Organisme(s) : EDF-R&D/AMA

Manuel de Référence
Fascicule R4.03 : Analyse de sensibilité
Document : R4.03.07

Post-traitement en sensibilité

Résumé :

Classiquement, les simulations numériques fournissent la réponse d'une structure à une sollicitation. On cherche ici à déterminer en plus de cette réponse la tendance de la réponse à une modification de paramètres d'entrée de la simulation (matériau, chargement...). Cette tendance est obtenue en calculant la dérivée de la réponse par rapport à un paramètre p donné.

Dans ce document, on se place dans le cas de l'élasticité linéaire et on suppose que la variable principale du calcul (le déplacement u) a été calculée ainsi que sa dérivée $\partial u / \partial p$. Après avoir donné quelques indications sur ce calcul de u et de $\partial u / \partial p$ (pour plus de détail voir [R4.03.03]), on s'intéressera à la dérivée des variables qui en découlent (déformations et contraintes) ainsi qu'à la dérivée du taux de restitution d'énergie G.

Table des matières

1 Rappel du calcul de sensibilité pour la variable principale (déplacement)

On s'intéresse dans ce paragraphe à la sensibilité du déplacement u par rapport à un paramètre p donné : chargement (déplacement imposé ou force imposée) ou caractéristique matériau (module d'Young, coefficient de Poisson, ou caractéristiques anisotropes).

1.1 Problème direct

Dans le cas de l'élasticité, le problème direct s'écrit de façon simplifiée (cf [bib1]) :

$$R(u) = L$$

avec :

$$\left[R(u)\right]_k = \int_\Omega A\varepsilon(u) : \varepsilon(w_k) d\Omega$$

où :

A est la matrice d'élasticité
w_k est la fonction de forme du k-ième degré de liberté de la structure modélisée

Cela s'écrit sous forme matricielle :

$$KU = L$$

1.2 Problème dérivé

La dérivation de l'écriture matricielle ci-dessus donne :

$$\left(\partial K / \partial p\right)U + K\left(\partial U / \partial p\right) = \partial L / \partial p$$

D'où :

$$K\left(\partial U / \partial p\right) = \partial L / \partial p - \left(\partial K / \partial p\right)U$$

Si p est de type chargement, on a : $\partial K / \partial p = 0$ et le second membre se réduit à $\partial L / \partial p$.
Si p est de type matériau, on a $\partial L / \partial p = 0$ et le second membre vaut : $-\left(\partial K / \partial p\right)U$. On a notamment de façon plus précise :

$$\left[-\frac{\partial K}{\partial p}U\right]_k = -\int_\Omega \frac{\partial A}{\partial p}\varepsilon(u) : \varepsilon(w_k) d\Omega$$

Le terme $\partial A / \partial p$ est calculé dans la routine DMATMC.

2 Calcul des dérivées des déformations et des contraintes

On considère dans ce paragraphe la dérivation par rapport à un paramètre p donné, p pouvant être un chargement ou une caractéristique du matériau. On suppose également que le champ de déplacement u et sa dérivée $\partial u / \partial p$, tous les deux résultant d'un calcul mécanique (via `MECA_STATIQUE`), sont connus.

2.1 Dérivée des déformations

Dans ce cas, la démarche est toujours la même, quelle que soit la nature de p. En effet, dans l'hypothèse des petites perturbations, on a :

$$\varepsilon = \left(\nabla u + \nabla u^t\right)/2 = Bu$$

D'où en dérivant par rapport à p :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = \frac{1}{2}\left(\nabla \frac{\partial u}{\partial p} + (\nabla \frac{\partial u}{\partial p})^t\right) = B\frac{\partial u}{\partial p}$$

Il suffit donc dans la routine de l'opérateur `CALC_ELEM` de fournir en entrée au sous-programme calculant les déformations le champ $\partial u / \partial p$ à la place du champ u.

