Organisme(s) : EDF/MTI/MMN

Manuel de Référence
Fascicule R3.03 : Conditions aux limites et chargements
Document : R3.03.02

Conditions de liaison de corps solide

Résumé

On présente dans cette documentation une manière de modéliser des parties indéformables de structure, en petits déplacements et rotations, grâce au mot clé `LIAISON_SOLIDE` de `AFFE_CHAR_MECA`.

Table des matières

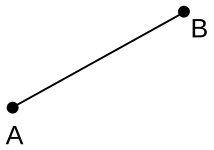
1 Introduction

Le mot clé `LIAISON_SOLIDE` des commandes `AFFE_CHAR_MECA` et (`AFFE_CHAR_MECA_F`) permet de modéliser une partie indéformable d'une structure.

Le principe retenu est d'écrire des relations linéaires entre les ddls de la partie "solide" ; ces relations exprimant le fait que les distances entre les noeuds sont invariables.

Remarque importante :

Les relations exprimant l'indéformabilité d'un solide ne sont en général pas linéaires. La linéarisation du problème suppose que le problème peut être résolu en théorie des "petits déplacements". Pour s'en convaincre, prenons l'exemple d'un segment AB en 2D :



L'indéformabilité de AB s'écrit :

$$\left[\left(x_A + dx_A\right) - \left(x_B + dx_B\right)\right]^2 + \left[\left(y_A + dy_A\right) - \left(y_B + dy_B\right)\right]^2 = \left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(dx_B - dx_A\right)^2 + 2\left(x_B - x_A\right)\left(dx_B - dx_A\right) + \left(dy_B - dy_A\right)^2 + 2\left(y_B - y_A\right)\left(dy_B - dy_A\right) = 0$$

en notant $\begin{cases} x_A, y_A, x_B, y_B & \text{les coordonnées de A et B} \\ dx_A, dy_A, dx_B, dy_B & \text{les déplacements de A et B} \end{cases}$

on voit que l'expression est quadratique en dx_A, dx_B, dy_A et dy_B*. Pour pouvoir la linéariser, il faut éliminer les termes quadratiques et pour cela, on est obligé de supposer que les éléments* dx_A, dx_B, dy_A et dy_B *sont petits en regard de la longueur de AB.*

Cette remarque veut dire que l'on ne peut pas utiliser ce mot clé lorsque la structure se déforme (ou tourne) trop. Dans de telles situations, pour "rigidifier" une partie solide, on est obligé d'utiliser un matériau "dur" (par rapport au reste de la structure).

2 Principe de l'utilisation du mot clé

Le mot clé `LIAISON_SOLIDE` est un mot clé facteur répétable à volonté. A chaque occurrence du mot clé, l'utilisateur définit un "morceau de modèle" qu'il souhaite rigidifier.

De ce "morceau de modèle" défini par les mots clés `GROUP_MA`, `GROUP_NO`, `MAILLE` et `NOEUD`, on déduit la **liste des noeuds** à rigidifier.

Une fois cette liste établie, on écrit les relations linéaires nécessaires pour exprimer que le "morceau rigide" n'a plus que les degrés de liberté d'un solide (3 en 2D ou 6 en 3D).

3 Quels sont les cas de figure traités ?

Selon les ddls portés par les noeuds de la liste des noeuds à rigidifier, on se place dans un des quatre cas de figure suivants. Si on ne se retrouve pas dans l'un de ces cas de figure, le code s'arrête en erreur fatale

Les cas 2DA et 2DB correspondent à des problèmes "plans" ou axisymétriques.
Les cas 3DA et 3DB correspondent à des problèmes 3D.

Cas 2DA :

Tous les noeuds de la liste des noeuds à rigidifier portent les ddls DX, DY (et éventuellement DRZ) mais ils ne portent pas DRX, DRY et DZ et il existe au moins un noeud de la liste des noeuds à rigidifier qui porte DRZ.

Cas 2DB :

Tous les noeuds de la liste des noeuds à rigidifier portent DX, DY mais ils ne portent pas DRX, DRY et DZ.

