

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R5.04 : Modélisations non locales**  
**Document : R5.04.02**

# **Modélisation non locale à gradient de déformation**

---

**Résumé**

Ce document présente un modèle de délocalisation des lois de comportement par régularisation de la déformation. Il introduit une variable nodale supplémentaire : la déformation régularisée, liée à la déformation locale par une équation de régularisation de type moindre carré avec pénalisation du gradient que l'on résout simultanément avec l'équation d'équilibre classique. Les déformations régularisées sont utilisées pour le calcul de l'évolution des variables internes (et pas pour le calcul des contraintes !). Cette méthode permet d'éviter certains problèmes liés au traitement numérique des problèmes locaux comme la dépendance au maillage.

## 1 Nature de la formulation

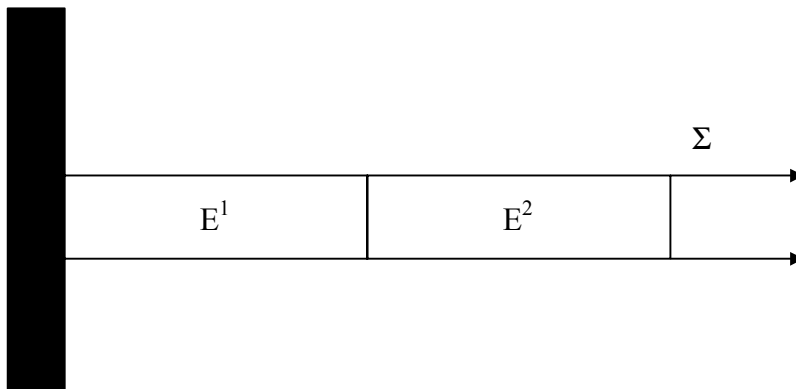
En présence d'endommagement (adoucissement), les lois de comportement locales conduisent à un problème mal posé qui se traduit numériquement par une localisation des déformations dans une bande d'épaisseur une maille : à la limite, on casse sans dissiper d'énergie.

Il existe plusieurs extensions aux modèles locaux qui permettent de pallier ce problème de localisation (relaxation de l'énergie potentielle, enrichissement de la cinématique, théories à gradient, modèles non locaux). Le présent document traite d'un modèle non local à gradient de déformations, modélisation \*\_GRAD\_EPSI, dérivant du modèle à gradient de déformation équivalente proposé par Peerlings et al. (1995). On introduit des interactions entre le point matériel et son voisinage spatial en régularisant les déformations grâce à un opérateur de délocalisation. Les déformations régularisées sont alors utilisées pour évaluer l'évolution de la variable interne.

Il est à noter cependant que les contraintes sont calculées à partir des déformations locales car l'utilisation des déformations régularisées dans le calcul des contraintes reviendrait à « trop régulariser » le problème, ce qui remettrait en cause l'existence même de solutions. On s'en convainc aisément grâce à l'exemple suivant :

Considérons un barreau composé de 2 matériaux différents qui ont des modules d'Young différents. On exerce sur ce barreau une traction simple. Les 2 éléments étant montés en série, la contrainte est égale dans les deux éléments :

$$\sigma = E^1 \varepsilon^1 = E^2 \varepsilon^2 = \Sigma$$



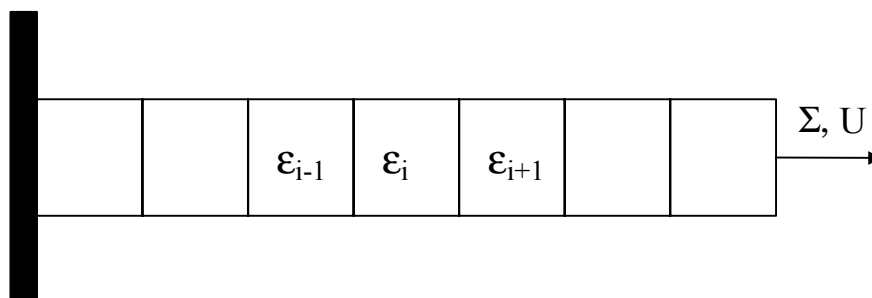
A l'interface entre les deux éléments, la discontinuité de module d'Young impose donc une discontinuité de la déformation. Considérons à présent non plus la déformation locale mais une déformation délocalisée. Les opérateurs de délocalisation classiques ont pour effet de rendre continue la déformation dans la structure, ce qui engendre alors obligatoirement une discontinuité de contrainte à l'interface à cause de la différence de module d'Young, et ceci va à l'encontre de l'équation d'équilibre.