2.2 Dérivée des contraintes dans le cas où p ne dépend pas du matériau

En notant A le tenseur d'élasticité, on a :

$$\sigma = ABu$$

Sachant que A et B ne dépendent pas de p, on a :

$$\partial \sigma / \partial p = AB\left(\partial u / \partial p\right)$$

Comme au paragraphe précédent, dans l'opérateur `CALC_ELEM`, on fournit en entrée au sous-programme calculant les contraintes le champ $\partial u / \partial p$ à la place du champ u.

2.3 Dérivée des contraintes dans le cas où p dépend du matériau

B ne dépendant pas de p, on a :

$$\partial \sigma / \partial p = \left(\partial A / \partial p\right)Bu + AB\left(\partial u / \partial p\right)$$

Le terme $AB\left(\partial u / \partial p\right)$ se calcule de la même façon qu'au paragraphe [§2.2].
Pour l'autre terme, il faut calculer $\partial A / \partial p$, c'est-à-dire réutiliser la routine DMATMC qui avait été développée pour le calcul de $\partial u / \partial p$ dans le cas où p dépend du matériau (cf [§1.2]).

3 Calcul des dérivées de G

3.1 Rappel de la formulation de G

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Soit :

- $\mathbf{u}$ le champ de déplacement,
- T le champ de température,
- $\mathbf{f}$ le champ de forces volumiques appliquées sur Ω,
- $\mathbf{g}$ le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
- $\mathbf{U}$ le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.

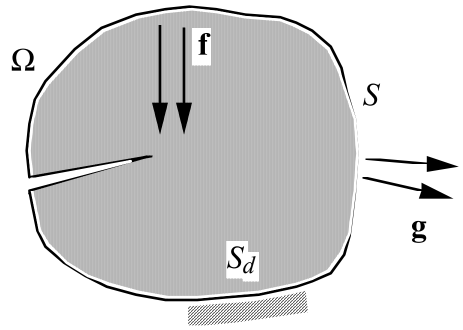

Figure 3.1-a : Solide élastique fissuré

Pour simplifier, on se place en **élasticité linéaire et en petites déformations**, mais cette approche se généralise sans peine à la plasticité, aux grandes déformations....
On désigne par :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ le tenseur des déformations initiales,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ le tenseur des déformations d'origine thermique,
- $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
- $\boldsymbol{\sigma}^0$ le tenseur des contraintes initiales,
- $\psi\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{\sigma}^0,T\right)$ la densité d'énergie libre.

Alors le taux de restitution d'énergie associé à un champ de propagation virtuel de la fissure $\boldsymbol{\theta}$ s'écrit :

$$\mathcal{G}(\theta)=\int_\Omega(\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,j}-\psi\theta_{k,k})d\Omega\;-\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial T}T_{,k}\theta_k\,d\Omega\;+\int_\Omega[(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\sigma^0_{ij})\varepsilon^0_{ij,k}\theta_k-(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^{th}_{ij}-\frac{1}{2}\varepsilon^0_{ij})\sigma^0_{ij,k}\theta_k]d\Omega$$
$$+\int_\Omega(f_iu_i\theta_{k,k}+f_{i,k}\theta_ku_i)d\Omega\;+\int_s[g_{i,k}\theta_ku_i+g_iu_i\left(\theta_{k,k}-\frac{\partial\theta}{\partial n_k}n_k\right)]d\Gamma\;-\int_{S_d}\sigma_{ij}n_jU_{i,k}\theta_k\,d\Gamma$$

Le dernier terme associé à une condition aux limites de Dirichlet n'est pas implanté dans le *Code_Aster.* On ne le prendra donc pas en compte.

3.2 Dérivées de G

3.2.1 Dérivée de G par rapport au module d'Young

On suppose connues les dérivées des déplacements, des déformations et des contraintes par rapport à E (voir [§1] et [§2]).

