Organisme(s) : EDF-R&D/AMA

Manuel de Référence
Fascicule R3.01 : Références Générales
Document : R3.01.01

Fonctions de forme et points d'intégration des éléments finis

Résumé :

On décrit la géométrie et la topologie des éléments implantés dans le *Code_Aster*, l'expression des fonctions de forme et les différentes familles de points d'intégration et les poids associés sont détaillés.

Table des matières

1 Introduction

Dans *Code_Aster*, on appelle "élément fini", un triplet (phénomène, modélisation, type de maille). Il y a trois phénomènes principaux : MECANIQUE, THERMIQUE et ACOUSTIQUE.
Il existe de nombreuses modélisations ; par exemple, pour le phénomène MECANIQUE : 3D, C_PLAN, D_PLAN, AXIS, DKT, POU_D_E, ...
Pour une modélisation donnée (par exemple 3D) d'un phénomène (par exemple MECANIQUE), il existe en général plusieurs éléments finis : un élément par type de maille supporté : HEXA8, HEXA20, PENTA6, ...

Au final, il existe donc de très nombreux éléments finis (plus de 500 en juillet 2004).

En revanche, les types de maille sont eux en nombre réduit : POI1, SEG2, SEG3, SEG4, TRIA3, TRIA6, TRIA7, QUAD4, QUAD8, HEXA8, HEXA20, ..., TETRA4, TETRA10.

En général, chaque élément fini, pour réaliser ses calculs élémentaires, utilise les notions de fonction d'interpolation (ou fonction de forme) et de schéma d'intégration. En général aussi, ces fonctions de forme et ces schémas d'intégration sont définis sur un élément dit "de référence" dont la géométrie est définie dans un système de coordonnées souvent appelé : (ξ,η,ζ) Le passage de l'élément de référence à l'élément réel se fait grâce à une transformation géométrique qui utilise les mêmes fonctions d'interpolation. L'élément est alors dit "iso-paramétrique". Ces notions sont très bien expliquées dans [bib1].

Le nombre élevé d'éléments finis du code conjugué au nombre restreint des types de maille, conduit au fait qu'il existe plusieurs éléments finis s'appuyant sur un même type de maille ; par exemple le quadrilatère à 8 nœuds appelé QUAD8 supporte plus de 60 éléments finis différents.

En théorie, chaque élément fini peut choisir ses fonctions d'interpolation et ses schémas d'intégration comme il l'entend. Mais dans la pratique, presque tous les éléments finis s'appuyant sur le même type de maille, utilisent le même élément de référence, les mêmes fonctions de forme et les mêmes schémas d'intégration. Le but de ce document est de décrire ces différents éléments de référence

Pour chaque élément de référence (appelé dans la suite du document ELREFE), on indiquera :

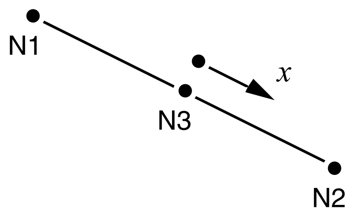
- la maille support, le nombre des nœuds, leur numérotation locale et leurs coordonnées,
- les expressions algébriques des fonctions de forme et de leurs dérivées premières (et parfois secondes)
- les familles de points d'intégration que l'on nommera. Pour chaque famille, on donnera le nombre de points, leurs coordonnées et leurs "poids" d'intégration. La somme de ces poids, doit donner le "volume" de l'élément de référence. Par exemple, le "volume" du quadrangle de référence ($-1 <= \xi <= +1$, $1 < \eta < +1$) vaut : 4.

2 Les éléments linéiques : SE2, SE3 et SE4

SE2 : segment à 2 nœuds
nombre de nœuds : 2
nombre de nœuds sommets : 2

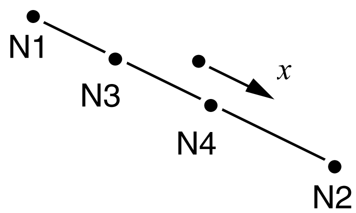
SE3 : segment à 3 nœuds
nombre de nœuds : 3
nombre de nœuds sommets : 2

	x
N1	-1.0
N2	1.0
N3	0.0



SE4 : segment à 4 nœuds
nombre de nœuds : 4
nombre de nœuds sommets : 2

	x
N1	-1.0
N2	1.0
N3	-1./3.
N4	+1./3.



fonctions de forme du segment à 2 nœuds :

$$w_1(x) = 0.5\,(1-x) \qquad w_2(x) = 0.5\,(1+x)$$

fonctions de forme du segment à 3 nœuds :

$$w_1(x) = -0.5\,(1-x)x \qquad w_2(x) = 0.5\,(1+x)x \qquad w_3(x) = (1+x)(1-x)$$

fonctions de forme du segment à 4 nœuds :

$$w_1(x) = \frac{16}{9}(1-x)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1/3)$$

$$w_2(x) = -\frac{16}{9}(1+x)\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

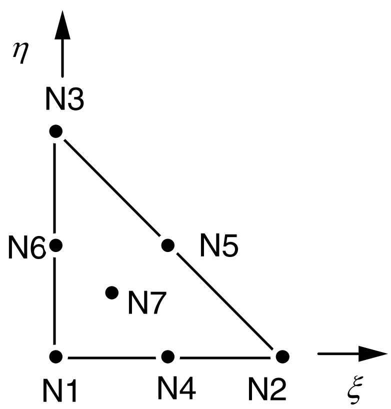
$$w_3(x) = \frac{16}{27}(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$w_4(x) = -\frac{16}{27}(x-1)(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

Nb de pts d'intégr.	Point	x	Poids
1	1	0.0	2.0
2	1	0.577350269189626	1.0
	2	-0.577350269189626	1.0
3	1	-0.774596669241	0.55555...
	2	0	0.88888...
	3	0.774596669241	0.55555...
4	1	0.339981043584856	0.652145154862546
	2	-0.339981043584856	0.652145154862546
	3	0.861136311594053	0.347854845137454
	4	-0.861136311594053	0.347854845137454

