk}^0 \theta_l^s \end{aligned}$$

Remarque :

Compte tenu des divers traitements numériques effectués lors de l'implantation dans le source de l'opérateur, il n'est pas licite de cumuler des champs de contraintes et de déformations initiales, car ce terme « déformations et contraintes initiales » ne s'annule alors pas. L'utilisateur devra rentrer soit des contraintes initiales, soit des déformations initiales mais pas les deux.

4.4 Implantation dans le Code_Aster

4.4.1 Périmètre d'utilisation

Le calcul de la dérivée du taux de restitution d'énergie s'obtient en supplément de la valeur du taux d'énergie avec l'option 'CALC_DG'. Cette option enrichie la carte résultat d'un quatrième champ noté 'DG'.

```
-----  
  ASTER 6.00.19 CONCEPT G CALCULE LE 07/12/2000 DE TYPE TABL_CALC_G_TH  
    NUME_ORDRE          INST          G          DG  
      1          0.00000E+00      3.62262E-01      1.889340E-03  
-----
```

Exemple 1 : Trace de la carte résultat

Son périmètre d'application se limite aux calculs **thermo-élastiques linéaires 2D** s'appuyant sur des **éléments finis quadratiques** complets ou incomplets (SEG3, TRIA6, QUAD8 et QUAD9). Les options sensibilité permettant les calculs préliminaires des dérivées lagrangiennes de la température et du champ de déplacement ont été mises en place dans les opérateurs MECA_STATIQUE et THER_LINEAIRE.

Attention :

- *Le calcul de sensibilité en thermique est restreint au cas linéaire 2D, stationnaire ou transitoire, avec des sources volumiques et des conditions de température imposée, de flux normal imposé et d'échange convectif. Les conditions d'échange entre paroi et de rayonnement ne sont pas encore pris en compte [R4.03.01][U4.54.01].*
- *En mécanique, le calcul de sensibilité est restreint, pour l'instant, au cas linéaire D_PLAN ou AXIS avec des conditions limites de type déplacement imposé, liaisons uniformes et pression externe [R4.03.01] [U4.51.01].*

Ce calcul de sensibilité s'appuie sur les **modélisations 2D** : D_PLAN et AXIS. Elles sont prises en compte dans l'intégralité du processus de dérivation (THER_LINEAIRE, MECA_STATIQUE et CALC_G_THETA_T). Par contre, la configuration C_PLAN n'est prise en compte qu'en **post-traitement du calcul de mécanique**. En l'occurrence, elle ne doit apparaître qu'après le calcul de sensibilité de MECA_STATIQUE qui ne supporte que les modélisations D_PLAN et AXIS (avec cette option). Les développements informatiques correspondant à cette prise en compte dans un calcul de sensibilité n'ont pas été encore effectués. Dans une telle configuration, l'utilisateur est bien sûr seul juge de la pertinence de ses résultats.

Compte tenu des remarques précédentes, il est clair qu'on ne s'intéresse qu'à des **matériaux élastiques isotropes indépendants de la température**. Ils peuvent être hétérogènes pourvu que leurs caractéristiques restent constantes par éléments finis.

On peut utiliser les mêmes **chargements** que pour le taux d'énergie pourvu qu'ils soient **indépendants de la variation de domaine** dans leurs définitions intrinsèques comme dans celles de leurs supports. En d'autres termes, leur dérivée eulérienne doivent être nulles.

D'autre part, seuls les chargements de type pression répartie (PRES_REP) et température calculée (TEMP_CALCULEE) sont utilisables dans la totalité du processus. Cette restriction logicielle n'est due qu'au développement limité de l'option SENSIBILITE dans l'opérateur MECA_STATIQUE. Comme pour la modélisation C_PLAN, les autres types de chargement (FORCE_INTERNE, FORCE_CONTOUR, EPSI_INIT, PESANTEUR et ROTATION) ne sont pris en compte qu'en post-traitement du calcul de mécanique. **Ils ne peuvent et ils ne doivent intervenir** que pour l'assemblage des termes de la dérivée de G. Ils sont donc modélisés par des AFFE_CHAR_MECA ou AFFE_CHAR_MECA_F insérés entre MECA_STATIQUE et CALC_G_THETA_T.

