

Manuel de Référence
Fascicule R5.03 : Mécanique non linéaire
Document : R5.03.18

Loi d'endommagement d'un matériau élastique fragile

Résumé :

Ce document décrit le modèle de comportement élastique fragile `ENDO_FRAGILE` disponible en statique et en dynamique. L'endommagement est modélisé de manière scalaire ; les chargements en compression et en traction ne sont pas distingués. Outre le modèle local, les formulations non locales à gradient d'endommagement et à déformation régularisée sont également supportées pour contrôler les phénomènes de localisation.

1 Domaine d'application

La loi ENDO_FRAGILE vise à modéliser de la manière la plus simple possible un comportement élastique fragile. Le matériau est élastique isotrope. Sa rigidité peut décroître de manière irréversible lorsque l'énergie de déformation devient importante, sans distinguer la traction de la compression. Cette perte de rigidité est mesurée par une variable interne scalaire appelée endommagement qui évolue de 0 (matériau sain) à 1 (matériau totalement endommagé, c'est-à-dire sans rigidité). En outre, la contrainte ne peut dépasser un seuil qui décroît lui aussi avec le niveau d'endommagement pour atteindre 0 lorsque le matériau est totalement endommagé. On se reportera à [bib1] pour une description de ce type de phénoménologie.

La propriété de décroissance du seuil en contrainte avec le niveau d'endommagement est appelée adoucissement et entraîne généralement une perte d'ellipticité des équations du problème. Il en résulte une localisation des déformations et de l'endommagement dans des bandes dont l'épaisseur est directement contrôlée par la taille des éléments finis. Pour pallier cette déficience du modèle, deux formulations non locales sont proposées, l'une fondée sur l'introduction du gradient de l'endommagement et activée par la modélisation *_GRAD_VARI [R5.04.01], l'autre s'appuyant sur une régularisation des déformations et activée par la modélisation *_GRAD_EPSI [R5.04.02]. Dans un cas comme dans l'autre, la largeur des bandes de localisation est dorénavant contrôlée par un paramètre matériau, renseigné dans l'opérateur DEFI_MATERIAU sous le mot-clé LONG_CARA du mot-clé facteur NON_LOCAL [U4.43.01]. Cependant, l'obtention d'un problème physique à nouveau bien posé n'est obtenu qu'au prix d'un surcoût important en temps calcul. Par ailleurs, il faut bien remarquer que seules les relations de comportement sont altérées et non les équations d'équilibre. Par conséquent, les contraintes conservent leur sens usuel.

Enfin, que l'on active ou non ces formulations non locales, le caractère adoucissant du comportement entraîne également l'apparition d'instabilités, physiques ou parasites, qui se traduisent par des snap-backs sur la réponse globale et rendent le pilotage du chargement indispensable en statique. Le pilotage de type PRED_ELAS [R5.03.80] apparaît alors comme le mode de contrôle du niveau de chargement le plus approprié.

2 Loi de comportement locale

2.1 Relations de comportement

L'état du matériau est caractérisé par la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et l'endommagement d compris entre 0 et 1. La relation contrainte – déformation est élastique, la rigidité est affectée de manière linéaire par l'endommagement :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 2.1-1}$$

avec \mathbf{E} le tenseur de Hooke. Par ailleurs, l'évolution de l'endommagement, toujours croissante, est gouvernée par la fonction seuil suivante :

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - k(d) \quad \text{où} \quad k(d) = w^y \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma - d} \right)^2 \quad \text{éq 2.1-2}$$

Les coefficients w^y et γ , tous deux positifs, sont des paramètres du modèle. La condition de cohérence détermine alors totalement le taux d'endommagement \dot{d} :

$$f(\epsilon, d) \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad \dot{d} f(\epsilon, d) = 0 \quad \text{éq 2.1-3}$$

Les équations [éq 2.1-1] à [éq 2.1-3] suffisent à décrire entièrement la loi de comportement ENDO_FRAGILE, effectivement très simple. On peut également remarquer qu'elle s'insère dans le formalisme proposé par Marigo [bib2].

