

**Manuel de Référence**  
**Fascicule R7.02 : Mécanique de la rupture**  
**Document : R7.02.05**

# Calcul des coefficients d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire plane

---

## Résumé :

On présente la méthode de calcul des coefficients d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  et en thermoélasticité linéaire plane. La formulation considère le taux de restitution d'énergie comme une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et utilise les expressions explicites des champs de déplacements singuliers connues en élasticité linéaire plane.

## Mots-clés :

Mécanique de la rupture, coefficient d'intensité de contraintes, thermoélasticité.

---

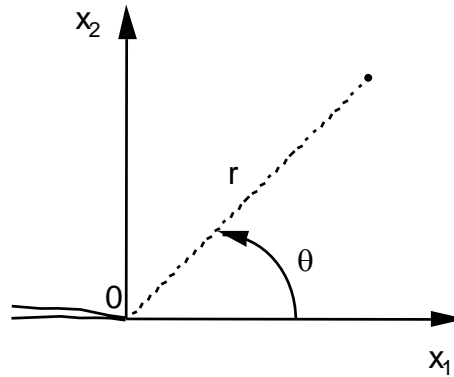
## Table des matières

---

1	Expressions des facteurs d'intensité de contraintes $K_I$ et $K_{II}$ en thermoélasticité linéaire 2D .....	3
1.1	Présentation.....	3
1.2	Formule d'IRWIN et taux de restitution d'énergie G .....	5
1.3	Découplage des modes de rupture I et II .....	6
2	Implantation de $K_I$ , $K_{II}$ en thermoélasticité linéaire 2D dans <i>Aster</i> .....	8
2.1	Types d'éléments et de chargements.....	8
2.2	Environnement nécessaire pour le calcul de $K_I$ , $K_{II}$ .....	8
2.3	Forme bilinéaire symétrique $g(., .)$ .....	8
2.3.1	Terme classique élémentaire .....	8
2.3.2	Terme force volumique.....	11
2.3.3	Terme thermique .....	12
2.3.4	Terme force surfacique .....	12
2.4	Champs de déplacements singuliers et leurs dérivées.....	12
2.5	Post-traitement des résultats de $K_I$ et $K_{II}$ .....	12
3	Bibliographie .....	14

# 1 Expressions des facteurs d'intensité de contraintes $K_I$ et $K_{II}$ en thermoélasticité linéaire 2D

## 1.1 Présentation



Soient les axes de coordonnées cartésiennes  $Ox_1$  dans le prolongement de la fissure et  $Ox_2$  perpendiculaire à la fissure. Le problème est plan. Nous exprimerons les composantes cartésiennes des déplacements et des contraintes en fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

En élasticité linéaire, le système des équations de l'équilibre, sans force volumique, et les conditions aux limites homogènes sur la fissure, les contraintes nulles à l'infini, admettent une solution non triviale

de la forme  $\mathbf{u}_i = \sqrt{r} \mathbf{g}_i(\theta)$ . Les contraintes sont infinies au fond de la fissure comme  $r^{-\frac{1}{2}}$  [bib3].

Pour un problème quelconque en élasticité linéaire plane (déformations planes ou contraintes planes), le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  peut se décomposer en une partie singulière et une partie régulière. La partie singulière, appelée également singularité, est celle explicitée ci-dessus, elle contient les coefficients de contraintes. En élasticité linéaire, les modes de rupture  $I$  et  $II$  sont séparés :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}$$

avec :

$$\begin{cases} u_{S1}^I = \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos\theta) \\ u_{S2}^I = \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (k - \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{S1}^{II} = \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (k + \cos\theta + 2) \\ u_{S2}^{II} = -\frac{1+\nu}{E} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (k + \cos\theta - 2) \end{cases}$$

avec :

$$k = 3 - 4\nu$$

en déformations planes D\_PLAN

$$k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$$

en contraintes planes C\_PLAN

et :