Cas 3DA :

Tous les noeuds de la liste des noeuds à rigidifier portent DX, DY, DZ (et éventuellement DRX, DRY,DRZ) et il existe un noeud de la liste des noeuds à rigidifier qui porte DRX, DRY, DRZ.

Cas 3DB :

Tous les noeuds de la liste des noeuds à rigidifier portent DX, DY, DZ et il n'existe pas de noeud de la liste des noeuds à rigidifier portant à la fois DRX, DRY, DRZ.

4 Traitement des cas 2DA et 3DA

Dans ces 2 cas de figure, on a pu trouver un noeud de la liste des noeuds à rigidifier qui portait **tous** les degrés de liberté du solide. Soit A ce noeud.

en 2D : DX, DY, DRZ
en 3D : DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ

Soit un noeud M de la liste des noeuds à rigidifier quelconque.

En théorie des petits déplacements, le mouvement d'un corps solide s'exprime par :

$$\mathbf{U}_M = \mathbf{U}_A + \boldsymbol{\theta}_\Lambda \mathbf{AM} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{U}_A & \text{est de déplacement de A} \\ \boldsymbol{\theta} & \text{le vecteur rotation du solide} \end{cases}$$

4.1 Cas 2DA

On écrit les relations linéaires :

$$\forall M \neq A : \begin{cases} DX(M) - DX(A) + y \ DRZ(A) = 0 \\ DY(M) - DY(A) - x \ DRZ(A) = 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \mathbf{AM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$+ \text{ si } M \text{ porte } DRZ \ : \ DRZ(M) - DRZ(A) = 0$$

4.2 Cas 3DA

$$\forall M \neq A : \begin{cases} DX(M) - DX(A) - DRY(A).z + DRZ(A).y = 0 \\ DY(M) - DY(A) - DRZ(A).x + DRX(A).z = 0 \\ DZ(M) - DZ(A) - DRX(A).y + DRY(A).x = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ si } M \text{ porte } DRX, DRY, DRZ \ : \begin{cases} DRX(M) - DRX(A) = 0 \\ DRY(M) - DRY(A) = 0 \\ DRZ(M) - DRZ(A) = 0 \end{cases}$$

5 Traitement du cas 2DB

5.1 Cas général

$\exists A$ et B dans la liste des noeuds à rigidifier / $d(A,B) \neq 0$

- détermination de $\boldsymbol{\theta}$:

  Soit $\mathbf{n} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{k} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ ($\mathbf{k}$ vecteur unitaire selon O_z).

$$\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A - \boldsymbol{\theta}\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{AB} \quad \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A).\mathbf{AB} = 0 \\ (\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A).\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{k} \wedge \mathbf{AB}).\mathbf{n} = 0 \end{cases}$$

- puisque $\|\mathbf{AB}\| \neq 0$, on peut déterminer $\boldsymbol{\theta}$:

$$\Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{AB}).\mathbf{n}}\left(DX(B).n_x - DX(A).n_x + DY(B).n_y - DY(B).n_y\right)$$

$$\text{Soit} \quad \alpha = \frac{1}{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{AB}).\mathbf{n}} \quad ; \quad \mathbf{n}' = \alpha\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n'_x \\ n'_y \end{pmatrix}$$

- équations à écrire :
  - $(\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A).\mathbf{AB} = 0$ (1 équation pour les 2 points A et B)
  - $\forall M \neq (A,B) :$ $\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} DX(M) - DX(A) + y\left(DX(B).n'_x - DX(A).n'_x + DY(B).n'_y - DY(A)n'_y\right) = 0 \\ DY(M) - DY(A) - x\left(DX(B).n'_x - DX(A).n'_x + DY(B).n'_y - DY(A)n'_y\right) = 0 \end{cases}$$

5.2 Cas particuliers

- liste des noeuds à rigidifier = $\{A\} \rightarrow$ il n'y a rien à écrire $\Rightarrow \langle A \rangle$ larme,
- liste des noeuds à rigidifier = $\{A_i\}$ où tous les A_i ont les mêmes coordonnées.

