

Manuel de référence
Fascicule R5.04 : Modélisations non locales
Document : R5.04.11

Modèle de Rousselier à gradient de variables internes

Résumé :

On présente ici le modèle de Rousselier en grandes déformations dans une version non locale c'est-à-dire introduisant des gradients de variables internes afin de prendre en compte de fortes variations spatiales des champs mécaniques. On active la formulation non locale du modèle de Rousselier par l'une des modélisations 'X_GRAD_VARI' de la commande AFPE_MODELE du mot clé MODELE. Quant au modèle même, il est disponible dans la commande STAT_NON_LINE par l'intermédiaire du mot-clé RELATION = 'ROUSSELIER' sous le mot-clé facteur COMP_INCR et avec le mot-clé DEFORMATION = 'SIMO_MIEHE'.

Ce modèle est implanté pour les modélisations tridimensionnelles (3D_GRAD_VARI), axisymétrique (AXIS_GRAD_VARI) et en déformations planes (D_PLAN_GRAD_VARI).

On présente l'écriture et le traitement numérique de ce modèle.

Table des matières

1	Rappel sur la théorie des modèles à gradient.....	3
1.1	Construction des modèles à gradient.....	3
1.2	Discrétisation en temps	4
1.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	4
1.4	Calcul des variables internes aux points de gauss	5
2	Application au modèle de Rousselier	6
2.1	Quelques notations du modèle de Rousselier.....	6
2.2	Modèle continu	7
2.3	Modèle discrétisé.....	8
2.4	Traitement des points singuliers.....	10
3	Résolution numérique.....	11
3.1	Expression du modèle discrétisé.....	11
3.2	Résolution du système non linéaire.....	12
3.3	Déroulement du calcul.....	13
3.4	Résolution des fonctions à annuler	14
3.4.1	Bornes supérieure et inférieure dans le cas où $S(0) > 0$	14
3.4.2	Bornes supérieure et inférieure dans le cas où $S(0) = 0$	15
3.4.3	Bornes supérieure et inférieure dans le cas où $S(0) < 0$ et x^s non solution	16
3.5	Expression de la matrice tangente	17
3.5.1	Cas élastique.....	18
3.5.2	Cas singulier.....	18
3.5.3	Cas régulier	19
4	Relation 'ROUSSELIER'	21
5	Bibliographie	21

1 Rappel sur la théorie des modèles à gradient

Les modèles à gradient présentés ici ont été développés par E. Lorentz [bib1] afin de pouvoir décrire le comportement de matériaux sollicités par de forts gradients des champs mécaniques qui apparaissent dans les zones endommagées ou bien au voisinage de singularités géométriques. En effet, dans le cas de forts gradients, le comportement d'un point matériel n'est plus indépendant de son entourage mais dépend du comportement de son voisinage, d'où l'introduction de gradients dans les modèles.

D'un point de vue numérique, le calcul d'une structure avec une loi d'endommagement locale classique montre que la zone endommagée se localise toujours sur une seule couche d'éléments finis et donc que la réponse de la structure dépend du maillage adopté : les modèles à gradient pallient ce problème.

Dans ce qui suit, nous faisons un bref rappel de cette théorie. On trouvera dans [R5.04.01] des détails plus approfondis sur cette théorie.

1.1 Construction des modèles à gradient

Cette formulation est restreinte aux matériaux standards généralisés. L'état y est décrit par la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, des variables internes a et leur gradient associé \mathbf{a}_∇ :

$$\mathbf{a}_\nabla = \nabla a \quad \text{éq 1.1-1}$$

Suivant le formalisme des matériaux standards généralisés, les données de l'énergie libre $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, a, \mathbf{a}_\nabla)$ et du potentiel de dissipation $\Delta(\dot{a}, \dot{\mathbf{a}}_\nabla)$ (pour le choix de ces deux énergies, on pourra se référer à [bib1]) permettent d'en déduire les lois d'état et les lois d'évolution :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad A = -\frac{\partial \Phi}{\partial a}, \quad \mathbf{A}_\nabla = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}_\nabla} \quad \text{éq 1.1-2}$$

$$(A, \mathbf{A}_\nabla) \in \partial \Delta(\dot{a}, \dot{\mathbf{a}}_\nabla) \quad \text{éq 1.1-3}$$

Si on appelle F le seuil d'élasticité associé au potentiel $\Delta(\dot{a}, \dot{\mathbf{a}}_\nabla)$, l'équation précédente est équivalente à :

$$\dot{a} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial A}, \quad \dot{\mathbf{a}}_\nabla = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_\nabla} \quad \text{éq 1.1-4}$$

Le problème ici est que les variables ne sont plus indépendantes et sont liées par la contrainte non locale [éq 1.1-1] si bien qu'on n'est pas sûr de vérifier :

$$\dot{\mathbf{a}}_\nabla = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_\nabla} = \nabla \dot{a} \quad \text{éq 1.1-5}$$

On propose alors d'oublier l'hypothèse d'écoulement normal en chaque point de la structure tout en conservant le formalisme des matériaux standards généralisés mais à l'échelle de la structure, où les variables d'état sont maintenant le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et le champ de variables internes a . On définit ainsi l'énergie libre globale et le potentiel de dissipation global :

$$F_{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(x), a(x), \nabla a(x)) dx \quad \text{éq 1.1-6}$$

$$D(\dot{a}) = \int_{\Omega} \Delta(\dot{a}(x), \nabla \dot{a}(x)) dx \quad \text{éq 1.1-7}$$

La relation de comportement généralisée s'écrit maintenant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial F_{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad A = -\frac{\partial F_{\Phi}}{\partial a}, \quad A \in \partial D(\dot{a}) \quad \text{éq 1.1-8}$$

1.2 Discrétisation en temps

En s'appuyant sur l'hypothèse de convexité par rapport à a des potentiels F_{Φ} et D et en adoptant un schéma d'Euler implicite, la discrétisation temporelle du problème précédent [éq 1.1-8] se ramène à la résolution d'un problème de minimisation portant sur l'incrément Δa des champs de variables internes. Ce problème s'écrit pour des comportements indépendants du temps :

$$\text{Min}_{\Delta a} [F_{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}, a^- + \Delta a) + D(\Delta a)] \quad \text{éq 1.2-1}$$

où a^- est le champ de variables internes à l'instant précédent.