 $E$  module d'YOUNG $\nu$  coefficient de POISSON

La répartition des contraintes singulières au voisinage de la fissure est donnée par les formules :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^S &= K_I \sigma_{11}^I + K_{II} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{12}^S &= K_I \sigma_{12}^I + K_{II} \sigma_{12}^{II} \\ \sigma_{22}^S &= K_I \sigma_{22}^I + K_{II} \sigma_{22}^{II} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^I &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{12}^I &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22}^I &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{11}^{II} &= -\frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{12}^{II} &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{22}^{II} &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$

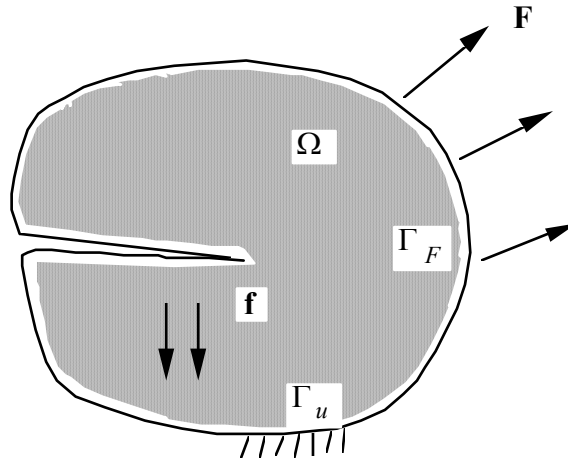
## 1.2 Formule d'IRWIN et taux de restitution d'énergie $G$

En élasticité linéaire plane, les facteurs d'intensité de contraintes sont reliés au taux de restitution d'énergie  $G$  par la formule d'IRWIN :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en déformations planes (DP)}$$

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad \text{en contraintes planes (CP)}$$

La démonstration de ces formules peut être faite à partir de l'expression du taux de restitution d'énergie  $G$  implantée dans le *Code\_Aster* et connue sous le nom de la méthode  $\theta$  [bib5]. Rappelons que  $G$  est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à l'évolution du fond de fissure.



Dans la méthode Lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle, on considère des transformations  $M \rightarrow M + \eta \theta(M)$  du domaine de référence  $\Omega_0$  en un domaine  $\Omega_\eta$  qui correspondent à des propagations de la fissure. A ces familles de configuration de référence ainsi définies  $\Omega_\eta$  correspondent des familles de configurations déformées dont la fissure s'est propagée. L'énergie potentielle définie sur  $\Omega_\eta$  est ramenée sur  $\Omega_0$ .

On considère les forces surfaciques  $\mathbf{F}$  et volumiques  $\mathbf{f}$  appliquées respectivement à  $\Gamma_F$  et  $\Omega_0$ . On note  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$  la densité d'énergie libre,  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement,  $T$  le champ de température et  $\boldsymbol{\theta}$  le champ de vecteurs décrivant la direction du transport en  $\eta = 0$ , alors l'expression générale du taux de restitution d'énergie  $G$  [bib5] est :

$$\begin{aligned}
 G = & \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}] d\Omega && \leftarrow \text{Terme classique} \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial T} (\nabla T \cdot \boldsymbol{\theta}) d\Omega && \leftarrow \text{Terme dû à la thermique} \\
 & + \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}] d\Omega && \leftarrow \text{Terme dû aux forces volumiques } \mathbf{f} \text{ sur } \Omega \\
 & + \int_{\Gamma_F} \left[ (\nabla \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \left( \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] d\Gamma && \leftarrow \text{Terme dû aux forces surfaciques } \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_F \\
 & - \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\theta}) d\Gamma && \leftarrow \text{Terme dû aux déplacements imposés sur } \Gamma_u
 \end{aligned}$$

En élasticité linéaire,  $G$  peut être considéré comme une forme bilinéaire symétrique du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . La densité d'énergie élastique  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$  s'écrit :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

en notant :

$\boldsymbol{\Lambda}$  le tenseur d'élasticité

$B$  la forme bilinéaire symétrique définie par :  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$

et la forme bilinéaire  $g(\cdot, \cdot)$  associée à  $G$  est définie par :

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial B}{\partial \nabla \mathbf{u}} \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial B}{\partial \nabla \mathbf{v}} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) - B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \right] d\Omega \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{f}_u \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} + (\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}] d\Omega
 \end{aligned}$$

en se limitant aux termes classique et dû aux forces volumiques  $\mathbf{f}$ .