  Soit A_o le premier noeud de la liste des noeuds à rigidifier

$$\forall\ A_i \neq A_o \text{ il faut écrire } \begin{cases} DX(A_i) - DX(A_0) = 0 \\ DY(A_i) - DY(A_0) = 0 \end{cases}$$

Remarque :

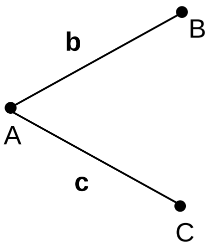
> *θ est indéterminé*

6 Traitement du cas 3DB

6.1 Cas général

$\exists\ A,B,C$ dans la liste des noeuds à rigidifier tels que ABC soit un triangle de surface non nulle

6.1.1 Traitement des points A, B, C et détermination du vecteur rotation θ



$$\mathbf{b}=\mathbf{AB}\ ;\ \mathbf{c}=\mathbf{AC}\ ;\ \mathbf{m}=\mathbf{AM}$$

Soit $\mathbf{n}=\mathbf{b}\Lambda\mathbf{c}$

$$\mathbf{b}'=\mathbf{b}\Lambda\mathbf{n}\ ;\ \mathbf{c}'=\mathbf{c}\Lambda\mathbf{n}$$

$$\forall M\ ,\ \mathbf{U}_M-\mathbf{U}_A=\boldsymbol{\theta}\Lambda\mathbf{M} \qquad \text{éq 6.1-1}$$

- pour les points B et C : $\begin{cases}\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A=\boldsymbol{\theta}\Lambda\mathbf{b}\\ \mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A=\boldsymbol{\theta}\Lambda\mathbf{c}\end{cases}$

$$\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A.\mathbf{n}=\boldsymbol{\theta}.\mathbf{b}' \qquad \text{éq 6.1-2}$$

$$\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A.\mathbf{c}=\boldsymbol{\theta}.\mathbf{n} \qquad \text{éq 6.1-3}$$

$$\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A.\mathbf{b}=0 \qquad \text{éq 6.1-4}$$

$$\mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A.\mathbf{n}=\boldsymbol{\theta}.\mathbf{c}' \qquad \text{éq 6.1-5}$$

$$\mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A.\mathbf{b}=-\boldsymbol{\theta}.\mathbf{n} \qquad \text{éq 6.1-6}$$

$$\mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A.\mathbf{c}=0 \qquad \text{éq 6.1-7}$$

$$\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A.\mathbf{c}+\mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A.\mathbf{b}=0 \qquad \text{éq 6.1-8}$$

Des 6 équations concernant les points B et C,

- 3 sont à écrire : [éq 6.1-4], [éq 6.1-7] et [éq 6.1-8] (elles ne font pas intervenir $\boldsymbol{\theta}$)
- 3 servent à déterminer $\boldsymbol{\theta}$:

$$\left\{\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}.\mathbf{b}'&=\left(\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A\right).\mathbf{n}\\ \boldsymbol{\theta}.\mathbf{c}'&=\left(\mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A\right).\mathbf{n}\\ \boldsymbol{\theta}.\mathbf{n}'&=\left(\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A\right).\mathbf{c}\end{aligned}\right\} \qquad \text{éq 6.1-9}$$

6.1.2 Relations concernant un point M ≠ (A, B, C)

Soit $\begin{cases} \mathbf{U}_{ABCM} \text{ le vecteur } : \left(U_A, V_A, W_A, U_B, V_B, \ldots\ldots, W_C, U_M, V_M, W_M\right) \in \mathbb{R}^{12} \\ \boldsymbol{\theta} \text{ le vecteur } \left(\theta_x, \theta_y, \theta_z\right) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

