

Manuel de Référence
Fascicule R7.02 : Mécanique de la rupture
Document : R7.02.04

Représentation Lagrangienne de variation de domaine

1 But

- Calculer les champs mécaniques relatifs à un domaine à géométrie variable, en utilisant un domaine fixe de référence de façon, par exemple, à effectuer des études paramétriques sur plusieurs domaines en n'utilisant qu'un seul maillage.
- Dans le cadre de la mécanique de la rupture, calculer le taux de restitution de l'énergie pour différentes longueurs de fissure (en 2D et 3D) en utilisant un seul maillage représentant une longueur de fissure fixe de référence.

Ces développements sont disponibles en élasticité linéaire, pour les éléments de milieu continu 2D et 3D, dans les situations où les variations de géométrie n'affectent pas les bords chargés. Les déformations initiales éventuelles ne sont traitées que dans le milieu 2D.

Tout calcul utilisant cette méthode nécessite, pour assurer le passage du domaine réel étudié au domaine de référence, la création préalable d'un champ θ , à l'aide de la commande `CALC_THETA` [U4.63.02].

La formulation développée dans le *Code_Aster* ne tient pas compte des termes thermiques, des chargements sur les lèvres de la fissure ni des forces de volume en général, sauf des déformations initiales qui sont prises en compte en 2D seulement.

2 Principe de la méthode

Le principe est double :

- utiliser une transformation géométrique bijective faisant correspondre le domaine de référence (celui que l'on maille) avec le domaine réel. Pour cela, on se sert du champ θ et d'un paramètre réel α . En théorie, tout type de transformation est autorisé pourvu qu'elle soit régulière mais la forme du champ θ actuellement implanté n'autorise grosso modo que des translations de sous-domaines, sauf en 3D où en différenciant les modules du champ θ le long d'une frontière, on peut simuler des changements de forme de cette frontière (application à l'étude paramétrique de fissures 3D),
- écrire les nouvelles équations du problème élastique sur le domaine fixe de référence, la variabilité (traduite par le paramètre α) apparaissant dans les équations et non plus dans le domaine (d'où un maillage unique pour analyser toutes les configurations).

En ce qui concerne les applications à la mécanique de la rupture, on calcule en outre le taux de restitution de l'énergie relatif à différentes longueurs de fissures en utilisant la configuration de référence. Pour cela, on écrit l'énergie potentielle sous forme Lagrangienne et on dérive son expression par rapport au paramètre α .

2.1 Transformation de domaine par le champ θ .

On considère une succession de domaines Ω_{α_i} , et un domaine de référence Ω_0 . Chaque point matériel P_i des différents domaines est repéré par un point M du domaine de référence de la façon suivante (cf. [Figure 2.1-a]) :

$$P_i = f_{\alpha_i}(M) = M + \alpha_i \theta(M)$$

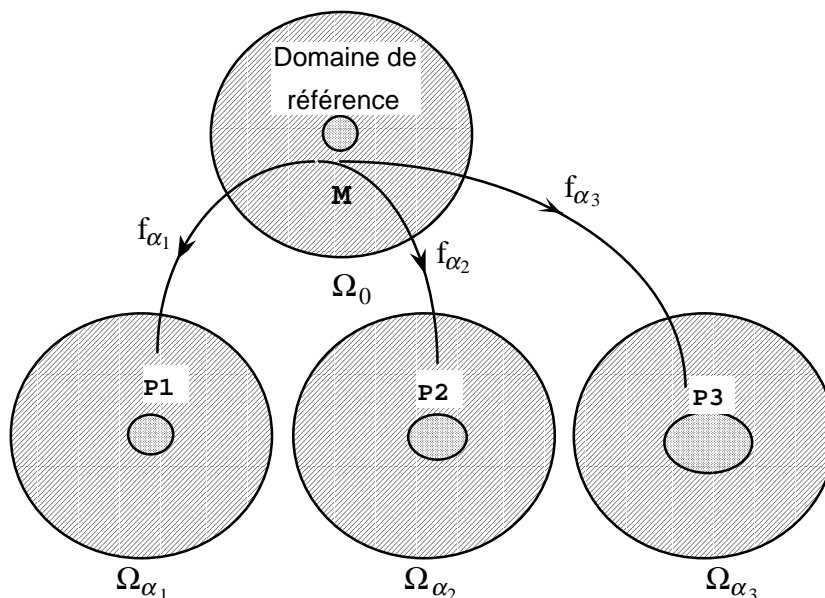


Figure 2.1-a : Représentation d'une succession de domaines par un domaine de référence.