1.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Pour résoudre le problème de minimisation [éq 1.2-1], on effectue une discrétisation spatiale par éléments finis des champs de variables internes au moyen des inconnues nodales que l'on notera \bar{A} .

$$a(x) = \sum_{\text{noeud}} N_k(x) \bar{A}_k, \quad \nabla a(x) = \sum_{\text{noeud}} \nabla N_k(x) \bar{A}_k \quad \text{éq 1.3-1}$$

où N_k et ∇N_k sont les fonctions de forme et leur gradients associés au nœud k , respectivement. Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$\bar{\mathbf{a}}(x) = \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{A}} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{a}} = (a, \nabla a) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{B}} = (N, \nabla N) \quad \text{éq 1.3-2}$$

L'équation [éq 1.2-1] s'écrit alors :

$$\text{Min}_{\bar{\mathbf{A}}} \sum_{\text{gauss}} \omega_g (\Phi(\bar{\mathbf{B}}_g \bar{\mathbf{A}}) + \Delta(\bar{\mathbf{B}}_g \bar{\mathbf{A}})) \quad \text{éq 1.3-3}$$

dans lequel ω_g désigne le poids d'intégration du point de Gauss g .

L'introduction de nouvelles inconnues $\vec{\alpha}$ qui représentent les valeurs et les gradients des variables internes aux points de gauss permet de transférer les non linéarités au niveau local et de scinder la résolution de l'équation [éq 1.3-3] en une partie globale linéaire (sur la structure) et une partie locale non linéaire (aux points d'intégration). Le problème de minimisation s'écrit alors :

$$\underset{\substack{\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{a}} \\ \forall g (\vec{\mathbf{B}}_g \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{a}}_g) = 0}}{\text{Min}} \left[\sum_{g \text{ gauss}} \omega_g \left(\Phi(\vec{\mathbf{a}}_g) + \Delta(\vec{\mathbf{a}}_g - \vec{\mathbf{a}}_g^-) \right) \right] \quad \text{éq 1.3-4}$$

Par dualisation de la contrainte, on construit le Lagrangien augmenté du problème [éq 1.3-4] pour revenir à un problème sans contraintes :

$$\underset{\vec{\mu}}{\text{Max}} \underset{\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{a}}}{\text{Min}} L^r(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mu}) \quad \text{éq 1.3-5}$$

avec

$$L^r(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mu}) = \sum_g \omega_g \left(\Phi(\vec{\mathbf{a}}_g) + \Delta(\vec{\mathbf{a}}_g - \vec{\mathbf{a}}_g^-) + \frac{r}{2} \|\vec{\mathbf{B}}_g \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{a}}_g\|_{\vec{\mathbf{N}}_g}^2 + \vec{\mu}_g (\vec{\mathbf{B}}_g \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{a}}_g) \right) \quad \text{éq 1.3-6}$$

$$r > 0 \text{ et } \|\vec{\mathbf{x}}\|_{\vec{\mathbf{N}}_g}^2 = \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{N}}_g \cdot \vec{\mathbf{x}}$$

La matrice $\vec{\mathbf{N}}$ définie positive est introduite dans la norme de sorte que le coefficient de pénalisation r soit adimensionnel. Cette matrice est choisie comme une approximation diagonale de la dérivée seconde (cf. [R5.04.01] pour plus de détail) :

$$\vec{\mathbf{N}} = \text{Diag} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{\mathbf{a}} \partial \vec{\mathbf{a}}} \right) \quad \text{éq 1.3-7}$$

Ce problème est ensuite résolu par une méthode de Newton pour résoudre le problème primal (calcul de $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{a}}$) et une méthode BFGS avec recherche linéaire Wolfe pour résoudre le problème dual (calcul des multiplicateurs de Lagrange).

1.4 Calcul des variables internes aux points de gauss

Lors de la résolution du problème local, on cherche à minimiser l'équation [éq 1.3-6] par rapport à $\vec{\mathbf{a}}$, à $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mu}$ fixés ce qui est équivalent à :

$$\underset{\vec{\mathbf{a}}_g}{\text{Min}} L^r(\vec{\mathbf{A}}^{\text{fixé}}, \vec{\mathbf{a}}_g, \vec{\mu}_g^{\text{fixé}}) \Leftrightarrow \forall g - \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\mathbf{a}}_g} + \vec{\mu}_g^{\text{fixé}} + r \vec{\mathbf{N}}_g (\vec{\mathbf{B}}_g \vec{\mathbf{A}}^{\text{fixé}} - \vec{\mathbf{a}}_g) \in \partial \Delta(\Delta \vec{\mathbf{a}}_g) \quad \text{éq 1.4-1}$$

A convergence, le troisième terme dans le membre de gauche de l'expression ci-dessus devient nul (la contrainte est réalisée) et les multiplicateurs de Lagrange $\vec{\mu}_g$ apparaissent alors comme une force thermodynamique complémentaire résultant de la condition non locale $\vec{\mathbf{B}}_g \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{a}}_g = 0$.

D'un point de vue pratique, pour écrire de manière incrémentale le modèle de comportement non local, on écrira classiquement l'équivalent de l'équation [éq 1.4-1] :

$$\Delta \vec{\mathbf{a}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \vec{\mathbf{A}}^r} \text{ avec } \vec{\mathbf{A}}^r = (\mathbf{A}^r, \mathbf{A}_{\nabla}^r) \quad \text{éq 1.4-2}$$

avec

$$\vec{A}^r = \vec{A} + \vec{\mu} + r\vec{N}(\vec{B}\vec{A} - \vec{a}) \text{ avec } \vec{A} = (A, A_\nabla) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{a}} \quad \text{éq 1.4-3}$$

où F est le seuil d'élasticité associé au potentiel de dissipation Δ , calculé par transformée de Legendre-Fenchel, et A^r et A_∇^r les forces thermodynamiques associées aux variables internes α et α_∇ , respectivement. On constate ici que ces deux forces thermodynamiques doivent être corrigées, d'une part, par les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte non locale $\alpha_\nabla = \nabla \alpha$, et d'autre part, par une mesure (pondérée) de l'écart entre les champs aux points de gauss $\vec{a} = (\alpha, \alpha_\nabla)$ et le champ nodal \vec{A} .

2 Application au modèle de Rousselier

Nous décrivons maintenant l'application de cette théorie à gradient au modèle de Rousselier (cf. [R5.03.06] pour plus de détail sur ce modèle).

2.1 Quelques notations du modèle de Rousselier

On rappelle ci-dessous quelques définitions et notations utilisées dans le modèle de Rousselier.