L'équation [éq 6.1-9] peut s'écrire : $\mathbf{M}_1.\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}_2\mathbf{U}_{ABCM}$

avec $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$ M_1 est inversible car ABC est de surface non nulle

et $\mathbf{M}_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} -n_x & -n_y & -n_z & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_x & -n_y & -n_z & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2.\mathbf{U}_{ABCM} \qquad \textbf{éq 6.1-10}$$

L'équation [éq 6.1-1] $\mathbf{U}_M - \mathbf{U}_A - \boldsymbol{\theta} \Lambda \mathbf{M} = 0$ peut s'écrire :

$$\mathbf{M}_4.\mathbf{U}_{ABCM} + \mathbf{M}_3.\boldsymbol{\theta} = 0 \qquad \textbf{éq 6.1-11}$$

avec $\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -M_z & M_y \\ M_z & 0 & -M_x \\ -M_y & M_x & 0 \end{bmatrix}$ où $\mathbf{M} = \left(M_x, M_y, M_z\right)$

et $\mathbf{M}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c|c|ccc} -1 & & & & & 1 & & \\ & -1 & & 0 & 0 & & 1 & \\ & & -1 & & & 0 & & 1 \end{array}\right]$

$\mathbf{M}_4.\mathbf{U}_{ABCM} + \mathbf{M}_3\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2.\mathbf{U}_{ABCM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}_5.\mathbf{U}_{ABCM} = 0$

$\forall M \neq \left(A, B, C\right)$, il faut écrire les 3 équations correspondant aux 3 lignes de la matrice $\mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2$

6.1.3 Résumé des équation à écrire

- calcul de $\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{n},\mathbf{b}',\mathbf{c}'$
- calcul de $\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2$
- pour les points B et C : $\begin{cases}\mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A.\mathbf{b}=0\\ \mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A.\mathbf{c}=0\\ \mathbf{U}_B-\mathbf{U}_A.\mathbf{c}+\mathbf{U}_C-\mathbf{U}_A.\mathbf{b}=0\end{cases}$
- $\forall M\neq(A,B,C)$:
  - calcul de $\mathbf{M}_5=\mathbf{M}_4+\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2$
  - écriture des 3 équations correspondant à M

6.2 Cas particuliers

- liste des noeuds à rigidifier = $\{A\}\rightarrow$ il n'y a rien à écrire $\Rightarrow\langle A\rangle$ larme,
- liste des noeuds à rigidifier = $\{A_i\}$ où tous les A_i ont les mêmes coordonnées.

  Soit A_o le premier point de la liste des noeuds à rigidifier

  $$\forall\ A_i\neq A_o\quad\begin{cases}DX(A_i)-DX(A_0)=0\\ DY(A_i)-DY(A_0)=0\\ DZ(A_i)-DZ(A_0)=0\end{cases}$$

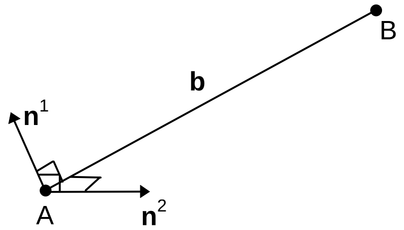
  θ est indéterminé, ce qui ne pose pas de problème.

- liste des noeuds à rigidifier = $\{A_i\}$ où tous les A_i sont alignés (droite Δ).

  Le solide $\{A_i\}$ n'a plus alors que 5 mouvements de corps rigide possibles.
  Il lui manque la rotation autour de Δ .

  Soit :

  - deux points A et B / $\|\mathbf{AB}\|\neq 0$
  - $\mathbf{b}=\mathbf{AB}$
  - $\mathbf{n}_1$ un vecteur non nul orthogonal à $\mathbf{b}$ (donc à Δ)
  - $\mathbf{n}_2=\mathbf{b}\Lambda\mathbf{n}_1$



- point B : $\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A = \boldsymbol{\theta} \Lambda \mathbf{b}$

$$\left(\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A\right).\mathbf{b} = 0 \qquad \textbf{éq 6.2-1}$$

$$\left(\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A\right).\mathbf{n}_1 = \left(\mathbf{n}_1 \Lambda \boldsymbol{\theta}\right).\mathbf{b} \qquad \textbf{éq 6.2-2}$$

$$\left(\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A\right).\mathbf{n}_2 = \left(\mathbf{n}_2 \Lambda \boldsymbol{\theta}\right).\mathbf{b} \qquad \textbf{éq 6.2-3}$$