2.2 Identification des paramètres du modèle

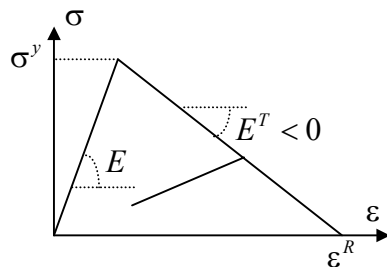
Les paramètres de cette loi de comportement sont au nombre de quatre. D'une part, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν qui déterminent le tenseur de Hooke par :

$$\mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \text{Id} \quad \text{éq 2.2-1}$$

D'autre part, w^y et γ qui définissent le comportement adoucissant. Ils sont déterminés par un essai de traction simple, cf. [Figure 2.2-a]. Pour simplifier l'entrée des données du modèle, on renseigne non pas w^y et γ mais directement le module tangent E^T et la contrainte au pic σ^y sous le mot-clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU. Quant à E et ν , ils sont donnés classiquement sous le mot-clé facteur ELAS ou ELAS_FO.

A toutes fins utiles, voici également les expressions de la déformation à rupture ϵ^R dans cet essai de traction simple, ainsi que l'énergie volumique k^0 consommée pour endommager totalement un point matériel, cette dernière expression étant valable quelle que soit l'histoire de chargement :

$$\epsilon^R = \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E^T} \right) \sigma^y \quad k^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E^T} \right) \sigma^{y2} = \frac{1}{2} \epsilon^R \sigma^y = w^y \frac{1+\gamma}{\gamma} \quad \text{éq 2.2-2}$$



$$w^y = \frac{\sigma^{y2}}{2E}$$

$$\gamma = -\frac{E^T}{E}$$

Figure 2.2-a : Simulation d'un essai de traction simple

2.3 Intégration de la loi de comportement

La discrétisation temporelle des équations [éq 2.1-1] à [éq 2.1-3] sur un pas de temps $[t^- t]$ est réalisée par un schéma d'Euler implicite. Pour toute fonction du temps q , on note $q^- = q(t^-)$ et $q = q(t)$. Intégrer en temps la loi de comportement signifie alors déterminer l'état de contrainte et d'endommagement solution du système non linéaire suivant, où la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et l'état du matériau au début du pas de temps $(\boldsymbol{\varepsilon}^-, d^-)$ sont donnés :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 2.3-1}$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \leq 0 \quad d - d^- \geq 0 \quad (d - d^-) f(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = 0 \quad \text{éq 2.3-2}$$

Une méthode de résolution a été proposée par [bib3]. Elle commence par examiner la solution sans évolution de l'endommagement (aussi appelée essai élastique) puis, si nécessaire, procède à une correction pour vérifier la condition de cohérence. Dans le cas présent, l'existence et l'unicité de la solution garantissent le bon fonctionnement de la méthode. Considérons l'essai élastique :

$$d = d^- \quad \text{solution si } f^{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = f(\boldsymbol{\varepsilon}, d^-) \leq 0 \quad \text{éq 2.3-3}$$

Dans le cas contraire, l'endommagement est obtenu en résolvant $f(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = 0$:

$$d = (1 + \gamma) \left(1 - \sqrt{\frac{w^y}{w}} \right) \quad \text{où } w = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 2.3-4}$$

Quant à la contrainte, elle est donnée par [éq 2.3-1] dans tous les cas.

Il reste encore à s'assurer que l'endommagement ne dépasse pas la valeur 1. En fait, lorsque $d = 1$, la rigidité du point matériel considéré s'annule. Dans la mesure où aucune technique de suppression des éléments finis « cassés » n'est mise en œuvre (technique éventuellement délicate lorsque les éléments finis possèdent plusieurs points de Gauss), des pivots nuls peuvent apparaître dans la matrice de rigidité. C'est pourquoi on introduit un seuil numérique d_c au-delà duquel on considère une rigidité résiduelle élastique pour la matrice tangente, les équations de comportement restant inchangées.

Pour préserver un conditionnement raisonnable de la matrice de rigidité, on choisit $d_c = 1 - 10^{-5}$. Un indicateur χ , rangé dans la deuxième variable interne, précise alors le comportement pendant le pas de temps courant :

- $\chi = 0$ comportement élastique (énergie de déformation inférieure au seuil)
- $\chi = 1$ évolution de l'endommagement
- $\chi = 2$ (endommagement saturé) ($d = 1$).