\mathbf{F} : tenseur gradient qui fait passer de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle $\Omega(t)$

\mathbf{F}^p : tenseur gradient « plastique » qui fait passer de la configuration Ω_0 à la configuration relâchée Ω^r

\mathbf{F}^e : tenseur gradient « élastique » qui fait passer de la configuration Ω^r à $\Omega(t)$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad \text{éq 2.1-1}$$

J : variation de volume

$$J = \det \mathbf{F} \quad \text{éq 2.1-2}$$

\mathbf{b}^e : tenseur eulérien de Cauchy-Green gauche de déformation élastique

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} \quad \text{éq 2.1-3}$$

\mathbf{G}^p : tenseur lagrangien de déformation plastique

$$\mathbf{G}^p = (\mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p)^{-1} \quad \text{éq 2.1-4}$$

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F} \mathbf{G}^p \mathbf{F}^T \quad \text{éq 2.1-5}$$

\mathbf{e} : tenseur des déformations utilisé dans le modèle de Rousselier

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{Id} - \mathbf{b}^e) \quad \text{éq 2.1-6}$$

\mathbf{D} : taux de déformation

\mathbf{D}^p : taux de déformation plastique

$$\mathbf{D}^p \cong -\frac{1}{2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^p \mathbf{F}^T \quad \text{éq 2.1-7}$$

$\boldsymbol{\sigma}$: contrainte de Cauchy

$\boldsymbol{\tau}$: contrainte de Kirchhoff

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad \text{éq 2.1-8}$$

\mathbf{s} : tenseur des contraintes utilisé pour le modèle de Rousselier

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{s} \mathbf{b}^e \quad \text{éq 2.1-9}$$

$R = -A$: écrouissage isotrope

p : déformation plastique cumulée

f : la porosité

$$\dot{f} = (1-f) \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^p \mathbf{F}^T \right) \quad \text{éq 2.1-10}$$

F : critère de plasticité du modèle de Rousselier

$$F(\mathbf{s}, A) = s_{eq} + \sigma_1 D f \exp \left(\frac{\text{tr} \mathbf{s}}{3\sigma_1} \right) + A(p) - \sigma_y \quad \text{éq 2.1-11}$$

où σ_y est la limite d'élasticité et σ_1 , D deux paramètres matériaux spécifiques à cette loi.

2.2 Modèle continu

Pour conserver un modèle simple, on se contentera d'introduire, pour contrôler les modes de localisation poro-plastique, un terme quadratique en gradient de déformation plastique cumulée \mathbf{p}_∇ dans l'énergie libre du modèle de Rousselier local. Quant au potentiel de dissipation, il reste inchangé par rapport à la version locale.

$$\Phi(\mathbf{e}, p, \mathbf{p}_\nabla) = \frac{1}{2} \left[K (\text{tr} \mathbf{e})^2 + 2\mu \tilde{\mathbf{e}} : \tilde{\mathbf{e}} \right] + \int_0^p R(u) du + \frac{2L_b^2}{13} \frac{dR}{dp} \mathbf{p}_\nabla \cdot \mathbf{p}_\nabla \quad \text{éq 2.2-1}$$

$$\Delta(\mathbf{D}^p, \dot{p}, \dot{\mathbf{p}}_\nabla) = \sigma_y \dot{p} + \sigma_1 \text{tr} \mathbf{D}^p \left(\ln \frac{\text{tr} \mathbf{D}^p}{D f \dot{p}} - 1 \right) + I_{\text{IR}^+}(\text{tr} \mathbf{D}^p) + I_{\text{IR}^+} \left(\dot{p} - \frac{2}{3} D_{eq}^p \right) \quad \text{éq 2.2-2}$$

Ce potentiel de dissipation correspond au critère de plasticité [éq 2.1-11].

L_b est la longueur caractéristique du matériau qui correspond à la distance moyenne entre deux inclusions, sites privilégiés de germination et nucléation de cavités.

2.3 Modèle discrétisé

Adopter un algorithme purement implicite pour intégrer cette loi de comportement conduit, d'une part, à la résolution d'un système non linéaire assez complexe, et d'autre part, ne permet plus d'exprimer le problème comme la minimisation d'une fonctionnelle. C'est pourquoi on préfère traiter de manière explicite la variation suivant la porosité dans le potentiel de dissipation [éq 2.2-2] ainsi que la variation suivant p du terme quadratique en \mathbf{p}_∇ de l'énergie libre [éq 2.2-1]. Pour les autres termes, on emploie un schéma d'Euler implicite. On notera que la discrétisation du taux de déformation plastique \mathbf{D}^P s'exprime directement en fonction de la déformation élastique \mathbf{e} :

$$\mathbf{D}^P \cong -\frac{1}{2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{G}}^P \mathbf{F}^T = -\frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{b}^e - \mathbf{F} \mathbf{G}^P \mathbf{F}^T] = \frac{1}{\Delta t} \left[\mathbf{e} - \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{Id} - \mathbf{F} \mathbf{G}^P \mathbf{F}^T]}_{\mathbf{e}^{Tr}} \right] = (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{Tr}) / \Delta t \quad \text{éq 2.3-1}$$

Si bien que l'énergie libre et le potentiel de dissipation discrétisés sont donnés par les expressions suivantes :

$$\Phi(\mathbf{e}, p, \mathbf{p}_\nabla) = \frac{1}{2} [K(\text{tr } \mathbf{e})^2 + 2\mu \tilde{\mathbf{e}} : \tilde{\mathbf{e}}] + \int_0^p R(u) du + \frac{2L_b^2}{13} \frac{dR}{dp}(p^-) \mathbf{p}_\nabla \cdot \mathbf{p}_\nabla \quad \text{éq 2.3-2}$$

$$\Delta(\Delta \mathbf{e}, \Delta p) = \sigma_y \Delta p + \sigma_1 \text{tr } \Delta \mathbf{e} \left(\ln \frac{\text{tr } \Delta \mathbf{e}}{Df^- \Delta p} - 1 \right) + I_{\text{IR}^+}(\text{tr } \Delta \mathbf{e}) + I_{\text{IR}^+}(\Delta p - \frac{2}{3} \Delta e_{eq}) \quad \text{éq 2.3-3}$$

avec

$$\Delta t = t - t^-, \Delta \mathbf{e} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}, \Delta p = p - p^- \text{ et } \Delta \mathbf{p}_\nabla = \mathbf{p}_\nabla - \mathbf{p}_\nabla^- \quad \text{éq 2.3-4}$$

q^- est la quantité connue à l'instant précédent t^- .