On a  $G = g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  si  $\mathbf{u}$  est solution du problème élastique.

## 1.3 Découplage des modes de rupture I et II

Dans la méthode implantée dans le *Code\_Aster*, pour découpler les modes de rupture  $I$  et  $II$  et calculer les coefficients  $K_I$  et  $K_{II}$ , on utilise la forme bilinéaire symétrique  $g(\cdot, \cdot)$  et la décomposition du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  en parties régulière et singulière [bib7].

$$\begin{cases} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) = g(\mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^I) = g(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_S^I) + K_I g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) + K_{II} g(\mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^I) \\ g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^{II}) = g(\mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^{II}) = g(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_S^{II}) + K_I g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^{II}) + K_{II} g(\mathbf{u}_S^{II}, \mathbf{u}_S^{II}) \end{cases}$$

On démontre en thermoélasticité linéaire plane que  $\mathbf{u}_S^I$  et  $\mathbf{u}_S^H$  sont orthogonaux pour le produit scalaire défini par la forme bilinéaire  $g(\cdot, \cdot)$ , que les termes faisant intervenir la partie régulière s'annulent et finalement :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) &= K_I g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) \\ g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^H) &= K_{II} g(\mathbf{u}_S^H, \mathbf{u}_S^H) \end{aligned}$$

De plus, en écrivant le taux de restitution d'énergie sous la forme :

$$G = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^H, \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^H)$$

et comme :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^H) &= g(\mathbf{u}_S^H, \mathbf{u}_S^I) = 0 \\ g(\mathbf{u}^R, \mathbf{u}_S^I) &= g(\mathbf{u}^R, \mathbf{u}_S^H) = 0 \end{aligned}$$

on retrouve la formule d'IRWIN :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = K_I^2 g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) + K_{II}^2 g(\mathbf{u}_S^H, \mathbf{u}_S^H)$$

avec :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) &= g(\mathbf{u}_S^H, \mathbf{u}_S^H) = \frac{1-\nu^2}{E} && \text{en D\_PLAN} \\ g(\mathbf{u}_S^I, \mathbf{u}_S^I) &= g(\mathbf{u}_S^H, \mathbf{u}_S^H) = \frac{1}{E} && \text{en C\_PLAN} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{cases} K_I = \frac{E}{1-\nu^2} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} = \frac{E}{1-\nu^2} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^H) \end{cases} \quad \text{en D\_PLAN}$$

$$\begin{cases} K_I = E g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} = E g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^H) \end{cases} \quad \text{en C\_PLAN}$$

L'implantation du calcul des coefficients d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire plane dans le *Code\_Aster* est réalisée à partir de l'expression du taux de restitution d'énergie  $G$  en élasticité linéaire 2D, écrite sous forme bilinéaire symétrique, en introduisant les expressions connues des déplacements singuliers, et en utilisant la méthode  $\theta$ .

## 2 Implantation de $K_I$ , $K_{II}$ en thermoélasticité linéaire 2D dans Aster

### 2.1 Types d'éléments et de chargements

Pour calculer les coefficients d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  en élasticité linéaire 2D, il faut utiliser l'option `CALC_K_G` de la commande `CALC_G_THETA`. Cette option est disponible pour tout chargement thermo-mécanique s'appliquant sur un modèle de milieu continu bidimensionnel affecté à des triangles à 3 ou 6 nœuds, des quadrangles à 4, 8 ou 9 nœuds, et les segments à 2 ou 3 nœuds. Elle est valable pour une modélisation 'C\_PLAN' ou 'D\_PLAN'.

**Remarque :**

*On ne tient pas compte du terme dû aux déplacements imposés sur  $\Gamma_u$ , il ne faut donc pas imposer de conditions de DIRICHLET sur les lèvres de la fissure.*

### 2.2 Environnement nécessaire pour le calcul de $K_I$ , $K_{II}$

La commande `CALC_G_THETA` permet de récupérer le modèle du problème, les caractéristiques du matériau, le champ de déplacements et le champ  $\theta$ . Pour le calcul des coefficients d'intensité de contraintes, il est nécessaire d'ajouter le mot-clé `FOND_FISS`, qui permet de récupérer un concept de type `fond_fiss` où sont définis le noeud de fond de fissure et la normale à la fissure.

