

Manuel de Référence
Fascicule R7.02 : Mécanique de la rupture
Document : R7.02.11

Loi de comportement de Barenblatt

Résumé :

La loi de comportement de Barenblatt est une loi d'interface permettant de modéliser l'ouverture d'une fissure en tenant compte d'une force de cohésion entre les lèvres de celle-ci. Une énergie de surface permet de prendre en compte le coût énergétique de l'ouverture de la fissure. Cette dernière sera représentée par des éléments finis de type joint. Une énergie de pénalisation permettra de prendre en compte la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure.

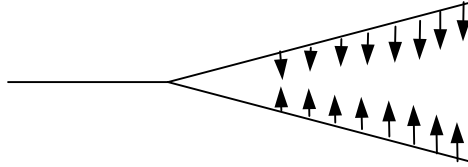
Nous présentons ici la forme de l'énergie et de la contrainte qui en dérive en fonction du saut de déplacement ainsi que les variables internes. L'existence d'instabilité nécessite un pilotage par la prédiction élastique dont on détaillera les éléments spécifiques à cette loi.

Table des matières

1	Loi de comportement Barenblatt.....	3
1.1	Energie de surface.....	3
1.2	Contrainte dans l'élément de joint	5
1.3	Variables internes	6
2	Pilotage	7
3	Mots clés	8
4	Bibliographie	8

1 Loi de comportement Barenblatt

Pour lever le problème de contraintes infinies sur le front de fissure Barenblatt introduit des forces de cohésion entre les lèvres de la fissure. Ce sont des forces attractives s'exerçant entre les particules de part et d'autre du plan de séparation de la fissure.



On considère que l'ouverture de la fissure coûte une énergie définie sur la surface de discontinuité de la fissure. On l'appelle énergie de surface. Le problème est résolu en minimisant la somme de cette énergie et de l'énergie élastique.

La surface de discontinuité est modélisée par un élément fini de joint (doc [R3.06.09]) seul élément du code supportant cette loi de comportement.

La condition de non interpénétration des lèvres de la fissure est prise en compte par une méthode de pénalisation.

Pour conserver un traitement local des conditions d'ouverture, on a effectué une régularisation de l'énergie de surface pour des sauts proches de zéro. Pour ce faire on a introduit un petit paramètre (mot clé : SAUT_C) définissant l'ampleur de ces « petits » sauts.

1.1 Energie de surface

Sur la surface de discontinuité (Γ) modélisée par des éléments de type joint (QUAD4) (voir doc [R3.06.09]) on définit une énergie de surface E_s dépendant de la norme du saut de déplacement.

$$E_s = \int_{\Gamma} K(\|[\mathbf{U}]\|) d\Gamma + I_{R^+}([u]_n)$$

Le premier terme correspond à l'énergie nécessaire pour l'ouverture de la fissure, le second est une énergie de pénalisation qui va permettre de prendre en compte la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure.

On définit la fonction :
$$I_{R^+}([u]_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } [u]_n < 0 \\ 0 & \text{si } [u]_n \geq 0 \end{cases}$$

Autrement dit, vouloir imposer l'interpénétration des lèvres va coûter une énergie infinie. Dans la pratique, on approchera cette fonction par une fonction continue qui tend rapidement vers l'infini quand le saut normal devient négatif :

$$I_{R^+}([u]_n) \sim \int_{\Gamma} \frac{1}{2} C \langle [u]_n \rangle_-^2 d\Gamma \text{ avec } C \text{ coefficient de pénalisation et } \langle . \rangle_- \text{ partie négative.}$$

Remarque :

C est ajustée à partir du saut critique $SAUT_C$ entré par l'utilisateur, c'est le même coefficient que celui pris pour la régularisation : cf. pente de la contrainte en 0^+ .

