
Titre : *Relation de comportement élasto-viscoplastique du LMARC*
Auteur(s) : **P. GEYER**

Date : 11/07/96
Clé : R5.03.10-A Page : 1/18

Organisme(s) : EDF/RNE/EMA

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.10

Relation de comportement élasto-viscoplastique du LMARC pour les tubes de gaine du crayon combustible

Résumé :

Un modèle a été développé au LMA-RC de l'université de Besançon (Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaleat) pour décrire le comportement élasto-viscoplastique des tubes de gaine du crayon combustible. Il permet la prise en compte de la forte anisotropie mécanique des tubes en Zircaloy 4.

Il est implanté dans le *Code_Aster* sous le nom de LMARC ; les équations en vitesse sont intégrées numériquement par un schéma implicite d'Euler dans l'environnement PLASTI.

Table des matières

1 Introduction	3
2 Formulation du modèle	3
2.1 Cadre théorique	3
2.2 Description des tenseurs d'anisotropie	5
2.3 Equations du modèle	6
2.4 Relation LMARC	7
3 Implantation du modèle dans le <i>Code_Aster</i>	7
3.1 Algorithme de résolution du problème quasi-statique	7
3.2 Environnement PLASTI	9
3.3 Discrétisation des équations du modèle	10
3.4 Opérateur de comportement tangent	11
4 Bibliographie	12
Annexe 1 Expression du Jacobien des équations élastoviscoplastiques intégrées	13
Annexe 2 Evaluation de l'opérateur tangent cohérent \underline{M}^C	16

1 Introduction

Les tubes de gaine en Zircaloy du crayon combustible des centrales REP présentent un comportement mécanique anisotrope et fortement visqueux. Un modèle phénoménologique a été développé au LMA-RC de Besançon [bib1] pour obtenir une description fine du comportement du matériau en vue d'évaluer des états de contraintes réalistes en situation d'Interaction Pastille-Gaine (IPG).

Etant donnée la texture cristallographique des tubes, on fait l'hypothèse d'orthotropie. Le modèle a été confronté aux résultats expérimentaux sur des tubes de gaine en Zircaloy 4 dans différents états métallurgiques et soumis à des chargements uni et multiaxés [bib1], [bib2], [bib3]. Le modèle est destiné en premier lieu à être utilisé dans le cadre du couplage entre le *Code_Aster* et le code du crayon combustible CYRANO3. Il pourrait cependant être utilisé pour d'autres matériaux métalliques présentant un comportement mécanique viscoplastique orthotrope.

Le modèle est introduit dans le *Code_Aster* en 3D, déformations planes (D_PLAN), et axisymétrie (AXIS) sous le nom de LMARC. Il s'agit d'un modèle viscoplastique unifié à variables internes : la déformation viscoplastique cumulée et trois variables d'écrouissage cinématique.

La prise en compte de l'anisotropie s'effectue par quatre tenseurs d'ordre 4 affectant les grandeurs mécaniques équivalentes mais aussi les lois d'évolution des variables internes.

On présente dans cette note les équations constitutives du modèle et son implantation dans le *Code_Aster*.

2 Formulation du modèle

2.1 Cadre théorique

Le modèle de comportement développé au LMA-RC s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'un modèle élastoviscoplastique unifié, c'est-à-dire que les déformations inélastiques dépendantes ou indépendantes du temps sont regroupées en un seul terme. En considérant l'hypothèse des petites perturbations, on scinde le tenseur des déformations en une partie élastique, une partie thermique et une partie viscoplastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$$

La partie élastique est donnée par la loi de Hooke, l'anisotropie de comportement pouvant être négligée dans ce cas. La notion de surface de charge utilisée en plasticité est remplacée par une famille de surfaces équipotentiellles : ce sont les surfaces de l'espace des contraintes en chaque point desquelles le module de la vitesse de déformation est le même (la dissipation est la même) [bib4]. Etant donnée la texture des tubes de gaine du crayon combustible, on peut faire l'hypothèse d'orthotropie du comportement mécanique et on utilise une formulation du type Hill pour décrire les surfaces équipotentiellles :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\tilde{\sigma}_{ij} - X_{ij} \right) M_{ijkl} \left(\tilde{\sigma}_{kl} - X_{kl} \right)} - R_0 = |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}| - R_0$$

où

$\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \text{Id}$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

X une variable d'écrouissage cinématique (tensorielle).