La régularisation des déformations nous amène à introduire une longueur caractéristique définie par l'opérateur DEF1\_MATERIAU sous le mot-clé facteur NON LOCAL qui conditionne la largeur des bandes de localisation. Les échelles ne sont donc plus définies par le traitement numérique du problème mais par un paramètre matériau.

## 2 Limites des modèles locaux

On se propose dans un premier temps d'illustrer le phénomène de localisation dans le cas simple d'un barreau soumis à une traction uniaxiale.

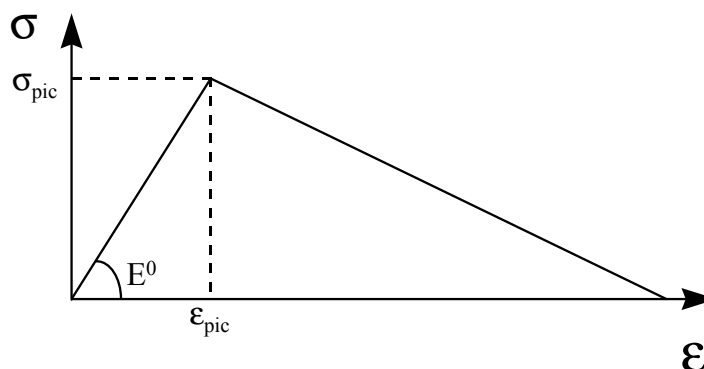
On considère donc un assemblage d'éléments identiques montés en série soumis à une traction comme représenté sur la [Figure 2-a].



**Figure 2-a : Assemblage d'éléments identiques montés en série soumis à un essai de traction**

Chaque élément obéit à la même loi de comportement de type élastique endommageable avec adoucissement [Figure 2-b]. L'état du matériau est décrit par deux variables que sont la déformation  $\varepsilon$  et l'endommagement caractérisé par la variable scalaire  $d$ . Cette variable vaut 0 lorsque le matériau est sain et croît jusqu'à 1 lorsqu'il est complètement endommagé.

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des équations régissant un tel comportement du matériau. Précisons simplement que ces équations permettent de décrire complètement le comportement du matériau. Elles nous donnent en effet accès aux contraintes et à l'endommagement en fonction du taux de déformation, voir par exemple [R5.03.18].



**Figure 2-b : Loi de comportement du matériau en traction simple uniaxiale**

Les éléments du barreau étudié sont montés en série, ce qui implique, à cause de l'équation d'équilibre de la structure, l'égalité de la contrainte dans tous les éléments :

$$\sigma_i = \Sigma$$

On peut dès lors étudier la réponse globale de l'assemblage à un essai de traction simple. Cette réponse se décompose en deux phases. Dans une première phase, le comportement de tous les éléments est élastique et l'endommagement reste nul. La réponse de la structure existe donc et est unique. La déformation est identique pour tous les éléments et vaut :

$$\varepsilon_i = \frac{\Sigma}{E^0}$$

Cette phase perdure tant que le pic de contrainte n'est pas atteint. Les micro-hétérogénéités du matériau impliquent de légères fluctuations du domaine d'élasticité entre les différents éléments, ce qui va entraîner l'endommagement d'un élément de l'assemblage avant les autres. La deuxième phase commence lorsqu'un des éléments que l'on note  $A$  s'endommage. La contrainte dans l'ensemble de la structure a atteint son maximum. En poursuivant la traction, la contrainte supportée par la structure va diminuer. L'élément  $A$  ayant passé le pic, il se trouve dans la phase adoucissante du comportement du matériau, ce qui signifie qu'il va continuer à s'endommager lors de la traction. Les autres éléments n'ont pas atteint le seuil critique, ils vont donc simplement subir une décharge élastique lors de la décroissance de la contrainte. Cette phase se termine lorsque l'élément  $A$  est complètement endommagé. Finalement, l'endommagement ainsi que la déformation se sont donc concentrés dans un seul élément.

