

Manuel de Référence**Fascicule R7.02 : Mécanique de la rupture****Document : R7.02.10**

Analyse simplifiée de nocivité de défaut par la méthode K-bêta

Résumé :

La méthode d'analyse présentée (méthode K-bêta) est appliquée à l'analyse de nocivité d'un défaut situé sous le revêtement des cuves REP. Elle est codifiée dans le RSE-M et a pour but d'évaluer les facteurs d'intensité des contraintes corrigés plastiquement pour le revêtement (en première pointe du défaut) et pour le métal de base ou du joint soudé (en seconde pointe du défaut).

Pour ce faire, on calcule les facteurs d'intensité de contraintes élastiques aux deux pointes du défaut, à l'aide des contraintes aux nœuds issues de la résolution mécanique et des contraintes résiduelles données par l'utilisateur. Les rapports des ténacités critiques sur les facteurs d'intensité de contraintes obtenus déterminent les facteurs de marges.

Les aspects théoriques de la méthode K-bêta et de sa mise en œuvre informatique font les objets des paragraphes suivants.

Cette méthode correspond à l'approche Rupt1D dans la nomenclature du projet EDF Epicure.

Table des matières

1 Aspects théoriques de la méthode K-bêta.....	3
1.1 Validité de la méthode $K\beta$	3
1.2 Etape n°1 : Calcul des facteurs d'intensité de contraintes élastiques d'un défaut bande dans une plaque de dimensions infinies	4
1.2.1 Changement de repère	5
1.2.2 Méthode de calcul	8
1.3 Etape n°2 : Corrections géométriques pour un Défaut Sous Revêtement elliptique	9
1.3.1 Correction par les facteurs de bord	10
1.3.2 Correction par les facteurs d'ellipticité.....	10
1.3.3 Facteurs d'intensité de contraintes d'un DSR elliptique.....	11
1.4 Etape n°3 : Correction plastique dite "correction β "	11
1.4.1 Formulation de la correction β	11
1.4.2 Correction plastique au fur et à mesure de l'histoire du chargement.....	11

1 Aspects théoriques de la méthode K-bêta

1.1 Validité de la méthode K β

La méthode proposée s'applique à un défaut sous revêtement situé en partie courante d'un réservoir en acier ferritique revêtu par de l'acier inoxydable austénitique soumis soit :

- à un transitoire thermique appliqué en surface interne éventuellement combiné à un chargement de pression limité
- à un chargement de pression seule.

La méthode β n'est valide que pour des défauts sous revêtement dont la pointe, côté revêtement, pénètre légèrement dans le revêtement. C'est pourquoi pour le calcul, à la taille initiale du défaut considéré **prof_def**, on ajoute la pénétration dans le revêtement **|deca|**. La [Figure 1.1-a] précise la différence entre le défaut initial (dimensions rentrées dans **POST_K_BETA**) et le défaut considéré dans le calcul (défaut tenant compte de la pénétration dans le revêtement) par la méthode β .