3 Les éléments surfaciques

3.1 Triangles : `ELREFE TR3`, `TR6`, `TR7`



Coordonnées des nœuds :

	ξ	η
N1	0.0	0.0
N2	1.0	0.0
N3	0.0	1.0
N4	0.5	0.0
N5	0.5	0.5
N6	0.0	0.5
N7	1/3	1/3

Famille	**Point**	ξ	η	**Poids**
FPG1	1	1/3	1/3	1/2
FPG3	1	1/6	1/6	1/6
	2	2/3	1/6	1/6
	3	1/6	2/3	1/6
FPG4	1	1/5	1/5	25/(24*4)
	2	3/5	1/5	25/(24*4)
	3	1/5	3/5	25/(24*4)
	4	1/3	1/3	-27/(24*4)
FPG6	1	b	b	P2
	2	1 - 2 b	b	P2
	3	b	1 - 2 b	P2
	4	a	1 - 2 a	P1
	5	a	a	P1
	6	1 - 2 a	a	P1
COT3	1	1/2	1/2	1/6
	2	0	1/2	1/6
	3	1/2	0	1/6

Avec P1 = 0.11169079483905, P2 = 0.0549758718227661,
A = 0.445948490915965, b = 0.091576213509771

Famille	Point	ξ	η	Poids
FPG7	1	1/3	1/3	9/80
	2	A	A	P1
	3	1-2A	A	P1
	4	A	1-2A	P1
	5	B	B	P2
	6	1-2B	B	P2
	7	B	1-2B	P2

Avec
A = 0.470142064105115
B = 0.101286507323456
P1 = 0.066197076394253
P2 = 0.062969590272413

Famille	Point	ξ	η	Poids
FPG12	1	A	A	P1
	2	1-2A	A	P1
	3	A	1-2A	P1
	4	B	B	P2
	5	1-2B	B	P2
	6	B	1-2B	P2
	7	C	D	P3
	8	D	C	P3
	9	1-C-D	C	P3
	10	1-C-D	D	P3
	11	C	1-C-D	P3
	12	D	1-C-D	P3

Avec
A = 0.063089014491502
B = 0.249286745170910
C = 0.310352451033785
D = 0.053145049844816
P1 = 0.025422453185103
P2 = 0.058393137863189
P3 = 0.041425537809187

TR3 : triangle à 3 nœuds
nombre de nœuds : 3
nombre de nœuds sommets : 3

fonctions de forme et dérivées premières du triangle à 3 nœuds :

$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
$1-\xi-\eta$	-1	-1
ξ	1	0
η	0	1

TR6 : triangle à 6 nœuds
nombre de nœuds : 6
nombre de nœuds sommets : 3

fonctions de forme, dérivées premières du triangle à 6 nœuds :

$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
$-(1-\xi-\eta)(1-2(1-\xi-\eta))$	$1-4(1-\xi-\eta)$	$1-4(1-\xi-\eta)$
$-\xi(1-2\xi)$	$-1+4\xi$	0
$-\eta(1-2\eta)$	0	$-1+4\eta$
$4\xi(1-\xi-\eta)$	$4(1-2\xi-\eta)$	-4ξ
$4\xi\eta$	4η	4ξ
$4\eta(1-\xi-\eta)$	-4η	$4(1-\xi-2\eta)$

dérivées secondes du triangle à 6 nœuds :

$\{\partial^2 N / \partial \xi^2\}$	$\{\partial^2 N / \partial \xi \partial \eta\}$	$\{\partial^2 N / \partial \eta^2\}$
4	4	4
4	0	0
0	0	4
-8	-4	0
0	4	0
0	-4	-8

TR7 : triangle à 7 nœuds

nombre de nœuds : 7
nombre de nœuds sommets : 3

fonctions de forme du triangle à 7 nœuds :

$\{N\}$
$1-3(\xi+\eta)+2(\xi^2+\eta^2)+7\xi\eta-3\xi\eta(\xi+\eta)$
$\xi(-1+2\xi+3\eta-3\eta(\xi+\eta))$
$\eta(-1+2\xi+3\eta-3\xi(\xi+\eta))$
$4\xi(1-\xi-4\eta+3\eta(\xi+\eta))$
$4\xi\eta(-2+3(\xi+\eta))$
$4\eta(1-4\xi-\eta+3\xi(\xi+\eta))$
$27\xi\eta(1-\xi-\eta)$

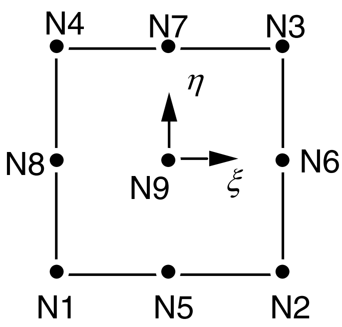
dérivées premières du triangle à 7 nœuds :

$\{\partial N/\partial\xi\}$	$\{\partial N/\partial\eta\}$
$-3+4\xi+7\eta-6\xi\eta-3\eta^2$	$-3+7\xi+4\eta-6\xi\eta-3\xi^2$
$-1+4\xi+3\eta-6\xi\eta-3\eta^2$	$3\xi(1-\xi-2\eta)$
$3\eta(1-2\xi-\eta)$	$-1+3\xi+4\eta-6\xi\eta-3\xi^2$
$4(1-2\xi-4\eta+6\xi\eta+3\eta^2)$	$4\xi(-4+3\xi+6\eta)$
$4\eta(-2+6\xi+3\eta)$	$4\xi(-2+3\xi+6\eta)$
$4\eta(-4+6\xi+3\eta)$	$4(-1-4\xi-2\eta+6\xi\eta+3\xi^2)$
$27\eta(1-2\xi-\eta)$	$27\xi(1-\xi-2\eta)$

dérivées secondes du triangle à 7 nœuds :