2.4 Description des variables internes

Les variables internes sont au nombre de deux :

- VI(1) endommagement d
- VI(2) indicateur χ

3 Formulation avec gradient d'endommagement

3.1 Cadre standard généralisés

Pour pallier la localisation pathologique des déformations et de l'endommagement inhérente au caractère adoucissant du matériau, une première alternative consiste à étendre la loi de comportement en prenant en compte le gradient de l'endommagement à l'échelle du point matériel [bib4]. Cette approche est restreinte aux matériaux standard généralisés. Le modèle ENDO_FRAGILE entre effectivement dans ce cadre ; l'énergie libre microscopique Φ_μ et le potentiel de dissipation microscopique Δ_μ s'écrivent :

$$\Phi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1-d) \Phi_{el}^0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Phi_{bl}(d) + I_{[0,1]}(d) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Phi_{el}^0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \Phi_{bl}(d) = -k^0 \frac{d(1-d)}{1+\gamma-d} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-1}$$

$$\Delta_\mu(\dot{d}) = k^0 \dot{d} + I_{[0,+\infty[}(\dot{d}) \quad \text{éq 3.1-2}$$

où I_K désigne l'indicatrice de l'ensemble convexe K , nulle dans K et valant $+\infty$ ailleurs. On remarquera la convexité de ces potentiels par rapport à l'endommagement, convexité stricte pour l'énergie libre : cela confirme l'existence et l'unicité de la solution pour l'intégration de la loi.

Pour conserver un modèle simple, on se contentera d'introduire un terme quadratique en gradient d'endommagement dans l'énergie libre. Le potentiel de dissipation reste inchangé. Par conséquent, les potentiels macroscopiques s'écrivent :

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, d_\bullet, \mathbf{d}_\nabla) = (1-d_\bullet) \Phi_{el}^0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Phi_{bl}(d_\bullet) + I_{[0,1]}(d_\bullet) + \frac{1}{2} c \mathbf{d}_\nabla \cdot \mathbf{d}_\nabla \quad \text{éq 3.1-3}$$

$$\Delta(\dot{d}_\bullet, \dot{\mathbf{d}}_\nabla) = k^0 \dot{d}_\bullet + I_{[0,+\infty[}(\dot{d}_\bullet) \quad \text{éq 3.1-4}$$

où le facteur c dépend de la longueur caractéristique L_b du matériau (distance caractéristique d'interaction entre les micro-fissures donnée sous le mot-clé LONG_CARA de DEFI_MATERIAU) de la manière suivante :

$$c = \frac{\partial^2 \Phi_\mu}{\partial d^2}(\boldsymbol{\varepsilon}, 0) \frac{4 L_b^2}{13} = \frac{8\gamma}{13(1+\gamma)^2} k^0 L_b^2 \quad \text{éq 3.1-5}$$

Les potentiels macroscopiques ainsi construits permettent alors de définir les potentiels globaux à l'origine de la formulation variationnelle de la loi de comportement. Dans ce cas relativement simple, on sait interpréter cette formulation variationnelle en terme de lois d'état et d'évolution locales dont les expressions sont proches de celles pour la loi locale :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 3.1-6}$$

$$f_G(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - k(d) + c \Delta d \quad \text{éq 3.1-7}$$

$$f_G(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad \dot{d} f_G(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = 0 \quad \text{éq 3.1-8}$$

La différence essentielle avec le modèle local réside dans la définition de la fonction seuil qui dépend dorénavant du laplacien de l'endommagement. Ce dernier confère à la condition de cohérence un caractère différentiel. L'interprétation de la formulation variationnelle fournit également les conditions aux limites pour le champ d'endommagement ainsi que les conditions d'interface (ou saut) :

$$\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur le bord de normale } \mathbf{n} \quad \text{éq 3.1-9}$$

$$\llbracket c \nabla d \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0 \quad \text{au franchissement d'une interface de normale } \mathbf{n} \quad \text{éq 3.1-10}$$

3.2 Intégration de la loi de comportement

L'intégration des lois de comportement à gradients de variables internes est décrite dans le fascicule [R5.04.01]. Elle s'appuie entre autres sur une étape locale qui dépend explicitement de la relation de comportement traitée. C'est celle-ci qu'on se propose de décrire ici.