Lorsque que la fissure est disposée le long d'un axe de symétrie, on peut également préciser la symétrie du chargement par le mot-clé `SYME_CHAR`. Par défaut on suppose qu'il n'y a pas de symétrie. Si on affecte la valeur 'SYME' au mot clé `SYME_CHAR`, cela signifie que seul le mode I de rupture agit (ouverture des lèvres de la fissure) et on affecte automatiquement la valeur nulle à  $K_{II}$ . Si on affecte la valeur 'ANTI', alors seul le mode II est actif (glissement d'une lèvre par rapport à l'autre) et  $K_I$  est nul.

Insistons sur la nécessité d'affecter à tous les éléments (y compris ceux de bords) les valeurs du modules d'YOUNG  $E$  et du coefficient de POISSON  $\nu$ , car elles sont utilisées dans le calcul des déplacements singuliers. Ces valeurs doivent être homogènes sur tout le support du champ  $\theta$ .

### 2.3 Forme bilinéaire symétrique $g(\cdot, \cdot)$

**Remarque :**

*La routine `GBILIN` calcule le taux de restitution d'énergie  $G$  sous la forme bilinéaire symétrique  $g(u, v)$  en thermo-élasticité linéaire plane (déformations ou contraintes planes) pour les éléments isoparamétriques 2D.*

#### 2.3.1 Terme classique élémentaire

$$TCLA = \sigma(u) : (\nabla u \nabla \theta) - \psi(\varepsilon(u)) \operatorname{div} \theta$$

La densité d'énergie élastique  $\psi(\varepsilon(u))$  s'écrit en thermo-élasticité linéaire :



en D\_PLAN :

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = & \frac{(1-\nu) E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \\ & + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}^2 - \psi_{th} \end{aligned}$$

en C\_PLAN :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy}^2 - \psi_{th}$$

avec  $\psi_{th}$  = Densité d'énergie due à la thermique :

$$\psi_{th} = 3 K \alpha (T - T_{ref}) \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$$

où :

$$\begin{aligned} 3K &= \frac{E}{1-2\nu} \\ \alpha &= \text{dilatation thermique} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{tenseur de déformations} \\ T_{ref} &= \text{température de référence} \end{aligned}$$

et de façon générale, on peut écrire :

$$2\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = C_1 (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + 2 C_2 \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 4 C_3 \varepsilon_{xy}^2 - 2 \psi_{th}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu \\ C_2 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \\ C_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \end{array} \right. \quad \text{en D\_PLAN} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ C_2 = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ C_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad \text{en C\_PLAN.}$$

Donc, en notant  $\Psi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ , on a  $2\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = S1 - S1TH$  avec :

$$\begin{aligned} S1 &= C_1 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right] + C_2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] \\ &+ C_3 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \\ S1TH &= 3K\alpha \left( (T_u - T_{ref}) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + (T_v - T_{ref}) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) \end{aligned}$$

où  $T_u$  est la température associée au champ de déplacement  $\mathbf{u}$  par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \Lambda (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th})$$

où

$$\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha (T - T_{ref}) \delta_{ij}$$

et  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifient les équations d'équilibre.

De la même façon, le terme  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \nabla \boldsymbol{\theta})$  peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \nabla \boldsymbol{\theta}) = S2 - S2TH$$

avec :

$$\begin{aligned} S2 &= C_1 \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] \\ &+ C_2 \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right] \\ &+ C_3 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Les termes  $\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x}$  deviennent dans la forme bilinéaire symétrique  $\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x}$  et les termes du

type  $\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x}$  deviennent  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$ .