Conformément au paragraphe [§1.4] [éq 1.4-1], l'intégration du modèle de Rousselier non local s'exprime comme la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\min_{\Delta \mathbf{e}, \Delta \mathbf{p}} \left[\Phi(\mathbf{e}^{Tr} + \Delta \mathbf{e}, \mathbf{p}^- + \Delta \mathbf{p}) + \Delta(\Delta \mathbf{e}, \Delta p) + \frac{r}{2} \|\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{p}}\|_{\bar{\mathbf{N}}}^2 + \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot (\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{p}}) \right] \quad \text{éq. 2.3-5}$$

Ce qui est équivalent à [éq 1.4-1] et [éq 1.4-2] :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{A}}^r &= \bar{\mathbf{A}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} + r \bar{\mathbf{N}} (\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{p}}) \end{aligned} \right\} \in \partial \Delta(\Delta \mathbf{e}, \Delta p) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \mathbf{e} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \\ \Delta p = \lambda \frac{\partial F}{\partial A^r} \\ \mathbf{A}_\nabla^r = 0 \end{cases} \quad \text{éq 2.3-6}$$

D'après l'équation [éq 1.3-7], la matrice de pondération $\bar{\bar{\mathbf{N}}}$ vaut :

$$\bar{\bar{\mathbf{N}}} = \text{Diag} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{\mathbf{p}} \partial \bar{\mathbf{p}}} \right) = h^- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_c^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad h^- = \frac{dR}{dp}(p^-) \text{ et } L_c^2 = \frac{4}{13} L_b^2 \quad \text{éq 2.3-7}$$

Dans toutes ces équations, on a adopté les notations suivantes :

$$\bar{\mathbf{A}} = (A, \mathbf{A}_\nabla) = (-R, -\mathbf{R}_\nabla) \quad \text{éq 2.3-8}$$

$$\bar{\mathbf{A}}^r = (A^r, \mathbf{A}_\nabla^r) \quad \text{éq 2.3-9}$$

$$\bar{\mathbf{p}} = (p, \mathbf{p}_\nabla) \quad \text{éq 2.3-10}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{P}} = (P, \mathbf{P}_\nabla) \quad \text{éq 2.3-11}$$

Le vecteur $\bar{\mathbf{p}}$ représente la déformation plastique cumulée et son gradient, calculé aux points de Gauss tandis que $\bar{\mathbf{P}}$ représente la déformation plastique calculée aux nœuds.

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = (\mu, \boldsymbol{\mu}_\nabla) \quad \text{éq 2.3-12}$$

L'ensemble des équations à résoudre est donc le suivant :

Equations d'état :

$$\mathbf{s} = -[K \text{ tr } \mathbf{e} \mathbf{Id} + 2\mu \tilde{\mathbf{e}}] \quad \text{éq 2.3-13}$$

$$A^r = -R(p) + \mu + r h^- (P - p) = -R(p) - c_1 p + c_2 \quad \text{éq 2.3-14}$$

$$\mathbf{A}_\nabla^r = -h^- L_c^2 \mathbf{p}_\nabla + \boldsymbol{\mu}_\nabla + r h^- L_c^2 (\mathbf{P}_\nabla - \mathbf{p}_\nabla) = -c_3 \mathbf{p}_\nabla + \mathbf{c}_4 = 0 \quad \text{éq 2.3-15}$$

Lois d'écoulement :

$$\text{tr } \Delta \mathbf{e} = \Delta p D f^- \exp \left(\frac{\text{tr } \mathbf{s}}{3\sigma^I} \right) \quad \text{éq 2.3-16}$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{e}} = \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\mathbf{s}}}{s_{eq}} \quad \text{éq 2.3-17}$$

$$\mathbf{p}_\nabla = \frac{\mathbf{c}_4}{c_3} \quad \text{éq 2.3-18}$$

Condition de cohérence :

$$F(\mathbf{s}, A^r) = s_{eq} + \sigma_1 Df^- \exp\left(\frac{\text{tr } \mathbf{s}}{3\sigma_1}\right) + A^r - \sigma^y \quad F \leq 0 \quad \Delta p \geq 0 \quad F \Delta p = 0 \quad \text{éq 2.3-19}$$

Définition des différents coefficients :

$$c_1 = rh^- \geq 0, \quad c_2 = \mu + c_1 P, \quad c_3 = (1+r)h^- L_c^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad c_4 = \mu_\nabla + c_1 L_c^2 \mathbf{P}_\nabla \quad \text{éq 2.3-20}$$

2.4 Traitement des points singuliers

L'expression du cône normal auquel appartient la direction d'écoulement n'est licite qu'aux points où les critères sont dérivables, c'est-à-dire si $s_{eq} \neq 0$. En procédant classiquement par une prédiction élastique suivie d'une correction plastique uniquement si nécessaire, on peut se contenter d'examiner les points singuliers confinés sur la frontière du convexe d'élasticité, c'est-à-dire les points tels que :

$$\tilde{\mathbf{s}} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma^1 Df^- \exp\left(\frac{\text{tr } \mathbf{s}}{3\sigma^1}\right) + A^r = \sigma^y \quad \text{éq 2.4-1}$$

Le cône normal au convexe d'élasticité en un tel point est l'ensemble des directions d'écoulement qui réalise le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{D}^p, \dot{p}, \dot{\mathbf{p}}_\nabla} \left[\mathbf{s} : \mathbf{D}^p + A^r \dot{p} + \mathbf{A}_\nabla^r \cdot \dot{\mathbf{p}}_\nabla - \Delta(\mathbf{D}^p, \dot{p}, \dot{\mathbf{p}}_\nabla) \right] \\ &= \sup_{\substack{\mathbf{D}^p, \dot{p}, \dot{\mathbf{p}}_\nabla \\ \text{tr } \mathbf{D}^p \geq 0 \\ \dot{p} - L_b \|\dot{\mathbf{p}}_\nabla\| - \frac{2}{3} D_{eq}^p \geq 0}} \left[\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{s} \text{tr } \mathbf{D}^p + A^r \dot{p} - \sigma^y \dot{p} - \sigma_1 \text{tr } \mathbf{D}^p \left(\ln \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{Df^- \dot{p}} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad \text{éq 2.4-2}$$

Il s'agit des directions d'écoulement $(\mathbf{D}^p, \dot{p}, \dot{\mathbf{p}}_\nabla)$ caractérisées par :

$$\begin{cases} \text{tr } \mathbf{D}^p = Df^- \dot{p} \exp\left(\frac{\text{tr } \mathbf{s}}{3\sigma_1}\right) \\ \frac{2}{3} D_{eq}^p \leq \dot{p} \end{cases} \quad \text{éq 2.4-3}$$

Ainsi, en un point singulier de la frontière du domaine d'élasticité, les incréments des variables internes $(\Delta \mathbf{e}, \Delta p, \Delta \mathbf{p}_\nabla)$ vérifient simplement :

$$\begin{cases} \text{tr } \Delta \mathbf{e} = Df^- \Delta p \exp\left(\frac{\text{tr } \mathbf{s}}{3\sigma_1}\right) \\ \frac{2}{3} (\Delta \mathbf{e})_{eq} \leq \Delta p \end{cases} \quad \text{éq 2.4-4}$$

3 Résolution numérique

3.1 Expression du modèle discrétisé

Connaissant $\bar{\mu}$ et $\bar{\mathbf{P}}$, les déformations élastiques \mathbf{e}^- , la déformation plastique cumulée p^- , le gradient de la déformation plastique cumulée \mathbf{p}_{∇}^- et les déplacements \mathbf{u}^- et $\Delta\mathbf{u}$, on cherche à déterminer $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}, p, \mathbf{p}_{\nabla}, f)$.

