

Manuel de Référence**Fascicule R7.01 : Modélisations pour le Génie Civil et les géomatériaux
Document R7.01.06**

Relation de comportement UMLV pour le fluage propre du béton

Résumé :

Ce document présente le modèle de fluage propre UMLV, qui est une façon de modéliser le fluage propre du béton.

On y détaille également l'écriture et le traitement numérique du modèle.

Table des matières

1 Introduction	3
2 Hypothèses	3
3 Description du modèle [bib1]	4
3.1 Description de la partie sphérique	4
3.2 Description de la partie déviatorique	5
4 Discrétisation des équations constitutives du modèle	6
4.1 Discrétisation des équations constitutives du fluage sphérique	6
4.2 Discrétisation des équations constitutives du fluage déviatorique	10
5 Matrice tangente	12
6 Description des variables internes	14
7 Notations	14
8 Bibliographie	15

1 Introduction

Dans le cadre des études du comportement à long terme de structures en béton, une part prépondérante des déformations mesurées sur structure concerne les déformations différées qui apparaissent dans le béton au cours de sa vie. Elles comportent les retraits au jeune âge, le retrait de dessiccation, le fluage propre et le fluage de dessiccation.

Le modèle présenté ici est dédié à la modélisation de la déformation différée associée au fluage propre. Le fluage propre est, en complément du fluage de dessiccation, la part de fluage du béton qu'on observerait lors d'un essai sans échange d'eau avec l'extérieur. Expérimentalement le béton en fluage propre présente un comportement visqueux vieillissant. La déformation de fluage observée est proportionnelle à la contrainte de chargement, dépend de la température et de l'hygrométrie.

Les modèles de fluage des bétons existants (ex. : modèle de Granger – voir [bib4] et [R7.01.01]) ont été développés dans l'optique de prédire les déformations longitudinales de fluage sous des contraintes uniaxiales. La généralisation de ces modèles, afin de prendre en compte un état de contraintes multiaxiales, se fait alors par l'intermédiaire d'un coefficient de Poisson de fluage arbitraire, constant et égal, ou proche, du coefficient de Poisson élastique. Or, la détermination *a posteriori* du coefficient de Poisson de fluage effectif montre sa dépendance vis-à-vis du chemin de chargement. Par ailleurs, le béton de certains ouvrages du Parc EDF, telles les enceintes de confinement de réacteur nucléaire, est soumis à un état de contraintes biaxiales. Ce constat a conduit à la mise au point de la loi de déformations de fluage propre UMLV (Université de Marne-la-Vallée, partenaire dans le développement de ce modèle) pour laquelle le coefficient de Poisson de fluage est une conséquence directe du calcul des déformations principales.

Dans *Code_Aster*, le modèle est utilisé sous le nom de `BETON_UMLV_FP`.

2 Hypothèses

Hypothèse 1 (H.P.P.)

Le loi est écrite dans le cadre des petites perturbations.

Hypothèse 2 (partition des déformations)

En petites déformations, le tenseur des déformations totales est décomposé en plusieurs termes relatifs aux processus considérés. S'agissant de la description des différents mécanismes de déformations différées des béton, on admet que la déformation totale s'écrive :

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{déformation élastique}} + \underbrace{\varepsilon^{fp}}_{\text{fluage propre}} + \underbrace{\varepsilon^{fd}}_{\text{fluage de dessiccation}} + \underbrace{\varepsilon^{re}}_{\text{retrait endogène}} + \underbrace{\varepsilon^{rd}}_{\text{retrait de dessiccation}} + \underbrace{\varepsilon^{th}}_{\text{déformation thermique}} \quad \text{éq 2-1}$$

Dans le cadre de cette documentation, on se limitera à la description du fluage propre. A des fins de simplification d'écriture, l'exposant *f* désignera la déformation de fluage propre de sorte que [éq 2-1] se réduise à :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f \quad \text{éq 2-2}$$

N.B. :

| Dans la suite le terme « fluage » désignera exclusivement le fluage propre.

Hypothèse 3 (décomposition des composantes de fluage)

De façon générale, le fluage propre peut être modélisé en combinant le comportement élastique du solide et le comportement visqueux du fluide. Pour la loi présentée, le fluage est décrit comme la combinaison du comportement élastique des hydrates et des granulats et du comportement visqueux de l'eau.

Dans le cas de la loi UMLV, on effectue l'hypothèse que le fluage puisse être décomposé en un processus découplant une partie sphérique et une partie déviatorique. Le tenseur des déformations totales de fluage s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^f = \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^{fs}}_{\text{partie sphérique}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}}_{\text{partie déviatorique}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{fs} = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^f \underline{\underline{1}} \quad \text{éq 2-3}$$

Le tenseur des contraintes peut être développé suivant une forme similaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^s}_{\text{partie sphérique}} \underline{\underline{1}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^d}_{\text{partie déviatorique}} \quad \text{éq 2-4}$$

La loi de fluage UMLV suppose un découplage total entre les composantes sphériques et déviatoriques : les déformations induites par les contraintes sphériques sont purement sphériques et les déformations induites par les contraintes déviatoriques sont purement déviatoriques. Pour tenir compte de l'effet de l'humidité interne, les contraintes sont multipliées par l'humidité relative interne :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^s = h \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}^s) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^d = h \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}^d) \quad \text{éq 2-5}$$

Ou h désigne l'humidité relative interne.