Tout d'abord, il est nécessaire de définir la norme utilisée pour construire le terme de pénalisation du lagrangien augmenté, c'est-à-dire la matrice $\vec{\vec{N}}$. Comme recommandé, on adopte une estimation diagonale de la matrice hessienne de l'énergie par rapport aux variables d'endommagement, ce qui conduit à :

$$\vec{\vec{N}} = \begin{bmatrix} N_{\bullet\bullet} & & & \\ & N_{\nabla\nabla} & & \\ & & N_{\nabla\nabla} & \\ & & & N_{\nabla\nabla} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_{\bullet\bullet} = \frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} k^0 \\ N_{\nabla\nabla} = \frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} k^0 \frac{4L_b^2}{13} \end{cases} \quad \text{éq 3.2-1}$$

Conformément à la théorie générale, il faut maintenant résoudre le système non linéaire suivant, dans lequel l'état au début du pas de temps ainsi que la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, les multiplicateurs de Lagrange $\vec{\mu}$, le coefficient de pénalisation r et l'endommagement nodal évalué au point de Gauss courant $\vec{\delta} = \mathbf{B} \mathbf{D}$ sont donnés :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{d}) + \vec{\mu} + r \vec{\vec{N}} \cdot (\vec{\delta} - \vec{d}) \in \partial_{\vec{d}} \Delta(\vec{d} - \vec{d}^-) \quad \text{éq 3.2-2}$$

où, une fois de plus, la notation compacte $\vec{d} = (d_\bullet, \mathbf{d}_\nabla)$ est utilisée. Etant donné le découplage entre la valeur et le gradient de l'endommagement dans l'énergie libre et le potentiel de dissipation, le système [éq 3.2-2] permet de traiter séparément le gradient de l'endommagement et sa valeur :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{d}_\nabla}(\mathbf{d}_\nabla) + \mu_\nabla + r N_{\nabla\nabla}(\delta_\nabla - \mathbf{d}_\nabla) = 0 \quad \text{éq 3.2-3}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial d_\bullet}(\varepsilon, d_\bullet) + \mu_\bullet + r N_{\bullet\bullet}(\delta_\bullet - d_\bullet) \in \partial \Delta_\mu(d_\bullet - d_\bullet^-) \quad \text{éq 3.2-4}$$

D'une part, l'équation [éq 3.2-3] permet de déterminer immédiatement le gradient d'endommagement :

$$\mathbf{d}_\nabla = \frac{\mu_\nabla + r N_{\nabla\nabla} \delta_\nabla}{c + r N_{\nabla\nabla}} \quad \text{éq 3.2-5}$$

Quant à l'équation [éq 3.2-4], elle s'interprète comme une équation de cohérence :

$$F(A_\bullet^r) \leq 0 \quad d_\bullet - d_\bullet^- \geq 0 \quad (d_\bullet - d_\bullet^-) F(A_\bullet^r) = 0 \quad \text{avec} \quad F(A_\bullet^r) = A_\bullet^r - k^0 \quad \text{éq 3.2-6}$$

dans laquelle la force thermodynamique A_\bullet^r a pour expression :

$$A_\bullet^r = -\frac{\partial \Phi}{\partial d_\bullet}(\varepsilon, d_\bullet) + \mu_\bullet + r N_{\bullet\bullet}(\delta_\bullet - d_\bullet) \quad \text{éq 3.2-7}$$

La résolution de cette équation de cohérence est similaire à celle pour le modèle local [éq 2.3-1]-[éq 2.3-4]. D'abord, un essai élastique puis une correction si nécessaire. Etant donnée la stricte convexité des potentiels, la solution est unique. Lorsque l'essai élastique n'est pas solution, la résolution de l'équation $F(A_\bullet^r) = 0$ conduit à :

$$w + \mu_\bullet + r N_{\bullet\bullet} \delta_\bullet = r N_{\bullet\bullet} d_\bullet + k(d_\bullet) \quad \text{où} \quad w = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \mathbf{E} \cdot \varepsilon \quad \text{éq 3.2-8}$$

Après quelques manipulations, cette équation se ramène à la recherche des racines d'un polynôme de degré 3 en d_\bullet , dont on sait qu'une seule (celle qu'on cherche) est supérieure à d_\bullet^- .