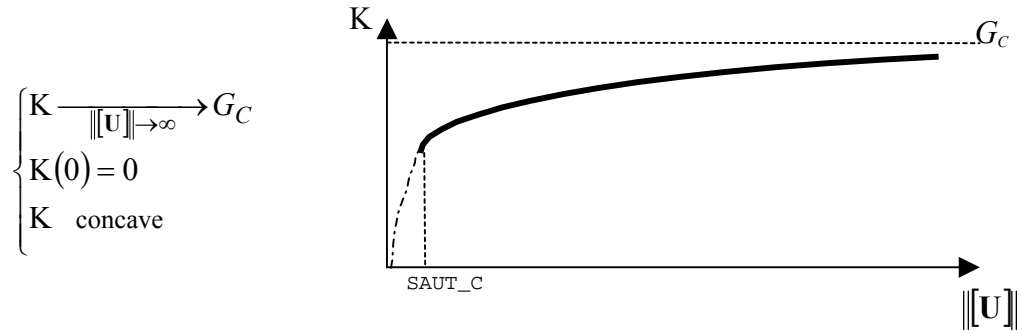
De plus on pose $\| [U] \| = \sqrt{\langle [u]_n \rangle_+^2 + [u]_t^2}$ de façon à ce qu'un saut normal négatif n'influence pas l'énergie de surface et ne fasse pas évoluer le seuil du critère.

On définit l'énergie de surface en fonction des cas de figure :

- Si $\| [U] \| \in [\text{SAUT_C}, +\infty[$ et $[u]_n \geq 0$:

$$E_S = \int_{\Gamma} K(\| [U] \|) d\Gamma \quad \text{avec} \quad K(\| [U] \|) = G_C \left(1 - e^{-\frac{\sigma_c}{G_C} \| [U] \|} \right)$$

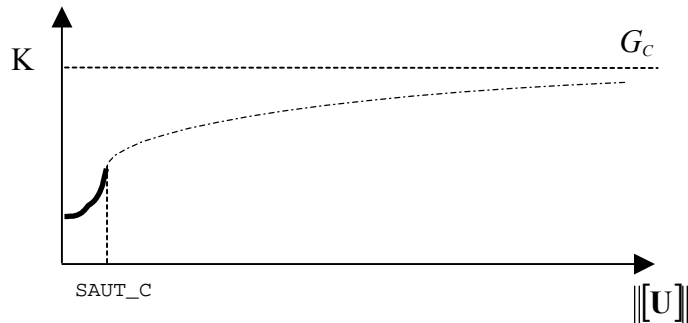
G_C est le taux de restitution d'énergie critique et σ_c la contrainte critique à l'origine.
K ayant les propriétés suivantes (choix effectué à partir de l'article [F&M]) :



- Si $\| [U] \| \in [0, \text{SAUT_C}[$ et $[u]_n \geq 0$:

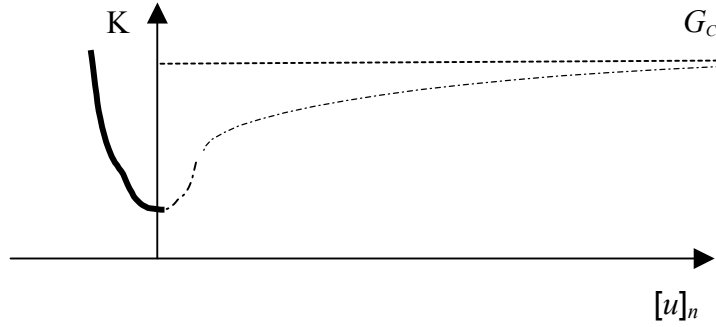
$$E_S = \int_{\Gamma} K(\| [U] \|) d\Gamma \quad \text{avec} \quad K \text{ continue et dérivable en } \text{SAUT_C} \text{ et tel que } K'(0) = 0 :$$

$$K(\| [U] \|) = \frac{1}{2} C \| [U] \|^2 + \tilde{C} \quad \text{avec } \tilde{C} \text{ constante}$$



- Si $[u]_n < 0$ et $[u]_t = 0$:

Energie de pénalisation : $E_S = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} C \langle [u]_n \rangle_-^2 d\Gamma$