$\{\partial^2 N/\partial\xi^2\}$	$\{\partial^2 N/\partial\xi\partial\eta\}$	$\{\partial^2 N/\partial\eta^2\}$
$4-6\eta$	$7-6\xi-6\eta$	$4-6\xi$
$4-6\eta$	$3-6\xi-6\eta$	-6ξ
-6η	$3-6\xi-6\eta$	$4-6\xi$
$4(-2+6\eta)$	$4(-4+6\xi+6\eta)$	24ξ
24η	$4(-2+6\xi+6\eta)$	24ξ
24η	$4(-4+6\xi+6\eta)$	$4(-2+6\xi)$
-54η	$27(1-2\xi-2\eta)$	-54ξ

3.2 Quadrangles : ELREFE QU4, QU8, QU9



Coordonnées des nœuds :

	ξ	η
N1	-1.0	-1.0
N2	1.0	-1.0
N3	1.0	1.0
N4	-1.0	1.0
N5	0.0	-1.0
N6	1.0	0.0
N7	0.0	1.0
N8	-1.0	0.0
N9	0.0	0.0

Famille	Point	ξ	η	Poids
FPG1	1	0	0	4
FPG4	1	-a	-a	1.0
	2	a	-a	1.0
	3	a	a	1.0
	4	-a	a	1.0
		a = $1/\sqrt{3}$		
FPG9	1	-a	-a	25/81
	2	a	-a	25/81
	3	a	a	25/81
	4	-a	a	25/81
	5	0.0	-a	40/81
	6	a	0.0	40/81
	7	0.0	a	40/81
	8	-a	0.0	40/81
	9	0.0	0.0	64/81
		a= 0.774596669241483		

QU4 : quadrangle à 4 nœuds
nombre de nœuds : 4
nombre de nœuds sommets : 4

fonctions de forme, dérivées premières et secondes du quadrangle à 4 nœuds :

$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
$(1-\xi)(1-\eta)/4$	$-(1-\eta)/4$	$-(1-\xi)/4$
$(1+\xi)(1-\eta)/4$	$(1-\eta)/4$	$-(1+\xi)/4$
$(1+\xi)(1+\eta)/4$	$(1+\eta)/4$	$(1+\xi)/4$
$(1-\xi)(1+\eta)/4$	$-(1+\eta)/4$	$(1-\xi)/4$

$\{\partial^2 N / \partial \xi^2\}$	$\{\partial^2 N / \partial \xi \partial \eta\}$	$\{\partial^2 N / \partial \eta^2\}$
0	1/4	0
0	-1/4	0
0	1/4	0
0	-1/4	0

QU8 : quadrangle à 8 nœuds
nombre de nœuds : 8
nombre de nœuds sommets : 4

fonctions de forme et dérivées premières du quadrangle à 8 nœuds :

$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
$(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4$	$(1-\eta)(2\xi+\eta)/4$	$(1-\xi)(\xi+2\eta)/4$
$(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)/4$	$(1-\eta)(2\xi-\eta)/4$	$-(1+\xi)(\xi-2\eta)/4$
$(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)/4$	$(1+\eta)(2\xi+\eta)/4$	$(1+\xi)(\xi+2\eta)/4$
$(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)/4$	$-(1+\eta)(-2\xi+\eta)/4$	$(1-\xi)(-\xi+2\eta)/4$
$(1-\xi)^2(1-\eta)/2$	$-\xi(1-\eta)$	$-(1-\xi^2)/2$
$(1+\xi)(1-\eta)^2/2$	$(1-\eta^2)/2$	$-\eta(1+\xi)$
$(1-\xi)^2(1+\eta)/2$	$-\xi(1+\eta)$	$(1-\xi^2)/2$
$(1-\xi)(1-\eta)^2/2$	$-(1-\eta^2)/2$	$-\eta(1-\xi)$

dérivées secondes du quadrangle à 8 nœuds :

$\{\partial^2 N / \partial\xi^2\}$	$\{\partial^2 N / \partial\xi\partial\eta\}$	$\{\partial^2 N / \partial\eta^2\}$
$(1-\eta)/2$	$(1-2\xi-2\eta)/4$	$(1-\xi)/2$
$(1-\eta)/2$	$-(1+2\xi-2\eta)/4$	$(1+\xi)/2$
$(1+\eta)/2$	$(1+2\xi+2\eta)/4$	$(1+\xi)/2$
$(1+\eta)/2$	$-(1-2\xi+2\eta)/4$	$(1-\xi)/2$
$-1+\eta$	ξ	0
0	$-\eta$	$-1-\xi$
$-1-\eta$	$-\xi$	0
0	η	$-1+\xi$

<u>**QU9**</u> : quadrangle à 9 nœuds
nombre de nœuds : 9
nombre de nœuds sommets : 4

fonctions de forme et dérivées premières du quadrangle à 9 nœuds :