Les déplacements étant connus, les gradients de la transformation de Ω_0 à Ω^- , noté \mathbf{F}^- , et de Ω^- à Ω , noté $\Delta\mathbf{F}$, sont connus.

Le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\mathbf{F} = \Delta\mathbf{F}\mathbf{F}^- \quad \text{éq 3.1-1}$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad \text{éq 3.1-2}$$

$$J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{éq 3.1-3}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{s} \mathbf{b}^e \quad \text{éq 3.1-4}$$

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{Id} - 2\mathbf{e} \quad \text{éq 3.1-5}$$

$$\mathbf{e}^{Tr} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{Id} - \Delta\mathbf{F} \left\{ \mathbf{Id} - 2\mathbf{e}^- \right\} \Delta\mathbf{F}^T \right] \quad \text{éq 3.1-6}$$

Equations d'état :

$$\mathbf{s} = -[K \operatorname{tr} \mathbf{e} \mathbf{Id} + 2\mu\tilde{\mathbf{e}}] \quad \text{éq 3.1-7}$$

$$A^r = -R(p) - c_1 p + c_2 \quad \text{éq 3.1-8}$$

$$\mathbf{A}_{\nabla}^r = -c_3 \mathbf{p}_{\nabla} + \mathbf{c}_4 = \mathbf{0} \quad \text{éq 3.1-9}$$

Définition :

$$c_1 = r h^- \geq 0, \quad c_2 = \mu + c_1 P, \quad c_3 = (1+r) h^- L_c^2 \geq 0, \quad \mathbf{c}_4 = \mu_{\nabla} + c_1 L_c^2 \mathbf{P}_{\nabla}, \quad L_c^2 = \frac{4}{13} L_b^2 \quad \text{éq 3.1-10}$$

Par la suite, on exprime les lois d'écoulement et les critères de plasticité directement en fonction du tenseur des déformations élastiques \mathbf{e} .

Lois d'écoulement :

$$\text{tr } \mathbf{e} - \text{tr } \mathbf{e}^{Tr} = \Delta p D f^- \exp\left(-\frac{K \text{tr } \mathbf{e}}{\sigma_1}\right) \quad \text{éq 3.1-11}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}^{Tr} - \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\mathbf{e}}}{e_{eq}} & \text{si solution régulière} \\ 0 \text{ et } \Delta p \geq \frac{2}{3} (\Delta \mathbf{e})_{eq} & \text{si solution singulière} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-12}$$

$$\mathbf{p}_V = \frac{\mathbf{c}_4}{c_3} \quad \text{éq 3.1-13}$$

Condition de cohérence :

$$F(\mathbf{s}, A^r) = \begin{cases} 2\mu e_{eq} + \sigma_1 D f^- \exp\left(-\frac{K \text{tr } \mathbf{e}}{\sigma_1}\right) + A^r - \sigma^y & \text{si solution régulière} \\ \sigma_1 D f^- \exp\left(-\frac{K \text{tr } \mathbf{e}}{\sigma_1}\right) + A^r - \sigma^y & \text{si solution singulière} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-14}$$

avec $F \leq 0 \quad \Delta p \geq 0 \quad F \Delta p = 0$

Porosité :

La loi d'évolution de la porosité est traitée de la même manière que dans le modèle de Rousselier en version locale. On obtient (cf. [R5.03.06] pour plus de détail) :

$$f = 1 - (1 - f_0) \exp\left(\text{tr } \mathbf{e}^{Tr} - \text{tr } \mathbf{e}\right) \quad \text{éq 3.1-15}$$

où f_0 est la porosité initiale.

3.2 Résolution du système non linéaire

L'intégration de la loi de comportement se résume donc à résoudre uniquement les équations [éq 3.1-11], [éq 3.1-12] et [éq 3.1-14] (l'équation [éq 3.1-13] donne directement \mathbf{p}_V puisque \mathbf{c}_4 et c_3 sont connus). Une fois déterminés p et \mathbf{e} par l'ensemble de ces trois équations, on en déduit la contrainte \mathbf{s} par l'équation [éq 3.1-7], la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par les équations [éq 3.1-3] et [éq 3.1-4] et la porosité f par l'équation [éq 3.1-15].

On remarque que les trois équations à résoudre sont identiques à celles du modèle de Rousselier local où on a uniquement changé la force thermodynamique A par A^r . La résolution est donc identique à ce modèle. Pour cette raison, nous donnons uniquement les grandes lignes. Pour plus de détail, le lecteur se reportera au document [R5.03.06].

Si on pose :

$$x = \text{tr } \mathbf{e} - \text{tr } \mathbf{e}^{Tr} \geq 0 \quad \text{éq 3.2-1}$$

alors, l'équation [éq 3.1-11] s'écrit :

$$\Delta p(x) = \frac{1}{G} x \exp \frac{K x}{\sigma_1} \text{ avec } G = D f^{-} \exp \left(-\frac{K \operatorname{tr} \mathbf{e}^{Tr}}{\sigma_1} \right) \quad \text{éq 3.2-2}$$

Après quelques calculs, l'équation [éq 3.1-12] devient :

$$\tilde{\mathbf{e}}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta p(x)}{e_{eq}^{Tr}} \right) \tilde{\mathbf{e}}^{Tr} & \text{si solution régulière} \\ 0 \text{ et } \Delta p \geq \frac{2}{3} e_{eq}^{Tr} & \text{si solution singulière} \end{cases} \quad \text{éq 3.2-3}$$

Enfin, si on pose :

$$S(x) = R(p(x)) + \sigma_y + c_1 p(x) - c_2 - \sigma_1 G \exp \left(-\frac{Kx}{\sigma_1} \right) \quad \text{éq 3.2-4}$$

où $S(x)$ est une fonction continue et strictement croissante de x , alors la condition de cohérence [éq 3.1-14] s'écrit (en utilisant [éq 3.2-3]) :

$$F(x) = \begin{cases} 2\mu e_{eq}^{Tr} - 3\mu \Delta p - S(x) \leq 0 & \text{si solution régulière} \\ S(x) = 0 & \text{si solution singulière} \end{cases} \quad \text{éq 3.2-5}$$

On se ramène donc à résoudre cette équation scalaire en x . La variable x est positive ou nulle $x \geq 0$ pour garantir une déformation plastique cumulée positive et la solution élastique est obtenue pour $x=0$.