G est en fait la somme de 5 termes : $G(\theta) = T_{CLA} + T_{THER} + T_{EPSINI} + T_{FVOL} + T_{FSUR}$

les 5 termes étant donnés dans l'ordre de [§3.1].

$$\frac{dG}{dE} = \frac{dT_{CLA}}{dE} + \frac{dT_{THER}}{dE} + \frac{dT_{EPSINI}}{dE} + \frac{dT_{FVOL}}{dE} + \frac{dT_{FSUR}}{dE}$$

3.2.1.1 Dérivée du terme classique

$$T_{CLA} = \int_\Omega (\sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} - \psi \theta_{k,k}) d\Omega \quad \frac{dT_{CLA}}{dE} = \int_\Omega (\frac{d\sigma_{ij}}{dE} u_{i,p} \theta_{p,j} + \sigma_{ij} \frac{du_{i,p}}{dE} \theta_{p,j} - \frac{d\psi}{dE} \theta_{k,k}) d\Omega$$

avec en **3D** et en **axi** :

$$\psi(\varepsilon(u), T) = \frac{\lambda}{2} {\varepsilon_{kk}}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \psi_{th} \qquad \text{avec} \qquad \psi_{th} = 3K\alpha\left(T - T_{réf}\right)\varepsilon_{kk} - \frac{9}{2} K\alpha^2 \left(T - T_{réf}\right)$$

où $3K = \frac{E}{1-2\nu}$; $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$

il vient :

$$\frac{d\psi}{dE} = \frac{\lambda}{2E} \varepsilon_{kk}^2 + \lambda \varepsilon_{kk} \frac{d\varepsilon_{kk}}{dE} + \frac{\mu}{E} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dE} - \frac{\alpha(T - T_{ref})}{1-2\nu} (\varepsilon_{kk} + E \frac{d\varepsilon_{kk}}{dE} - \frac{3}{2} \alpha(T - T_{ref}))$$

en **déformations planes :**

$$\psi(\varepsilon, T) = \frac{(1-\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2\right) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^2 - \psi_{th}$$

soit :

$$\frac{d\psi}{dE} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} \frac{d\varepsilon_{xx}}{dE} + \varepsilon_{yy} \frac{d\varepsilon_{yy}}{dE} + \frac{1}{2E} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2)) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} \frac{d\varepsilon_{yy}}{dE} + \varepsilon_{yy} \frac{d\varepsilon_{xx}}{dE} + \frac{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy}}{E})$$
$$+ \frac{2E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \frac{d\varepsilon_{xy}}{dE} + \frac{1}{1+\nu} \varepsilon_{xy}^2 - \frac{\alpha(T - T_{ref})}{1-2\nu} (\varepsilon_{kk} + E \frac{d\varepsilon_{kk}}{dE} - \frac{3}{2} \alpha(T - T_{ref}))$$

en **contraintes planes :**

$$\psi(\varepsilon,T)=\frac{E}{2(1-\nu)^2}\left(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2\right)+\frac{\nu E}{(1-\nu)^2}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy}^2-\psi_{th}$$

soit :
$$\frac{d\psi}{dE}=\frac{E}{(1-\nu)^2}\left(\varepsilon_{xx}\frac{d\varepsilon_{xx}}{dE}+\varepsilon_{yy}\frac{d\varepsilon_{yy}}{dE}+\frac{1}{2E}(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2)\right)+\frac{\nu E}{(1-\nu)^2}\left(\varepsilon_{xx}\frac{d\varepsilon_{yy}}{dE}+\varepsilon_{yy}\frac{d\varepsilon_{xx}}{dE}+\frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}}{E}\right)$$
$$+\frac{2E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}\frac{d\varepsilon_{xy}}{dE}+\frac{1}{1+\nu}\varepsilon_{xy}^2-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{kk}+E\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE}-\frac{3}{2}\alpha(T-T_{ref})\right)$$

3.2.1.2 Dérivée du terme thermique

$$T_{THER}=-\int_{\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial T}T_{,k}\,\theta_k\,d\Omega$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial T}(\varepsilon(u),T)=\left[\frac{1}{2}\frac{dK(T)}{dT}\left(\varepsilon_{kk}-3\alpha(T-T_{réf})\right)-3K(T)\left(\alpha+\frac{d\alpha(T)}{dT}(T-T_{réf})\right)\right]\left(\varepsilon_{kk}-3\alpha(T-T_{réf})\right)$$

$$\frac{dT_{THER}}{dE}=-\int_{\Omega}\frac{d}{dE}\left(\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)T_{,k}\,\theta_k\,d\Omega$$

en **3D** et en **axi** :