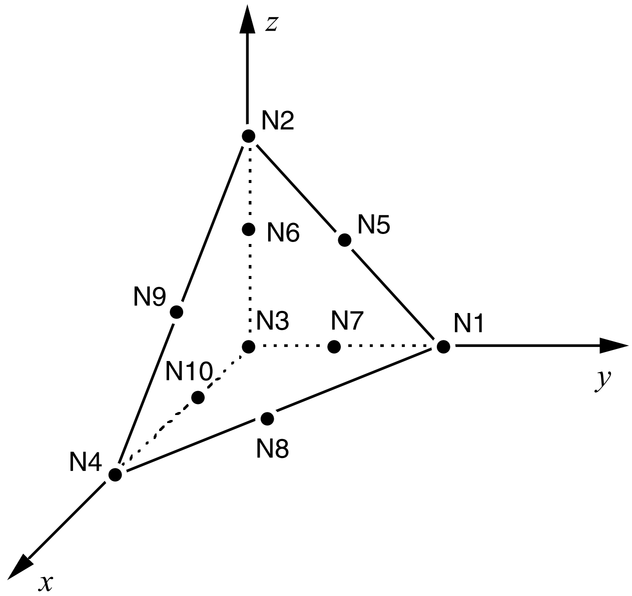
$\{N\}$	$\{\partial N / \partial\xi\}$	$\{\partial N / \partial\eta\}$
$\xi\eta(\xi-1)(\eta-1)/4$	$(2\xi-1)\eta(\eta-1)/4$	$\xi(\xi-1)(2\eta-1)/4$
$\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)/4$	$(2\xi+1)\eta(\eta-1)/4$	$\xi(\xi+1)(2\eta-1)/4$
$\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)/4$	$(2\xi+1)\eta(\eta+1)/4$	$\xi(\xi+1)(2\eta+1)/4$
$\xi\eta(\xi-1)(\eta+1)/4$	$(2\xi-1)\eta(\eta+1)/4$	$\xi(\xi-1)(2\eta+1)/4$
$(1-\xi^2)\eta(\eta-1)/2$	$-\xi\eta(\eta-1)$	$(1-\xi^2)(2\eta-1)/2$
$\xi(\xi+1)(1-\eta^2)/2$	$(2\xi+1)(1-\eta^2)/2$	$-\xi\eta(\xi+1)$
$(1-\xi^2)\eta(\eta+1)/2$	$-\xi\eta(\eta+1)$	$(1-\xi^2)(2\eta+1)/2$
$\xi(\xi-1)(1-\eta^2)/2$	$(2\xi-1)(1-\eta^2)/2$	$-\xi\eta(\xi-1)$
$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$-2\xi(1-\eta^2)$	$-2\eta(1-\xi^2)$

dérivées secondes du quadrangle à 9 nœuds :

$\{\partial^2 N / \partial\xi^2\}$	$\{\partial^2 N / \partial\xi\partial\eta\}$	$\{\partial^2 N / \partial\eta^2\}$
$\eta(\eta-1)/2$	$(\xi-1/2)(\eta-1/2)/4$	$\xi(\xi-1)/2$
$\eta(\eta-1)/2$	$(\xi+1/2)(\eta-1/2)/4$	$\xi(\xi+1)/2$
$\eta(\eta+1)/2$	$(\xi+1/2)(\eta+1/2)/4$	$\xi(\xi+1)/2$
$\eta(\eta+1)/2$	$(\xi-1/2)(\eta+1/2)/4$	$\xi(\xi-1)/2$
$-\eta(\eta-1)$	$-\xi(2\eta-1)$	$1-\xi^2$
$1-\eta^2$	$-\eta(2\xi+1)$	$-\xi(\xi+1)$
$-\eta(\eta+1)$	$-\xi(2\eta+1)$	$1-\xi^2$
$1-\eta^2$	$-\eta(2\xi-1)$	$-\xi(\xi-1)$
$-2(1-\eta^2)$	$4\xi\eta$	$-2(1-\xi^2)$

4 Les éléments volumiques

4.1 Tétraèdres : `ELREFE TE4, T10`



	x	y	z
N1	0.	1.	0.
N2	0.	0.	1.
N3	0.	0.	0.
N4	1.	0.	0.
N5	0.	0.5	0.5
N6	0.	0.	0.5
N7	0.	0.5	0.
N8	0.5	0.5	0.
N9	0.5	0.	0.5
N10	0.5	0.	0.

Fonctions de forme :

Formule à 4 nœuds

$$\begin{cases} w_1(x,y,z) & = & y \\ w_2(x,y,z) & = & z \\ w_3(x,y,z) & = & 1-x-y-z \\ w_4(x,y,z) & = & x \end{cases}$$

Formule à 10 nœuds

$$
\begin{aligned}
w_1 &= y(2y-1) & w_6 &= 4z(1-x-y-z)\\
w_2 &= z(2z-1) & w_7 &= 4y(1-x-y-z)\\
w_3 &= (1-x-y-z)(1-2x-2y-2z) & w_8 &= 4xy\\
w_4 &= x(2x-1) & w_9 &= 4xz\\
w_5 &= 4yz & w_{10} &= 4x(1-x-y-z)
\end{aligned}
$$

Formule d'intégration numérique :

Formule à 4 points, d'ordre 2 en x, y, z : (FPG4)

Point	x	y	z	**Poids**
1	a	a	a	1/24
2	a	a	b	1/24
3	a	b	a	1/24
4	b	a	a	1/24

avec : $a=\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}$ $b=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{20}$

Formule à 5 points, d'ordre 3 en x, y, z : (FPG5)

Point	x	y	z	**Poids**
1	a	a	a	- 2/15
2	b	b	b	3/40
3	b	b	c	3/40
4	b	c	b	3/40
5	c	b	b	3/40

avec : $a = 0.25$ $b = \dfrac{1}{6}$ $c = 0.5$

Formule à 15 points, d'ordre 5 en x, y, z : (FPG15)

Point	x	y	z	**Poids**
1	a	a	a	8/405
2	b_1	b_1	b_1	
3	b_1	b_1	c_1	$\dfrac{2\,665-14\sqrt{15}}{226\,800}$
4	b_1	c_1	b_1	
5	c_1	b_1	b_1	
6	b_2	b_2	b_2	
7	b_2	b_2	c_2	$\dfrac{2\,665+14\sqrt{15}}{226\,800}$
8	b_2	c_2	b_2	
9	c_2	b_2	b_2	