M tenseur d'ordre 4 pour la description de l'anisotropie
 (avec la formulation de Hill, seuls 6 coefficients sont indépendants).

R_0 limite d'élasticité initiale.

La direction d'évolution du tenseur de déformation viscoplastique est donnée par la règle de normalité aux surfaces équipotentielles :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\nu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

où ν représente la déformation viscoplastique cumulée, obtenue à partir de l'équation d'état dont la formulation a été établie expérimentalement au LMA-RC [bib1] :

$$\dot{\nu} = \dot{\epsilon}_0 \left\{ \sinh \left(\frac{\langle f \rangle}{K} \right) \right\}^n$$

avec $\langle x \rangle = 0$ si $x \leq 0$ et $\langle x \rangle = x$ si $x \geq 0$

Pour définir entièrement le modèle, il reste à donner les équations d'évolution des variables d'écrouissage représentant l'état de contrainte interne du matériau qui s'oppose à la déformation (contraintes induites par les interactions à différentes échelles entre les dislocations mobiles et la sous-structure). L'écrouissage de nature cinématique est décrit dans le modèle par l'intermédiaire de trois variables non linéaires.

$$\begin{cases} \dot{X}_{ij} = p \left[\frac{2}{3} Y(\nu) N_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{vp} - Q_{ijkl} (X_{kl} - X_{kl}^{(1)}) \dot{\nu} \right] - \left\{ r_m \sinh \left[\left(\frac{|X|}{X_0} \right)^m \right] \right\} N_{ijkl} R_{klmn} \frac{X_{mn}}{|X|} \\ \dot{X}_{ij}^{(1)} = p_1 \left[\frac{2}{3} Y(\nu) N_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{vp} - Q_{ijkl} (X_{kl}^{(1)} - X_{kl}^{(2)}) \dot{\nu} \right] \\ \dot{X}_{ij}^{(2)} = p_2 \left[\frac{2}{3} Y(\nu) N_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{vp} - Q_{ijkl} X_{kl}^{(2)} \dot{\nu} \right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } |X| &= \sqrt{\frac{3}{2} X_{ij} R_{ijkl} X_{kl}} \\ X_{ij}(0) &= X_{ij}^{(1)}(0) = X_{ij}^{(2)}(0) = 0 \\ Y(\nu) &= Y_\infty + (Y_0 - Y_\infty) e^{-b\nu} \end{aligned}$$

$Y(\nu)$ permet de décrire le durcissement ou l'adoucissement sous chargement cyclique.

Ces équations comportent pour chacune des variables d'écrouissage cinématique un premier terme d'écrouissage cinématique linéaire par rapport à la déformation et un deuxième terme de restauration dynamique. Enfin, la première équation comporte un troisième terme de restauration statique pour prendre en compte les effets dépendants du temps.

Pour la description de l'anisotropie, on distingue une anisotropie intrinsèque à la structure du matériau (forme des équipotentielles) et une anisotropie supplémentaire induite par l'écoulement viscoplastique. L'anisotropie est introduite dans le modèle du LMA-RC par le biais de tenseurs d'ordre 4 dans les relations entre les différentes variables tensorielles. L'anisotropie induite par l'écoulement viscoplastique est traduite dans les lois d'évolution des variables d'écrouissage. Les termes de ces équations sont reliés à des mécanismes de déformation différents dans le matériau : écrouissage cinématique linéaire, restaurations dynamiques et statiques. La prise en compte de l'anisotropie induite par la déformation viscoplastique est donc faite par l'introduction de trois tenseurs distincts N , Q et R .

Nota Bene :

Le modèle proposé par le LMA-RC [bib2] est sans seuil. La limite d'élasticité initiale R_0 a été rajoutée lors de l'intégration dans le Code_Aster pour élargir les possibilités du modèle. Il suffit de considérer une valeur nulle pour travailler avec un modèle sans seuil.

2.2 Description des tenseurs d'anisotropie

Pour simplifier les écritures, on utilise par la suite une notation matricielle, image de la notation tensorielle intrinsèque dans un repère orthonormé. De plus, on utilise des notations d'un ordre inférieur (tenseur 2 = vecteur, tenseur 4 = matrice), de façon à s'identifier à ce qui est dans le code. Du fait de la symétrie des tenseurs d'ordre 2 manipulés, on les réduit à des vecteurs (1 x 6) en multipliant les composantes de cisaillement par racine de 2.

$$\sigma^t = [\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sqrt{2} \sigma_{12}, \sigma_5 = \sqrt{2} \sigma_{13}, \sigma_6 = \sqrt{2} \sigma_{23}]$$

$$\varepsilon^t = [\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \varepsilon_5 = \sqrt{2} \varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = \sqrt{2} \varepsilon_{23}]$$

Selon les coordonnées cylindriques liées au tube, on considère par la suite $11 = rr$, $22 = \theta\theta$, $33 = zz$.