La condition [éq 2-5] permet de vérifier a posteriori que les déformations de fluage propre sont proportionnelles à l'humidité relative.

3 Description du modèle [bib1]

3.1 Description de la partie sphérique

Les contraintes sphériques sont à l'origine de la migration de l'eau adsorbée aux interfaces entre les hydrates au niveau de la macro-porosité et absorbée au sein de la micro-porosité dans la porosité capillaire. La diffusion de l'eau interlamellaire des pores d'hydrates vers la porosité capillaire s'effectue de façon irréversible. La déformation sphérique totale de fluage s'écrit donc comme la somme d'une partie réversible et d'une partie irréversible :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fs} = \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_r^{fs}}_{\text{partie réversible}} + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{fs}}_{\text{partie irréversible}} \quad \text{éq 3.1-1}$$

Le processus de déformation sphérique du fluage est gouverné par le système d'équations couplées suivant (équations [éq 3.1-2] et [éq 3.1-3]) :

$$\dot{\varepsilon}^{fs} = \frac{1}{\eta_r^s} \cdot \left[h \cdot \sigma^s - k_r^s \cdot \varepsilon_r^{fs} \right] - \dot{\varepsilon}_i^{fs} \quad \text{éq 3.1-2}$$

où k_r^s désigne la rigidité apparente associée au squelette formé par des blocs d'hydrates à l'échelle mésoscopique ;

et η_r^s la viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion au sein de la porosité capillaire.

$$\dot{\varepsilon}_i^{fs} = \frac{1}{\eta_i^s} \left\langle \left[k_r^s \cdot \varepsilon^{fs} - (k_r^s + k_i^s) \cdot \varepsilon_i^{fs} \right] - \left[h \sigma^s - k_r^s \cdot \varepsilon_r^{fs} \right] \right\rangle^+ \quad \text{éq 3.1-3}$$

où k_i^s désigne la rigidité apparente associée intrinsèquement aux hydrates à l'échelle microscopique ;

et η_i^s la viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion interfoliaire.

Dans [éq 3.1-3], les crochets $\langle \rangle^+$ désignent l'opérateur de Mac Cauley : $\langle x \rangle^+ = \frac{1}{2}(x + |x|)$

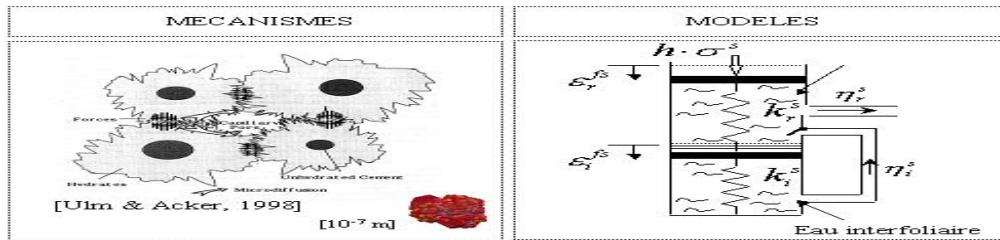


Figure 3.1-a : Modèle phénoménologique associé à la partie sphérique du fluage propre

3.2 Description de la partie déviatorique

Les contraintes déviatoriques sont à l'origine d'un mécanisme de glissement (ou mécanisme de quasi dislocation) des feuillets de CSH dans la nano-porosité. Sous contrainte déviatorique, le fluage s'effectue à volume constant. Par ailleurs, la loi de fluage UMLV suppose l'isotropie du fluage déviatorique. Phénoménologiquement, le mécanisme de glissement comporte une contribution réversible viscoélastique de l'eau fortement adsorbée aux feuillets de CSH et une contribution irréversible visqueuse de l'eau libre :

$$\underbrace{\varepsilon^{fd}}_{\text{déformation déviatorique totale}} = \underbrace{\varepsilon_r^{fd}}_{\text{contribution eau adsorbée}} + \underbrace{\varepsilon_i^{fd}}_{\text{contribution eau libre}} \quad \text{éq 3.2-1}$$

La $j^{\text{ème}}$ composante principale de la déformation déviatorique totale est régie par les équations [éq 3.2-2] et [éq 3.2-3] :

$$\eta_r^d \dot{\varepsilon}_r^{d,j} + k_r^d \varepsilon_r^{d,j} = h \cdot \sigma^{d,j} \quad \text{éq 3.2-2}$$

où k_r^d désigne la rigidité associée à la capacité de l'eau adsorbée à transmettre des charges (**load bearing water**) ;

et η_r^d la viscosité associée à l'eau adsorbée par les feuillets d'hydrates.

$$\eta_i^d \dot{\varepsilon}_i^{d,j} = h \cdot \sigma^{d,j} \quad \text{éq 3.2-3}$$

où η_i^d désigne la viscosité de l'eau libre.