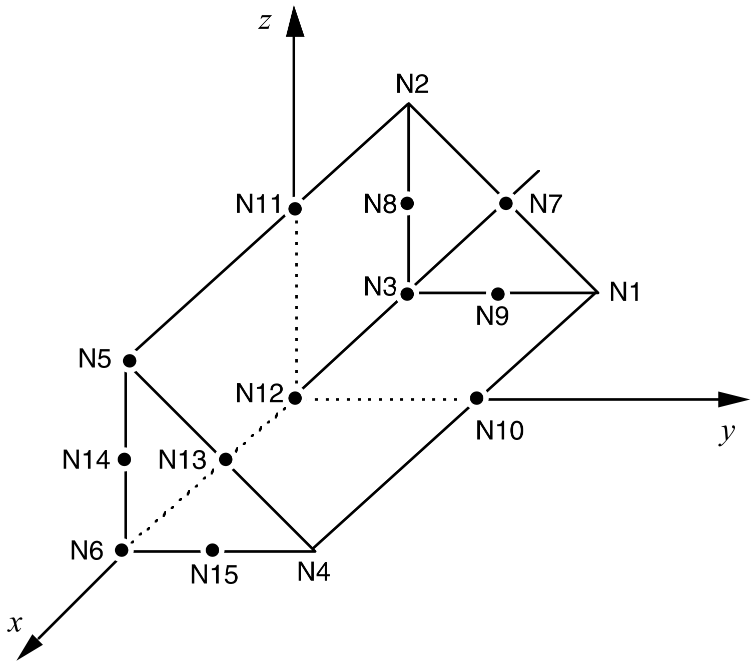
10	d	d	e	
11	d	e	d	
12	e	d	d	$\frac{5}{567}$
13	d	e	e	
14	e	d	e	
15	e	e	d	

avec :

$$a = 0.25 \qquad b_1 = \frac{7+\sqrt{15}}{34} \qquad c_1 = \frac{13-3\sqrt{15}}{34} \qquad d = \frac{5-\sqrt{15}}{20}$$

$$b_2 = \frac{7-\sqrt{15}}{34} \qquad c_2 = \frac{13+3\sqrt{15}}{34} \qquad e = \frac{5+\sqrt{15}}{20}$$

4.2 Pentaèdres : `ELREFE PE6`, `P15`



	x	y	z
N1	-1.	1.	0.
N2	-1.	0.	1.
N3	-1.	0.	0.
N4	1.	1.	0.
N5	1.	0.	1.
N6	1.	0.	0.
N7	-1.	0.5	0.5.
N8	-1.	0.	0.5.
N9	-1.	0.5	0.
N10	0.	1.	0.
N11	0.	0.	1.
N12	0.	0.	0.
N13	1.	0.5	0.5
N14	1.	0.	0.5
N15	1.	0.5	0.

Fonctions de forme :

Formule à 6 nœuds

$$w_1 = \frac{1}{2} y(1-x) \qquad w_4 = \frac{1}{2} y(x+1)$$
$$w_2 = \frac{1}{2} z(1-x) \qquad w_5 = \frac{1}{2} z(x+1)$$
$$w_3 = \frac{1}{2}(1-y-z)(1-x) \qquad w_6 = \frac{1}{2}(1-y-z)(x+1)$$

Formule à 15 nœuds

$$w_1 = y(1-x)(2y-2-x)/2$$
$$w_2 = z(1-x)(2z-2-x)/2$$
$$w_3 = (x-1)(1-y-z)(x+2y+2z)/2$$
$$w_4 = y(1+x)(2y-2+x)/2$$
$$w_5 = z(1+x)(2z-2+x)/2$$
$$w_6 = (-x-1)(1-y-z)(-x+2y+2z)/2$$
$$w_7 = 2yz(1-x)$$
$$w_8 = 2z(1-y-z)(1-x)$$
$$w_9 = 2y(1-y-z)(1-x)$$
$$w_{10} = y(1-x^2)$$
$$w_{11} = z(1-x^2)$$
$$w_{12} = (1-y-z)(1-x^2)$$
$$w_{13} = 2yz(1+x)$$
$$w_{14} = 2z(1-y-z)(1+x)$$
$$w_{15} = 2y(1-y-z)(1+x)$$

Formules d'intégration numérique à 6 points (ordre 3 en x, ordre 2 en y et z) (FPG6)

Point	x	y	z	**Poids**
1	$-\sqrt{3}/3$	0.5	0.5	1/6
2	$-\sqrt{3}/3$	0.	0.5	1/6
3	$-\sqrt{3}/3$	0.5	0.	1/6
4	$\sqrt{3}/3$	0.5	0.5	1/6
5	$\sqrt{3}/3$	0.	0.5	1/6
6	$\sqrt{3}/3$	0.5	0.	1/6

Formule d'intégration numérique à 8 points : (FPG8)

2 points de Gauss en x (ordre 3).
4 points de Hammer en y et z (ordre 3).

Point	x	y	z	Poids
1	-a	1/3	1/3	-27/96
2	-a	0.6	0.2	25/96
3	-a	0.2	0.6	25/96
4	-a	0.2	0.2	25/96
5	+a	1/3	1/3	-27/96
6	+a	0.6	0.2	25/96
7	+a	0.2	0.6	25/96
8	+a	0.2	0.2	25/96

Avec a = 0.577350269189626

Formule d'intégration numérique à 21 points : (FPG21)

3 points de Gauss en x (ordre 5).
7 points de Hammer en y et z (ordre 5 en y et z).