$$\begin{aligned}
 S2TH &= \frac{TH1}{2} 3K\alpha (T_u - T_{réf}) \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right] \\
 &+ \frac{TH1}{2} 3K\alpha (T_v - T_{réf}) \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right] \\
 &\text{où } \begin{cases} TH1 = 1 & \text{en D\_PLAN} \\ TH1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{en C\_PLAN} \end{cases}
 \end{aligned}$$

et finalement le terme classique s'écrit :

$$TCLA = (S2 - S2TH) - \frac{1}{2} (S1 - S1TH) \operatorname{div} \theta$$

### 2.3.2 Terme force volumique

$$TFOR = (\nabla \mathbf{f} \cdot \theta) \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} \theta$$

En toute rigueur, l'expression bilinéaire symétrique de  $TFOR$  s'écrit en  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  :

$$TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{f}_u \cdot \theta) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{f}_v \cdot \theta) \mathbf{u} + (\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \theta]$$

où  $\mathbf{f}_u$  sont les forces volumiques associées au champ de déplacement  $\mathbf{u}$  pour le problème élastique.

mais comme les expressions que nous sommes amenés à calculer sont du type  $TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  et  $TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{u}^S)$ , où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^S$  sont respectivement le champ de déplacement et le champ singulier, et que :

$$\mathbf{f}_{u^S} = \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}^S)) = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On se limite à écrire :

$$TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = CS [(\nabla \mathbf{f}_u \cdot \theta) \mathbf{v} + \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{v} \operatorname{div} \theta] \quad \text{avec } \begin{cases} CS = 0.5 & \mathbf{v} = \mathbf{u}^S \\ CS = 1 & \mathbf{v} = \mathbf{u} \end{cases}$$

Finalement :

$$TFOR(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = CS \left[ v_x \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial f_x}{\partial y} \theta_y + f_x \operatorname{div} \theta \right) + v_y \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial f_y}{\partial y} \theta_y + f_y \operatorname{div} \theta \right) \right]$$

La même remarque est valable pour le terme classique thermique, le terme supplémentaire dû à la thermique et les termes dus aux forces surfaciques.

### 2.3.3 Terme thermique

On fait l'hypothèse que les caractéristiques du matériau  $(E, \nu, \alpha)$  ne dépendent pas de la température.

$$TTHE = -\frac{\partial \psi}{\partial T} (\nabla T \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} 3 K \alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial T}{\partial y} \theta_y \right)$$

### 2.3.4 Terme force surfacique

En 2D, pour les éléments isoparamétriques de bord, on a introduit les chargements de type pression-cisaillement et force répartie de type réel.

Le terme force surfacique s'écrit de la même façon que le terme volumique à partir de :

$$TSUR = (\nabla \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \left( \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{n}} \right).$$

## 2.4 Champs de déplacements singuliers et leurs dérivées

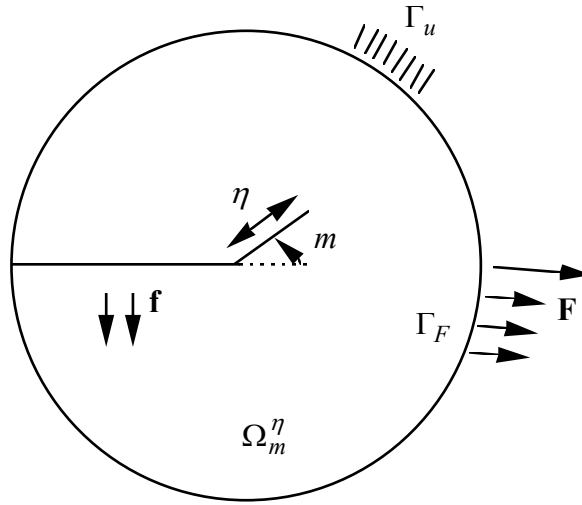
Les champs singuliers  $\mathbf{u}_S^I$  et  $\mathbf{u}_S^{II}$ , associés respectivement aux modes  $I$  et  $II$ , sont connus explicitement ainsi que leurs dérivées. Ils sont écrits en fonction des coordonnées polaires dans le repère lié à la fissure. La connaissance des coordonnées du noeud de fond de fissure et de sa normale permet de les calculer dans le repère global  $0xy$ .

L'introduction successive de ces champs  $\mathbf{u}_S^I$  et  $\mathbf{u}_S^{II}$  permet, comme indiqué dans le [§1], le calcul élémentaire des coefficients d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$ .