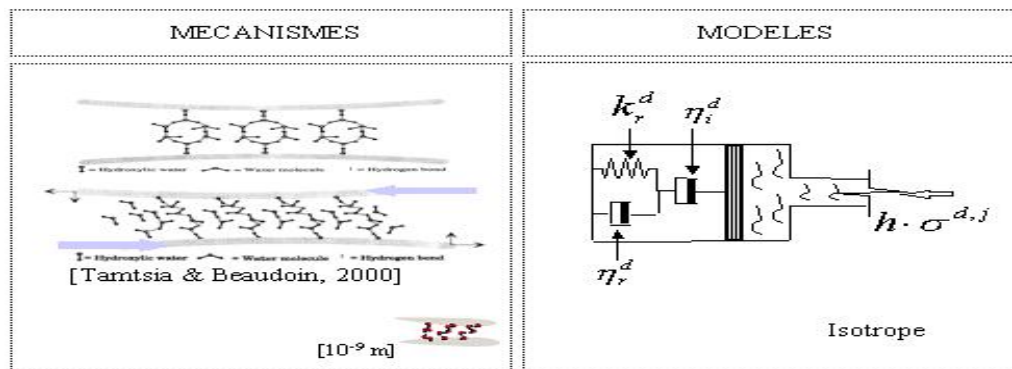


Figure 3.2-a : Modèle phénoménologique associé à la partie déviatorique du fluage propre

4 Discrétisation des équations constitutives du modèle

4.1 Discrétisation des équations constitutives du fluage sphérique

On effectue une linéarisation au premier ordre du produit des contraintes et de l'humidité :

$$\sigma(t) \cdot h(t) \approx \sigma_n \cdot h_n + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} (\Delta \sigma_n \cdot h_n + \sigma_n \cdot \Delta h_n) \quad \text{éq 4.1-1}$$

Après discrétisation des contraintes et de l'humidité relative par des fonctions affines, la déformation sphérique de fluage propre est discrétisée par l'équation suivante :

$$\Delta \varepsilon_n^{fs} = a_n^s + b_n^s \cdot \sigma_n^s + c_n^s \cdot \sigma_{n+1}^s \Leftrightarrow \Delta (tr \underline{\varepsilon}^f) = 3a_n^s + b_n^s \cdot tr \underline{\sigma}_n^s + c_n^s \cdot tr \underline{\sigma}_{n+1}^s \quad \text{éq 4.1-2}$$

où σ_n^s et σ_{n+1}^s sont les contraintes sphériques au début et à la fin du pas de temps courant.

Il faut distinguer deux cas de figures selon que la déformation irréversible doit être prise en compte ou pas.

1^{er} cas : la déformation de fluage sphérique irréversible n'est pas prise en compte, l'équation [éq 4.1-2] peut se mettre sous la forme (chaîne de Kelvin simple) :

$$\eta_r^s \dot{\varepsilon}_r^{fs}(t) + k_r^s \varepsilon_r^{fs}(t) = h(t) \sigma_r^s(t) \quad \text{éq 4.1-3}$$

Après discrétisation, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \varepsilon_{r,n}^{fs} = a_{r,n}^s + b_{r,n}^s \cdot \sigma_n^s + c_{r,n}^s \cdot \sigma_{n+1}^s \quad \text{éq 4.1-4}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_{r,n}^s = \left[\exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right) - 1 \right] \cdot \varepsilon_{r,n}^{fs} \\ b_{r,n}^s = \frac{1}{k_r^d} \left\{ \left[-\left(\frac{2\tau_r^s}{\Delta t_n} + 1\right) h_n + \frac{\tau_r^s}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^s}\right) + \left[\left(\frac{2\tau_r^s}{\Delta t_n} - 1\right) h_n - \frac{\tau_r^s - \Delta t_n}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \right\} \\ c_{r,n}^s = \frac{1}{k_r^d} \left[\frac{\tau_r^s}{\Delta t_n} \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^s}\right) h_n - \frac{\tau_r^s - \Delta t_n}{\Delta t_n} h_n \right] \end{cases} \quad \text{éq 4.1-5}$$

La déformation irréversible, quant à elle, ne varie pas :

$$\Delta \varepsilon_{i,n}^{fs} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{i,n}^s = 0 \\ b_{i,n}^s = 0 \\ c_{i,n}^s = 0 \end{cases} \quad \text{éq 4.1-6}$$