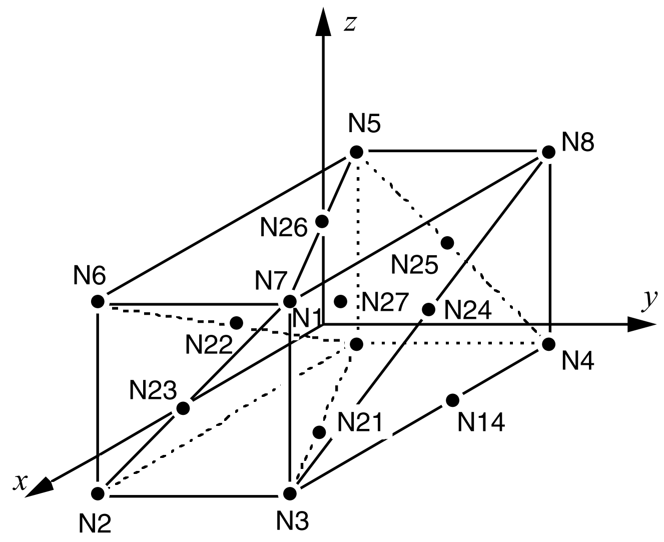
Point	x	y	z	Poids
1	$-\alpha$	1/3	1/3	$c_1 \times 9/80$
2 3 4	$-\alpha$ $-\alpha$ $-\alpha$	a 1-2a a	a a 1-2a	$c_1 \times \left(\frac{155+\sqrt{15}}{2\,400}\right)$
5 6 7	$-\alpha$ $-\alpha$ $-\alpha$	b 1-2b b	b b 1-2b	$c_1 \times \left(\frac{155-\sqrt{15}}{2\,400}\right)$
8	0.	1/3	1/3	$c_2 \times 9/80$
9 10 11	0. 0. 0.	a 1-2a a	a a 1-2a	$c_2 \times \left(\frac{155+\sqrt{15}}{2\,400}\right)$
12 13 14	0. 0. 0.	b 1-2b b	b b 1-2b	$c_2 \times \left(\frac{155-\sqrt{15}}{2\,400}\right)$
15	α	1/3	1/3	$c_1 \times 9/80$
16 17 18	α α α	a 1-2a a	a a 1-2a	$c_1 \times \left(\frac{155+\sqrt{15}}{2\,400}\right)$
19 20 21	α α α	b 1-2b b	b b 1-2b	$c_1 \times \left(\frac{155-\sqrt{15}}{2\,400}\right)$

avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad c_1 = \frac{5}{9} \qquad c_2 = \frac{8}{9}$$

$$a = \frac{6+\sqrt{15}}{21} \qquad b = \frac{6-\sqrt{15}}{21}$$

4.3 Hexaèdres : `ELREFE HE8`, `H20`, `H27`



	x	y	z
N1	-1.	-1.	-1.
N2	1.	-1.	-1.
N3	1.	1.	-1.
N4	-1.	1.	-1.
N5	-1.	-1.	1.
N6	1.	-1.	1.
N7	1.	1.	1.
N8	-1.	1.	1.
N9	0.	-1.	-1.
N10	1.	0.	-1.
N11	0.	1.	-1.
N12	-1.	0.	-1.
N13	-1.	-1.	0.
N14	1.	-1.	0.
N15	1.	1.	0.
N16	-1.	1.	0.
N17	0.	-1.	1.
N18	1.	0.	1.
N19	0.	1.	1.
N20	-1.	0.	1.
N21	0.	0.	-1.
N22	0.	-1.	0.
N23	1.	0.	0.
N24	0.	1.	0.
N25	-1.	0.	0.
N26	0..	0.	1.
N27	0..	0.	0.

Fonctions de forme :

Formule à 8 nœuds

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1-z) & w_5 &= \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1+z)\\
w_2 &= \frac{1}{8}(1+x)(1-y)(1-z) & w_6 &= \frac{1}{8}(1+x)(1-y)(1+z)\\
w_3 &= \frac{1}{8}(1+x)(1+y)(1-z) & w_7 &= \frac{1}{8}(1+x)(1+y)(1+z)\\
w_4 &= \frac{1}{8}(1-x)(1+y)(1-z) & w_8 &= \frac{1}{8}(1-x)(1+y)(1+z)
\end{aligned}
$$

Formule à 20 nœuds

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1-z)(-2-x-y-z) & w_{11} &= \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)(1+y)(1-z)\\
w_2 &= \frac{1}{8}(1+x)(1-y)(1-z)(-2+x-y-z) & w_{12} &= \frac{1}{4}\left(1-y^2\right)(1-x)(1-z)\\
w_3 &= \frac{1}{8}(1+x)(1+y)(1-z)(-2+x+y-z) & w_{13} &= \frac{1}{4}\left(1-z^2\right)(1-x)(1-y)\\
w_4 &= \frac{1}{8}(1-x)(1+y)(1-z)(-2-x+y-z) & w_{14} &= \frac{1}{4}\left(1-z^2\right)(1+x)(1-y)\\
w_5 &= \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1+z)(-2-x-y+z) & w_{15} &= \frac{1}{4}\left(1-z^2\right)(1+x)(1+y)\\
w_6 &= \frac{1}{8}(1+x)(1-y)(1+z)(-2+x-y+z) & w_{16} &= \frac{1}{4}\left(1-z^2\right)(1-x)(1+y)\\
w_7 &= \frac{1}{8}(1+x)(1+y)(1+z)(-2+x+y+z) & w_{17} &= \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)(1-y)(1+z)\\
w_8 &= \frac{1}{8}(1-x)(1+y)(1+z)(-2-x+y+z) & w_{18} &= \frac{1}{4}\left(1-y^2\right)(1+x)(1+z)\\
w_9 &= \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)(1-y)(1-z) & w_{19} &= \frac{1}{4}\left(1-x^2\right)(1+y)(1+z)\\
w_{10} &= \frac{1}{4}\left(1-y^2\right)(1+x)(1-z) & w_{20} &= \frac{1}{4}\left(1-y^2\right)(1-x)(1+z)
\end{aligned}
$$