3.3 Déroulement du calcul

La démarche générale pour déterminer x est la suivante :

- 1) On recherche si la solution est élastique
 - calcul de $F(0)$
 - si $F(0) < 0$, alors la solution du problème est la solution élastique $x^{Sol} = 0$
 - sinon on passe en 2)
- 2) Si $S(0) > 0$, la solution est plastique et régulière
 - on passe en 4)
- 3) Si $S(0) < 0$, on cherche si la solution est singulière
 - on résout $S(x^s) = 0$
 - si x^s vérifie l'inégalité $\Delta p^s \geq \frac{2}{3} \tilde{e}_{eq}^{Tr}$, alors la solution est singulière $x^{Sol} = x^s$
 - sinon, x^s est une borne inférieure pour résoudre $F(x^{Sol}) = 0$, on passe en 4)
- 4) La solution est plastique et régulière
 - on résout $F(x^{Sol}) = 0$

3.4 Résolution des fonctions à annuler

Pour résoudre les équations $S(x) = 0$, $F(x) = 0$, on emploie une méthode de Newton avec bornes contrôlées couplée à de la dichotomie lorsque Newton donne une solution en dehors de l'intervalle des deux bornes. On présente maintenant la détermination des bornes pour chacun des cas précédents.

3.4.1 Bornes supérieure et inférieure dans le cas où $S(0) > 0$

On résout :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \\ F(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{2\mu e_{eq}^{Tr} - S(x)}_{f_1} = \underbrace{\frac{3\mu}{G} x \exp\left(\frac{Kx}{\sigma_1}\right)}_{3\mu\Delta p} \\ f_1(0) > 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.4.1-1}$$

où la fonction $\Delta p(x)$ est continue, strictement croissante et nulle à l'origine et la fonction $f_1(x)$ est continue, strictement décroissante et strictement positive à l'origine (voir [Figure 3.4.1-a]).

On pose :

$$f_1 = \underbrace{2\mu e_{eq}^{Tr} - R(x) - \sigma_y - c_1 p + c_2}_{f_2} + \sigma_1 G \exp\left(-\frac{Kx}{\sigma_1}\right) \quad \text{alors} \quad f_2(x) < f_1(x) \quad \forall x \geq 0 \quad \text{éq 3.4.1-2}$$

où la fonction $f_2(x)$ est continue, strictement décroissante. On envisagera deux cas.

Cas où $f_2(0) > 0$

Dans ce cas, la résolution successive des équations :

$$f_2(\Delta p^{Inf}) = 3\mu\Delta p^{Inf} \quad \text{éq 3.4.1-3}$$

pour en déduire Δp , puis

$$x^{Inf} \exp\left(\frac{Kx^{Inf}}{\sigma_1}\right) = G\Delta p^{Inf} \quad \text{éq 3.4.1-4}$$

pour en déduire x donne une borne inférieure x^{Inf} .

Remarque :

Dans le Code_Aster, la routine *rcfonc* résout l'équation correspondant à la solution du modèle à écrouissage isotrope et critère de Von Mises, c'est-à-dire $\sigma_{eq}^{el} - R(p) - \sigma_y = 3\mu\Delta p$. On fournit en entrée de cette routine σ_{eq}^{el} , le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . Si on pose $\sigma_{eq}^{el} = 2\mu e_{eq}^{Tr} - c_1 p^- + c_2$ et $E = \frac{2(1+\nu)}{3} [3\mu + c_1]$, la fonction $f_2(\Delta p^{Inf}) = 3\mu\Delta p^{Inf}$ se ramène à résoudre une équation du type $\sigma_{eq}^{el} - R(p) - \sigma_y = 3\mu\Delta p$.

Cas où $f_2(0) \leq 0$

Dans ce cas, la borne inférieure est prise égale à zéro : $x^{Inf} = 0$.

La borne supérieure x^{Sup} est telle que :

$$3\mu\Delta p^{Sup} = f_1(x^{Inf}) \Leftrightarrow x^{Sup} \exp\left(\frac{Kx^{Sup}}{\sigma_1}\right) = \frac{G}{3\mu} f_1(x^{Inf}) \quad \text{éq 3.4.1-5}$$

L'équation du type $x \exp\left(\frac{Kx}{\sigma_1}\right) = \text{constante}$ est résolue par une méthode de Newton.

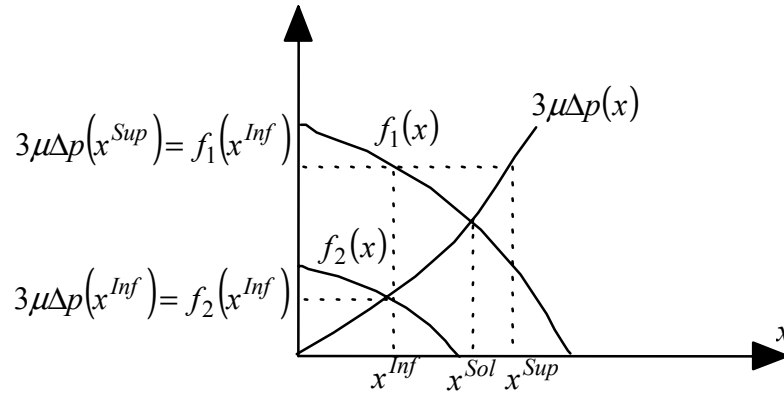


Figure 3.4.1-a : Représentation graphique des bornes supérieure et inférieure

3.4.2 Bornes supérieure et inférieure dans le cas où $S(0) = 0$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} S(x) = 0 \\ S(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R\left(p^- + \frac{x}{G} \exp\left(\frac{Kx}{\sigma_1}\right)\right) + \sigma_y + c_1 p - c_2 = \sigma_1 G \exp\left(-\frac{Kx}{\sigma_1}\right) \\ R(p^-) + \sigma_y + c_1 p^- - c_2 < \sigma_1 G \end{cases} \quad \text{éq 3.4.2-1}$$

La partie de gauche est une fonction continue, strictement croissante de x , la partie de droite est une fonction continue, strictement décroissante de x et strictement positive à l'origine.