On comprend alors aisément les conséquences numériques de la localisation. Le phénomène décrit précédemment sur un échantillon simple va se produire quelle que soit la structure maillée par éléments finis. Pour des raisons de stabilité, la solution localisée tend à être sélectionnée. L'endommagement et la déformation vont se concentrer dans une bande d'épaisseur un élément et tout raffinement du maillage va alors modifier la réponse globale de la structure. On comprend alors bien qu'il est impossible de décrire l'échelle des bandes de localisation, la longueur de la bande endommagée provenant du maillage et non d'un principe physique. De plus, on obtient un résultat physiquement inadmissible d'un point de vue énergétique. En effet, l'énergie dissipée lors de l'endommagement va dépendre du raffinement du maillage, et on peut même imaginer la rupture totale d'une structure sans dépense d'énergie si l'on considère un maillage extrêmement fin.

## 3 Formulation à déformations régularisées

### 3.1 Principe

On considère l'état du matériau défini localement par la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et des variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$ . La donnée du potentiel d'énergie libre  $\phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$  permet de définir la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ .

De manière général, la loi de comportement est donnée par l'expression de la contrainte et la loi d'évolution des variables internes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

Le principe de la méthode de délocalisation des déformations est d'utiliser les déformations régularisées dans la loi d'évolution des variables internes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = g(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

On comprend ainsi la généralité de la méthode qui n'impose pas de revenir sur l'intégration de la loi de comportement. C'est en effet la même que pour le modèle local mais en remplaçant  $\boldsymbol{\varepsilon}$  par  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Il faut néanmoins bien distinguer le calcul des variables internes, qui fait intervenir des déformations régularisées, de celui des contraintes, qui ne fait intervenir que les déformations locales.

### 3.2 Choix de l'opérateur de délocalisation

Le choix de l'opérateur de régularisation est purement arbitraire et ne s'appuie sur aucun raisonnement physique. On a cependant intérêt à choisir un opérateur qui s'intègre facilement et directement dans STAT\_NON\_LINE par la méthode des éléments finis. Ainsi, l'utilisation d'une formulation intégrale, où le couplage entre les éléments finis au niveau de l'intégration des lois de comportement a pour effet d'agrandir considérablement la largeur de bande de la matrice tangente et d'augmenter ainsi le nombre d'opérations à effectuer, n'est pas judicieuse. L'opérateur de régularisation retenu, proposé par Peerlings et al. (1995), emploie une délocalisation par moindres carrés avec pénalisation du gradient :

$$R(\boldsymbol{\varepsilon}) = \min_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2} (L_c \nabla \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 d\Omega$$

Le terme en gradient introduit l'interaction entre le point matériel et son voisinage et permet de limiter la forte concentration de gradient de déformations. Minimiser une telle intégrale revient à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - L_c^2 \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

On voit apparaître un intérêt majeur du choix de cet opérateur de régularisation. L'équation différentielle peut s'intégrer classiquement par la méthode des éléments finis, et ce sans introduire de nouvelles non linéarités. Il suffit pour cela d'introduire de nouvelles variables nodales représentant les déformations généralisées.

Il existe en outre une matrice tangente de largeur de bande raisonnable (par rapport à une formulation intégrale) mais il est à noter que la matrice tangente n'est pas symétrique, comme on le verra plus loin en explicitant la matrice tangente.