3.3 Estimation du laplacien de l'endommagement

Comme la loi locale, la loi à gradients peut conduire à des instabilités structurelles. Le pilotage par la prédiction élastique `PRED_ELAS` peut alors se révéler indispensable. Mais ce dernier requiert la donnée d'un seuil d'élasticité point par point, dont l'existence n'est pas nécessairement acquise en présence de modèles non locaux. En fait, dans le cas présent, un tel seuil existe grâce à l'interprétation [éq 3.1-6]-[éq 3.1-8] de la formulation variationnelle du comportement : c'est la fonction f_G .

Cependant, l'évaluation de ce seuil nécessite de connaître le laplacien du champ d'endommagement qui n'est pas calculé par l'algorithme d'intégration des lois non locales. Connaître le champ nodal d'endommagement ne suffit d'ailleurs pas car les fonctions de forme, polynômes de degré 1, ne permettent pas d'estimer directement une dérivée seconde. Heureusement, le recours à un artifice permet malgré tout d'estimer le laplacien avec une précision suffisante pour l'algorithme de pilotage. En effet, à la fin d'un pas de temps, l'équation de cohérence [éq 3.1-8] est vérifiée, et ce d'autant mieux que la précision demandée par l'utilisateur (mot-clé `RESI_DUAL_ABSO` sous le mot-clé facteur `LAGR_NON_LOCAL`) est grande. En chaque point de Gauss, on peut donc être confronté à deux cas de figure. Soit le seuil n'est pas atteint et, dans ce cas, l'endommagement en ce point ne varie pas. On suppose alors qu'il en est de même pour le laplacien :

$$d = d^- \Rightarrow \Delta d = \Delta d^- \quad \text{éq 3.3-1}$$

Dans le cas contraire, l'endommagement évolue et l'équation $f_G(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = 0$ est vérifiée, si bien qu'on en déduit :

$$\Delta d = \frac{1}{c} \left[k(d) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right] \quad \text{éq 3.3-2}$$

En toute rigueur, ceci ne permet pas de déterminer le laplacien lorsque l'endommagement est saturé. Cela dit, ça n'a pas d'importance puisque ces points ne sont pas pris en compte pour piloter le chargement (on cherche des points qui dissipent).

3.4 Description des variables internes

Dans le cas de la formulation à gradient d'endommagement, les variables internes sont maintenant au nombre de six :

- VI(1) endommagement d
- VI(2) gradient de l'endommagement ∇d , composante x (r en axisymétrique)
- VI(3) gradient de l'endommagement ∇d , composante y (z en axisymétrique)
- VI(4) gradient de l'endommagement ∇d , composante z (0 en 2D)
- VI(5) estimation du laplacien de l'endommagement Δd (tant que $d < 1$)
- VI(6) indicateur χ

4 Formulation avec déformation régularisée

4.1 Formulation continue en temps

L'approche à déformation régularisée [R5.04.02] permet elle aussi de contrôler les phénomènes de localisation et apparaît à ce titre comme une alternative à la formulation avec gradient d'endommagement. Mais à la différence de cette dernière, cette formulation présente l'avantage de recourir aux algorithmes standard pour les problèmes non linéaires. En effet, la seule différence par rapport à la loi de comportement locale réside dans la donnée de deux déformations au lieu d'une, la déformation locale ε qui intervient dans la relation contrainte – déformation et la déformation régularisée $\bar{\varepsilon}$ qui pilote l'évolution de l'endommagement. Celle-ci se déduit de la déformation locale par résolution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} - L_b^2 \Delta \bar{\varepsilon} = \mathbf{0} & \text{dans la structure} \\ \nabla \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur le bord de normale } \mathbf{n} \end{cases} \quad \text{éq 4.1-1}$$

où la longueur caractéristique L_b est à nouveau renseignée sous le mot-clé `LONG_CARA` de `DEFI MATERIAU`. Finalement, la relation de comportement s'écrit de la manière suivante, où la fonction seuil f a déjà été définie en [éq 2.1-2] :

$$\sigma = (1 - d) \mathbf{E} \cdot \varepsilon \quad \text{éq 4.1-2}$$

$$f(\bar{\varepsilon}, d) \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad \dot{d} f(\bar{\varepsilon}, d) = 0 \quad \text{éq 4.1-3}$$