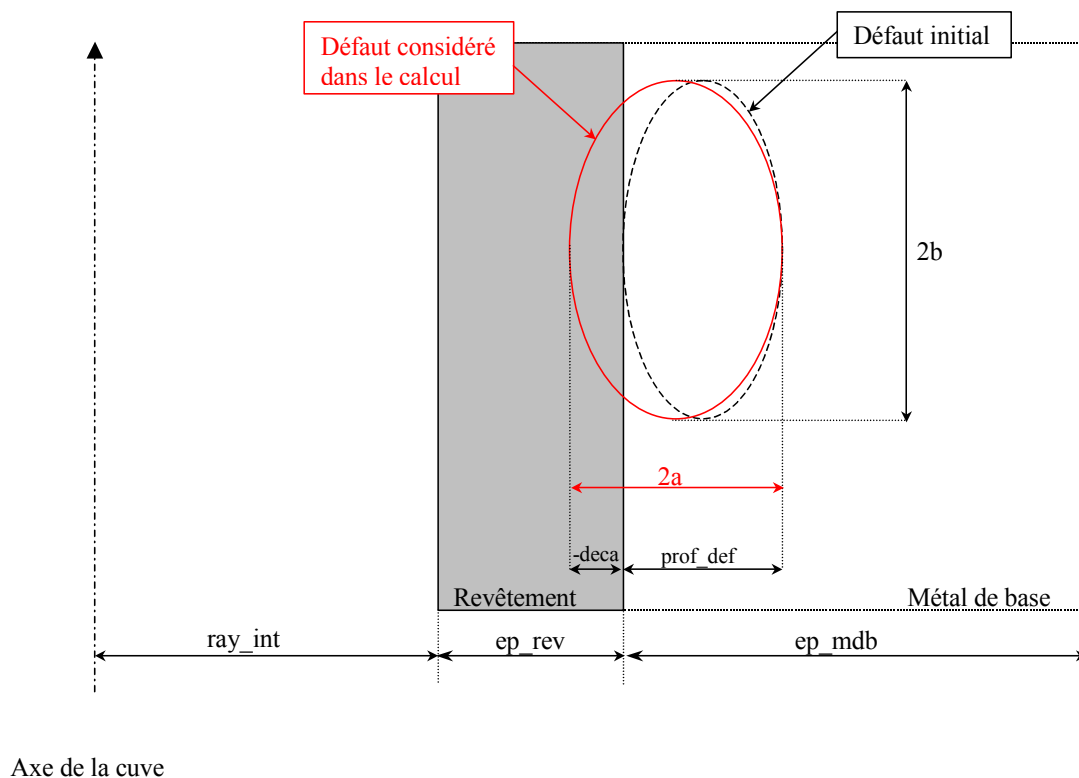


Figure 1.1-a : Schéma du défaut sous revêtement considéré

Conditions de validité de la méthode :

- défaut pénétrant dans le revêtement,
- $\frac{|deca|}{ep_rev} \leq 0,2$ et $\frac{2a}{ep_rev} \leq 3$ et $\frac{2a}{(ep_rev + ep_mdb)} \leq \frac{1}{10}$.

Par convention dans la commande **POST_K_BETA** on choisit $deca \leq 0$. La valeur par défaut choisie est $deca = -2 \cdot 10^{-4}$.

1.2 Etape n°1 : Calcul des facteurs d'intensité de contraintes élastiques d'un défaut bande dans une plaque de dimensions infinies

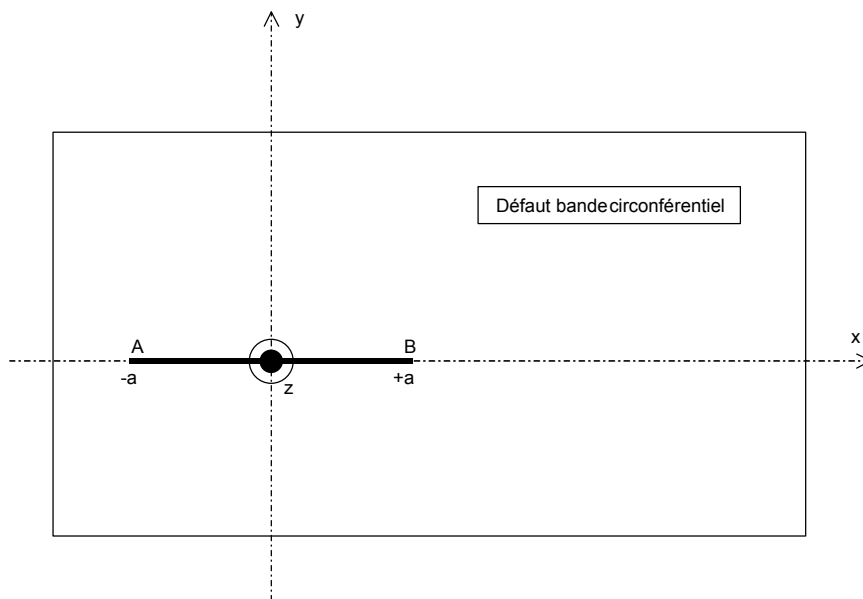
Les facteurs d'intensité de contraintes **élastiques** d'un défaut **bande** dans une plaque de **dimensions infinies** sont donnés par les relations suivantes :