On peut résumer ces opérations par le tableau suivant :

Modélisation	D_PLAN - AXIS	
Eléments	SEG3 - TRIA6 - QUAD8 - QUAD9	
Matériaux	Elastique isotrope	
Chargement	PRES_REP TEMP_CALCULE	
	MECANIQUE	THERMIQUE
C.L.	Dep. Imposés - Liaisons uniformes Chgt. thermique : TEMP_CALCULEE	C. d'échanges entre paroi : refusé C. de rayonnement : refusé
Calcul	MECA_STAT	THER_LINE

Configuration utilisable uniquement en post-traitement (pertinence laissée au libre choix de l'utilisateur)	Modélisation	C_PLAN
	Type de chargement	FORCE_INTERNE FORCE_CONTOUR EPSI_INIT PESANTEUR ROTATION

CALC_G_THETA_T

Via le mot-clé ETAT_INIT on peut aussi prendre en compte un **champ de contraintes ou de déplacements initiaux** dans le calcul du taux d'énergie. Cette possibilité a été étendue au calcul de sa dérivée avec les mêmes restrictions que pour les chargements. Pour les mêmes raisons ces champs initiaux ne sont pris en compte qu'en post-traitement du calcul de mécanique.

Pour plus d'information sur le domaine de validité des options de calcul et pour s'inspirer d'exemples d'utilisation on pourra se reporter au manuel utilisateur [U4.82.03] et au cas test HPLP100B [V7.02.100].

4.4.2 Environnement nécessaire

Comme pour le calcul du taux de restitution d'énergie, le champ θ^f doit obligatoirement avoir été créé auparavant (soit par la commande `CALC_THETA` [U4.82.02], soit par la commande `AFFE_CHAM_NO` [U4.44.11]). Pour l'obtention de sa dérivée, il faut avoir en plus constitué le champ θ^S avant le calcul thermo-mécanique (puisqu'il est fourni en entrée de ces opérateurs via l'opérande `SENSIBILITE`).

C'est lui aussi un champ de vecteur 2D en chaque nœud du maillage. Il est orienté suivant l'axe des abscisses. Il peut être affecté directement avec la commande `AFFE_CHAM_NO` mais, dans la pratique, il est généralement issu de la commande spécifique `CALC_THETA` avec l'option `THETA_BANDE` qui permet de saisir le module (mot-clé `MODULE`) et les abscisses x_1 et x_2 (mot-clé `R_INF` et `R_SUP`) des points délimitant son support vertical. On rappelle que ce champ décroît de la valeur `MODULE` à la valeur nulle entre les abscisses x_1 et x_2 , et qu'il est nul partout ailleurs. Ces abscisses peuvent être négatives mais on doit avoir $x_1 < x_2$. La [Figure 4.1-a] illustre un exemple de ce type de champ θ .

Attention :

Le champ θ sensibilité est donc pour l'instant figé, colinéaire au vecteur unitaire de l'axe des abscisses (et dans le même sens). Cette construction préalable de θ^S par l'opérateur `CALC_THETA` correspondait aux spécifications du projet PROMETE [bib7]. Mais rien n'empêche la prise en compte de directions quelconques pour pouvoir simuler des dérivations par rapport à des variations de domaines inclinées.

4.4.3 Normalisation

En **axisymétrie**, pour effectuer des comparaisons, il est nécessaire de normaliser à la main (ce n'est pas fait automatiquement) la dérivée fournie par le `Code_Aster`. Comme pour le taux de restitution d'énergie (cf. [§2.4.4.1]) il faut diviser la valeur numérique obtenue par le rayon R du fond de fissure (égal à sa distance à l'axe de symétrie y) :

$$\left(\frac{\mathcal{G}^{\text{intrinseque}}(\theta^f)}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0} = \frac{1}{R} \left(\frac{\mathcal{G}(\theta^f)}{\partial \eta_s} \right)_{\eta_s=0}$$

5 Bibliographie

- [1] BUI H.D., Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977.
- [2] DESTUYNDER Ph, DJAOUA M., Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences, Vol. 3, pp. 70-87, 1981.
- [3] GRISVARD P., "Problèmes aux limites dans les polygones", Mode d'emploi - EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, 1, 1986 pp. 21-59.
- [4] MIALON P., "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode θ ", EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n°3 1988 pp1-28.
- [5] MIALON P., Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure, note interne EDF, HI/4740-07-1984.
- [6] GURTIN M.E. An introduction to continuum mechanics. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1981.
- [7] VENTURINI V. et al. Etude PRObabiliste de la cuve par un couplage Mecano-fiabilisTE. Bilan du projet P1-97-04, HP-26/99/012/A, nov. 1999.
- [8] DHATT.G et TOUZOT.G. Une présentation de la méthodes des éléments finis. Ed. Maloine, 1984.
- [9] MURAT.F et SIMON.J. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Université de Paris VI, 1976.