Comme nous l'avons mentionné dans le premier chapitre, étant donné la texture cristallographique des tubes, on peut faire l'hypothèse d'orthotropie et confondre les axes d'anisotropie avec les axes matériels. Les conditions de symétrie qui en résultent conduisent à neuf composantes indépendantes pour chacun des tenseurs d'anisotropie. L'incompressibilité de l'écoulement viscoplastique se traduit par trois relations supplémentaires et le nombre de composantes indépendantes est réduit à six [bib1].

Avec la notation matricielle, chacun des quatre tenseurs prend une forme identique à celle de \underline{M} soit :

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M_{11} + M_{12} + M_{13} = 0 \\ M_{12} + M_{22} + M_{23} = 0 \\ M_{13} + M_{23} + M_{33} = 0 \end{cases}$$

Pour retrouver la version isotrope du modèle, il faut prendre les valeurs suivantes pour les quatre tenseurs :

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = \frac{2}{3}, M_{12} = M_{13} = M_{23} = -\frac{1}{3} \text{ et } M_{44} = M_{55} = M_{66} = 1.$$

Expérimentalement, on ne peut pas atteindre dans notre étude les composantes 44, 55 et 66 qui correspondent à des essais de cisaillement. Dans le cadre du travail de thèse réalisé au LMA-RC, seule la composante 66 a été déterminée par des essais de traction-torsion, les deux dernières ($r\theta$ et rz) ne pouvant être atteintes à cause de la faible épaisseur des tubes.

Etant donné les considérations précédentes, seules les composantes 11, 22, 33 et 66 sont mises en lecture du fichier de commande, les autres composantes étant soit déterminées à partir des équations dues à l'incompressibilité plastique, soit prises égales aux valeurs isotropes pour les composantes de cisaillement.

Nota Bene :

Les notations matricielles utilisées dans les références [bib 1, 2 et 3] sont celles de Voight. Seuls les termes de cisaillement sont influencés ; la conversion pour travailler avec les notations du Code_Aster est obtenue à l'aide des formules suivantes ($i = 4,5,6$) :

$$M_{ii} = \frac{1}{2} M_{ii}^{Voight}, Q_{ii} = Q_{ii}^{Voight}, N_{ii} = 2 N_{ii}^{Voight} \text{ et } R_{ii} = \frac{1}{2} R_{ii}^{Voight}$$

2.3 Equations du modèle

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{vp}$$

$$\sigma = A(T)\varepsilon^e$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - X)^t \underline{M} (\tilde{\sigma} - X) - R_0} = |\tilde{\sigma} - X| - R_0$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\nu} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \dot{\nu} \frac{\underline{M} (\tilde{\sigma} - X)}{|\tilde{\sigma} - X|}$$

$$\text{si } f \leq 0,$$

$$\dot{\nu} = 0, \dot{X} = \dot{X}^{(1)} = \dot{X}^{(2)} = 0$$

$$\text{si } f > 0,$$

$$\dot{\nu} = \dot{\varepsilon}_0 \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}^{vp})^t \underline{M}^{-1} \dot{\varepsilon}^{vp}} = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \sinh \left(\frac{f}{K} \right) \right\}^n$$

$$\dot{X} = p \left[\frac{2}{3} Y(\nu) \underline{N} \dot{\varepsilon}^{vp} - \underline{Q} (X - X^{(1)}) \dot{\nu} \right] - \left\{ r_m \sinh \left[\left(\frac{|X|}{X_0} \right)^m \right] \right\} \underline{N} \underline{R} \frac{X}{|X|}$$

$$\dot{X}^{(1)} = p_1 \left[\frac{2}{3} Y(\nu) \underline{N} \dot{\varepsilon}^{vp} - \underline{Q} (X^{(1)} - X^{(2)}) \dot{\nu} \right] \quad \dot{X}^{(2)} = p_2 \left[\frac{2}{3} Y(\nu) \underline{N} \dot{\varepsilon}^{vp} - \underline{Q} X^{(2)} \dot{\nu} \right]$$

$$\text{avec } Y(\nu) = Y_\infty + (Y_0 - Y_\infty) e^{-b\nu} \quad |X| = \sqrt{\frac{3}{2} X^t \underline{R} X}$$

Nota Bene :

Dans le Code_Aster, l'ensemble des paramètres du modèle

$R_0, \dot{\epsilon}_0, K, n, Y_\infty, b, X_0, r_m, m, p, p_1, p_2, M_{ii}, N_{ii}, Q_{ii}, R_{ii} (i = 1, 2, 3, 6)$ peuvent être fonction de la température.