2.2 Représentation lagrangienne du problème d'élasticité.

Les champs mécaniques relatifs à la configuration courante et écrits sur la configuration de référence s'expriment de la façon suivante, que l'on appellera expression lagrangienne :

$\tilde{u}(M) = u(M + \alpha\theta)$, $\tilde{\sigma}(M) = \sigma(M + \alpha\theta)$, où u et σ sont respectivement les champs de déplacements et de contraintes. De manière générale tout champ c aura sa représentation lagrangienne \tilde{c} avec $\tilde{c}(M) = c(M + \alpha\theta)$.

Le principe des travaux virtuels (P.T.V) s'écrit classiquement, en élasticité linéaire, sur chaque domaine Ω_α de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_\alpha} A \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_\alpha} T \cdot v \, dS + \int_{\Omega_\alpha} A \varepsilon_i \cdot \nabla v \, d\Omega,$$

avec u champ solution du problème, v champ de déplacement cinématiquement admissible, ε_i un champ de déformations initiales, A le tenseur d'élasticité et T les forces imposées sur la frontière du domaine.

En remarquant que le champ de déformation s'écrit : $\varepsilon(P) = \tilde{\varepsilon}(M)(\nabla f_\alpha)^{-1}$, et que $d\Omega_\alpha = \det \nabla f_\alpha d\Omega_0$, le P.T.V. s'écrit sur le domaine de référence (sachant que le support de la transformation est strictement inclus dans Ω_α , c'est-à-dire que cette transformation n'affecte pas les bords chargés) :

$$\int_{\Omega_0} A \nabla \tilde{u} (\nabla f_\alpha)^{-1} \cdot \nabla v (\nabla f_\alpha)^{-1} \det \nabla f_\alpha \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} T \cdot v \, dS + \int_{\Omega_0} A \tilde{\varepsilon}_i \cdot \nabla v (\nabla f_\alpha)^{-1} \det \nabla f_\alpha \, d\Omega$$

Le problème discrétisé se présente alors sous la forme suivante (avec les notations habituelles des éléments finis) :

$$\tilde{K}(f_\alpha) \tilde{u} = F + \tilde{Q}(f_\alpha),$$

où \tilde{u} est le champ lagrangien solution du problème, \tilde{K} la matrice de rigidité, \tilde{Q} le vecteur correspondant aux déformations initiales, tous deux dépendant de la transformation (et donc du champ θ et du paramètre α).

L'étude paramétrique consiste donc à traiter plusieurs problèmes en utilisant le même maillage et en calculant à chaque fois les matrices de rigidité élémentaires dépendant du paramètre α à l'aide de l'option 'RIGI_MECA_LAGR' (disponible en 2D et 3D) de l'opérateur CALC_MATR_ELEM [U4.41.01] et de l'option 'CHAR_MECA_LAGR' (disponible uniquement pour les déformations initiales et en 2D) de l'opérateur CALC_VECT_ELEM [U4.41.02], avec en donnée le champ θ et le paramètre α . Le reste du calcul se poursuit de manière habituelle : assemblage et résolution (Ce développement n'est pas intégré dans la commande globale MECA_STATIQUE [U4.31.01], il faut donc décomposer le calcul avec les opérateurs élémentaires). Le champ de déplacement obtenu est un champ **lagrangien**. De même, les contraintes lagrangiennes sont obtenues grâce à l'opérateur CALC_CHAM_ELEM [U4.61.01], avec les options 'SIEF_ELGA_LAGR' et 'SIGM_ELNO_LAGR' [U4.61.01].

Le calcul des contraintes tient compte de la présence éventuelle d'un champ de déformations initiales. En particulier, on peut calculer avec ces options le champ des contraintes réelles avec pré-déformation sans variation de domaine (c'est-à-dire en prenant $\alpha=0$) : $\sigma = A(\varepsilon - \varepsilon_i)$.

Les déformations initiales sont obligatoirement définies sous forme de constantes ou de fonctions de l'espace, par l'intermédiaire de l'opérateur AFFE_CHAR_MECA [U4.25.01] avec le mot-clé 'EPSI_INIT'. Le développement ne prend pas en compte des déformations initiales données comme des champs aux nœuds ou aux points de Gauss.