Annexe 1 Calcul des dérivées secondes des éléments quadratiques 2D

Dans un premier temps on exprime les dérivées secondes des fonctions de forme sur l'élément de référence, puis on les utilise pour déterminer celles de l'élément réel qui sont les seules à intervenir effectivement dans le calcul des termes élémentaires. On conserve ici les notations du code pour les éléments isoparamétriques [R3.01.01]. Nous n'effectuerons l'exercice qu'en 2D mais il se généralise sans peine au 3D.

Pour calculer les dérivées secondes sur des éléments linéiques on a recours à la géométrie différentielle et aux dérivées contravariantes (cf. [Annexe 2]). Elles permettent de mieux appréhender les intégrandes sur la surface de calcul afin qu'ils ne fassent pas apparaître de dérivations normales qui n'ont pas de sens pour les éléments de peau utilisés dans le *Code_Aster*.

A1.1 Dérivées secondes sur l'élément de référence

A1.1.1 Segment (élément de bord)

Les dérivées secondes des trois fonctions de formes s'écrivent :

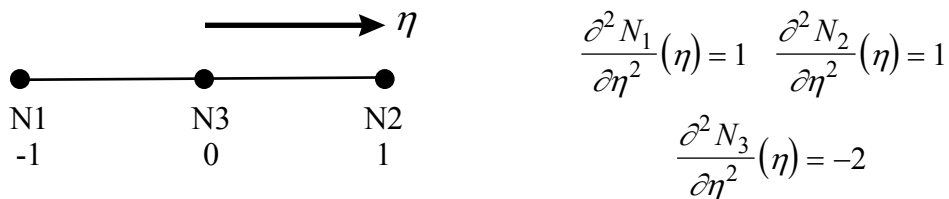


Figure A1.1.1-a : Segment de référence

A1.1.2 Triangle (élément de face)

Les dérivées secondes des six fonctions de formes s'écrivent :

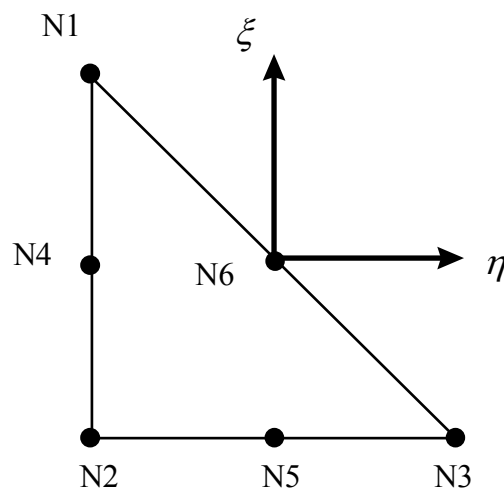


Figure A1.1.2-a : Triangle de référence

i	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \xi}$
1	0	1	0
2	1	1	1
3	1	0	0
4	0	-2	-1
5	-2	0	-1
6	0	0	1

Figure A1.1.2-b : Dérivées secondes du triangle de référence

A1.2 Quadrangle complet ou incomplet (élément de face)

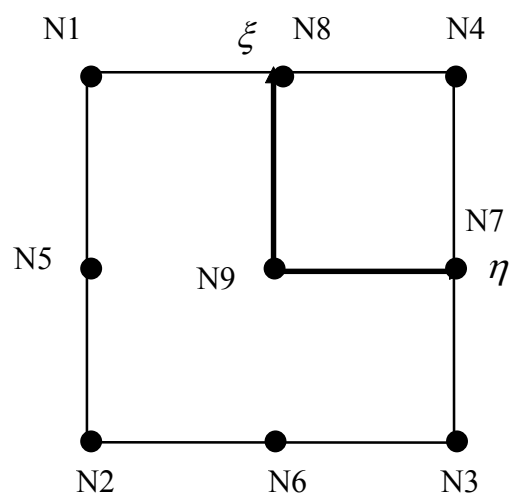


Figure A1.2-a : Quadrangle de référence

Les dérivées secondes des huit (resp. neuf) fonctions de formes du quadrangle incomplet (resp. complet) s'écrivent :