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)=\frac{(1+2\nu^2)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT}\frac{\varepsilon_{kk}^2}{2}+\varepsilon_{kk}\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE}\left(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{dE}{dT}+\frac{E(1+2\nu^2)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT}\right)$$
$$-\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\frac{d\nu}{dT}\frac{1}{2(1+\nu)^2}+\varepsilon_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dE}\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{dE}{dT}-\frac{E}{1+\nu}\frac{d\nu}{dT}\right)$$
$$-\frac{1}{1-2\nu}\left(\alpha+\frac{d\alpha}{dT}(T-T_{ref})\right)\left(\varepsilon_{kk}+E\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE}\right)-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}\left(\frac{2}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{kk}+\left(\frac{dE}{dT}+\frac{2E}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\right)\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE}\right)$$
$$+\frac{3\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\left(\alpha+(T-T_{ref})\frac{d\alpha}{dT}+\frac{\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\frac{d\nu}{dT}\right)$$

en **déformations planes :**

$$\frac{d}{dE}(\frac{\partial\psi}{\partial T})=\frac{\nu(2-\nu)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT}(\varepsilon_{XX}^2+\varepsilon_{YY}^2)+(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{XX}}{dE}+\varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{YY}}{dE})(\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{dE}{dT}+\frac{2\nu(2-\nu)E}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$\frac{1+2\nu^2}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{XX}\varepsilon_{YY}+(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{YY}}{dE}+\varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{XX}}{dE})(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{dE}{dT}+\frac{(1+2\nu^2)E}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{XY}^2+2\varepsilon_{XY}\frac{d\varepsilon_{XY}}{dE}(\frac{1}{(1+\nu)}\frac{dE}{dT}-\frac{E}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{1-2\nu}(\alpha+\frac{d\alpha}{dT}(T-T_{ref}))(\varepsilon_{kk}+E\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE})-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}(\frac{2}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{kk}+(\frac{dE}{dT}+\frac{2E}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT})\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE})$$
$$+\frac{3\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})(\alpha+(T-T_{ref})\frac{d\alpha}{dT}+\frac{\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\frac{d\nu}{dT})$$

en **contraintes planes :**

$$\frac{d}{dE}(\frac{\partial\psi}{\partial T})=\frac{\nu}{(1-\nu^2)^2}\frac{d\nu}{dT}(\varepsilon_{XX}^2+\varepsilon_{YY}^2)+(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{XX}}{dE}+\varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{YY}}{dE})(\frac{1}{(1-\nu^2)}\frac{dE}{dT}+\frac{2\nu E}{(1-\nu^2)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$\frac{1+\nu^2}{(1-\nu^2)^2}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{XX}\varepsilon_{YY}+(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{YY}}{dE}+\varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{XX}}{dE})(\frac{\nu}{(1-\nu^2)}\frac{dE}{dT}+\frac{(1+\nu^2)E}{(1-\nu^2)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{XY}^2+2\varepsilon_{XY}\frac{d\varepsilon_{XY}}{dE}(\frac{1}{(1+\nu)}\frac{dE}{dT}-\frac{E}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{1-2\nu}(\alpha+\frac{d\alpha}{dT}(T-T_{ref}))(\varepsilon_{kk}+E\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE})-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}(\frac{2}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{kk}+(\frac{dE}{dT}+\frac{2E}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT})\frac{d\varepsilon_{kk}}{dE})$$
$$+\frac{3\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})(\alpha+(T-T_{ref})\frac{d\alpha}{dT}+\frac{\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\frac{d\nu}{dT})$$