2nd cas : la déformation de fluage sphérique irréversible doit être prise en compte.
A l'aide de la linéarisation [éq 4.1-1],], le système d'équations couplées s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r^{fs}(t) + 2\dot{\varepsilon}_i^{fs}(t) = \frac{1}{\eta_r^s} \left[\sigma_n \cdot h_n + \frac{t-t_n}{\Delta t_n} (\Delta \sigma_n \cdot h_n + \sigma_n \cdot \Delta h_n) - k_r^s \varepsilon_r^{fs}(t) \right] \\ \dot{\varepsilon}_i^{fs}(t) = -\frac{1}{\eta_i^s} \left\langle -2k_r^s \varepsilon_r^{fs}(t) + k_i^s \varepsilon_i^{fs}(t) \sigma_n \cdot h_n + \frac{t-t_n}{\Delta t_n} (\Delta \sigma_n \cdot h_n + \sigma_n \cdot \Delta h_n) \right\rangle^+ \end{cases} \quad \text{éq 4.1-7}$$

Ce système peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{fs}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_r^{fs}(t) \\ \dot{\varepsilon}_i^{fs}(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} : \underline{\varepsilon}^{fs}(t) + \underline{b} + (t-t_n) \underline{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r^{fs}(t) = a_{rr}^s \varepsilon_r^{fs}(t) + a_{ri}^s \varepsilon_i^s(t) + b_r^s + c_r^s (t-t_n) \\ \dot{\varepsilon}_i^{fs}(t) = a_{ir}^s \varepsilon_r^{fs}(t) + a_{ii}^s \varepsilon_i^s(t) + b_i^s + c_i^s (t-t_n) \end{cases} \quad \text{éq 4.1-8}$$

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{b}}$ et $\underline{\underline{c}}$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}} &= \begin{bmatrix} a_{rr}^s & a_{ir}^s \\ a_{ir}^s & a_{ii}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_r^s}{\eta_r^s} - 4\frac{k_r^s}{\eta_i^s} & 2\frac{k_i^s}{\eta_i^s} \\ 2\frac{k_i^s}{\eta_i^s} & -\frac{k_i^s}{\eta_i^s} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{b}} &= \begin{bmatrix} b_r^s \\ b_i^s \end{bmatrix} = \sigma_n \cdot h_n \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_r^s} + \frac{2}{\eta_i^s} \\ -\frac{1}{\eta_i^s} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{c}} &= \begin{bmatrix} c_r^s \\ c_i^s \end{bmatrix} = \frac{\Delta\sigma_n \cdot h_n + \sigma_n \cdot \Delta h_n}{\Delta t_n} \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_r^s} + \frac{2}{\eta_i^s} \\ -\frac{1}{\eta_i^s} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad \text{éq 4.1-9}$$

Le système d'équations précédent peut être découplé et résolu dans l'espace des vecteurs propres. Le système d'équations s'écrit en effet :

$$\dot{\varepsilon}_k^*(t) = \lambda_k \varepsilon_k^*(t) + b_k^* + c_k^*(t - t_n) \text{ avec } \underline{\dot{\varepsilon}}^* = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^* \\ \dot{\varepsilon}_2^* \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\dot{\varepsilon}} \quad \text{éq 4.1-10}$$

Ainsi, dans l'espace des vecteurs propres, le modèle de fluage devient équivalent à une double chaîne de Kelvin. Il est nécessaire de connaître la solution de l'équation homogène (sans second membre), ainsi qu'une solution particulière afin de résoudre l'équation différentielle précédente. La solution homogène de chacune des deux équations est la suivante :

$$\varepsilon_k^*(t) = \mu_k e^{\lambda_k \cdot t} \quad \text{éq 4.1-11}$$

où μ_k est un paramètre dépendant de la condition initiale. Une solution particulière est obtenue par la méthode de variation de la constante ($\mu_k = \mu_k(t)$). On obtient alors les solutions suivantes :

$$\varepsilon_k^*(t) = \mu_k e^{\lambda_k \cdot t} - \frac{1}{\lambda_k} \left[b_k^* + c_k^* \left(t - t_n - \frac{1}{\lambda_k} \right) \right] \quad \text{éq 4.1-12}$$

Les déformations de fluage sphériques réversible et irréversible sont alors égales à :

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{fs}(t_{n+1}) = \frac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_r^s} + (x_1 \mu_1 e^{\lambda_1 t_{n+1}} + \mu_2 e^{\lambda_2 t_{n+1}}) \\ \varepsilon_i^{fs}(t_{n+1}) = \frac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_i^s} + (\mu_1 e^{\lambda_1 t_{n+1}} + x_2 \mu_2 e^{\lambda_2 t_{n+1}}) \end{cases} \quad \text{éq 4.1-13}$$