2.3 Calcul du taux de restitution de l'énergie

Le champ de déplacement lagrangien \tilde{u} étant disponible, on peut évaluer l'énergie potentielle écrite sous forme lagrangienne :

$\tilde{W}(\tilde{u}(\alpha), \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}_\alpha^i) = W(u(\alpha), T, \varepsilon_\alpha^i)$, ainsi que sa dérivée.

L'expression du taux de restitution de l'énergie est alors :

$$\begin{aligned} G_\theta = & \int_{\Omega_0} A \tilde{\varepsilon}_\alpha^i \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} \det \nabla f_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_0} A \nabla \tilde{\varepsilon}_\alpha^i (\nabla f_\alpha)^{-1} \theta \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} \det \nabla f_\alpha d\Omega \\ & + \int_{\Omega_0} A \tilde{\varepsilon}_\alpha^i \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} (\det \nabla f_\alpha)_{,\alpha} d\Omega - \int_{\Omega_0} A \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1}_{,\alpha} \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} \det \nabla f_\alpha d\Omega \\ & - \int_{\Omega_0} A (\nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} - \tilde{\varepsilon}_\alpha^i) \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1}_{,\alpha} \det \nabla f_\alpha d\Omega \\ & - \int_{\Omega_0} A (\nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} - \tilde{\varepsilon}_\alpha^i) \cdot \nabla u_\alpha (\nabla f_\alpha)^{-1} (\det \nabla f_\alpha)_{,\alpha} d\Omega \end{aligned}$$

3 Quelques exemples d'utilisation

3.1 Étude paramétrique d'une structure possédant une inclusion à positionnement variable.

Le but est de calculer les champs mécaniques d'une structure contenant une hétérogénéité (matériau de caractéristique différente ou évidemment par exemple, de forme quelconque) avec différentes positions, en n'utilisant qu'un seul maillage correspondant à une position de référence (cf. [Figure 3.1-a]).

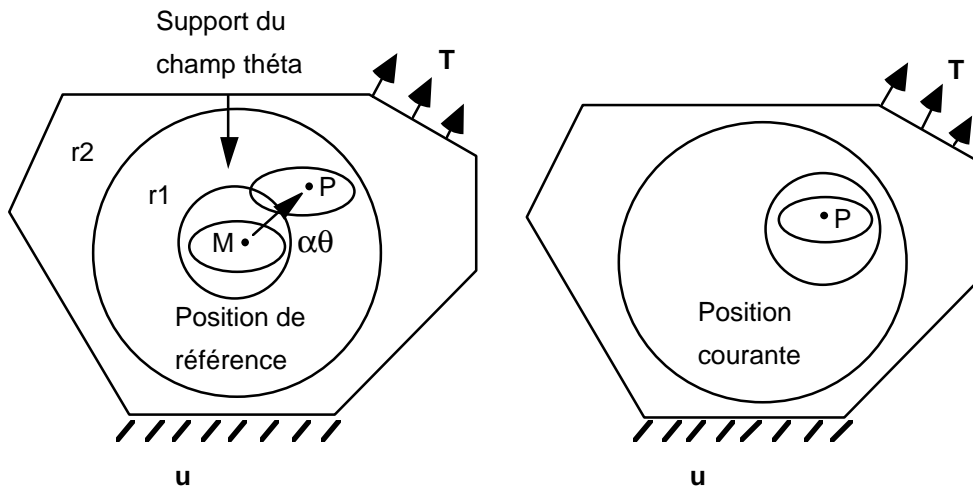


Figure 3.1-a

La première étape consiste à choisir un support du champ θ compatible avec la cinématique de l'inclusion. En pratique, si la position courante de l'inclusion a subi une translation $\alpha\theta$ par rapport à la position de référence, avec $|\theta|=1$, on construira le champ θ de façon à ce que le petit disque de la couronne ($r < r_1$) englobe complètement l'inclusion ($|\theta|=1$ pour tout point de l'inclusion) et que $\alpha < r_2 - r_1$.

Désormais, dans toute l'analyse, les points M attachés au maillage représentent en fait les points matériels P , déterminés par $P = M + \alpha\theta$.

Avec ces considérations, toutes les positions de l'inclusion ne sont pas possibles à analyser et dépendent de la géométrie de la structure.

La deuxième étape consiste à formuler le problème en représentation Lagrangienne en calculant les matrices élémentaires à l'aide de l'opérateur `CALC_MATR_ELEM` [U4.41.01] et l'option `RIGI_MECA_LAGR`, avec comme données le champ θ et le paramètre cinématique α .