Formule à 27 nœuds

$$w_1 = \frac{1}{8} x(x-1)\, y(y-1)\, z(z-1)$$
$$w_2 = \frac{1}{8} x(x+1)\, y(y-1)\, z(z-1)$$
$$w_3 = \frac{1}{8} x(x+1)\, y(y+1)\, z(z-1)$$
$$w_4 = \frac{1}{8} x(x-1)\, y(y+1)\, z(z-1)$$
$$w_5 = \frac{1}{8} x(x+1)\, y(y-1)\, z(z+1)$$
$$w_6 = \frac{1}{8} x(x+1)\, y(y-1)\, z(z+1)$$
$$w_7 = \frac{1}{8} x(x+1)\, y(y+1)\, z(z+1)$$
$$w_8 = \frac{1}{8} x(x-1)\, y(y+1)\, z(z+1)$$
$$w_9 = \frac{1}{4} \left(1-x^2\right) y(y-1)\, z(z-1)$$
$$w_{10} = \frac{1}{4} x(x+1) \left(1-y^2\right) z(z-1)$$
$$w_{11} = \frac{1}{4} \left(1-x^2\right) y(y+1)\, z(z-1)$$
$$w_{12} = \frac{1}{4} x(x-1) \left(1-y^2\right) z(z-1)$$
$$w_{13} = \frac{1}{4} x(x-1)\, y(y-1) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{14} = \frac{1}{4} x(x+1)\, y(y-1) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{15} = \frac{1}{4} x(x+1)\, y(y+1) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{16} = \frac{1}{4} x(x-1)\, y(y+1) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{17} = \frac{1}{4} \left(1-x^2\right) y(y-1)\, z(z+1)$$
$$w_{18} = \frac{1}{4} x(x+1) \left(1-y^2\right) z(z+1)$$
$$w_{19} = \frac{1}{4} \left(1-x^2\right) y(y+1)\, z(z+1)$$
$$w_{20} = \frac{1}{4} x(x-1) \left(1-y^2\right) z(z+1)$$
$$w_{21} = \frac{1}{2} \left(1-x^2\right) \left(1-y^2\right) z(z-1)$$
$$w_{22} = \frac{1}{2} \left(1-x^2\right) y(y-1) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{23} = \frac{1}{2} x(x+1) \left(1-y^2\right) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{24} = \frac{1}{2} \left(1-x^2\right) y(y+1) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{25} = \frac{1}{2} x(x-1) \left(1-y^2\right) \left(1-z^2\right)$$
$$w_{26} = \frac{1}{2} \left(1-x^2\right) \left(1-y^2\right) z(z+1)$$
$$w_{27} = \left(1-x^2\right) \left(1-y^2\right) \left(1-z^2\right)$$

Formule de quadrature de Gauss à 2 points dans chaque direction (ordre 3) (FPG8)

Point	x	y	z	**Poids**
1	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1.
2	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1.
3	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1.
4	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$+\sqrt{3}/3$	1.
5	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1.
6	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1.
7	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1.
8	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1.

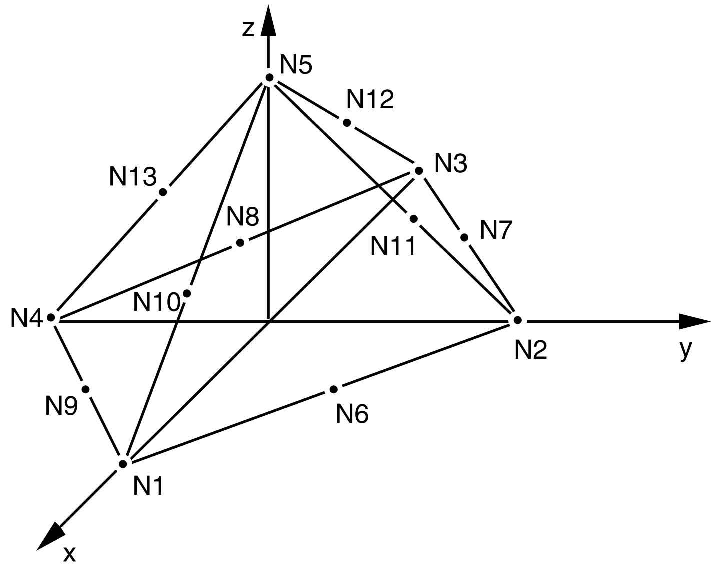
Formule de quadrature de Gauss à 3 points dans chaque direction (ordre 5) : (FPG27)

Point	x	y	z	Poids
1	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	c_1^3
2	$-\alpha$	$-\alpha$	0.	$c_1^2\ c_2$
3	$-\alpha$	$-\alpha$	α	c_1^3
4	$-\alpha$	0.	$-\alpha$	$c_1^2\ c_2$
5	$-\alpha$	0.	0.	$c_1\ c_2^2$
6	$-\alpha$	0.	α	$c_1^2\ c_2$
7	$-\alpha$	α	$-\alpha$	c_1^3
8	$-\alpha$	α	0.	$c_1^2\ c_2$
9	$-\alpha$	α	α	c_1^3
10	0.	$-\alpha$	$-\alpha$	$c_1^2\ c_2$
11	0.	$-\alpha$	0.	$c_1\ c_2^2$
12	0.	$-\alpha$	α	$c_1^2\ c_2$
13	0.	0.	$-\alpha$	$c_1\ c_2^2$
14	0.	0.	0.	c_2^3
15	0.	0.	α	$c_1\ c_2^2$
16	0.	α	$-\alpha$	$c_1^2\ c_2$
17	0.	α	0.	$c_1\ c_2^2$
18	0.	α	α	$c_1^2\ c_2$
19	α	$-\alpha$	$-\alpha$	c_1^3
20	α	$-\alpha$	0.	$c_1^2\ c_2$
21	α	$-\alpha$	α	c_1^3
22	α	0.	$-\alpha$	$c_1^2\ c_2$
23	α	0.	0.	$c_1\ c_2^2$
24	α	0.	α	$c_1^2\ c_2$
25	α	α	$-\alpha$	c_1^3
26	α	α	0.	$c_1^2\ c_2$
27	α	α	α	c_1^3

avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad c_1 = \frac{5}{9} \qquad c_2 = \frac{8}{9}$$

4.4 Pyramides : `ELREFE PY5`, `P13`



La base carrée est constituée par le quadrangle N_1 N_2 N_3 N_4 et N_5 est le sommet de la pyramide.