2.4 Relation LMARC

Le modèle est accessible dans le Code_Aster en 3D, déformations planes (D_PLAN), et axisymétrie (AXIS) à partir du mot-clé COMP_INCR de la commande STAT_NON_LINE. L'ensemble des paramètres du modèle est fourni sous le mot-clé facteur LMARC ou LMARC_FO de la commande DEFI_MATERIAU [U4.23.01].

```

/  LMARC : (
      R_0      :  R0      DE_O      :  ε0
      N        :  n       K         :  K
      Y_0      :  yo      Y_I       :  y∞
      B        :  b       A_0       :  X0
      RM       :  rm
      M        :  m
      P        :  p       P1        :  p1
      P2       :  p2
      M11      :  M11     N11       :  N11
      M22      :  M22     N22       :  N22
      M33      :  M33     N33       :  N33
      M66      :  M66     N66       :  N66
      Q11      :  Q11     R11       :  R11
      Q22      :  Q22     R22       :  R22
      Q33      :  Q33     R33       :  R33
      Q66      :  Q66     R66       :  R66 )

```

3 Implantation du modèle dans le Code_Aster**3.1 Algorithme de résolution du problème quasi-statique**

On cherche à vérifier l'équilibre de la structure à chaque instant. Sous forme incrémentale, il s'agit d'un problème non linéaire dont la formulation variationnelle dans le cas des petites déformations peut se mettre sous la forme :

Trouver Δu tel que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma(\epsilon(u + \Delta u), t) \epsilon(v) d\Omega = L(t) \\ Bu = u^d(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall v \text{ cinématiquement} \\ \text{admissible et } \forall t \end{array}$$

où u désigne le champ de déplacement, $Bu = u^d(t)$ correspond aux conditions aux limites en déplacement et $L(t)$ est le chargement à l'instant t .

On est donc conduit à résoudre, pour chaque incrément de temps Δt :

$$F_{t+\Delta t}(u_t + \Delta u) = 0 \quad \text{en partant d'un état à l'équilibre } F_0 = 0$$

Δu étant l'incrément de la solution u sur Δt , u_t étant connu

Le schéma général adopté par *Aster* pour résoudre ce système global discrétisé est une méthode de Newton [bib5] qui s'écrit, k étant l'indice d'itération :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \Delta u_k} d(\Delta u_k) = -F(\Delta u_k) \\ \Delta u_{k+1} = \Delta u_k + d(\Delta u_k) \end{cases}$$

Ce schéma nécessite, à partir de l'estimation des déplacements à l'itération k , de calculer en chaque point de Gauss :

$\sigma_{t+\Delta t}$ qui vérifie la loi de comportement

$$M_{t+\Delta t}^C = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{t+\Delta t} \quad \text{l'opérateur de comportement tangent}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \Delta u} = K = \sum_e K_e \quad \text{avec} \quad K_e = \int_{\Omega} B^T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right) B d\Omega \right)$$