4.2 Intégration de la loi de comportement

Un des avantages avancés pour la formulation non locale à déformation régularisée est le peu de modifications qu'elle entraîne dans la construction de la loi de comportement. En effet, l'intégration des variables internes est totalement pilotée par la déformation régularisée $\bar{\varepsilon}$. On retrouve ainsi les expressions de la loi locale :

$$\begin{cases} \text{si } f^{\text{el}}(\bar{\varepsilon}) = f(\bar{\varepsilon}, d^-) \leq 0 & d = d^- \\ \text{si } f^{\text{el}}(\bar{\varepsilon}) = f(\bar{\varepsilon}, d^-) > 0 & d = (1 + \gamma) \left(1 - \sqrt{\frac{w^y}{\bar{w}}} \right) \end{cases} \quad \text{avec } \bar{w} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \bar{\varepsilon} \quad \text{éq 4.2-1}$$

La contrainte est alors obtenue directement par la relation [éq 4.1-2]. En outre, on conserve bien-sûr l'introduction d'un endommagement critique [éq 2.3-5] pour préserver une rigidité résiduelle.

4.3 Variables internes

Il s'agit des mêmes variables internes que pour la loi locale :

- VI(1) endommagement d
- VI(2) indicateur χ

5 Pilotage par prédiction élastique

Le pilotage de type `PRED_ELAS` contrôle l'intensité du chargement pour satisfaire une certaine équation liée à la valeur de la fonction seuil \tilde{f}^{el} lors de l'essai élastique [bib5]. Par conséquent, seuls les points où l'endommagement n'est pas saturé seront pris en compte. L'algorithme qui prend en charge ce mode de pilotage, cf. [R5.03.80], requiert la résolution en chacun de ces points de Gauss de l'équation scalaire suivante dans laquelle $\Delta\tau$ est une donnée et η l'inconnue :

$$\tilde{f}^{el}(\eta) = \Delta\tau \quad \text{éq 5-1}$$

La fonction \tilde{f}^{el} fournit la valeur de la fonction seuil lors d'un essai élastique lorsque le champ de déplacement se décompose de la manière suivante en fonction du paramètre scalaire η :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \eta \mathbf{u}_1 \quad \text{éq 5-2}$$

où \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}_1 sont donnés. Grâce à la linéarité en petites déformations des opérateurs déformation (calcul des déformations à partir des déplacements) et déformation régularisée, on obtient également les décompositions suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \eta \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \eta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \quad \text{éq 5-3}$$

Par conséquent, quelle que soit la modélisation adoptée, locale, non locale à gradient d'endommagement ou non locale à déformation régularisée, la fonction \tilde{f}^{el} peut se mettre sous la forme suivante :

$$\tilde{f}^{el}(\eta) = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_0 + \eta \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{e}_0 + \eta \mathbf{e}_1) - s$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{loi locale} & \mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 & \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad s = k(d^-) \\ \text{gradient d'endommagement} & \mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 & \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad s = k(d^-) - c \Delta d^- \\ \text{déformation régularisée} & \mathbf{e}_0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 & \mathbf{e}_1 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \quad s = k(d^-) \end{array} \right. \quad \text{éq 5-4}$$

L'équation [éq 5-1] se ramène donc à la recherche des racines du polynôme de degré 2 suivant :

$$P(\eta) = P_0 + 2P_1 \eta + P_2 \eta^2 \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_0 - \Delta\tau \\ P_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 \\ P_2 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_1 \end{array} \right. \quad \text{éq 5-5}$$

On fournit à l'algorithme de pilotage l'approximation linéaire de P au voisinage des racines (réelles) lorsqu'elles existent ou sinon la valeur de η pour laquelle P atteint son minimum.

6 Bibliographie

- [1] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L. : Mécanique des matériaux solides. Dunod : Paris, 1988.
- [2] MARIGO J.J. : Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. Compte-rendu de l'Académie des Sciences, Paris 1981 ; série II, 292(19) : 1309-1312.
- [3] SIMO J.C., TAYLOR R.L. : Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1985 ; 48 : 101-118.
- [4] LORENTZ E., ANDRIEUX S. : A variational formulation for nonlocal damage models. International Journal of Plasticity 1999 ; 15 : 119-138.
- [5] LORENTZ E., BADEL P. : A load control method for damage finite element simulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, submitted 2002.

Page laissée intentionnellement blanche.