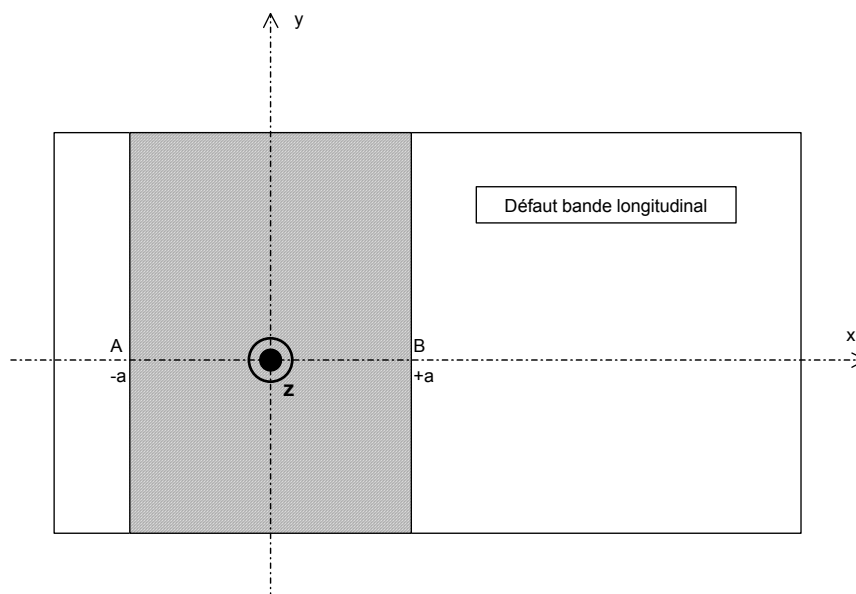
$$K_{\beta 01} : \begin{cases} K_{IA\infty} = \int_{-a}^{+a} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \\ K_{IB\infty} = \int_{-a}^{+a} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \end{cases}$$

où $2a$ est la largeur de bande (profondeur du défaut), A et B en sont les deux extrémités (respectivement en $-a$ et $+a$).

La contrainte $\sigma(x)$ est la contrainte utile normale au plan de la fissure (contrainte élastique ajoutée de la contrainte résiduelle).

Les configurations "défaut circonférentiel" et "défaut longitudinal" sont définies par les deux croquis ci-après.





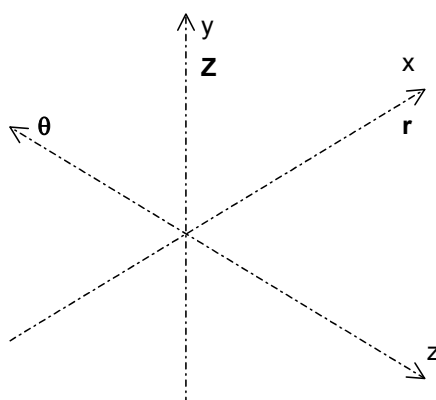
Pour le défaut bande circonférentiel, on prend $\sigma(x) = \sigma_{yy}(x)$

Pour le défaut bande longitudinal, on prend $\sigma(x) = \sigma_{zz}(x)$

1.2.1 Changement de repère

1) Changement de base

- **Cas 1 :** passage de la base cartésienne locale (dans le plan de coupe du modèle axisymétrique) à la base cylindrique



On a : $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r$ $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ $\mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\theta$

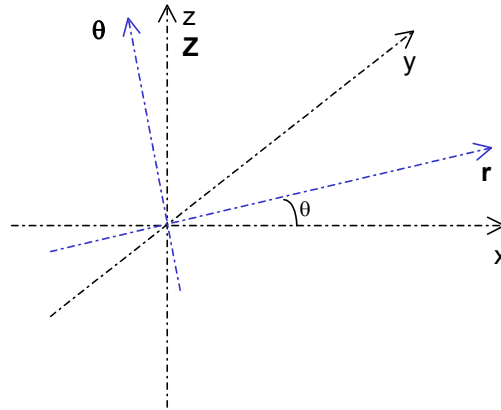
Le changement de base pour le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rZ} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta Z} \\ \sigma_{rZ} & \sigma_{\theta Z} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} \\ \sigma_{ZZ} = \sigma_{yy} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \sigma_{r\theta} = -\sigma_{xz} \\ \sigma_{rZ} = \sigma_{xy} \\ \sigma_{\theta Z} = -\sigma_{yz} \end{cases}$$

- **Cas 2** : passage de la base cartésienne globale (modèle 3D) à la base cylindrique



On a :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_z \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Le changement de base pour le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rZ} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta Z} \\ \sigma_{rZ} & \sigma_{\theta Z} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \cos^2 \theta \sigma_{xx} + 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} + \sin^2 \theta \sigma_{yy} \\ \sigma_{r\theta} = -\sin \theta \cos \theta \sigma_{xx} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{xy} + \sin \theta \cos \theta \sigma_{yy} \\ \sigma_{rZ} = \cos \theta \sigma_{xz} + \sin \theta \sigma_{yz} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sin^2 \theta \sigma_{xx} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} + \cos^2 \theta \sigma_{yy} \\ \sigma_{\theta Z} = -\sin \theta \sigma_{xz} + \cos \theta \sigma_{yz} \\ \sigma_{ZZ} = \sigma_{zz} \end{cases}$$