### 3.3 Formulation variationnelle

Dans le modèle, deux équations gouvernent le processus de déformation, d'une part l'équation d'équilibre classique et d'autre part l'équation différentielle caractérisant la régularisation des déformations. La formulation intégrale de notre problème est la suivante :

$$\forall v \in V^{ad} \quad \int_{\Omega} (\nabla v)^C : \sigma d\Omega = \int_{\Gamma} v \cdot T d\Gamma + \int_{\Omega} f dV$$

$V^{ad}$  : espace des déplacements admissibles

$T$  : forces imposées sur le bord  $\Gamma$

$$\forall e \in [H^1(\Omega)]^6 \quad \int_{\Omega} (e \bar{\varepsilon} + \nabla e \cdot L_c^2 \nabla \bar{\varepsilon}) d\Omega = \int_{\Omega} e \varepsilon d\Omega$$

Les conditions limites pour les déformations généralisées sont les conditions naturelles découlant de l'équation de régularisation . Elles sont de type Neumann :

$$\nabla \bar{\varepsilon} \cdot n = 0$$

On n'impose en effet aucune condition particulière sur le bord dans l'équation de régularisation.

## 4 Discrétisation

### 4.1 Equations discrétisées

L'équation d'équilibre discrétisée entre les forces extérieures et intérieures est de la forme classique (cf [R5.03.01]) :

$$F_{int} + D^T \lambda = F_{ext}$$

$$\text{avec } F_{int} = \int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega \text{ et } F_{ext} = \int_{\Gamma} N^T T d\Gamma$$

( $D^T$  : cf  $B^T$  de [R5.03.01])

où  $N$  sont les fonctions de formes associées au champ de déplacement et  $B$  les dérivées des fonctions de formes.

L'équation différentielle sur les déformations régularisées se discrétise de la même façon :

$$K^{\varepsilon\varepsilon} \bar{\varepsilon} = F^{\varepsilon}$$

$$\text{avec } K^{\varepsilon\varepsilon} = \int_{\Omega} (\tilde{N}^T \tilde{N} + L_c^2 \tilde{B}^T \tilde{B}) d\Omega \text{ et } F^{\varepsilon} = \int_{\Omega} \tilde{N}^T \varepsilon d\Omega$$

où  $\tilde{N}$  sont les fonctions de formes associées au champ de déformations généralisées et  $\tilde{B}$  les dérivées des fonctions de formes. Il est à noter ici que les fonctions de formes associées aux déformations généralisées sont différentes des fonctions de formes associées aux déplacements.

Les résidus nodaux associées à ces deux équations sont les suivantes :

$$F^u = F_{\text{int}} + D^T \lambda - F_{\text{ext}}$$

$$F^{\bar{\varepsilon}} = K^{\varepsilon\varepsilon} \bar{\varepsilon} - F^{\varepsilon}$$

La matrice tangente associée à la résolution de ce système par la méthode de Newton est la suivante :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^u}{\partial u} & \frac{\partial F^u}{\partial \bar{\varepsilon}} \\ \frac{\partial F^{\bar{\varepsilon}}}{\partial u} & \frac{\partial F^{\bar{\varepsilon}}}{\partial \bar{\varepsilon}} \end{pmatrix}$$

Les différents blocs de la matrice tangente sont les suivants :

$$\left. \frac{\partial F^u}{\partial u} \right|_{i-1} = \int_{\Omega} B^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B d\Omega$$

$$\left. \frac{\partial F^u}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{i-1} = \int_{\Omega} B^T \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} \tilde{N} d\Omega$$