i	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \xi}$	i	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \xi}$
1	$\frac{1+\xi}{2}$	$\frac{1-\eta}{2}$	$\frac{\eta-\xi}{2} - \frac{1}{4}$	1	$\frac{1+\xi}{2} \xi$	$\frac{\eta-1}{2} \eta$	$\frac{(2\xi+1)(2\eta-1)}{4}$
2	$\frac{1-\xi}{2}$	$\frac{1-\eta}{2}$	$-\frac{\eta-\xi}{2} + \frac{1}{4}$	2	$\frac{\xi-1}{2} \xi$	$\frac{\eta-1}{2} \eta$	$\frac{(2\xi-1)(2\eta-1)}{4}$
3	$\frac{1-\xi}{2}$	$\frac{1+\eta}{2}$	$-\frac{\eta+\xi}{2} - \frac{1}{4}$	3	$\frac{\xi-1}{2} \xi$	$\frac{1+\eta}{2} \eta$	$\frac{(2\xi-1)(2\eta+1)}{4}$
4	$\frac{1+\xi}{2}$	$\frac{1+\eta}{2}$	$\frac{\eta+\xi}{2} + \frac{1}{4}$	4	$\frac{1+\xi}{2} \xi$	$\frac{1+\eta}{2} \eta$	$\frac{(2\xi+1)(2\eta+1)}{4}$
5	0	$\eta-1$	ξ	5	$1-\xi^2$	$(1-\eta)\eta$	$\xi(1-2\eta)$
6	$\xi-1$	0	η	6	$\xi(1-\xi)$	$1-\eta^2$	$\eta(1-2\xi)$
7	0	$-\eta-1$	$-\xi$	7	$1-\xi^2$	$-\eta(\eta+1)$	$-\xi(2\eta+1)$
8	$-\xi-1$	0	$-\eta$	8	$-\xi(\xi+1)$	$1-\eta^2$	$-\eta(2\xi+1)$
				9	$2(\xi^2-1)$	$2(\eta^2-1)$	$4\xi\eta$

Figure A1.2-1 : Dérivées secondes du quadrangle complet et incomplet de référence

A1.3 Dérivées secondes sur l'élément réel

A1.3.1 Problématique

Les termes élémentaires à discrétiser sont écrits dans le domaine réel, même s'ils sont transcrits sur l'élément de référence via la changement de variable utilisant le jacobien. Leurs intégrandes utilisent donc des dérivées en \mathbf{x} . Or l'approximation nodale sur l'élément réel étant souvent trop compliquée (la fonction d'interpolation géométrique $\tau: \boldsymbol{\eta} \rightarrow \mathbf{x}$ admet une bijection réciproque mais sa construction est laborieuse dès les QUAD4. On notera $[J]$ sa matrice jacobienne et $\det(J)$ son jacobien. D'autre code, tel N3S, ont choisi cependant, pour des raisons de performance, de travailler exclusivement sur l'élément réel), on lui préfère son expression sur l'élément de référence :

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) \approx \left\langle N_1(\boldsymbol{\eta}) \quad \dots \quad N_{n^e}(\boldsymbol{\eta}) \right\rangle \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{n^e} \end{Bmatrix}$$

notée $\varphi(\boldsymbol{\eta}) \approx \left\langle N(\boldsymbol{\eta}) \right\rangle \left\{ \varphi_n \right\}$

avec :

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n^e}$ les valeurs de φ aux n^e points d'interpolation et
 $N_1(\boldsymbol{\eta}), N_2(\boldsymbol{\eta}), \dots, N_{n^e}(\boldsymbol{\eta})$ leurs fonctions de forme associées sur l'élément de référence.

Il faut donc transcrire ces dérivées par rapport à \mathbf{x} en dérivées par rapport à $\boldsymbol{\eta}$ via la description directe de l'interpolation géométrique τ .

A1.3.2 Cas bidimensionnel

En utilisant la dérivation en chaîne, on écrit tout d'abord les dérivées en $\boldsymbol{\eta}=(\eta,\xi)$ à partir de celles en $\mathbf{x}=(x,y)$:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

éq A1.3.2-1

notée $\{\partial_{\eta}\} = [J] \{\partial_x\}$

En inversant ce système (comme τ est bijective) on peut ainsi en déduire les dérivées en \mathbf{x} à partir de celles en $\boldsymbol{\eta}$:

$$\{\partial_x\} = [J]^{-1} \{\partial_{\eta}\}$$

éq A1.3.2-2

et en les dérivant formellement on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \end{Bmatrix}$$