Deux cas doivent être envisagés.

Cas où $R(p^-) + \sigma_y + c_1 p^- - c_2 > 0$:

Utilisant les propriétés des deux fonctions, une représentation graphique (cf. [Figure 3.4.2-a]) de ces fonctions montre que la borne supérieure x^{Sup} est telle que :

$$\sigma_1 G \exp\left(-\frac{Kx^{Sup}}{\sigma_1}\right) = R(p^-) + \sigma_y + c_1 p^- - c_2 \Leftrightarrow x^{Sup} = \frac{\sigma_1}{K} \log\left(\frac{\sigma_1 G}{R(p^-) + \sigma_y + c_1 p^- - c_2}\right) \quad \text{éq 3.4.2-2}$$

La borne inférieure x^{Inf} est telle que :

$$\sigma_1 G \exp\left(-\frac{Kx^{Inf}}{\sigma_1}\right) = R(p^{Sup}) + \sigma_y + c_1 p^{Sup} - c_2$$

$$\Leftrightarrow x^{Inf} = \left\langle \frac{\sigma_1}{K} \log\left(\frac{\sigma_1 G}{R(p^{Sup}) + \sigma_y + c_1 p^{Sup} - c_2}\right) \right\rangle^+$$
éq 3.4.2-3

Cas où $R(p^-) + \sigma_y + c_1 p^- - c_2 \leq 0$:

Dans ce cas, on prendra pour la borne inférieure :

$$x^{Inf} = 0$$
éq 3.4.2-4

La résolution successive des deux équations :

$$\sigma_1 G + c_2 - c_1 p^- - R(p^{Sup}) - \sigma_y = c_1 \Delta p^{Sup} \text{ et } x^{Sup} \exp\left(\frac{Kx^{Sup}}{\sigma_1}\right) = G \Delta p^{Sup} \quad \text{éq 3.4.2-5}$$

permet d'en déduire Δp puis x pour donner une borne supérieure x^{Sup} . Pour résoudre l'équation de gauche ci-dessus, il suffit (voir remarque du paragraphe précédent) d'utiliser la routine rcfonc en posant $\sigma_{eq}^{el} = \sigma_1 G - c_1 p^- + c_2$, $E = \frac{2(1+\nu)}{3} c_1$ et $\nu = 1$.

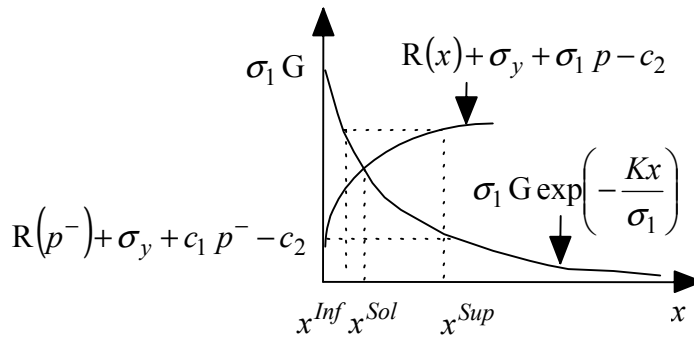


Figure 3.4.2-a : Représentation graphique des bornes supérieure et inférieure

3.4.3 Bornes supérieure et inférieure dans le cas où $S(0) < 0$ et x^s non solution

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \\ S(0) < 0 \\ S(x^s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{2\mu e_{eq}^{Tr} - S(x)}_{f_1} = \underbrace{\frac{3\mu}{G} x \exp\left(\frac{Kx}{\sigma_1}\right)}_{3\mu \Delta p} \\ f_1(0) > 0 \\ 2\mu e_{eq}^{Tr} = \frac{3\mu}{G} x^s \exp\left(\frac{Kx^s}{\sigma_1}\right) \end{cases} \quad \text{éq 3.4.3-1}$$

La solution x^{Sol} est telle que $S(x^{Sol}) > 0$.

Pour la borne inférieure, on prend $x^{Inf} = x^s$. Etant données les propriétés des fonctions f_1 (strictement décroissante) et $3\mu\Delta p(x)$ (strictement croissante), la borne supérieure x^{Sup} est telle que (cf. [Figure 3.4.3-a]) :

$$x^{Sup} \exp\left(\frac{Kx^{Sup}}{\sigma_1}\right) = \frac{2G}{3} e_{eq}^{Tr} \quad \text{éq 3.4.3-2}$$

Cette équation est résolue par une méthode de Newton.

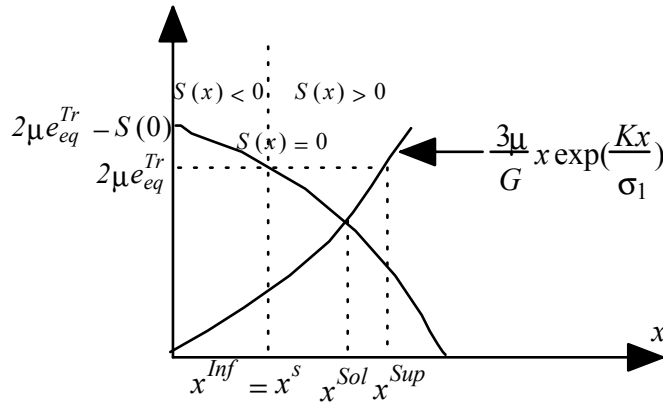


Figure 3.4.3-a : représentation graphique des bornes supérieure et inférieure

3.5 Expression de la matrice tangente

La résolution du problème primal (calcul de $\bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{p}}$) par une méthode de Newton, nécessite le calcul de la matrice tangente suivante :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \bar{\mathbf{P}}} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial \mathbf{P}_\nabla} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_\nabla}{\partial P} & \frac{\partial \mathbf{p}_\nabla}{\partial \mathbf{P}_\nabla} \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.5-1}$$

3.5.1 Cas élastique

On rappelle que la solution élastique est donnée par :

$$p = p^- \quad \text{éq 3.5.1-1}$$

$$\mathbf{p}_\nabla = \frac{\mathbf{c}_4}{c_3} \quad \text{éq 3.5.1-2}$$

ce qui donne pour la matrice tangente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial P} &= 0 & \frac{\partial p}{\partial P_{\nabla i}} &= 0 \\ \frac{\partial p_{\nabla i}}{\partial P} &= 0 & \frac{\partial p_{\nabla i}}{\partial P_{\nabla j}} &= \frac{r}{1+r} \delta_{ij} \end{aligned} \quad \text{éq 3.5.1-3}$$