Après simplification, on obtient alors les expressions suivantes pour les valeurs de μ_k :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{(x_1 \cdot x_2 - 1)e^{\lambda_1 t_n}} \left[x_2 \left(\varepsilon_r^{fs}(t_{n+1}) - \frac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_r^s} \right) - \left(\varepsilon_i^{fs}(t_{n+1}) - \frac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_i^s} \right) \right] \\ \mu_2 = \frac{1}{(x_1 \cdot x_2 - 1)e^{\lambda_2 t_n}} \left[- \left(\varepsilon_r^{fs}(t_{n+1}) - \frac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_r^s} \right) + x_1 \left(\varepsilon_i^{fs}(t_{n+1}) - \frac{\sigma_n \cdot \Delta h_n + \sigma_{n+1} \cdot h_n}{k_i^s} \right) \right] \end{cases}$$

éq 4.1-14

L'équation [éq 4.1-2] peut donc se mettre sous la forme, après discrétisation :

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_{r,n}^{fs} = a_{r,n}^s + b_{r,n}^s \cdot \sigma_n^s + c_{i,n}^s \cdot \sigma_{n+1}^s \\ \Delta \varepsilon_{i,n}^{fs} = a_{i,n}^s + b_{i,n}^s \cdot \sigma_n^s + c_{i,n}^s \cdot \sigma_{n+1}^s \end{cases}$$

éq 4.1-15

Avec :

$$\begin{cases} a_{r,n}^s = \left[\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} - 1 \right] \cdot \varepsilon_{r,n}^{fs} - x_1 \cdot \left[\frac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \cdot \max_{k \leq n}(\varepsilon_{i,k}^{fs}) \\ b_{r,n}^s = \frac{\Delta h_n}{k_r^s} \cdot \left[\frac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_1 \Delta t_n} + e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] + \frac{\Delta h_n}{k_i^s} \cdot x_1 \cdot \left[\frac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \\ c_{r,n}^s = \frac{h_n}{k_r^s} \cdot \left[\frac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_1 \Delta t_n} + e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] + \frac{h_n}{k_i^s} \cdot x_1 \cdot \left[\frac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \end{cases}$$

éq 4.1-16

$$\begin{cases} a_{i,n}^s = x_2 \cdot \left[\frac{e^{\lambda_1 \Delta t_n} - e^{\lambda_2 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] \cdot \varepsilon_{r,n}^{fs} - \left[\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_2 \Delta t_n} - e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} - 1 \right] \cdot \max_{k \leq n}(\varepsilon_{i,k}^{fs}) \\ b_{i,n}^s = \frac{\Delta h_n}{k_r^s} \cdot x_2 \cdot \left[\frac{e^{\lambda_2 \Delta t_n} - e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] + \frac{\Delta h_n}{k_i^s} \cdot \left[\frac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_2 \Delta t_n} + e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] \\ c_{i,n}^s = \frac{h_n}{k_r^s} \cdot x_2 \cdot \left[\frac{e^{\lambda_2 \Delta t_n} - e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} \right] + \frac{h_n}{k_i^s} \cdot \left[\frac{-x_1 \cdot x_2 \cdot e^{\lambda_2 \Delta t_n} + e^{\lambda_1 \Delta t_n}}{x_1 \cdot x_2 - 1} + 1 \right] \end{cases}$$

éq 4.1-17

Dans les équations [éq 4.1-16] et [éq 4.1-17] les paramètres λ_1 , λ_2 , x_1 et x_2 sont fonction des paramètres intrinsèques du matériau. A chaque pas de calcul, il est nécessaire de sauvegarder **deux variables internes** $\varepsilon_{r,n}^{fs}$, la dernière déformation sphérique réversible obtenue et $\max_{k \leq n}(\varepsilon_{i,k}^{fs})$, c'est-à-dire $\varepsilon_{i,n}^{fs}$, la plus grande déformation sphérique réversible obtenue dans l'histoire de l'élément. Le choix de retenir les expressions [éq 4.1-5] et [éq 4.1-6] (pas de déformation irréversibles), ou les expressions [éq 4.1-16] et [éq 4.1-17] (existence de déformations irréversibles) pour déterminer l'incrément de déformation sphérique totale est effectuée *a posteriori* en fonction du signe de $\Delta \varepsilon_{i,n}^{fs}$ dans [éq 4.1-15].