éq A1.3.2-3

notée $\{\partial_x^2\} = [T_1] \{\partial_{\eta}\} + [T_2] \{\partial_{\eta}^2\}$

D'autre part en dérivant [éq A1.3.2-1] par rapport à $\boldsymbol{\eta}$, en tenant compte de [éq A1.3.2-2], il vient :

$$\begin{aligned} \{\partial_{\eta}^2\} &= [C_1] \{\partial_x\} + [C_2] \{\partial_x^2\} \\ &= [C_1] [J]^{-1} \{\partial_{\eta}\} + [C_2] \{\partial_x^2\} \end{aligned}$$

en reportant l'expression obtenue dans [éq A1.3.2-3] :

$$\begin{aligned} \{\partial_x^2\} &= ([T_1] + [T_2][C_1][J]^{-1}) \{\partial_{\eta}\} + [T_2][C_2] \{\partial_x^2\} \\ \Rightarrow \begin{cases} [T_2] &= [C_2]^{-1} \\ [T_1] &= -[T_2][C_1][J]^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Les matrices $[C_1]$ et $[C_2]$ s'obtenant facilement, via τ , on a donc un processus constructif permettant de déduire les matrices $[T_1]$ et $[T_2]$ recherchées :

$$[C_2] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \end{bmatrix} \quad [C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T_2] = \frac{1}{\det^2(J)} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & -2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & -2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} & -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} & +\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = \frac{-1}{\det(J)} [T_2] [C_1] \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & -\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Ainsi, par exemple, la première dérivée seconde en x exprimée sur l'élément de référence s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\eta) = T_1(1,1) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\eta) + T_1(1,2) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\eta) + T_2(1,1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}(\eta) + T_2(1,2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}(\eta) + T_2(1,3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi}(\eta)$$

Pour de plus amples informations, on pourra se référer à l'excellent ouvrage de G.Dhatt et G.Touzot [bib8] pp51-57.

Annexe 2 Calcul du terme force surfacique et de sa dérivée en 2D

A2.1 Introduction

D'après les paragraphes [§2.4.3.3] et [§4.3.3] le terme force surfacique et sa dérivée par rapport à la variation de domaine s'écrivent (avant projection des opérateurs sur la base cartésienne) :

$$TSUR = \int_S (\nabla \mathbf{f} \theta^f + \mathbf{f} \operatorname{div}_s \theta^f) \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma$$

$$\left(\frac{\partial TSUR}{\partial \eta_s} (\theta^f) \right)_{\eta_s=0} = \int_S \left((\nabla \nabla \mathbf{f} \theta^s) \theta^f + \nabla \mathbf{f} \theta^s \operatorname{div}_s \theta^f + \mathbf{f} \operatorname{div}_s \dot{\theta}^f \right) \cdot \mathbf{u} +$$

$$(\nabla \mathbf{f} \theta^f + \mathbf{f} \operatorname{div}_s \theta^f) \cdot (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \operatorname{div}_s \theta^s) \, d\Gamma$$

Ils font donc clairement apparaître des dérivées normales à la surface de calcul. Or dans le *Code_Aster*, on a choisi de calculer ces termes élémentaires (dûs aux efforts surfaciques) sur des « éléments de peau » pour lesquels cette variation normale n'a pas de sens. Pour y remédier on a recours à la géométrie différentielle qui permet d'exprimer ces intégrandes uniquement à l'aide de grandeurs surfaciques.

Nous n'effectuerons l'exercice qu'en **2D-PLAN** mais il se généralise sans peine au 3D. Dans notre cas, la surface de calcul se réduit à une **courbe** (dans le plan (x,y) de calcul) et les forces ne sont plus que linéiques. D'autre part, suivant que la **modélisation est plane ou axisymétrique**, il faut prendre en compte des termes complémentaires, car dans le premier cas il s'agit d'un calcul par unité de longueur, alors que dans le second, il est par unité de radian.

Nous allons maintenant introduire un paramétrage curviligne du voisinage de la courbe de travail **S** et de ses repères fondamentaux associés. Soit η un paramétrage admissible de **S**. Pour décrire le volume constitué d'un voisinage de cette courbe en utilisant un repère orthogonal, on lui adjoint deux autres variables ξ et ζ .