3.2 Environnement PLASTI

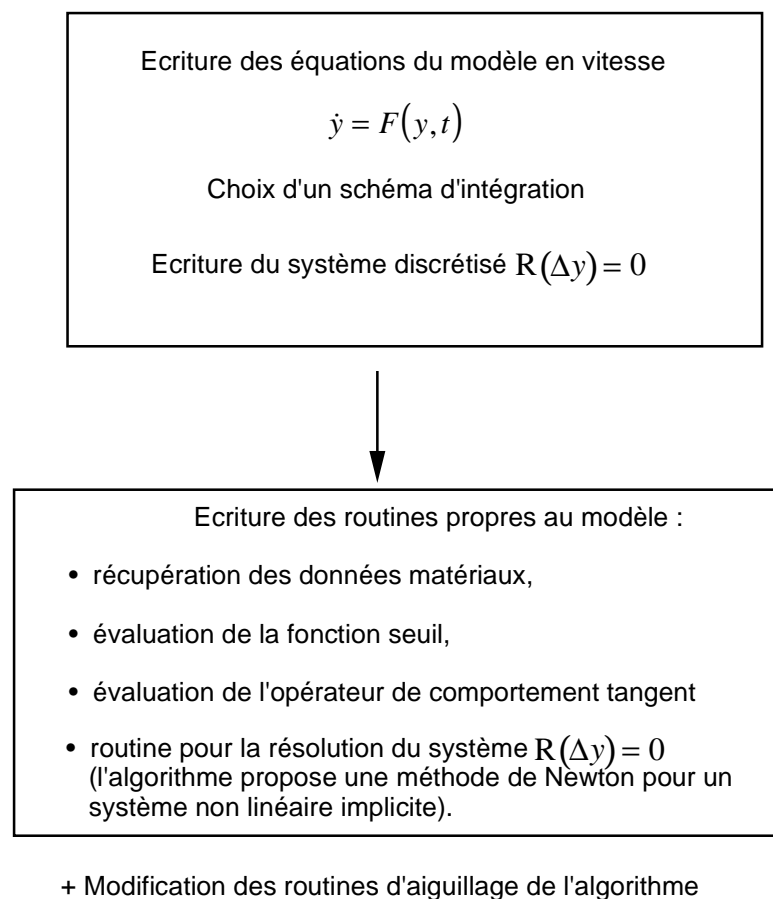
Il est donc nécessaire, à chaque itération globale et en chaque point de Gauss, d'intégrer les équations du modèle décrites en [§2.3] pour le calcul de $\sigma_{t+\Delta t}$ et de calculer l'opérateur de comportement tangent.

Un environnement a été créé dans le *Code_Aster* dans le but de paramétrer l'implantation de modèles élastoviscoplastiques présentant une fonction seuil (domaine d'élasticité).

Cet algorithme :

- gère les choix d'intégration élastique ou (visco) plastique,
- propose différentes routines pour aider à la résolution du système non linéaire (local) formé par les équations du modèle,
- met à jour les variables en fin d'incrément,
- appelle les routines utilisateur pour le calcul de l'opérateur de comportement tangent.

La démarche pour implanter un nouveau modèle peut se schématiser de la manière suivante :



3.3 Discrétisation des équations du modèle

Si l'incrément de temps correspond à un chargement élastoviscoplastique, on utilise un schéma implicite d'Euler que l'on résout par une méthode de Newton.

Sous forme discrétisée, le système d'équations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (g) \Delta \sigma - \underline{H}_{t+\Delta t} \left(\Delta \varepsilon - \Delta v \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \right) = 0 \\ (l) \Delta X - p \left(\frac{2}{3} Y(v) \underline{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) - \underline{Q} (X - X_1) \right)_{t+\Delta t} \Delta v \\ \quad + \left\{ r_m \sinh \left[\left(\frac{|X|}{X_0} \right)^m \right] \right\}_{t+\Delta t} \underline{N} \underline{R} \frac{X}{|X|} \Delta t = 0 \\ (i) \Delta X_1 - p_1 \left(\frac{2}{3} Y(v) \underline{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) - \underline{Q} (X_1 - X_2) \right)_{t+\Delta t} \Delta v = 0 \\ (j) \Delta X_2 - p_2 \left(\frac{2}{3} Y(v) \underline{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) - \underline{Q} X_2 \right)_{t+\Delta t} \Delta v = 0 \\ (k) \Delta v - \dot{\varepsilon}_0 \left\{ \sinh \left(\frac{f}{K} \right) \right\}^n \Delta t = 0 \end{array} \right.$$

avec $Y(v) = Y_\infty + (Y_0 - Y_\infty) e^{-bv}$
 $|X| = \sqrt{\frac{3}{2} X^t \underline{R} X}$

De manière plus contractée, on pose :

$$F^l(\Delta y) = 0 = \begin{bmatrix} g(\Delta y) \\ l(\Delta y) \\ i(\Delta y) \\ j(\Delta y) \\ k(\Delta y) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta X \\ \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

On résout ce système par la méthode de Newton proposée dans l'environnement PLASTI, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F^l}{\partial \Delta y_k} d(\Delta y_k) = -F^l(\Delta y_k) \\ \Delta y_{k+1} = \Delta y_k + d(\Delta y_k) \end{array} \right.$$

En itérant en k jusqu'à convergence.