3.2.1.3 Dérivée du terme déformations et contraintes initiales

$$T_{EPSINI}=\int_\Omega[(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^0)\varepsilon_{ij,k}^0\theta_k-(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{th}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^0)\sigma_{ij,k}^0\theta_k)]d\Omega$$

$$\frac{dT_{EPSINI}}{dE}=\int_\Omega(\frac{d\sigma_{ij}}{dE}\varepsilon_{ij,k}^0-\frac{d\varepsilon_{ij}}{dE}\sigma_{ij,k}^0)\theta_k d\Omega$$

3.2.1.4 Dérivée du terme force volumique

$$T_{FVOL} = \int_{\Omega} (f_i u_i \theta_{k,k} + f_{i,k} \theta_k u_i) d\Omega$$

$$\frac{dT_{FVOL}}{dE} = \int_{\Omega} (f_i \frac{du_i}{dE} \theta_{k,k} + f_{i,k} \theta_k \frac{du_i}{dE}) d\Omega$$

3.2.1.5 Dérivée du terme force surfacique

$$T_{FSUR} = \int_{s} [g_{i,k} \theta_k u_i + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right)] d\Gamma$$

$$\frac{dT_{FSUR}}{dE} = \int_{s} [g_{i,k} \theta_k \frac{du_i}{dE} + g_i \frac{du_i}{dE} \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right)] d\Gamma$$

3.2.2 Dérivées de G par rapport au chargement

Le paramètre sensible peut être une (ou plusieurs) composante de forces F_i volumique, surfacique ou nodale, et(ou) une (ou plusieurs) pression sur un bord, ce qui revient à une force surfacique.

Dans tous les cas on peut écrire :

$$\frac{\partial G}{\partial ps} = \sum_{icha=1}^{ncha} \sum_{i=1}^{n\dim} \frac{\partial G}{\partial F_i^{icha}} \frac{\partial F_i^{icha}}{\partial ps}$$ l'additivité venant du fait que les contributions des chargements de G se cumulent

avec $\frac{\partial F_i^{icha}}{\partial ps} = 1$ si le paramètre sensible intervient dans la composante i du chargement icha

$\frac{\partial F_i^{icha}}{\partial ps} = 0$ sinon

Exemple :

L'utilisateur définit un paramètre sensible valant 1. Ce paramètre sensible sert à définir une force volumique F_Z, une force surfacique de composantes (f_X, f_Y) et une pression p.

alors $\frac{\partial G}{\partial ps} = \frac{\partial G}{\partial F_Z} + \frac{\partial G}{\partial f_X} + \frac{\partial G}{\partial f_Y} + \frac{\partial G}{\partial p}$

De la même façon que pour la dérivée de G par rapport à E, on dérive terme à terme.
La dérivée des termes classique et thermique comprend moins de termes car les coefficients de Lamé et K ne dépendent pas du chargement (alors qu'ils dépendent de E).
Par contre les termes forces volumiques et forces surfaciques comportent un terme de plus si le paramètre sensible intervient dans le chargement correspondant.
Pour simplifier, on notera f la composante du chargement par rapport auquel on dérive.

3.2.2.1 Dérivée du terme classique

$$T_{CLA}=\int_\Omega (\sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,j}-\psi\theta_{k,k})d\Omega \quad \frac{dT_{CLA}}{df}=\int_\Omega (\frac{d\sigma_{ij}}{df}u_{i,p}\theta_{p,j}+\sigma_{ij}\frac{du_{i,p}}{df}\theta_{p,j}-\frac{d\psi}{df}\theta_{k,k})d\Omega$$

avec en **3D** et en **axi** :

$$\psi(\varepsilon(u),T)=\frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}{}^{2}+\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}-3K\alpha\left(T-T_{réf}\right)\varepsilon_{kk}+\frac{9}{2}K\alpha^{2}\left(T-T_{réf}\right)^{2}$$

où $3K = \frac{E}{1-2\nu}$; $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$

il vient : $\frac{d\psi}{df}=\lambda\varepsilon_{kk}\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}+2\mu\varepsilon_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{df}-3K\alpha\left(T-T_{réf}\right)\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}$

en **déformations planes** :