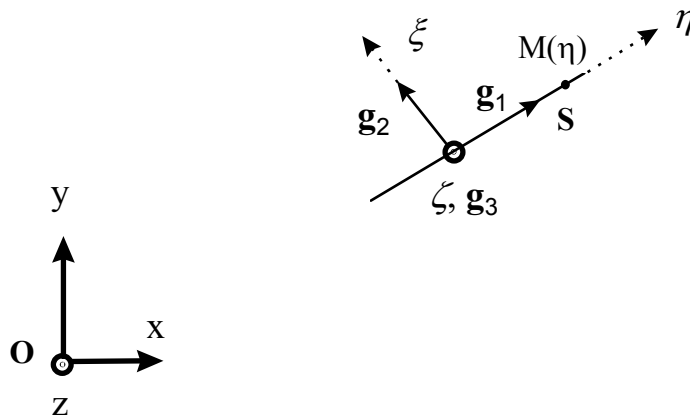


Figure A2.1-a : Paramétrage curviligne du voisinage de la courbe de travail

La figure ci-dessus illustre la base naturelle covariante ($\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$) associée aux paramètres η, ξ et ζ . Les vecteurs de cette base curviligne s'écrivent dans le repère global (O, x, y, z) sous la forme (en un point $M(x(\eta), y(\eta))$ quelconque de S)

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où le tenseur métrique \mathbf{g} et son tenseur réciproque \mathbf{g}^{-1} , en notant J le jacobien de la transformation :

$$\mathbf{g} = [g_{ij}]_{ij} = [\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j]_{ij} = \begin{bmatrix} J^2 & 0 & 0 \\ 0 & J^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{-1} = [g^{ij}]_{ij} = [\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j]_{ij} = \begin{bmatrix} J^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$

Du tenseur métrique réciproque on déduit le base contravariante ($\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$) qui s'avère très utile pour calculer les dérivées covariantes :

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \Rightarrow \mathbf{g}^1 = \frac{1}{J^2} \mathbf{g}_1, \mathbf{g}^2 = \frac{1}{J^2} \mathbf{g}_2, \mathbf{g}^3 = \mathbf{g}_3$$

Remarque :

Que la modélisation soit plane ou axisymétrique, ces tenseurs restent diagonaux puisque les bases choisies sont orthogonales. Par contre la valeur de l'élément d'intégration élémentaire diffère

$$d\Gamma = \begin{cases} J d\eta & \text{en 2D - PLAN} \\ r J d\eta & \text{en 2D - AXI} \end{cases}$$

pour tenir compte de l'intégration par unité de radian en axisymétrie. Compte tenu de l'analogie

formelle $(x, y) \Leftrightarrow (r, z)$, le jacobien de la transformation s'écrit : $J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$

A2.2 Terme force surfacique

Décomposons ce terme en deux intégrandes :

$$TSUR = \int_S (TSUR_1 + TSUR_2) d\Gamma$$

$$\text{avec } TSUR_1 = (\nabla \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta}^f) \cdot \mathbf{u} \quad \text{et} \quad TSUR_2 = (\mathbf{f} \operatorname{div}_s \boldsymbol{\theta}^f) \cdot \mathbf{u}$$

A2.2.1 Calcul de $TSUR_1$

En exprimant le gradient par des dérivées covariantes et en décomposant le vecteur θ^f fissure et le vecteur déplacement sur la base covariante, on obtient (après quelques opérations tensorielles de base)

$$\begin{aligned} TSUR_1 &= (\nabla \mathbf{f} \theta^f) \cdot \mathbf{u} = \left(f^i \Big|_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \theta^{fk} \mathbf{g}_k \right) u^l \mathbf{g}_l \quad \text{avec } \left. \begin{matrix} i, k, l \in \{1, 2\} \\ j=1 \end{matrix} \right\} \\ &= f^i \Big|_j \theta^{fk} u^l \delta_{jk} \mathbf{g}_{il} \\ &= J^2 f^i \Big|_j \theta^{fk} u^i \end{aligned}$$

Il reste à déterminer $f^i \Big|_j, \theta^{fk}$ et u^i via la base contravariante pour obtenir :

$$\begin{aligned} TSUR_1 &= J^2 \left(\theta^f \cdot \mathbf{g}^1 \right) \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \eta} \cdot \mathbf{g}^1 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \eta} \cdot \mathbf{g}^2 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^2) \right\} \\ &= J^{-2} \left(\theta_x^f \frac{\partial x}{\partial \eta} + \theta_y^f \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + u_y \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

Remarque :

En axisymétrie, compte tenu de la nullité de la composante orthoradiale du champ θ^f fissure, il n'y a pas de terme complémentaire.