- l'équation [éq 6.2-1] est à écrire
- les équations [éq 6.2-2] et [éq 6.2-3] servent à calculer $\boldsymbol{\theta}$

La composante de $\boldsymbol{\theta}$ sur $\mathbf{b}$ est indéterminée, on n'en tient pas compte :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_1 \mathbf{n}_1 + \theta_2 \mathbf{n}_2$$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{n}_1 \Lambda \boldsymbol{\theta}\right) = \theta_2 \mathbf{n}_1 \Lambda \mathbf{n}_2 \\ \left(\mathbf{n}_2 \Lambda \boldsymbol{\theta}\right) = \theta_1 \mathbf{n}_2 \Lambda \mathbf{n}_1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad k = \mathbf{n}_1 \Lambda \mathbf{n}_2 . \mathbf{b} \qquad k \neq 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} k\theta_1 = -\left(\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A\right).\mathbf{n}_2 \\ k\theta_2 = -\left(\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A\right).\mathbf{n}_1 \end{cases}$$

$$k\boldsymbol{\theta} = k\theta_1 \mathbf{n}_1 + k\theta_2 \mathbf{n}_2$$

Soit $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$; $\mathbf{U}_{ABM} = \left(U_A, V_A, W_A, U_B, V_B, W_B, U_M, V_M, W_M\right) \in \mathrm{R}^9$

$k\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}_1 \mathbf{U}_{ABM}$ avec : $\mathbf{M}_1 = \left[\mathbf{M}_2, -\mathbf{M}_2, 0\right]$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta a - b\alpha & \gamma a - c\alpha \\ b\alpha - a\beta & 0 & \gamma b - c\beta \\ c\alpha - \gamma a & c\beta - \gamma b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall M \neq (A,B) \qquad \mathbf{U}_M - \mathbf{U}_A - \boldsymbol{\theta} \Lambda \mathbf{m} = 0 \qquad \mathbf{m} = \mathbf{AM} = \left(M_x, M_y, M_z\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_4 \ \mathbf{U}_{ABM} + \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\theta} = 0$$

avec $\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -M_z & M_y \\ M_z & 0 & -M_x \\ -M_y & M_x & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{M}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & & & & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_5 \ \mathbf{U}_{ABM} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_4 + \frac{1}{k} \mathbf{M}_3 . \mathbf{M}_1$$

pour chaque point M, il faut écrire les 3 équations correspondant aux 3 lignes de la matrice $\mathbf{M}_5$.

- résumé des équations à écrire :
  - calcul de $\mathbf{b}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, k$
  - calcul de $\mathbf{M}_1$
  - pour le point B : $\mathbf{U}_B - \mathbf{U}_A . \mathbf{b} = 0$
  - $\forall M \neq (A, B)$
    - calcul de $\mathbf{M}_5 = \mathbf{M}_4 + \frac{1}{k} \mathbf{M}_3 . \mathbf{M}_1$
    - écriture des 3 équations correspondant à $\mathbf{M}_5$

7 Comment détecter les cas particuliers ?

Dans les paragraphes [§6] et [§7], nous avons vu qu'il pouvait arriver des cas particuliers lorsque certains noeuds étaient géométriquement confondus ou alignés sur une même droite.

Les critères numériques retenus pour détecter ces cas particuliers sont :

- 2 points A et B sont confondus si :
  $\|\mathbf{AB}\| \leq 10^{-6} . DMIN$
- 3 points A, B, C sont alignés si :
  $\left(\|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}\|\right)^{1/2} \leq 10^{-6} . DMIN$

où : $DMIN$ note la longueur de la plus petite arrête des mailles du maillage.

Page laissée intentionnellement blanche.