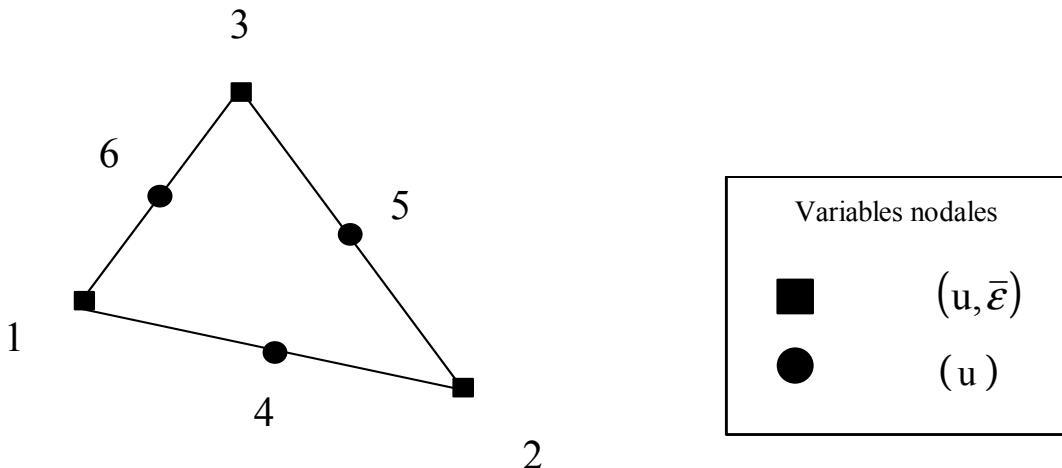
$$\left. \frac{\partial F^{\bar{\varepsilon}}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right|_{i-1} = \int_{\Omega} (\tilde{N}^T \tilde{N} + L_c^2 \tilde{B}^T \tilde{B}) d\Omega$$

$$\left. \frac{\partial F^{\bar{\varepsilon}}}{\partial u} \right|_{i-1} = \int_{\Omega} -\tilde{N}^T B d\Omega$$

Il est à noter que la matrice tangente est non-symétrique.

## 4.2 Choix des éléments finis

L'introduction de nouvelles variables nodales impose d'utiliser de nouveaux éléments compatibles avec la nouvelle formulation. On se trouve en présence de deux inconnues nodales : les déplacements et les déformations régularisées. La déformation étant la dérivée spatiale d'un déplacement, si l'on utilise des fonctions de forme  $P^2$  pour le déplacement, il est préférable d'utiliser des fonctions de forme  $P^1$  pour les déformations régularisées pour des raisons d'homogénéité. Les éléments quadratiques, TRIA6 et QUAD8 pour le 2D, TETRA10, PENTA15 et HEXA20 pour le 3D, ont été développés. Les composantes du déplacement sont affectées à tous les nœuds de l'élément alors que les composantes des déformations régularisées ne sont affectées qu'aux nœuds sommets. Pour plus de clarté, l'élément TRIA6 est représenté ci-dessous :



## 4.3 Modélisations disponibles

Ces différents éléments sont utilisés dans trois types de modélisations :

Calcul 2D en déformations planes : D\_PLAN\_GRAD\_EPSI (cf [U3.13.06])

Calcul 2D en contraintes planes : C\_PLAN\_GRAD\_EPSI (cf [U3.13.06])

Calcul 3D : 3D\_GRAD\_EPSI (cf [U3.14.11])

Le mode axisymétrique n'est pas encore disponible.

## 5 Interface avec les lois de comportement

L'utilisation de cette méthode de délocalisation nécessite le calcul des termes suivants au niveau de la loi de comportement :

$$(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) \Rightarrow \sigma, \alpha, \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}}$$

Les deux derniers termes sont nécessaires seulement pour le calcul de la matrice tangente.

## 6 Bibliographie

- [1] BADEL P. : Contribution à la simulation numérique pour les structures en béton armé. Thèse de doctorat de l'université Paris 6 (2001).
- [2] LORENTZ E. : Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique. Thèse de doctorat de l'université Paris 6 (1999).
- [3] PEERLINGS R.H.J., DE BORST R., BREKELMANS W.A.M., DE VREE J.H.P. : Computational modelling of gradient-enhanced damage for fracture and fatigue problems. Computational Plasticity, Part 1, Pineridge Press, pp.975-986 (1995).
- [4] PEERLINGS R.H.J : Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. PhD Thesis Eindhoven University of Technology , Faculty of Mechanical Engineering (1999).