A2.2.2 Calcul de $TSUR_2$

En exprimant la divergence surfacique comme la trace du gradient surfacique

$$\text{div}_s \theta^f = \text{tr}(\nabla_s \theta^f) = \text{tr}(\theta^{fi} \Big|_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) \quad \text{avec } i, j = 1$$

et en décomposant le vecteur θ^f fissure et le vecteur déplacement sur la base covariante, on obtient (après quelques opérations tensorielles de base (prendre la trace d'un tenseur du second ordre revient à effectuer sa contraction)) :

$$\begin{aligned} TSUR_2 &= (\mathbf{f} \text{tr}(\nabla_s \theta^f)) \cdot \mathbf{u} = \left(f^k \mathbf{g}_k \text{tr}(\theta^{fi} \Big|_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) \right) u^l \mathbf{g}_l \quad \text{avec } \left. \begin{matrix} k, l \in \{1, 2\} \\ i, j=1 \end{matrix} \right\} \\ &= f^k \theta^{fi} \Big|_j u^l \delta_{ij} \mathbf{g}_{kl} \\ &= J^2 f^k \theta^{fi} \Big|_j u^k \end{aligned}$$

Il reste à déterminer $f^k, \theta^{fi} \Big|_j$ et u^k avec la base contravariante pour obtenir :

$$\begin{aligned} TSUR_2 &= J^2 \left(\frac{\partial \theta^f}{\partial \eta} \cdot \mathbf{g}^1 \right) \left\{ (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^1) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1) + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^2) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^2) \right\} \\ &= J^{-2} \left(\frac{\partial \theta_x^f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_y^f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) (f_x u_x + f_y u_y) \end{aligned}$$

Remarque :

En axisymétrie il faut tenir compte de la composante orthoradiale non nulle du gradient lors du calcul de la divergence surfacique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_s \theta^f &= \theta^{fr} \Big|_r + \theta^{f\theta} \Big|_\theta \\ &= J^{-2} \left(\frac{\partial \theta_r^f}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_z^f}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{r} \theta_r^f \end{aligned}$$

A2.3 Dérivée du terme force surfacique

Décomposons ce terme en cinq intégrandes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_{SUR}}{\partial \eta_s} (\theta^f) \right)_{n_s=0} &= \int_S (DTSUR_1 + DTSUR_2 + DTSUR_3 + DTSUR_4 + DTSUR_5) d\Gamma \\ \text{avec } DTSUR_1 &= ((\nabla \nabla \mathbf{f} \theta^s) \theta^f) \cdot \mathbf{u} \\ DTSUR_2 &= (\nabla \mathbf{f} \theta^s) \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_s \theta^f \\ DTSUR_3 &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \overbrace{\operatorname{div}_s \theta^f}^{\bullet} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{tr}(\nabla_s \theta^f \nabla_s \theta^s) \\ DTSUR_4 &= (\nabla \mathbf{f} \theta^f + \mathbf{f} \operatorname{div}_s \theta^f) \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ DTSUR_5 &= (\nabla \mathbf{f} \theta^f + \mathbf{f} \operatorname{div}_s \theta^f) \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_s \theta^s \end{aligned}$$

A2.3.1 Calcul de DTSUR₁

En exprimant le double gradient par des dérivées covariantes et en décomposant le vecteur thêta fissure, le vecteur thêta sensibilité et le vecteur déplacement sur la base covariante, on obtient (après quelques opérations tensorielles de base) :

$$\begin{aligned} DTSUR_1 &= ((\nabla \nabla \mathbf{f} \theta^s) \theta^f) \cdot \mathbf{u} = \left(f^i \Big|_{jk} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \theta_s^l \mathbf{g}_l \right) \theta_f^m \mathbf{g}_m u^n \mathbf{g}_n \text{ avec } \begin{matrix} i, l, m, n \in \{1, 2\} \\ j, k=1 \end{matrix} \\ &= f^i \Big|_{jk} \theta^{sl} \theta^{fm} u^n \delta_{kl} \delta_{jm} \mathbf{g}_{in} \\ &= J^2 f^i \Big|_{jk} \theta^{sk} \theta^{fj} u^i \end{aligned}$$

Il reste à déterminer $f^i \Big|_{jk}$, θ^{fj} , θ_s^{sk} et u^i avec la base contravariante pour en déduire :

$$\begin{aligned} T_{SUR_1} &= J^2 (\theta^f \cdot \mathbf{g}^1) (\theta^s \cdot \mathbf{g}^1) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \eta^2} \cdot \mathbf{g}^1 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \eta^2} \cdot \mathbf{g}^2 \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^2) \right\} \\ &= J^{-4} \left(\theta_x^f \frac{\partial x}{\partial \eta} + \theta_y^f \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\theta_x^s \frac{\partial x}{\partial \eta} + \theta_y^s \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(u_x \frac{\partial^2 f_x}{\partial \eta^2} + u_y \frac{\partial^2 f_y}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

Remarque :

En axisymétrie, compte tenu de la nullité de la composante orthoradiale du champ thêta sensibilité, il n'y a pas de terme complémentaire.