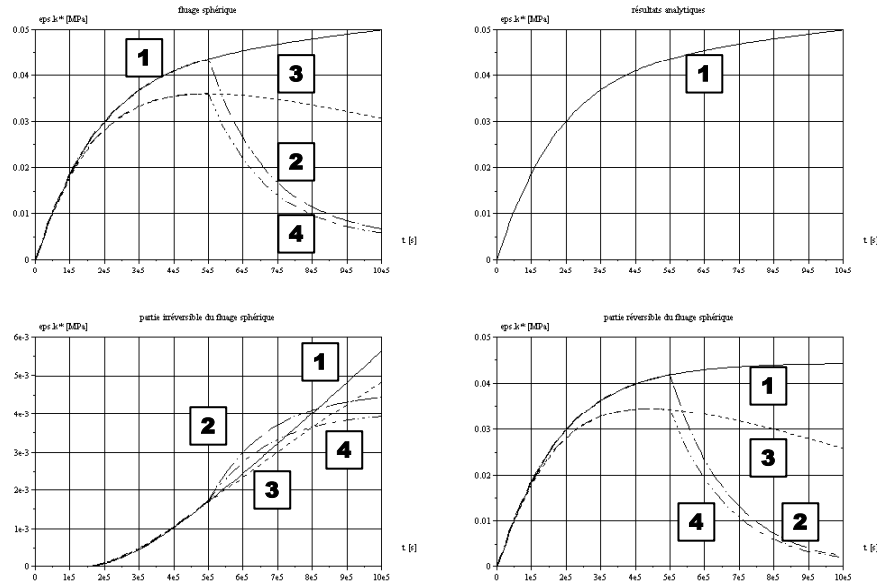


Illustration des réponses numériques obtenues en utilisant les expressions discrétisées [éq 4.1-3] à [éq 4.1-17] pour quatre histoires de chargement : 1 échelon de contrainte unitaire à humidité constante (100%), 2 échelon de contrainte unitaire à humidité linéairement décroissante de 100% à 50%, 3 échelon de contrainte unitaire pendant la moitié de la durée du calcul suivi d'une recouvrance à la moitié de la contrainte initiale sur la seconde partie du calcul ; l'humidité est supposée constante (100%), 4 le chargement mécanique est identique à 3 ; humidité décroît linéairement de 100% à 50%.

Figure 4.1-a

Pour réaliser les simulations de la [Figure 4.1-a] les paramètres suivants ont été retenus : $k_r^s = 2,0e+5$ [MPa] ; $\eta_r^s = 4,0e+10$ [MPa.s] ; $k_i^s = 1,0e+4$ [MPa] ; $\eta_i^s = 1,0e+11$ [MPa.s]. Le calcul comporte 200 intervalles de 5000 [s].

4.2 Discrétisation des équations constitutives du fluage déviatorique

Après discrétisation des contraintes et de l'humidité relative par des fonctions affines, le tenseur déviateur des déformations de fluage propre est discrétisé par l'équation suivante :

$$\Delta \varepsilon_{=n}^{fd} = a_{=n}^d + b_{=n}^d \cdot \sigma_{=n}^d + c_{=n}^d \cdot \sigma_{=n+1}^d \quad \text{éq 4.2-1}$$

où $\sigma_{=n}^d$ et $\sigma_{=n+1}^d$ sont les tenseurs des contraintes déviatoriques au début et à la fin du pas de temps courant.

Les étapes effectuées sont :

- On calcule les paramètres par rapport à la déformation de fluage propre déviatorique *réversible*, dont le modèle est :

$$\eta_r^d \dot{\varepsilon}_{=r}^{fd}(t) + k_r^d \varepsilon_{=r}^{fd}(t) = h(t) \sigma_{=r}^d(t) \quad \text{éq 4.2-2}$$

Après discrétisation, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \varepsilon_{=r,n}^{fd} = a_{=r,n}^d + b_{r,n}^d \cdot \sigma_{=n}^d + c_{r,n}^d \cdot \sigma_{=n+1}^d \quad \text{éq 4.2-3}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_{=r,n}^d = \left[\exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right) - 1 \right] \cdot \varepsilon_{=r,n}^{f,d} \\ b_{r,n}^d = \frac{1}{k_r^d} \left\{ \left[-\left(\frac{2\tau_r^d}{\Delta t_n} + 1\right) h_n + \frac{\tau_r^d}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right) + \left[\left(\frac{2\tau_r^d}{\Delta t_n} - 1\right) h_n - \frac{\tau_r^d - \Delta t_n}{\Delta t_n} h_{n+1} \right] \right\} \\ c_{r,n}^d = \frac{1}{k_r^d} \left[\frac{\tau_r^d}{\Delta t_n} \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_r^d}\right) h_n - \frac{\tau_r^d - \Delta t_n}{\Delta t_n} h_n \right] \end{cases} \quad \text{éq 4.2-4}$$

Remarque :

L'équation [éq 4.2-4] (partie réversible du fluage déviatorique) est analogue à l'équation [éq 4.1-5] (partie réversible du fluage en l'absence de déformations irréversibles). Elles correspondent à la discrétisation d'une unique chaîne de Kelvin.