La résolution nécessite le calcul du Jacobien du système local F^l . On donne son expression générale ci-après ; les calculs analytiques bloc par bloc sont donnés en annexe (cf. [§An1]).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \\ \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial i} & \frac{\partial \Delta v}{\partial i} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial j} & \frac{\partial \Delta v}{\partial j} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta X}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta v}{\partial k} \end{bmatrix}$$

3.4 Opérateur de comportement tangent

Le système formé des équations du modèle écrit sous forme discrétisée ($F^l(\Delta y) = 0$) est vérifié en fin d'incrément. Pour une petite variation de F^l , en considérant cette fois ε comme variable et non comme paramètre, le système reste à l'équilibre et on vérifie $dF^l = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial F^l}{\partial \Delta \sigma} \delta \Delta \sigma + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta \varepsilon} \delta \Delta \varepsilon + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta X} \delta \Delta X + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta X_1} \delta \Delta X_1 + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta X_2} \delta \Delta X_2 + \frac{\partial F^l}{\partial \Delta v} \delta \Delta v = 0$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial F^l}{\partial \Delta y} \delta(\Delta y) = X, \text{ avec } \Delta y = \begin{bmatrix} \Delta \sigma \\ \Delta X \\ \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta v \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} H \delta \Delta \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par substitution et élimination successives (cf [§An2]), on en déduit que :

$$\underline{K} \delta \sigma = \underline{H} \delta \varepsilon$$

d'où l'opérateur tangent recherché :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon} \Delta \sigma \right)_{t+\Delta t} = \underline{M}^C = \underline{K}^{-1} \underline{H}$$

Les équations précédentes montrent que l'on est conduit à réutiliser la même matrice jacobienne J que précédemment pour évaluer l'opérateur tangent. Cet opérateur est dit cohérent (sous-entendu avec le système d'intégration) et encore noté \underline{M}^C .

Dans le cas des modèles élastoplastiques, on peut aussi calculer l'opérateur tangent dit en vitesse (\underline{M}_V) à partir des équations du modèle en vitesse [bib7].

4 Bibliographie

- [1] ROBINET P. : Etude expérimentale et modélisation du comportement viscoplastique anisotrope du Zircaloy 4 dans deux états métallurgiques, Thèse de l'Université de Franche Comté, 1995
- [2] DELOBELLE P., ROBINET P., : Etude du comportement et de la modélisation viscoplastique du Zircaloy 4 recristallisé sous chargements monotones et cycliques uni et multiaxés, J. Phys. III, 4, 1994, 1347
- [3] LE PICHON I., GEYER P., : Modélisation du comportement viscoplastique anisotrope des tubes de gainage du crayon combustible, note EDF-DER, HT-B2/95/018/A, 1995
- [4] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., : Mécanique des matériaux solides, Ed. Dunod, 1985
- [5] MIALON P., LEFEBVRE J.P., Algorithme non linéaire quasi-statique, note EDF-DER, HI-75/7832 [R5.03.01]
- [6] SHOENBERGER P., Introduire une nouvelle relation de comportement non linéaire, [D5.05.01], à paraître
- [7] SHOENBERGER P., Intégration de la relation de comportement de Chaboche [R5.03.04], à paraître