$$\psi(\varepsilon,T)=\frac{(1-\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{xx}^{2}+\varepsilon_{yy}^{2}\right)+\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy}^{2}-\psi_{th}$$

soit $$\frac{d\psi}{df}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx}\frac{d\varepsilon_{xx}}{df}+\varepsilon_{yy}\frac{d\varepsilon_{yy}}{df})+\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx}\frac{d\varepsilon_{yy}}{df}+\varepsilon_{yy}\frac{d\varepsilon_{xx}}{df})$$
$$+\frac{2E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}\frac{d\varepsilon_{xy}}{df}-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}E\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}$$

en **contraintes planes** :

$$\psi(\varepsilon,T)=\frac{E}{2(1-\nu)^{2}}\left(\varepsilon_{xx}^{2}+\varepsilon_{yy}^{2}\right)+\frac{\nu E}{(1-\nu)^{2}}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy}^{2}-\psi_{th}$$

soit $$\frac{d\psi}{df}=\frac{E}{(1-\nu)^{2}}(\varepsilon_{xx}\frac{d\varepsilon_{xx}}{df}+\varepsilon_{yy}\frac{d\varepsilon_{yy}}{df})+\frac{\nu E}{(1-\nu)^{2}}(\varepsilon_{xx}\frac{d\varepsilon_{yy}}{df}+\varepsilon_{yy}\frac{d\varepsilon_{xx}}{df})$$
$$+\frac{2E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}\frac{d\varepsilon_{xy}}{df}-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}E\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}$$

3.2.2.2 Dérivée du terme thermique

$$T_{THER} = -\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial T} T_{,k}\theta_k d\Omega$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial T}(\varepsilon(u),T) = \frac{1}{2}\frac{dK(T)}{dT}\left(\varepsilon_{kk} - 3\alpha\left(T - T_{réf}\right)\right) - 3K \ \ \alpha + \frac{d\alpha(T)}{dT}\left(T - T_{réf}\right) \quad \left(\varepsilon_{kk} - 3\alpha\left(T - T_{réf}\right)\right)$$

$$\frac{dT_{THER}}{df} = -\int_\Omega \frac{d}{df}(\frac{\partial\psi}{\partial T})T_{,k}\theta_k d\Omega$$

en **3D** et en **axi** :

$$\frac{d}{df}(\frac{\partial\psi}{\partial T}) = \varepsilon_{kk}\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{dE}{dT} + \frac{E(1+2\nu^2)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$+\varepsilon_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{df}\frac{1}{1+\nu}(\frac{dE}{dT} - \frac{E}{1+\nu}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{1-2\nu}(\alpha + \frac{d\alpha}{dT}(T-T_{ref}))(\varepsilon_{kk} + E\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}) - \frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}(\frac{2}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{kk} + (\frac{dE}{dT} + \frac{2E}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT})\frac{d\varepsilon_{kk}}{df})$$

$$+\frac{3\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})(\alpha + (T-T_{ref})\frac{d\alpha}{dT} + \frac{\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\frac{d\nu}{dT})$$

en **déformations planes** :

$$\frac{d}{df}(\frac{\partial\psi}{\partial T}) = (\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{XX}}{df} + \varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{YY}}{df})(\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{dE}{dT} + \frac{2\nu(2-\nu)E}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$+(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{YY}}{df} + \varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{XX}}{df})(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{dE}{dT} + \frac{(1+2\nu^2)E}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$+2\varepsilon_{XY}\frac{d\varepsilon_{XY}}{df}(\frac{1}{(1+\nu)}\frac{dE}{dT} - \frac{E}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{1-2\nu}(\alpha + \frac{d\alpha}{dT}(T-T_{ref}))(\varepsilon_{kk} + E\frac{d\varepsilon_{kk}}{df}) - \frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}(\frac{2}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{kk} + (\frac{dE}{dT} + \frac{2E}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT})\frac{d\varepsilon_{kk}}{df})$$

$$+\frac{3\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})(\alpha + (T-T_{ref})\frac{d\alpha}{dT} + \frac{\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\frac{d\nu}{dT})$$