On calcule les paramètres par rapport à la déformation de fluage propre déviatorique, dont le modèle est :

$$\eta_i^d \dot{\varepsilon}_{=i}^{f,d}(t) = h(t) \sigma_{=i}^d(t) \quad \text{éq 4.2-5}$$

Après discrétisation, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta \varepsilon_{=i,n+1}^{f,d} = a_{=i,n}^d + b_{i,n}^d \cdot \sigma_{=n}^d + c_{i,n}^d \cdot \sigma_{=n+1}^d \quad \text{éq 4.2-6}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_{=i,n}^d = 0 \\ b_{i,n}^d = \frac{\Delta t_n \cdot h_{n+1}}{2\eta_i^d} \\ c_{i,n}^d = \frac{\Delta t_n \cdot h_n}{2\eta_i^d} \end{cases} \quad \text{éq 4.2-7}$$

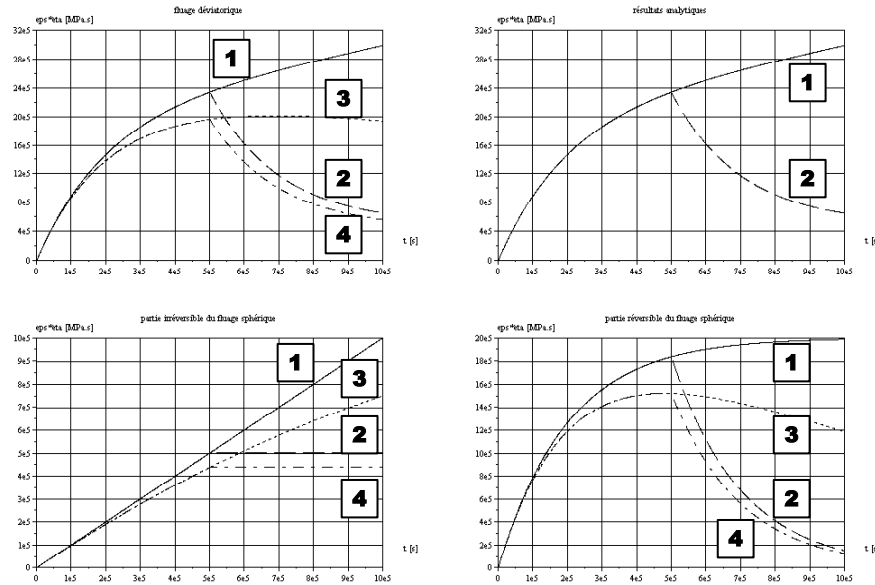


Illustration des réponses numériques obtenues en utilisant les expressions discrétisées [éq 4.2-1] à [éq 4.2-7] pour quatre histoires de chargement : 1 échelon de contrainte unitaire à humidité constante (100%), 2 échelon de contrainte unitaire à humidité linéairement décroissante de 100% à 50%, 3 échelon de contrainte unitaire pendant la moitié de la durée du calcul suivi d'une recouvrance à la moitié de la contrainte initiale sur la seconde partie du calcul ; l'humidité est supposée constante (100%), 4 le chargement mécanique est identique à 3 ; humidité varie linéairement décroissante de 100% à 50%.

Figure 4.2-a

Pour réaliser les simulations de la [Figure 4.2-a], les paramètres suivants ont été retenus : $k_r^d = 5,0e+4$ [MPa] ; $\eta_r^d = 1,0e+10$ [MPa.s] ; $\eta_i^d = 1,0e+11$ [MPa.s]. Le calcul comporte 1000 intervalles de 1000 [s].

5 Matrice tangente

En introduisant le module de cisaillement élastique μ , le déviateur des contraintes à l'instant $n+1$ s'écrit en fonction du déviateur des déformations élastiques :

$$\sigma_{n+1}^d = 2\mu \varepsilon_{n+1}^{ed} = \sigma_n^d + 2\mu \Delta \varepsilon_n^d - 2\mu \Delta \varepsilon_n^{f,d} \quad \text{éq 5-1}$$

En substituant la partie déviatorique de la déformation de fluage propre par l'expression [éq 4.2-1], il découle la relation suivante :

$$\sigma_{n+1}^d (1 + 2\mu c^d) = \sigma_n^d (1 - 2\mu b^d) + 2\mu \Delta \varepsilon_n^d - 2\mu a^d \quad \text{éq 5-2}$$

Expression qui induit par dérivation par rapport à $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^d$:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^d} (1 + 2\mu c^d) = 2\mu \underline{\underline{1}} \quad \text{éq 5-3}$$

En effectuant une démarche similaire pour la partie sphérique et en introduisant le module de rigidité à la dilatation K , il suit les trois relations suivantes :

$$tr \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = 3K tr \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^e = tr \underline{\underline{\sigma}}_n + 3K tr(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) - 3K tr(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^f) \quad \text{éq 5-4}$$

$$tr \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} (1 + 3Kc^s) = tr \underline{\underline{\sigma}}_n (1 - 3Kb^s) + 3K tr(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) - Ka^s \quad \text{éq 5-5}$$

$$\frac{\partial (tr \underline{\underline{\sigma}}_{n+1})}{\partial (tr \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1})} (1 + 3Kc^s) = 3K \quad \text{éq 5-6}$$