A2.3.2 Calcul de DTSUR₂

Il s'obtient immédiatement en reprenant le résultat du calcul de TSUR₁ (après avoir remplacé le champ θ^f fissure par le champ θ^f sensibilité) et en le multipliant par l'expression de la divergence surfacique du champ θ^f fissure de TSUR₂.

$$DTSUR_2 = J^{-4} \left(\theta_x^s \frac{\partial x}{\partial \eta} + \theta_y^s \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + u_y \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta_x^f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_y^f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$$

Remarque :

En axisymétrie il faut tenir compte de la composante orthoradiale non nulle du gradient lors du calcul de la divergence surfacique

$$div_s \theta^f = J^{-2} \left(\frac{\partial \theta_r^f}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_z^f}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\theta_r^f}{r}$$

A2.3.3 Calcul de DTSUR₃

En exprimant la divergence surfacique comme la trace du gradient surfacique et en décomposant le vecteur force linéique et le vecteur déplacement sur la base covariante, on obtient (après quelques opérations tensorielles de base (prendre la trace d'un tenseur du second ordre revient à effectuer sa contraction)) :

$$\begin{aligned} TSUR_3 &= (\mathbf{f} \text{tr}(\nabla_s \theta^f \nabla_s \theta^s)) \mathbf{u} = (f^k \mathbf{g}_k \text{tr}(\theta^{fi} |_{\eta} \theta^{sm} |_{\eta} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j)(\mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n))) u^l \mathbf{g}_l \text{ avec } \begin{matrix} k, l \in \{1, 2\} \\ i, j, m, n = 1 \end{matrix} \\ &= f^k \theta^{fi} |_{\eta} \theta^{sm} |_{\eta} u^l \delta_{jm} \delta_{in} g_{kl} \\ &= J^2 f^k \theta^{fi} |_{\eta} \theta^{sj} |_{\eta} u^k \end{aligned}$$

Il reste à déterminer $f^k, \theta^{fi} |_{\eta}, \theta^{sj} |_{\eta}$ et u^k avec la base contravariante

$$\begin{aligned} TSUR_3 &= J^2 \left(\frac{\partial \theta^f}{\partial \eta} \cdot \mathbf{g}^1 \right) \left(\frac{\partial \theta^s}{\partial \eta} \cdot \mathbf{g}^1 \right) \{ (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1) + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^2) \} \\ &= J^{-4} \left(\frac{\partial \theta_x^f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_y^f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta_x^s}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_y^s}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) (f_x u_x + f_y u_y) \end{aligned}$$

Remarque :

En axisymétrie il faut tenir compte de la composante orthoradiale non nulle de la dérivée lagrangienne des gradients surfaciques (cf. [§4.2.2])

$$\overbrace{div_s \theta^f} = J^{-4} \left(\frac{\partial \theta_r^f}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_z^f}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta_r^s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_z^s}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\theta_r^f \theta_r^s}{r^2}$$

A2.3.4 Calcul de DTSUR₄

Il suffit de sommer les expressions de TSUR1 et TSUR2 en remplaçant les composantes du champ de

déplacement $\mathbf{u} \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \end{vmatrix}$ par celles de sa dérivée lagrangienne $\dot{\mathbf{u}} \begin{vmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{vmatrix}$.

A2.3.5 Calcul de DTSUR₅

Il suffit de multiplier la somme TSUR1+TSUR2 par l'expression de la divergence surfacique du champ θ^s sensibilité

$$\text{div}_s \theta^s = J^{-2} \left(\frac{\partial \theta_x^s}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_y^s}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$$

Remarque :

En axisymétrie il faut tenir compte de la composante orthoradiale non nul du gradient lors du calcul de la divergence surfacique

$$\text{div}_s \theta^s = J^{-2} \left(\frac{\partial \theta_r^s}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta_z^s}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\theta_r^s}{r}$$