	x	**y**	**z**
N_1	1.	0.	0.
N_2	0.	1.	0.
N_3	–1.	0.	0.
N_4	0.	–1.	0.
N_5	0.	0.	1.
N_6	0.5	0.5	0.
N_7	–0.5	0.5	0.
N_8	–0.5	–0.5	0.
N_9	0.5	–0.5	0.
N_{10}	0.5	0.	0.5
N_{11}	0.	0.5	0.5
N_{12}	–0.5	0.	0.5
N_{13}	0.	–0.5	0.5

Fonctions de forme :

Formule à 5 nœuds

$$w_1 = \frac{(-x+y+z-1)\,(-x-y+z-1)}{4\,(1-z)}$$

$$w_2 = \frac{(-x-y+z-1)\,(x-y+z-1)}{4\,(1-z)}$$

$$w_3 = \frac{(x+y+z-1)\,(x-y+z-1)}{4\,(1-z)}$$

$$w_4 = \frac{(x+y+z-1)\,(-x+y+z-1)}{4\,(1-z)}$$

$$w_5 = 1-z$$

Formule à 13 nœuds

$$w_1 = \frac{(-x+y+z-1)\,(-x-y+z-1)\,(x-0.5)}{2\,(1-z)}$$

$$w_2 = \frac{(-x-y+z-1)\,(x-y+z-1)\,(y-0.5)}{2\,(1-z)}$$

$$w_3 = \frac{(x-y+z-1)\,(x+y+z-1)\,(-x-0.5)}{2\,(1-z)}$$

$$w_4 = \frac{(x+y+z-1)\,(-x+y+z-1)\,(-y-0.5)}{2\,(1-z)}$$

$$w_5 = 2z\,(z-0.5)$$

$$w_6 = -\frac{(-x+y+z-1)\,(-x-y+z-1)\,(x-y+z-1)}{2\,(1-z)}$$

$$w_7 = -\frac{(-x-y+z-1)\,(x-y+z-1)\,(x+y+z-1)}{2\,(1-z)}$$

$$w_8 = -\frac{(x-y+z-1)\,(x+y+z-1)\,(-x+y+z-1)}{2\,(1-z)}$$

$$w_9 = -\frac{(x+y+z-1)\,(-x+y+z-1)\,(-x-y+z-1)}{2\,(1-z)}$$

$$w_{10} = \frac{z\left(-x+y+z-1\right)\left(-x-y+z-1\right)}{1-z}$$

$$w_{11} = \frac{z\left(-x-y+z-1\right)\left(x-y+z-1\right)}{1-z}$$

$$w_{12} = \frac{z\left(x-y+z-1\right)\left(x+y+z-1\right)}{1-z}$$

$$w_{13} = \frac{z\left(x+y+z-1\right)\left(-x+y+z-1\right)}{1-z}$$

Formule d'intégration numérique à 5 points (FPG5) :

Point	**x**	**y**	**z**	**Poids**
1	0.5	0.	h_1	2/15
2	0.	0.5	h_1	2/15
3	–0.5	0.	h_1	2/15
4	0.	–0.5	h_1	2/15
5	0.	0.	h_2	2/15

avec :

h_1 = 0.1531754163448146
h_2 = 0.6372983346207416

Formule d'intégration numérique à 6 points (FPG6) :

Point	**x**	**y**	**z**	**Poids**
1	a	0.	h_1	p_1
2	0.	a	h_1	p_1
3	– a	0.	h_1	p_1
4	0.	– a	h_1	p_1
5	0.	0.	h_2	p_2
6	0.	0.	h_3	p_3

avec :

p_1 = 0.1024890634400000
p_2 = 0.1100000000000000
p_3 = 0.1467104129066667

a = 0.5702963741068025
h_1 = 0.1666666666666666
h_2 = 0.08063183038464675
h_3 = 0.6098484849057127

Formule d'intégration numérique à 27 points (FPG27) :

Point	x	y	z	Poids
1	0.	0.	1/2	a_1
2	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b_6
3	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b_6
4	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b_6
5	$\frac{b_1}{2}(1-z)$	$-\frac{b_1}{2}(1-z)$	1/2	b_6
6	0.	0.	$\frac{1-b_1}{2}$	b_6
7	0.	0.	$\frac{1+b_1}{2}$	b_6
8	$c_1(1-z)$	0.	$(1-c_1)/2$	c_8
9	0.	$c_1(1-z)$	$(1-c_1)/2$	c_8
10	$-c_1(1-z)$	0.	$(1-c_1)/2$	c_8
11	0.	$-c_1(1-z)$	$(1-c_1)/2$	c_8
12	$c_1(1-z)$	0.	$(1+c_1)/2$	c_8
13	0.	$c_1(1-z)$	$(1+c_1)/2$	c_8
14	$-c_1(1-z)$	0.	$(1+c_1)/2$	c_8
15	0.	$-c_1(1-z)$	$(1+c_1)/2$	c_8
16	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1-d_1)/2$	d_{12}
17	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1-d_1)/2$	d_{12}
18	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1-d_1)/2$	d_{12}
19	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1-d_1)/2$	d_{12}
20	$d_1(1-z)$	0.	1/2	d_{12}
21	0.	$d_1(1-z)$	1/2	d_{12}
22	$-d_1(1-z)$	0.	1/2	d_{12}
23	0.	$-d_1(1-z)$	1/2	d_{12}
24	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1+d_1)/2$	d_{12}
25	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1+d_1)/2$	d_{12}
26	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1+d_1)/2$	d_{12}
27	$\frac{d_1}{2}(1-z)$	$-\frac{d_1}{2}(1-z)$	$(1+d_1)/2$	d_{12}

avec :

a_1 = 0.788073483
b_6 = 0.499369002
b_1 = 0.848418011
c_8 = 0.478508449
c_1 = 0.652816472
d_{12} = 0.032303742
d_1 = 1.106412899

5 Bibliographie

[1] DHATT G., TOUZOT G. : Une présentation de la méthode des éléments finis 2ème édition. Editeur : MALOINE S.A. Année 984