## 2.5 Post-traitement des résultats de $K_I$ et $K_{II}$

Connaissant les valeurs des coefficients d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  pour une fissure donnée, les formules de AMESTOY - BUI et DANG-VAN, permettent le calcul de l'angle de propagation de la fissure selon 3 critères ( $K_I$  maximal,  $K_{II}$  et  $G$  maximal) [bib6].

Soit  $\Omega_m^\eta$  un domaine identique à  $\Omega$  sauf que la fissure est prolongée dans la direction d'angle  $m$  d'un segment de droite de longueur  $\eta$ .



$$\Omega_m^o \equiv \Omega$$

Soient  $K_I(\eta, m)$ ,  $K_{II}(\eta, m)$ ,  $G(\eta, m)$  les facteurs d'intensité de contraintes et le taux de restitution d'énergie de  $\Omega_m^\eta$  soumis au même chargement que  $\Omega$ .

On pose :

$$K_I^*(m) = \lim_{\eta \rightarrow 0} K_I(\eta, m)$$

$$K_{II}^*(m) = \lim_{\eta \rightarrow 0} K_{II}(\eta, m)$$

$$G^*(m) = \lim_{\eta \rightarrow 0} G(\eta, m)$$

Les critères cités par AMESTOY - BUI et DANG-VAN [bib6] sont :

- choisir  $m_o$  tel que  $K_I^*(m_o)$  soit maximum,
- choisir  $m_o$  tel que  $K_{II}^*(m_o)$  soit nul,
- choisir  $m_o$  tel que  $G^*(m_o)$  soit maximum.

Ces critères donnent des résultats très voisins [bib8].

Les résultats sont donnés sous forme d'un tableau de 4 coefficients  $K_{11}$ ,  $K_{21}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{22}$  permettant de calculer  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  dans tous les cas de chargement :

$$\begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix}$$

Angle $m$ (°)	$K_{11}$	$K_{21}$	$K_{12}$	$K_{22}$
0	1	0	0	1
10	0,9886	0,0864	— 0,2597	0,9764
20	0,9552	0,1680	— 0,5068	0,9071
30	0,9018	0,2403	— 0,7298	0,7972
40	0,8314	0,2995	— 0,9189	0,6540
50	0,7479	0,3431	— 1,0665	0,4872
60	0,6559	0,3696	— 1,1681	0,3077
70	0,5598	0,3788	— 1,2220	0,1266
80	0,4640	0,3718	— 1,2293	— 0,0453
90	0,3722	0,3507	— 1,1936	— 0,1988

$$K_{11}(-m) = K_{11}(m), K_{21}(-m) = -K_{21}(m), K_{12}(-m) = -K_{12}(m), K_{22}(-m) = K_{22}(m)$$

La recherche de l'angle  $m_o$  dans CALC\_G\_THETA est faite de 10 degrés en 10 degrés. L'angle de propagation n'est calculé et imprimé (dans le fichier MESSAGE) que si INFO vaut 2.

### 3 Bibliographie

- [1] H.D. BUI, J.M. PROIX : "Loi de conservation en thermo-élasticité linéaire" - C.R. Acad.Sc.Paris, t.298, Série II, n° 8, 1984.
- [2] H.D. BUI : "Associated path independent J-Integrals for separating mixed modes" - J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N° 6, pp. 439-448, 1983.
- [3] H.D. BUI : "Mécanique de la rupture fragile" - Masson, 1977.
- [4] P.; DESTUYNDER, M. DJAOUA : "Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, Mathematics Methods in the Applied Sciences" - Vol. 3, pp. 70-87, 1981.
- [5] P. MIALON : "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta" - E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n° 3, 1988, pp. 1-28.
- [6] M. AMESTOY, H.D. BUI, Ky DANG-VAN : "Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire" - C.R. Acad. Sc. Paris, t.289 (24 septembre 1979), Série B-99.
- [7] E. VISSE : "Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en élasticité linéaire plane" - Note interne EDF-DER-MMN, HI-75505D du 05/07/94.
- [8] P.MIALON : "Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure", note interne E.D.F. HI/4740-07 - 1984.