- **Synthèse** : composantes utilisées pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes

Défaut circonférentiel : σ_{zz} dans la base cylindrique soit

σ_{yy} avec un modèle axisymétrique

σ_{zz} avec un modèle 3D

Défaut longitudinal : $\sigma_{\theta\theta}$ dans la base cylindrique soit

σ_{zz} avec un modèle axisymétrique

$\sin^2 \theta \sigma_{xx} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{xy} + \cos^2 \theta \sigma_{yy}$ avec un modèle 3D

2) Translation de l'origine

L'origine du repère doit être translatée radialement pour coïncider avec le point milieu de la bande :

$$r \Leftrightarrow r - r_0 \text{ avec } r_0 = (\text{ray_int} + \text{ep_rev} + \text{deca}) + a$$

Avec : **ray_int** : rayon interne de la cuve

ep-rev : épaisseur du revêtement

|deca| : pénétration du défaut dans le revêtement

a : demi longueur du défaut considéré pour le calcul

Toutes ces grandeurs sont schématisées [Figure 1.1-a].

1.2.2 Méthode de calcul

Les intégrales donnant $K_{IA\infty}$ et $K_{IB\infty}$ sont calculées par morceaux : la décomposition provient d'une subdivision de l'intervalle $[-a/2 ; +a/2]$ en N sous-intervalles élémentaires sur lesquels la contrainte utile $\sigma(x)$ est linéarisée :

$$\sigma(x) = \alpha_i x + \beta_i \text{ pour } x \in I_i = [a_i ; a_{i+1}] \subset [-a/2 ; +a/2]$$

La réunion des N sous-intervalles I_i pour $1 \leq i \leq N$ reconstitue la bande $[-a ; +a]$.
Les contributions du sous-intervalle $I_i = [a_i ; a_{i+1}]$ au calcul des FIC sont données par :

$$\mathbf{K\beta02} : \begin{cases} K_{IA\infty}^i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \\ K_{IB\infty}^i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \end{cases}$$

Ces intégrales peuvent être calculées analytiquement. On obtient finalement les relations **Kβ03-a** :

$$\begin{cases} K_{IA\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \left(-\frac{a}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{2} - a\right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + \beta_i \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) \right]_{a_i}^{a_{i+1}} \\ K_{IB\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \left(\frac{a}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{2} + a\right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + \beta_i \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) \right]_{a_i}^{a_{i+1}} \end{cases}$$

N.B.

Il existe des formules équivalentes aux relations ci-dessus, établies après les changements de variables.

$$\begin{cases} \gamma_i = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{a_i}{a}\right) \\ \gamma_{i+1} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{a_{i+1}}{a}\right) \end{cases}$$

Les FIC sont alors donnés par les nouvelles expressions **Kβ03-b** :

$$\begin{cases} K_{IA\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times \sum_{i=1}^N \left[\left(\beta_i - \frac{a\alpha_i}{2} \right) (\gamma_{i+1} - \gamma_i) + (\beta_i - a\alpha_i) (\cos \gamma_{i+1} - \cos \gamma_i) + \frac{a\alpha_i}{4} (\sin 2\gamma_{i+1} - \sin 2\gamma_i) \right] \\ K_{IB\infty} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \times \sum_{i=1}^N \left[\left(\beta_i + \frac{a\alpha_i}{2} \right) (\gamma_{i+1} - \gamma_i) - (\beta_i + a\alpha_i) (\cos \gamma_{i+1} - \cos \gamma_i) - \frac{a\alpha_i}{4} (\sin 2\gamma_{i+1} - \sin 2\gamma_i) \right] \end{cases}$$

Remarque :

En pratique, le calcul de $K_{IA\infty}$ et $K_{IB\infty}$ s'effectue sur le segment d'appui du défaut postulé. Sur ce segment, les pointes A (côté revêtement) et B (côté métal de base ou joint soudé) de la fissure ne coïncident pas nécessairement avec des nœuds du maillage.

Une première étape consiste donc à positionner A et B sur le chemin d'appui radial partant de la peau externe et se terminant en peau externe. Ce positionnement tient compte du décalage du défaut par rapport à la localisation de référence d'un DSR, et aussi de la profondeur du défaut.

Une translation de l'origine est ensuite effectuée, la nouvelle origine étant située au milieu du segment [A,B] (cf. paragraphe précédent concernant le changement de repère).