La matrice tangente s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{1}{3} \frac{\partial (tr \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{1}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^d} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{1}{3} \frac{\partial (tr \underline{\underline{\sigma}})}{\partial (tr \underline{\underline{\varepsilon}})} \frac{\partial (tr \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{1}} \quad \text{éq 5-7}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underbrace{\frac{2\mu}{1 + 2\mu c^d}}_{\chi} \left(\underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) + \underbrace{\frac{K}{1 + 3Kc^s}}_{\xi} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad \text{éq 5-8}$$

Après linéarisation, la matrice tangente se développe comme suit :

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \Delta \sigma_{12} \\ \sqrt{2} \Delta \sigma_{13} \\ \sqrt{2} \Delta \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi + \frac{2}{3} \chi & \xi - \frac{1}{3} \chi & \xi - \frac{1}{3} \chi & 0 & 0 & 0 \\ \xi - \frac{1}{3} \chi & \xi + \frac{2}{3} \chi & \xi - \frac{1}{3} \chi & 0 & 0 & 0 \\ \xi - \frac{1}{3} \chi & \xi - \frac{1}{3} \chi & \xi + \frac{2}{3} \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{12} \\ \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{13} \\ \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad \text{éq 5-9}$$

6 Description des variables internes

Le tableau suivant donne la correspondance entre le numéro des variables internes accessibles par Code_Aster et leur description :

Numéro de la variable	Description
1	Déformation sphérique réversible
2	Déformation sphérique irréversible
3	Déformation déviatorique réversible, composante 11
4	Déformation déviatorique irréversible, composante 11
5	Déformation déviatorique réversible, composante 22
6	Déformation déviatorique irréversible, composante 22
7	Déformation déviatorique réversible, composante 33
8	Déformation déviatorique irréversible, composante 33
9	-
10	-
11	-
12	Déformation déviatorique réversible, composante 12
13	Déformation déviatorique irréversible, composante 12
14	Déformation déviatorique réversible, composante 13
15	Déformation déviatorique irréversible, composante 13
16	Déformation déviatorique réversible, composante 23
17	Déformation déviatorique irréversible, composante 23
18	-
19	-
20	-

7 Notations

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ tenseur des déformations totales

$\underline{\underline{\varepsilon}}^f$ tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ tenseur des déformations élastiques

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fs}_1$ partie sphérique du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fs}_r$ partie sphérique réversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fs}_i$ partie sphérique irréversible du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}$ partie déviatorique du tenseur des déformations de fluage propre

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}_r$ partie déviatorique réversible du tenseur des déformations de fluage propre (contribution de l'eau absorbée)

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{fd}_i$ partie déviatorique irréversible du tenseur des déformations de fluage propre (contribution de l'eau libre)

$\underline{\underline{\sigma}}$ tenseur des contraintes totales

$\underline{\underline{\sigma}}^s_1$ partie sphérique du tenseur des contraintes

$\underline{\underline{\sigma}}^d$ partie déviatorique du tenseur des contraintes

h humidité relative interne

K module élastique de rigidité à la dilatation

k_r^s rigidité apparente associée au squelette formé par des blocs d'hydrates à l'échelle mésoscopique

k_i^s rigidité apparente associée intrinsèquement aux hydrates à l'échelle microscopique

k_r^d rigidité associée à la capacité de l'eau adsorbée à transmettre des charges (*load bearing water*)

μ module de cisaillement élastique

η_i^s viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion interlamellaire

η_r^s viscosité apparente associée au mécanisme de diffusion au sein de la porosité capillaire

η_i^d viscosité de l'eau libre.

η_r^d viscosité associée à l'eau adsorbée par les feuillets d'hydrates

$x, \underline{x}, \underline{\underline{x}}$ désignent respectivement un scalaire, un vecteur et un tenseur d'ordre 2.

$x_n, x_{n+1}, \Delta x_n$ désignent respectivement la valeur de la quantité x au temps t_n , au temps t_{n+1} et la variation de x pendant l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$.

8 Bibliographie

- [1] BENBOUDJEMA F. : Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux bâtiments réacteurs de centrales nucléaires, Mémoire de D.E.A. Matériaux Avancés – Ingénierie des Structures et des Enveloppes, 38 p. (+ annexes) (1999).
- [2] BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., HEINFLING G., LE PAPE Y. : Etude numérique et analytique de la partie sphérique du modèle de fluage propre UMLV pour le béton, note technique HT-25/02/040/A, 56 p (2002).
- [3] BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., TORRENTI J.M., LE PAPE Y. : Algorithme du modèle de fluage propre et de dessiccation UMLV couplé à un modèle élastique, note technique HT-25/02/050/A, 68 p (2002).
- [4] GRANGER L. : Comportement différée du béton dans les enceintes de centrale nucléaire : analyse et modélisation, Thèse de Doctorat de l'ENPC (1995).
- [5] RAZAKANAIVO A. : Relation de comportement de Granger pour le fluage propre du béton, Documentation Code_Aster [R7.01.01], 16 p (2001).

Page laissée intentionnellement blanche