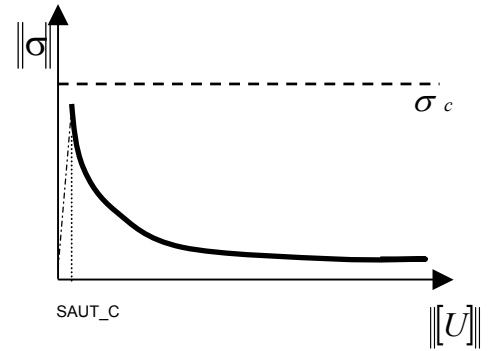
1.2 Contrainte dans l'élément de joint

La contrainte dans l'élément de joint dérive de l'énergie de surface. Elle est donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial [u]_n} \\ \frac{\partial K}{\partial [u]_t} \end{pmatrix}$$

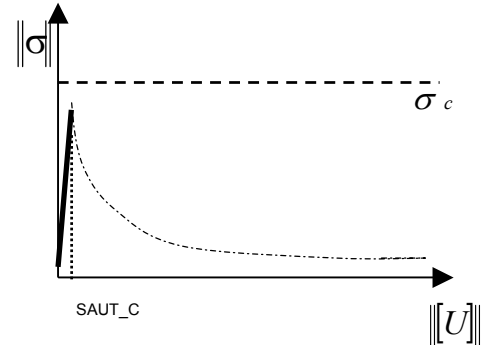
- Si $\|[U]\| \in [\text{SAUT_C}, +\infty[$ et $[u]_n \geq 0$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_c \frac{[u]_n}{\|[u]\|} e^{-\frac{\sigma_c}{G_c} \|[u]\|} \\ \sigma_c \frac{[u]_t}{\|[u]\|} e^{-\frac{\sigma_c}{G_c} \|[u]\|} \end{pmatrix}$$



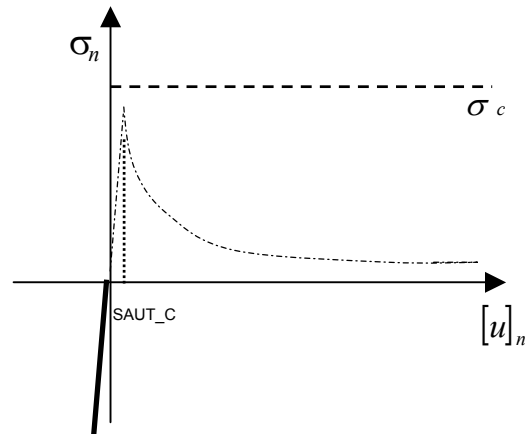
- Si $\|[U]\| \in [0, \text{SAUT_C}[$ et $[u]_n \geq 0$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_c [u]_n e^{-\frac{\sigma_c \text{SAUT_C}}{G_c}} \\ \sigma_c [u]_t e^{-\frac{\sigma_c \text{SAUT_C}}{G_c}} \end{pmatrix}$$



- Si $[u]_n < 0$ et $[u]_t = 0$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} C[u]_n \\ 0 \end{pmatrix}$$



Remarque :

La régularisation de l'énergie en zéro permet de définir une contrainte dans l'élément pour un saut nul. Physiquement cela revient à dire que dès que la contrainte dans l'élément de joint va augmenter, un petit saut va apparaître. Le comportement de type Barenblatt ne s'effectuera que lorsque la norme du saut dans l'élément dépassera SAUT_C , avant le joint se comporte comme un ressort.

1.3 Variables internes

La loi de comportement Barenblatt à été implémenté avec trois variables internes.

La première v_1 est utilisée pour le pilotage et pour les décharges, c'est un seuil qui correspond au plus grand saut (en norme) jamais atteint (voir : [§2] Pilotage) .

La seconde v_2 permet de savoir si l'élément est en régime élastique ($\|[U]\| < \text{SAUT_C}$) ou adoucissant ($\|[U]\| > \text{SAUT_C}$).

La troisième correspond au pourcentage d'énergie de surface dissipée au cours du chargement :

$$v_3 = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_c}{G_c} v_1\right)$$

2 Pilotage

Le pilotage recommandé avec la loi de comportement Barenblatt est de type `PRED_ELAS` [R5.03.80], il permet de suivre des solutions dissipatives présentant des instabilités.