Les N sous-intervalles sur lesquels est décomposé le calcul des FIC sont définis par la succession [A,NO₁], [NO₁,NO₂], ..., [NO_{N-2},NO_{N-1}], [NO_{N-1},B]. Les nœuds du maillage en déterminent les bornes. Les interpolations linéaires de la contrainte utile $\sigma(x)$ sont donc réalisées sur ces sous-intervalles ; pour le premier et le dernier, on utilise respectivement les interpolations sur [NO₀,NO₁] et [NO_{N-1},NO_N], qui ne serviront donc au calcul des FIC que sur une partie de leur domaine de définition (NO₀ est le prédécesseur immédiat de A sur le chemin radial, NO_N est le successeur immédiat de B).

Les formules **Kβ03-a** ou **Kβ03-b** sont ensuite appliquées pour le calcul de $K_{IA\infty}$ et $K_{IB\infty}$.

Il est important de noter que ce calcul utilise **les contraintes aux nœuds du maillage**, à partir desquelles les interpolations linéaires par morceaux sont déterminées.

1.3 Etape n°2 : Corrections géométriques pour un Défaut Sous Revêtement elliptique

Les facteurs d'intensité de contraintes $K_{IA\infty}$ et $K_{IB\infty}$ déterminés au terme de l'étape n°1 concernent un défaut bande dans une plaque de dimensions infinies.

Le défaut postulé est un Défaut Sous Revêtement de profil elliptique. Les facteurs d'intensité de contraintes déterminés pour ce type de géométrie sont obtenus par application de corrections géométriques sur $K_{IA\infty}$ et $K_{IB\infty}$.

La [Figure1.1-a] permet de définir la géométrie du DSR considéré pour le calcul.

Certaines conventions sont fixées :

- La profondeur 2a d'un DSR longitudinal ou circonférentiel correspond à sa dimension radiale, i.e. suivant la direction portée par \mathbf{e}_r .
- La longueur 2b d'un DSR longitudinal correspond à sa dimension axiale, i.e. suivant la direction portée par \mathbf{e}_z .
La présence de DSR d'orientation longitudinale est postulée dans le métal de base. La [Figure 1.1-a] représente donc précisément cette configuration de défaut.
- La longueur 2b d'un DSR circonférentiel correspond à sa dimension orthoradiale, i.e. suivant la direction portée par \mathbf{e}_θ .
La présence de DSR d'orientation circonférentielle est postulée dans le joint soudé. Par rapport à la [Figure 1.1-a], cette configuration de défaut serait obtenue en effectuant une rotation de 90° du front de fissure autour du petit axe de l'ellipse.

1.3.1 Correction par les facteurs de bord

Cette première correction tient compte du fait que le défaut est situé dans un milieu non infini. La localisation du DSR définie par la [Figure 1.1-a] implique des corrections en pointes de fissure côté revêtement et côté métal de base.

On définit préalablement la variable d'espace réduite $z = a/(a + (ep_rev + deca))$, où ep_rev est l'épaisseur du revêtement et $deca$ est la pénétration du DSR dans le revêtement (voir [Figure 1.1-a]).

Pointe A côté revêtement : formule Kβ04

$$F_{bA} = 0,998742 + 0,142801 z - 1,133379 z^2 + 5,491256 z^3 - 8,981896 z^4 + 5,765252 z^5$$

Pointe B côté métal de base (ou joint soudé) : formules Kβ05

$$F_{bB} = \begin{cases} 1 - 0,012328 z + 0,395205 z^2 - 0,527964 z^3 + 0,432714 z^4 & \text{si } 0 \leq z \leq 0,92 \\ -414,20286 + 1336,75998 z - 1436,11970 z^2 + 515,14949 z^3 & \text{si } 0,92 < z \leq 1 \end{cases}$$

1.3.2 Correction par les facteurs d'ellipticité

Cette seconde correction tient compte du fait que le défaut présente un profil elliptique. Elle doit être appliquée aux estimations déterminées pour un défaut bande.

Deux cas sont distingués, suivant la prépondérance de l'une ou l'autre des deux dimensions du profil elliptique.