Le reste de l'analyse se poursuit de manière classique, mais les champs obtenus aux points du maillage (nœuds ou points de Gauss) représentent l'état mécanique des vrais points matériels de la configuration variable :

$$\tilde{u}(M) = u(M + \alpha\theta), \tilde{\sigma}(M) = \sigma(M + \alpha\theta).$$

3.2 Calcul du taux de restitution de l'énergie d'une structure fissurée dans un champ de déformations initiales

On considère un milieu élastique 2D contenant une fissure rectiligne AO et se propageant (jusqu'au point O') dans un champ de déformations initiales (cf. [Figure 3.2-a]). Le problème consiste à calculer le taux de restitution de l'énergie de la structure pour toutes les positions de la fissure.

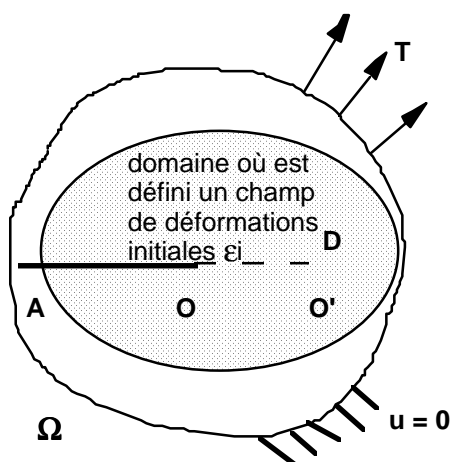


Figure 3.2-a

On commence par définir le champ de déformations initiales dans le domaine D :

```
ch = AFFE_CHAR_MECA_F (  MODELE.....,
                          EPSI_INIT : (  GROUP_MA : D
                                          EPXX : f1
                                          EPYY : f2
                                          EPZZ : f3
                                          EPXY : f4) ..... ) ;
```

Les quantités f_i sont des fonctions de l'espace définies au préalable par `DEFI_FONCTION` [U4.21.02]. Remarquons que même en déformations planes on peut définir une composante `EPZZ`. Les composantes `EPXZ` et `EPYZ` peuvent être définies mais ne serviront à rien dans la suite du traitement puisque l'on se limite au 2D. Il est nécessaire que la fissure ne se propage pas en dehors du domaine pré-déformé.

Plus précisément, il faut pouvoir définir la quantité :

$\tilde{\varepsilon}_i(M) = \varepsilon_i(M + \alpha\theta)$, et donc s'assurer que le point matériel $M + \alpha\theta$ se trouve dans le domaine D . Si ce n'est pas le cas, l'utilisateur prolongera le domaine D avec des valeurs nulles de ε_i .

La deuxième étape consiste à définir le support du champ θ , en veillant à ce que celui-ci soit tel que : $\forall M \in \Omega_\theta, M + \alpha_{\max} \in D$, avec $\alpha_{\max} = OO'$.

Ceci est effectué avec l'opérateur `CALC_THETA` [U4.63.02]. L'ordre des deux premières étapes est indifférent.

On calcule ensuite les matrices de rigidité élémentaires :

```
mel = CALC_MATR_ELEM (OPTION : 'RIGI_MECA_LAGR'  
                      THETA : theta  
                      PROPAGATION : alpha.....
```

et les seconds membres élémentaires :

```
vel = CALC_VECT_ELEM (OPTION : 'CHAR_MECA_LAGR'  
                     THETA : theta  
                     PROPAGATION : alpha.....
```

L'utilisateur s'efforcera d'indiquer le même champ θ et le même paramètre α dans les deux opérateurs sous peine de graves déboires.

Le champ θ doit être compatible avec l'extension maximale de la fissure, c'est-à-dire que $\alpha_{\max} = OO' < R_2 - R_1$, avec R_2 et R_1 le rayon supérieur et inférieur de la couronne support du champ θ (cette précaution doit être prise indépendamment de la présence de déformations initiales).

L'assemblage et la résolution s'effectuent de manière classique.

On peut ensuite, éventuellement calculer les contraintes résiduelles pour chaque élongation de fissure, par exemple en l'absence des forces extérieures T , ceci grâce à l'opérateur `CALC_CHAM_ELEM` [U4.61.01], avec les options '`SIEF_ELGA_LAGR`' (contraintes aux points de Gauss) ou '`SIGM_ELNO_LAGR`' (contraintes aux nœuds).