La mise en œuvre de cette technique de pilotage requiert la résolution de l'équation locale suivante :

$$F_{el} \equiv \left\| [U^0] + \eta [U^1] \right\| - (\alpha^n + SAUT_C) = \Delta\tau (l_c + \alpha^n + SAUT_C) \quad \text{éq 2-1}$$

avec η inconnue que l'on obtient par la résolution d'une équation du second degré, l_c longueur caractéristique du modèle, et α^n seuil qui va permettre de garder en mémoire la norme du saut à l'instant précédent (stocké dans la variable interne No 1 de la loi de comportement Barenblatt).

Le seuil évolue comme suit :

Si $\left\| [U]^{n+1} \right\| \leq \alpha + SAUT_C$ **alors**

$$\alpha^+ = \alpha -$$

Sinon

$$\alpha^+ = \left\| [U]^{n+1} \right\| - SAUT_C$$

Le pilotage impose en définitive que le saut de déplacement continue à s'accroître quelque part le long de la fissure potentielle.

La mise en œuvre de ce pilotage permet de suivre des branches d'équilibre instables de la courbe globale force / déplacements imposés (voir [Figure 2-a]).

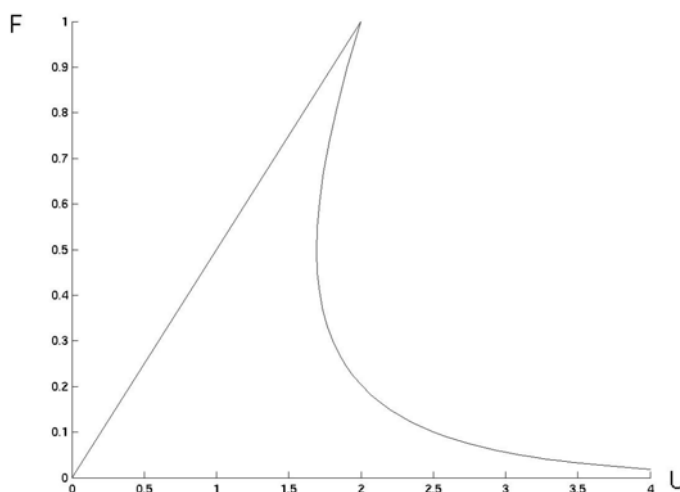


Figure 2-a : Courbe globale Force / Déplacements imposés avec branche instable

3 Mots clés

La loi de comportement Barenblatt est utilisée dans `STAT_NON_LINE` et `DYNA_NON_LINE` avec le mot clé `BARENBLATT`. Cette loi de comportement est utilisable sur des éléments de joint avec la modélisation `PLAN_FISSURE` et `AXIS_FISSURE`.

Deux paramètres sont à saisir dans `DEFI_MATERIAU` :

`SIGM_C` : contrainte critique
`SAUT_C` : petit paramètre de régularisation

Commandes

<code>STAT_NON_LINE</code>	<code>COMP_INCR</code>	<code>RELATION</code>	<code>BARENBLATT</code>
<code>DYNA_NON_LINE</code>	<code>COMP_INCR</code>	<code>RELATION</code>	<code>BARENBLATT</code>
<code>AFFE_MODELE</code>	<code>MODELISATION</code>	<code>PLAN_FISSURE</code> <code>AXIS_FISSURE</code>	
<code>DEFI_MATERIAU</code>	<code>RUPT_FRAG</code>	<code>SIGM_C</code> <code>SAUT_C</code>	

Cette loi de comportement a été validée par le cas test SSNP118 (voir doc [V6.03.118]).

4 Bibliographie

- [1] M. CHARLOTTE, J.J. MARIGO , G. FRANCFORT , L. TRUSKINOVSKY : “Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : Comparisons of Griffith and Barenblatt surface energy models”, Symposium on continuous damage and fracture.
- [2] J. LAVERNE, E. LORENTZ, J.J. MARIGO : “Un modèle de rupture avec énergie de Barenblatt : considérations théoriques et implantations numériques. 16^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nice 1-5 septembre 2003.