Premier cas : $a \leq b$ Profondeur du défaut \leq Longueur

Kβ06 : $f_A = f_B = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,464 \left(\frac{a}{b}\right)^{1,65}}}$

Second cas : $b \leq a$ Longueur du défaut \leq Profondeur

Kβ07 : $f_A = f_B = \frac{b}{a} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 1,464 \left(\frac{b}{a}\right)^{1,65}}}$

1.3.3 Facteurs d'intensité de contraintes d'un DSR elliptique

Les facteurs d'intensité de contraintes d'un Défaut Sous Revêtement elliptique, obtenus par correction des FIC d'un défaut bande dans une plaque de dimensions infinies, sont donnés par les relations

Pointe A côté revêtement :

$$\mathbf{K\beta08-a} : K_{IA} = f_A \times F_{bA} \times K_{IA\infty}$$

$$\mathbf{Pointe B côté métal de base (ou joint soudé) : K\beta08-b} : K_{IB} = f_B \times F_{bB} \times K_{IB\infty}$$

1.4 Etape n°3 : Correction plastique dite "correction β "

1.4.1 Formulation de la correction β

Les facteurs d'intensité de contraintes déterminés par les relations **K β 08-a** et **K β 08-b** sont ceux d'un DSR elliptique, sous l'hypothèse d'un comportement élastique des matériaux.

La correction β , spécifique aux DSR collés à l'interface, permet de tenir compte de la plastification aux deux pointes de la fissure côté revêtement (pointe A) et côté métal de base ou joint soudé (pointe B).

Les facteurs correctifs sont définis par les relations suivantes :

$$\mathbf{K\beta09} : \begin{cases} \beta_A = 1 + 0,3 \times \tanh\left(\frac{36 r_{yA}}{ep_rev}\right) \\ \beta_B = 1 + 0,5 \times \tanh\left(\frac{36 r_{yA}}{ep_rev}\right) \end{cases} \quad \text{où} \quad r_{yA} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_{IA}}{\sigma_{yA}} \right)^2$$

ep_rev est l'épaisseur du revêtement, σ_{yA} est la limite élastique du revêtement à la température de la pointe A.

D'où les FIC corrigés aux deux pointes de la fissure :

$$\mathbf{K\beta10} : \begin{cases} K_{\beta A} = \beta_A \times K_{IA} \\ K_{\beta B} = \beta_B \times K_{IB} \end{cases}$$

1.4.2 Correction plastique au fur et à mesure de l'histoire du chargement

La correction plastique est calculée suivant les formules **K β 09** et **K β 10** ci-dessus pour une phase de charge considérée isolément dans l'histoire du chargement.

Pour évaluer la correction plastique au fur et à mesure de l'histoire du chargement, on doit retenir à un instant donné la correction maximale obtenue sur toutes les phases de charge précédentes.

Principe

A chaque nouvelle phase de charge, on réévalue une correction plastique

$$\mathbf{K\beta11} : \Delta K = K_{\beta} - K_I = (\beta - 1) \times K_I$$

(même calcul aux deux pointes A et B de la fissure, d'où l'omission des indices). Si cette nouvelle correction plastique est supérieure à la correction maximale ΔK_{\max} obtenue jusqu'alors, on met à jour ΔK_{\max} . La correction finalement appliquée s'écrit

$$\mathbf{K\beta12} : K_{CP} = K_I + \Delta K_{\max}$$

En phase de décharge, la correction plastique appliquée est l'ajout du ΔK_{\max} obtenu sur toutes les phases de charge précédentes :

- pas de plastification en phase de décharge,
- la correction correspond au résidu plastifié des phases de charge précédentes.

Algorithmique

On initialise $\Delta K_{\max} = 0$

On initialise K_{I_last} à une valeur arbitraire élevée

- au premier instant on sera en phase de décharge par comparaison à K_{I_last}
- pas de plastification au premier instant

Boucle sur les instants de l'histoire du chargement

Si $K_I(t_n) \leq K_{I_last}$ alors (phase de décharge)

$$K_{CP}(t_n) = K_I(t_n) + \Delta K_{\max}$$

Sinon (phase de charge)

Si $\beta(t_n) \times K_I(t_n) > K_I(t_n) + \Delta K_{\max}$ alors

$$K_{CP}(t_n) = \beta(t_n) \times K_I(t_n)$$

$$\Delta K_{\max} = K_{CP}(t_n) - K_I(t_n)$$

Sinon

$$K_{CP}(t_n) = K_I(t_n) + \Delta K_{\max}$$

Fin Si

Fin Si

$$K_{I_last} = K_I(t_n)$$

Fin Boucle

La même algorithmique décrite ci-dessus est mise en œuvre pour les corrections plastiques des FIC aux deux pointes A et B de la fissure au fur et à mesure de l'histoire du chargement.