Le calcul du taux de restitution de l'énergie s'effectue avec l'opérateur `CALC_G_THETA` [U4.63.03] et l'option '`CALC_G_LAGR`'. La même précaution que précédemment doit être prise, à savoir la cohérence du champ θ et du paramètre α (par défaut ce paramètre vaut zéro et on calcule le G classique avec déformations initiales). Il faut également veiller à ne pas oublier le mot-clé '`CHARGE`' afin que le champ de déformations initiales soit pris en compte.

Le comportement étant élastique linéaire, l'histoire de la variation du domaine n'intervient pas. On peut donc très bien en partant de la configuration de référence (fissure de longueur AO), analyser toutes les fissures dont la longueur varie entre $AO-OO'$ et $AO+OO'$. Pour les fissures dont la longueur est inférieure à AO , on considérera un champ θ négatif en fond de fissure, α restant positif (on "raccourcit" la fissure en quelque sorte).

3.3 Etude paramétrique d'une structure 3D fissurée, le paramètre étant la forme de la fissure.

On considère un corps élastique linéaire comportant une fissure tridimensionnelle dont la géométrie du fond est a priori quelconque mais régulière. Le but est de calculer le taux de restitution de l'énergie global et local pour différentes formes de fissure. Considérons le front de fissure de référence Γ_0 et le front courant Γ_α (cf. [Figure 3.3-a]). La transformation liant les deux fronts est construite à l'aide d'un champ θ local défini sur tout le front.

Pour cela, on définit d'abord le front avec l'opérateur `DEFI_FOND_FISS` [U4.63.01], puis le champ θ avec l'opérateur `CALC_THETA` [U4.63.02] et le mot-clé `THETA_3D` [U4.63.02], le module étant défini en chaque nœud de façon à construire Γ_α à partir de Γ_0 .

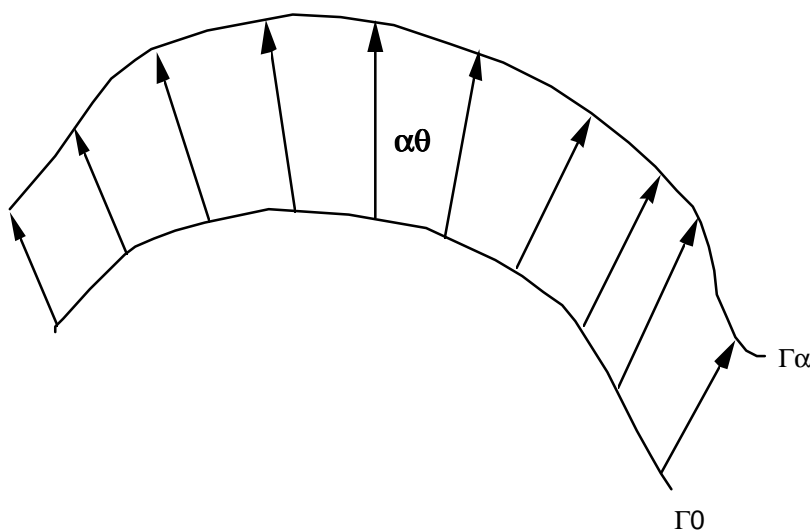


Figure 3.3-a

Le traitement s'opère ensuite comme en 2D, c'est-à-dire par la construction des matrices élémentaires avec l'option '`RIGI_MECA_LAGR`' de l'opérateur `CALC_MATR_ELEM` [U4.41.01]. L'option '`CHAR_MECA_LAGR`' de `CALC_VECT_ELEM` [U4.41.02] (uniquement pour traiter les déformations initiales) n'est pas prévue pour le 3D. La forme des différents fronts est définie par le champ θ , le paramètre α créant une homothétie pour une forme donnée.

Le taux de restitution de l'énergie global pour la configuration Γ_α est calculé avec l'option '`CALC_G_LAGR`' de `CALC_G_THETA` [U4.63.03].

Le taux de restitution de l'énergie local est calculé avec l'option '`CALC_G_LGLO`' de `CALC_G_LOCAL` [U4.63.04]. Une restriction importante du présent développement concerne cette option : les normales entre les différents fronts doivent être conservées (par exemple l'étude paramétrique de fissures circulaires ne pose pas de problèmes à ce sujet). Cette restriction ne concerne pas le calcul du G global.

Page laissée intentionnellement blanche.