3.5.2 Cas singulier

La solution singulière est donnée par les équations :

$$p = p^- + \frac{x}{G} e^{Kx/\sigma_1} \quad \text{éq 3.5.2-1}$$

$$\mathbf{p}_\nabla = \frac{\mathbf{c}_4}{c_3} \quad \text{éq 3.5.2-2}$$

avec x qui vérifie :

$$S(x) = R(p) + c_1 p - c_2 + \sigma_y - \sigma_1 G e^{-Kx/\sigma_1} = 0 \quad \text{éq 3.5.2-3}$$

et

$$c_2 = \mu + c_1 P, \quad \mathbf{c}_4 = \mu_\nabla + r h^- L_c^2 \mathbf{P}_\nabla \quad \text{éq 3.5.2-4}$$

La linéarisation de ce système donne :

$$\delta p = \underbrace{\frac{1}{G} \left(1 + \frac{Kx}{\sigma_1}\right)}_{\text{coef}^1} e^{Kx/\sigma_1} \delta x \quad \text{éq 3.5.2-5}$$

$$\delta \mathbf{p}_\nabla = \frac{r}{1+r} \delta \mathbf{P}_\nabla \quad \text{éq 3.5.2-6}$$

$$\delta S(x) = (h + c_1) \delta p - c_1 \delta P + K G e^{-Kx/\sigma_1} \delta x = 0 \quad \text{éq 3.5.2-7}$$

En remplaçant δp dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\delta x = \frac{c_1 e^{-Kx/\sigma_1}}{coef^1(h+c_1) + KGe^{-2Kx/\sigma_1}} \delta P \quad \text{éq 3.5.2-8}$$

ce qui donne pour l'expression de δp :

$$\delta p = \frac{1}{\underbrace{(h+c_1)coef^1 + KGe^{-2Kx/\sigma_1}}_{coef^2}} c_1 coef^1 \delta P \quad \text{éq 3.5.2-9}$$

soit pour la matrice tangente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial P} &= \frac{c_1 coef^1}{coef^2} & \frac{\partial p}{\partial P_{\nabla i}} &= 0 \\ \frac{\partial p_{\nabla i}}{\partial P} &= 0 & \frac{\partial p_{\nabla i}}{\partial P_{\nabla j}} &= \frac{r}{1+r} \delta_{ij} \end{aligned} \quad \text{éq 3.5.2-10}$$

3.5.3 Cas régulier

La solution régulière est donnée par les équations :

$$p = p^- + \frac{x}{G} e^{Kx/\sigma_1} \quad \text{éq 3.5.3-1}$$

$$\mathbf{p}_{\nabla} = \frac{\mathbf{c}_4}{c_3} \quad \text{éq 3.5.3-2}$$

x vérifie :

$$F = 2\mu e_{eq}^{Tr} - 3\mu \Delta p(x) - S(x) = 0 \quad \text{éq 3.5.3-3}$$

La linéarisation de l'ensemble de ces équations donne :

$$\delta p = coef^1 e^{Kx/\sigma_1} \delta x \quad \text{éq 3.5.3-4}$$

$$\delta \mathbf{p}_{\nabla} = \frac{r}{1+r} \delta \mathbf{P}_{\nabla} \quad \text{éq 3.5.3-5}$$

$$\delta F = -3\mu \delta p(x) - \delta S(x) = 0 \quad \text{éq 3.5.3-6}$$

$$\delta S(x) = (h+c_1)\delta p - c_1 \delta P + KGe^{-Kx/\sigma_1} \delta x \quad \text{éq 3.5.3-7}$$

En remplaçant dans l'équation [éq 3.5.3-6], l'expression de δp [éq 3.5.3-4], on obtient pour δx :

$$\underbrace{\left(coef^1 (h + c_1 + 3\mu) + KGe^{-2Kx/\sigma_1} \right)}_{coef^2} e^{Kx/\sigma_1} \delta x = c_1 \delta P \quad \text{éq. 3.5.3-8}$$

On trouve alors :

$$\delta p = \frac{c_1 coef^1}{coef^2} \delta P \quad \text{éq 3.5.3-9}$$

$$\delta p_{\nabla} = \frac{r}{1+r} \delta P_{\nabla} \quad \text{éq 3.5.3-10}$$

ce qui fait pour la matrice tangente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial P} &= \frac{c_1 coef^1}{coef^2} & \frac{\partial p}{\partial P_{\nabla i}} &= 0 \\ \frac{\partial p_{\nabla i}}{\partial P} &= 0 & \frac{\partial p_{\nabla i}}{\partial P_{\nabla j}} &= \frac{r}{1+r} \delta_{ij} \end{aligned} \quad \text{éq 3.5.3-11}$$

4 Relation 'ROUSSELIER'

On active la formulation non locale du modèle de Rousselier par l'une des modélisations 'X_GRAD_VARI' de la commande AFPE_MODELE du mot clé MODELE. Quant au modèle même, il est disponible dans la commande STAT_NON_LINE par l'intermédiaire du mot-clé RELATION : 'ROUSSELIER' sous le mot-clé facteur COMP_INCR et avec le mot-clé DEFORMATION : 'SIMO_MIEHE'.

L'ensemble des paramètres du modèle est fourni sous les mots clés facteurs 'ROUSSELIER' ou 'ROUSSELIER_FO' et 'TRACTION' (pour définir la courbe de traction) de la commande DEFI_MATERIAU ([U4.23.01]). La longueur caractéristique L_b est donnée sous le mot clé LONG_CARA de DEFI_MATERIAU.

Les contraintes sont les contraintes de Cauchy σ , calculées donc sur la configuration actuelle (six composantes en 3D, quatre en 2D).

Les variables internes produites dans le Code_Aster sont :

- V1, la déformation plastique cumulée p ,
- V2 à V4, le gradient suivant les axes x, y et z de p ,
- V5, la porosité f ,
- V6 à V11, le tenseur de déformations élastiques ϵ ,
- V12, l'indicateur de plasticité (0 si le dernier incrément calculé est élastique, 1 si solution plastique régulière, 2 si solution plastique singulière).

Remarque :

Si l'utilisateur veut récupérer éventuellement des déformations en post-traitement de son calcul, il faut tracer les déformations de Green-Lagrange E , qui représente une mesure des déformations en grandes déformations. Les déformations linéarisées ϵ classiques mesurent des déformations sous l'hypothèse des petites déformations et n'ont pas de sens en grandes déformations.

5 Bibliographie

- [1] LORENTZ E. : "Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique", Thèse de doctorat de l'université Paris 6, 27 avril 1999.

Page laissée intentionnellement blanche.