Annexe 1 Expression du Jacobien des équations élastoviscoplastiques intégrées

Soit donc à évaluer les termes de l'hypermatrice jacobienne J à l'instant $t + \Delta t$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \\ \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} & \frac{\partial l}{\partial l} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial i} & \frac{\partial \Delta v}{\partial i} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial j} & \frac{\partial \Delta v}{\partial j} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta X}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial k^T} & \frac{\partial \Delta v}{\partial k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \Delta \sigma} &= I + \left(\underline{H} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right)_{t+\Delta t} \Delta v & \frac{\partial g}{\partial \Delta X} &= \left(\underline{H} \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \sigma} \right)_{t+\Delta v} \Delta v \\ \frac{\partial g}{\partial \Delta X_1} &= \frac{\partial g}{\partial \Delta X_2} = 0 & \frac{\partial g}{\partial \Delta v} &= \underline{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \Delta \sigma} &= - \left(\frac{2}{3} p Y(v) \underline{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right)_{t+\Delta t} \Delta v \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta X} &= I - \frac{2}{3} \left(p Y(v) \underline{N} \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \Delta v + (p \underline{Q})_{t+\Delta t} \Delta v + \left\{ r_m \sinh \left[\left(\frac{|X|}{X_0} \right)^m \right] \right\}_{t+\Delta t} \left(\frac{\underline{N} \underline{R}}{|X|} \right)_{t+\Delta t} \Delta t \\ &\quad + \left\{ - r_m \sinh \left[\left(\frac{|X|}{X_0} \right)^m \right] \frac{1}{|X|} + r_m \frac{m}{X_0^m} |X|^{m-1} \cosh \left[\left(\frac{|X|}{X_0} \right)^m \right] \right\}_{t+\Delta t} \frac{3}{2} \left(\frac{(\underline{R} \underline{X})^T}{|X|^2} \underline{N} \underline{R} \underline{X} \right)_{t+\Delta t} \Delta t \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta X_1} &= - (p \underline{Q})_{t+\Delta t} \Delta v & \frac{\partial l}{\partial \Delta X_2} &= 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta v} &= - \frac{2}{3} \left(p \underline{N} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \left(Y_{t+\Delta t}(v) + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_{t+\Delta t} \Delta v \right) + p \underline{Q} (X - X_1)_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \Delta \sigma} = -\frac{2}{3} \left(p_1 Y(v) \underline{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right)_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial i}{\partial \Delta X} = -\frac{2}{3} \left(p_1 Y(v) \underline{N} \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial i}{\partial \Delta X_1} = I + (p_1 \underline{Q})_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial i}{\partial \Delta X_2} = -(p_1 \underline{Q})_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial i}{\partial \Delta v} = -\frac{2}{3} \left(p_1 \underline{N} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \left(Y_{t+\Delta t}(v) + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_{t+\Delta t} \Delta v \right) + p_1 \underline{Q} (X_1 - X_2)_{t+\Delta t}$$

$$\frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} = -\frac{2}{3} \left(p_2 Y(v) \underline{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right)_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial j}{\partial \Delta X} = -\frac{2}{3} \left(p_2 Y(v) \underline{N} \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial j}{\partial \Delta X_1} = 0$$

$$\frac{\partial j}{\partial \Delta X_2} = I + (p_2 \underline{Q})_{t+\Delta t} \Delta v$$

$$\frac{\partial j}{\partial \Delta v} = -\frac{2}{3} \left(p_2 \underline{N} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \left(Y_{t+\Delta t}(v) + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_{t+\Delta t} \Delta v \right) + (p_2 \underline{Q} X_2)_{t+\Delta t}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Delta \sigma} = \left(-n \dot{\epsilon}_0 \left\{ \sinh \left(\frac{f}{K} \right) \right\}^{n-1} \frac{1}{K} \cosh \left(\frac{f}{K} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{t+\Delta t} \Delta t = -\frac{\partial k}{\partial \Delta X}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Delta X_1} = \frac{\partial k}{\partial \Delta X_2} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Delta v} = 1$$

avec I la matrice d'identité.

Il apparaît dans les expressions précédentes les dérivées premières et secondes de l'expression des surfaces équipotentielles f par rapport à σ et X . On donne ci-après leurs évaluations :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \underline{M} \frac{(\tilde{\sigma} - X)}{|\tilde{\sigma} - X|}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \sigma} = \frac{1}{|\tilde{\sigma} - X|} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T - \frac{3}{2} \underline{M} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{|\tilde{\sigma} - X|} \left[\frac{3}{2} \underline{M} \underline{d} - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \right]$$

avec \underline{d} tenseur unité dans l'espace des déviateurs :

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque :

Pour des exemples détaillés de calculs de ces expressions, on se reportera à la référence [bib7].

Annexe 2 Evaluation de l'opérateur tangent cohérent \underline{M}^C

En considérant ε comme variable dans le système discrétisé, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial g}{\partial \Delta X} & 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \\ \frac{\partial l}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial l}{\partial \Delta X} & \frac{\partial l}{\partial \Delta X_1} & 0 & \frac{\partial l}{\partial \Delta v} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X_1}{\partial i} & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial i} & \frac{\partial \Delta v}{\partial i} \\ \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial j} & \frac{\partial \Delta X}{\partial j} & 0 & \frac{\partial \Delta X_2}{\partial j} & \frac{\partial \Delta v}{\partial j} \\ \frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} & \frac{\partial k^T}{\partial \Delta X} & 0 & 0 & \frac{\partial k}{\partial \Delta v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta \sigma \\ d\Delta X \\ d\Delta X_1 \\ d\Delta X_2 \\ d\Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H} d\Delta \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En opérant par éliminations et substitutions successives, le quatrième bloc du système d'équation donne :

$$d\Delta X_2 = -\left(\frac{\partial j}{\partial \Delta X_2}\right)^{-1} \left[\frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} d\Delta \sigma + \frac{\partial j}{\partial \Delta X} d\Delta X + \frac{\partial j}{\partial \Delta v} d\Delta v \right]$$