en **contraintes planes** :

$$\frac{d}{df}(\frac{\partial\psi}{\partial T})=(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{XX}}{df}+\varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{YY}}{df})(\frac{1}{(1-\nu^2)}\frac{dE}{dT}+\frac{2\nu E}{(1-\nu^2)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$+(\varepsilon_{XX}\frac{d\varepsilon_{YY}}{df}+\varepsilon_{YY}\frac{d\varepsilon_{XX}}{df})(\frac{\nu}{(1-\nu^2)}\frac{dE}{dT}+\frac{(1+\nu^2)E}{(1-\nu^2)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$+2\varepsilon_{XY}\frac{d\varepsilon_{XY}}{df}(\frac{1}{(1+\nu)}\frac{dE}{dT}-\frac{E}{(1+\nu)^2}\frac{d\nu}{dT})$$

$$-\frac{1}{1-2\nu}(\alpha+\frac{d\alpha}{dT}(T-T_{ref}))(\varepsilon_{kk}+E\frac{d\varepsilon_{kk}}{df})-\frac{\alpha(T-T_{ref})}{1-2\nu}(\frac{2}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT}\varepsilon_{kk}+(\frac{dE}{dT}+\frac{2E}{1-2\nu}\frac{d\nu}{dT})\frac{d\varepsilon_{kk}}{df})$$

$$+\frac{3\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})(\alpha+(T-T_{ref})\frac{d\alpha}{dT}+\frac{\alpha}{1-2\nu}(T-T_{ref})\frac{d\nu}{dT})$$

3.2.2.3 Dérivée du terme déformations et contraintes initiales

$$T_{EPSINI}=\int_\Omega[(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\sigma^0_{ij})\varepsilon^0_{ij,k}\theta_k-(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^{th}_{ij}-\frac{1}{2}\varepsilon^0_{ij})\sigma^0_{ij,k}\theta_k)]d\Omega$$

$$\frac{dT_{EPSINI}}{df}=\int_\Omega(\frac{d\sigma_{ij}}{df}\varepsilon^0_{ij,k}-\frac{d\varepsilon_{ij}}{df}\sigma^0_{ij,k})\theta_k d\Omega$$

3.2.2.4 Dérivée du terme force volumique

$$T_{FVOL}=\int_\Omega(f_i u_i\theta_{k,k}+f_{i,k}\theta_k u_i)d\Omega$$

si $f=f_l$

est une composante de force volumique :

$$\frac{dT_{FVOL}}{df_l}=\int_\Omega((f_i\frac{du_i}{df_l}+u_l)\theta_{k,k}+f_{i,k}\theta_k\frac{du_i}{df_l})d\Omega$$

sinon :

$$\frac{dT_{FVOL}}{df}=\int_\Omega(f_i\frac{du_i}{df}\theta_{k,k}+f_{i,k}\theta_k\frac{du_i}{df})d\Omega$$

3.2.2.5 Dérivée du terme force surfacique

$$T_{FSUR} = \int_s [g_{i,k}\theta_k u_i + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial\theta}{\partial n_k} n_k\right)] d\Gamma$$

si $f = g_l$

est une composante de force surfacique :

$$\frac{dT_{FSUR}}{dg_l} = \int_s [g_{i,k}\theta_k \frac{du_i}{dg_l} + (g_i \frac{du_i}{dg_l} + u_l)\left(\theta_{k,k} - \frac{\partial\theta}{\partial n_k} n_k\right)] d\Gamma$$

sinon :

$$\frac{dT_{FSUR}}{df} = \int_s [g_{i,k}\theta_k \frac{du_i}{df} + g_i \frac{du_i}{df}\left(\theta_{k,k} - \frac{\partial\theta}{\partial n_k} n_k\right)] d\Gamma$$

4 Bibliographie

[1] TARDIEU N. : Calcul de sensibilité en mécanique. Application au *Code_Aster*. note EDF-DER HI-75/01/016-Indice A, 2001