En posant :

$$B = \frac{\partial i}{\partial \Delta X_2} \left(\frac{\partial j}{\partial \Delta X_2} \right)^{-1}$$

et en remplaçant $d\Delta X_2$ dans les deuxième et troisième bloc du système d'équations, on obtient :

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \Delta \sigma} \right) d\Delta \sigma + \left(\frac{\partial l}{\partial \Delta X} \right) d\Delta X + \left(\frac{\partial l}{\partial \Delta X_1} \right) d\Delta X_1 + \left(\frac{\partial l}{\partial \Delta v} \right) d\Delta v = 0$$

éq An2-1

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta \sigma} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} \right) d\Delta \sigma + \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta X} \right) d\Delta X + \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X_1} \right) d\Delta X_1 \\ & + \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta v} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta v} \right) d\Delta v = 0 \end{aligned}$$

éq An2-2

l'équation [éq An2-2] donne :

$$d\Delta X_1 = -\left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X_1} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial i}{\partial \Delta \sigma} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} \right) d\Delta \sigma + \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta X} \right) d\Delta X + \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta v} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta v} \right) d\Delta v \right]$$

En posant :

$$C = \left(\frac{\partial l}{\partial \Delta X_1} \right) \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X_1} \right)^{-1}$$

et en remplaçant $d\Delta X_1$ dans l'équation [éq An2-1], on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial l}{\partial \Delta \sigma} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta \sigma} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} \right) \right] d\Delta \sigma \\ & + \left[\frac{\partial l}{\partial \Delta X} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta X} \right) \right] d\Delta X \\ & + \left[\frac{\partial l}{\partial \Delta v} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta v} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta v} \right) \right] d\Delta v = 0 \end{aligned} \quad \text{éq An2-3}$$

Le cinquième bloc du système d'équation donne :

$$d\Delta v = - \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta v} \right)^{-1} \frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} d\Delta \sigma - \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta v} \right)^{-1} \frac{\partial k^T}{\partial \Delta X} d\Delta X$$

En posant :

$$F = \left(\frac{\partial l}{\partial \Delta v} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta v} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta v} \right) \right) \frac{\partial k}{\partial \Delta v}$$

et en remplaçant $d\Delta v$ dans l'équation [éq An2-3], on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial l}{\partial \Delta \sigma} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta \sigma} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} \right) - F \left(\frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} \right) \right] d\Delta \sigma \\ & + \left[\frac{\partial l}{\partial \Delta X} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta X} \right) - F \left(\frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} \right) \right] d\Delta X = 0 \end{aligned} \quad \text{éq An2-4}$$

En posant :

$$D = \frac{\partial l}{\partial \Delta \sigma} - A \frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta \sigma} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta \sigma} \right) - F \left(\frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} \right)$$

et

$$E = \frac{\partial l}{\partial \Delta X} - A \frac{\partial j}{\partial \Delta X} - C \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta X} - B \frac{\partial j}{\partial \Delta X} \right) - F \left(\frac{\partial k^T}{\partial \Delta X} \right)$$

l'équation [éq An2-4] s'écrit :

$$D d\Delta \sigma + E d\Delta X = 0$$

d'où en remplaçant $d\Delta X$ et $d\Delta \sigma$ dans le premier bloc du système d'équation, on obtient :

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial \Delta \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta v} \right)^{-1} \frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} - \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta X} - \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta v} \right)^{-1} \frac{\partial k^T}{\partial \Delta X} \right] E^{-1} D \right\} d\Delta \sigma = \underline{H} d\Delta \varepsilon$$

Finalement, l'opérateur tangent cohérent s'écrit :

$$\underline{M}_C = \left\{ \frac{\partial g}{\partial \Delta \sigma} - \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta v} \right)^{-1} \frac{\partial k^T}{\partial \Delta \sigma} - \left[\frac{\partial g}{\partial \Delta X} - \frac{\partial g}{\partial \Delta v} \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta v} \right)^{-1} \frac{\partial k^T}{\partial \Delta X} \right] E^{-1} D \right\}^{-1} \underline{H}$$